

Osnovni pojmi pri obravnavi periodičnih signalov

Vsebina: Opis periodičnih signalov s periodo, frekvenco in krožno frekvenco. Razlaga pojmov amplituda, faza, harmonični signal. Določanje srednje, efektivne in usmerjene vrednosti periodičnih signalov. Pojmi faktor oblike, temenski faktor.

1) Perioda signala. Času, v katerem se začne funkcija ponavljati pravimo **perioda** in jo označimo z veliko črko T . Za tako funkcijo velja $f(t) = f(t + T)$.

SLIKA: Primer periodičnega signala s periodo T .

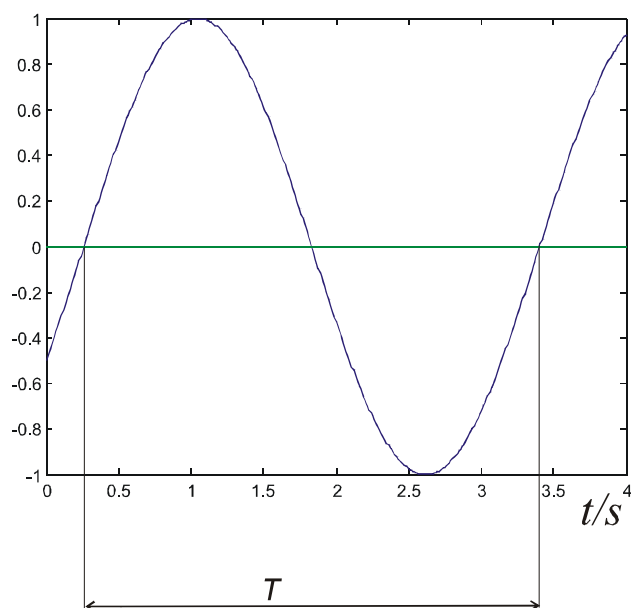
2) Frekvenca periodičnega signala je $f = \frac{1}{T}$, njena enota je s^{-1} , pogosteje uporabimo ekvivalentno enoto Hz (po Heinrichu Hertzu, ki je s svojimi eksperimenti prvi dokazal pravilnost Maxwellovih enačb). Pogosto uporabimo za opis signala tudi **krožna frekvenca** (kotna frekvenca, v primeru vrtenja zanke kotna hitrost) ω , ki je enaka $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

3. Harmonični, sinusni signal lahko zapišemo v obliki $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, kjer je I_m amplituda, ω krožna frekvenca in φ fazni kot.

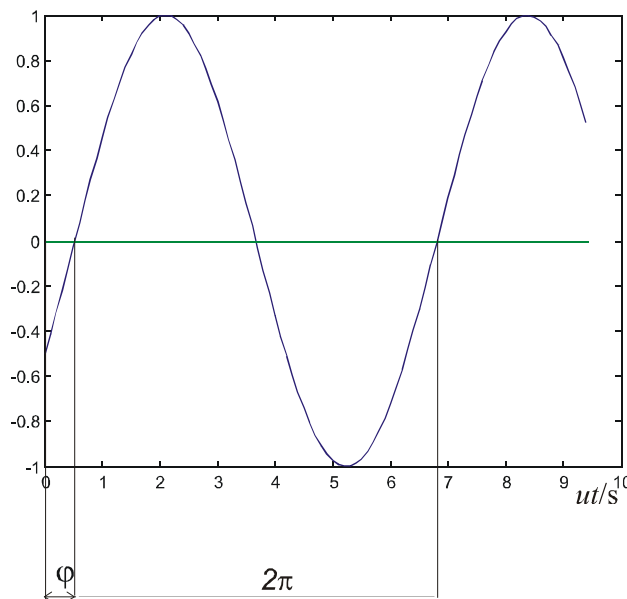
Primer: Prikažimo na grafu signal

$i(t)/A = 1 \cdot \sin(2s^{-1}t - \pi/6)$. Perioda signala je

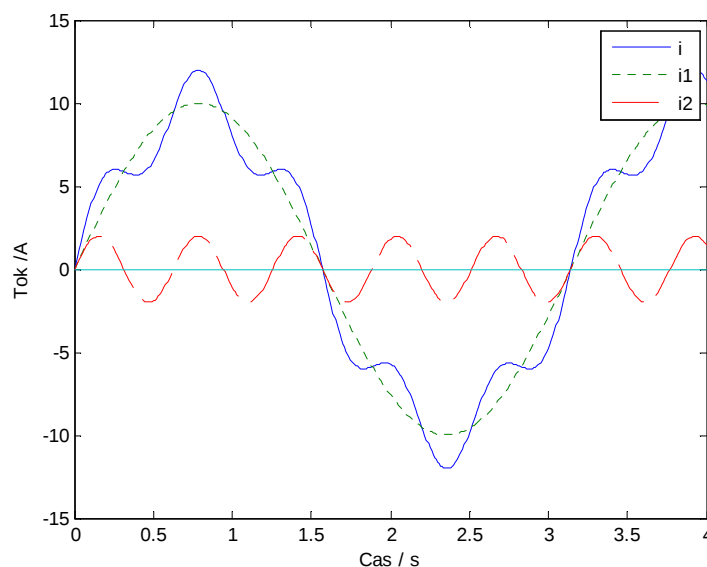
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \text{ s} \cong 3,14 \text{ s}.$$



Pogosto namesto prikaza časa na abscisi uporabimo kot spremenljivko produkt krožne frekvence in časa, kar predstavlja fazni kot. V tem primeru je perioda signala določena pri vrednosti 2π . Prednost tega prikaza je tudi v direktnem odčitavanju faznega kota. V konkretnem primeru je $\varphi = \pi/6 \cong 0,52 \text{ rd}$.



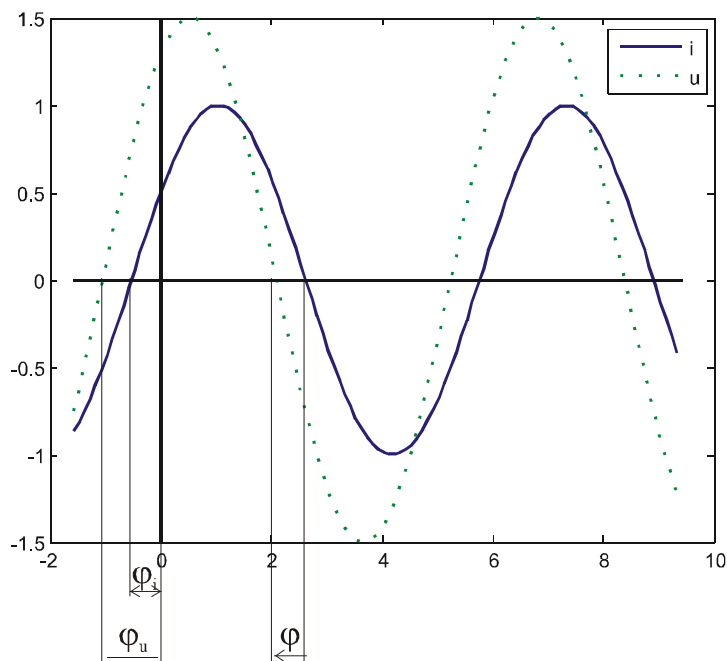
Harmoničen signal je lahko sestavljen iz več sinusnih signalov različnih amplitud in frekvenc. Prikažimo to na primeru harmoničnega signala sestavljenega iz vsote signalov $i_1(t)/A = 10 \sin(2s^{-1}t)$ in $i_2(t)/A = 2 \sin(10s^{-1}t)$:
 $i(t)/A = 10 \sin(2s^{-1}t) + 2 \sin(10s^{-1}t)$.



Zanimivo je, da je mogoče poljuben signal zapisati v obliki vsote sinusnih signalov, kar imenujemo Fourierova vrsta in se pogosto v praksi uporablja za analizo različnih oblik signalov (Fourierova analiza).

4. Fazni kot med dvema signaloma, običajno med napetostjo in tokom.

Vzemimo primer signala toka $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ in napetosti $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Fazni kot med napetostjo in tokom je $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Če je fazni kot pozitiven, rečemo, da napetost prehiteva tok, če pa je negativen, pa, da tok prehiteva napetost. To seveda ne gre jemati dobesedno, saj imata oba signala ob poljubnem času neko vrednost. Morda je najlažje določiti signal, ki prehiteva drugega tako, da pogledamo na grafu, kateri signal doseže maksimalno vrednost pred drugim. Pri tem moramo opazovati najkrajšo časovno razliko.



SLIKA: Primer, ko napetostni signal prehiteva tokovnega. Fazni kot je pozitiven.

5) Srednja ali povprečna vrednost signala

je določena s površino pod krivuljo signala v eni periodi deljena s periodo ali matematično (za npr. tokovni signal)

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad (16.1)$$

Ta zapis pogosto za harmonične signale preuredimo tako, da namesto integracije po času zapišemo integracijo po kotu ωt . V tem primeru je

$$I_{sr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i(t) d(\omega t) \quad (16.2)$$

Slika: Periodični signal in njegova povprečna vrednost, ki je enaka površini signala deljeni s periodo Integral signala v eni periodi je torej enak $I_m T$.

6) Efektivna vrednost (ang. RMS – root mean square)

je določena kot koren iz srednje vrednosti kvadrata signala:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt} \quad (16.3)$$

Efektivna vrednost signala je posebno pomembna tedaj, ko nas zanima povprečna moč ali energija signala, kar pa je v elektrotehniki pogosto.

Slika: Razlika med srednjo in efektivno vrednostjo signala.

Primer: Določimo srednjo in efektivno vrednost tokovnega signala oblike $i = I_m \sin(\omega t)$.

Izračun: $I_{sr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} (-\cos(\omega t)) \Big|_0^{2\pi} = 0$. Srednja vrednost je očitno enaka nič,

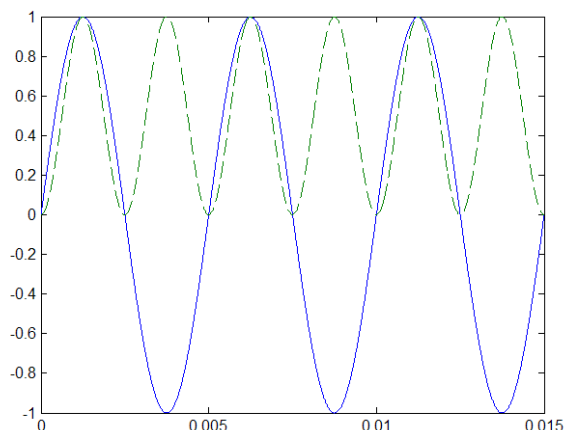
saj je sorazmerna površini pod krivuljo, ki pa je enaka v pozitivni in negativni Y osi. Drugače pa je z efektivno vrednostjo, saj s kvadriranjem postane signal izključno pozitiven. Pri izračunu upoštevamo zvezo $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))$:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m^2 \sin^2(\omega t) d(\omega t)} = I_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{2} - 0 \right)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Dobimo večini znan rezultat, da je efektivna vrednost harmoničnega signala enaka maksimalni vrednosti signala deljeni z $\sqrt{2}$.

SLIKA: Sinusni signal (polna črta) in kvadrat signala (črtkana črta).

Izris in izračun s programom Matlab: `T=5e-3;`
`om=2*pi/T; dt=T/1000; t=0:dt:3*T;`
`plot(t,sin(om.*t),t,(sin(om.*t)).^2,'--')`



7) Usmerjena vrednost (ang. rectified)

je določena kot povprečje usmerjenega signala, torej kot povprečna vrednost absolutne vrednosti signala.

$$I_r = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt$$

8) Faktor oblike (ang. form factor) pogosto uporabimo za karakterizacijo oblike signala. Določen je kot kvocient efektivne in usmerjene vrednosti

$$\text{faktor oblike} = FF = \frac{I_{ef}}{I_r}. \quad (16.4)$$

*** Merjenje efektivne vrednosti signala v praksi**

Cenejši merilni inštrumenti ne merijo prave efektivne vrednosti, pač pa jo določajo iz usmerjene vrednosti ali pa iz maksimalne vrednosti. V primeru signala sinusne oblike je

$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, usmerjena vrednost pa je

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |I_m \sin(\omega t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{\pi} (-\cos(\omega t))_0^{\pi} I_m \frac{2}{\pi} = 0,64 I_m. \text{ Faktor oblike je}$$

torej $FF = \frac{I_{ef}}{I_r} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{I_m 2 / \pi} \cong 1,1107$. Merilni inštrument za izračun efektivne vrednosti torej

pomnoži izmerjeno usmerjeno vrednost signala s faktorjem 1,1107, pri čemer predvideva, da je signal sinusne oblike. Čim je merjeni signal drugačne oblike, je prikazani rezultat efektivne vrednosti napačen. Boljši inštrumenti merijo t.i. "pravo" efektivno vrednost (ang. true RMS).

VEČ:

<http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5988-6916EN.pdf>

<http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5988-5513EN.pdf>

[http://us.fluke.com/usen/support/appnotes/default?category=APP_NOTES\(FlukeProducts\)&parent=APP_NOTES\(FlukeProducts\)#](http://us.fluke.com/usen/support/appnotes/default?category=APP_NOTES(FlukeProducts)&parent=APP_NOTES(FlukeProducts)#)

SLIKA: TRUE RMS meter Fluke 114.

Za merjenje prave efektivne vrednosti je mogoče uporabiti več metod. En od principov temelji na uporabi termistorja, ki meri spremembo temperature na elementu, ta pa je neposredno povezana z efektivno vrednostjo toka. Na tržišču obstajajo tudi čipi, ki opravljajo množenje (kvadriranje) signala in s tem močno olajšajo delo. Primer takega elementa je čip AD8361 podjetja Analog Devices, www.analog.com. Vse več inštrumentov pa že zajema signale s pomočjo analogno/digitalne pretvorbe, kjer je izračun efektivne vrednosti mogoč z enostavno numerično integracijo kvadriranega signala. Vir: http://en.wikipedia.org/wiki/True_RMS_converter.



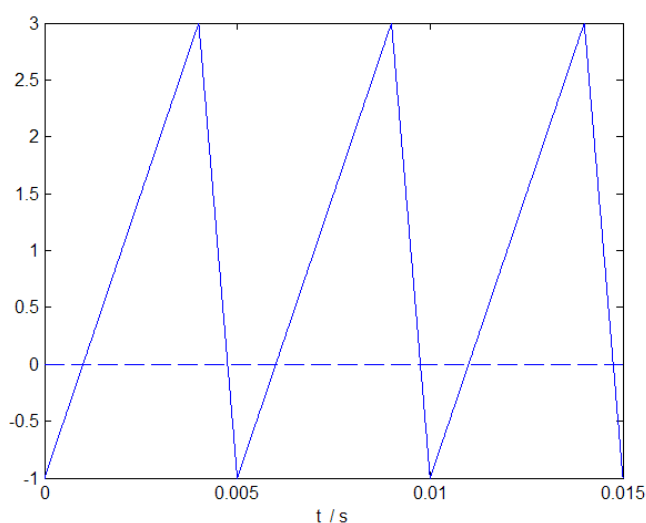
kvadriranega signala. Vir:

7) Temenski faktor (ang. crest factor) je definiran kot kvocient maksimalne in efektivne vrednosti

$$\text{temenski faktor} = \frac{I_m}{I_{ef}} \quad (16.5)$$

Za sinusni signal je temenski faktor enak $\frac{I_m}{I_m / \sqrt{2}} = \sqrt{2} \cong 1,414$.

Primer: Določimo periodo, frekvenco, srednjo vrednost in efektivno vrednost časovne oblike tokovnega signala na sliki. Signal je naraščajoč v 80% časa periode in v preostalem času padajoč.



Izračun: Perioda signala je $T = 5 \text{ ms}$, frekvenca je $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5 \text{ ms}} = 200 \text{ s}^{-1} = 200 \text{ Hz}$. Za izračun

srednje vrednosti moramo signal zapisati v matematični obliki in ga integrirati v času ene periode ter deliti s periodo. Ker je sestavljen iz premic (odsekoma zvezen), mora biti oblike $y = k \cdot t + n$. Iz zapisa v dveh skrajnih točkah od $t = 0$ do $t = 0,8 \cdot 5 \text{ ms} = 4 \text{ ms}$ velja $-1 = k \cdot 0 + n$ in $3 = k \cdot 4 \text{ ms} - 1$, od koder dobimo enačbo $i(t) = 1 \text{ A/ms} \cdot t - 1 \text{ A}$. Podobno dobimo za drugi del periode enačbo $i(t) = -4 \text{ A/ms} + 19 \text{ A}$.

Sedaj uporabimo enačbo za izračun srednje vrednosti in dobimo

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{5 \text{ ms}} \left(\int_0^{4 \text{ ms}} (1 \text{ A/ms} \cdot t - 1 \text{ A}) dt + \int_{4 \text{ ms}}^{5 \text{ ms}} (-4 \text{ A/ms} \cdot t + 19 \text{ A}) dt \right). \text{ Rešitev enačbe je:}$$

$$I_{sr} = \frac{1}{5 \text{ ms}} (8 - 4 - 2(25 - 16) + 19(5 - 4)) \text{ A} \cdot \text{ms} = 1 \text{ A}. \text{ Srednja vrednost tokovnega signala je } 1 \text{ A}. \text{ Z}$$

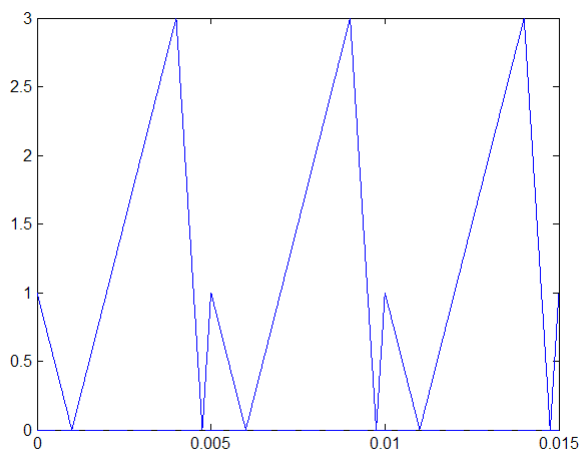
izračunom efektivne vrednosti je nekaj več dela, saj je potrebno rešiti sledeči integral:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{5 \text{ ms}} \left(\int_0^{4 \text{ ms}} (1 \text{ A/ms} \cdot t - 1 \text{ A})^2 dt + \int_{4 \text{ ms}}^{5 \text{ ms}} (-4 \text{ A/ms} + 19 \text{ A})^2 dt \right)}. \quad \text{Rešitev za vajo}$$

poskusite najti sami. Mi jo bomo poiskali kar s programom Matlab, ki da vrednost 1,5275.

$$\text{Usmerjena vrednost je } I_r = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt = \frac{1}{5 \text{ ms}} \left(\int_0^{4 \text{ ms}} |1 \text{ A/ms} \cdot t - 1 \text{ A}| dt + \int_{4 \text{ ms}}^{5 \text{ ms}} |-4 \text{ A/ms} + 19 \text{ A}| dt \right) = 1,250$$

$$\text{faktor oblike} = \frac{I_{ef}}{I_r} = 1,222, \quad \text{temenski faktor} = \frac{I_m}{I_{ef}} = \frac{3}{1,5275} = 1,964.$$



SLIKA: Absolutna vrednost signala: iz te izračunamo usmerjeno vrednost.

Izračun s programom Matlab (signal izrišemo v treh periodah, zato tudi povprečje računamo v treh periodah): `T=5e-3; om=2*pi/T; dt=T/1000; t=0:dt:3*T; i=2*sawtooth(om.*t,0.8)+1; plot(t,i); Isr=trapz(i)*dt/(3*T); hold on; plot([0 0 3*T], [0 0 0], 'b--'); Ief=sqrt(trapz(i.^2)*dt/(3*T)); Ir=trapz(abs(i)*dt/(3*T)); FF=Ief/Ir`

Dodatno: Kolikšna moč se troši na bremenu (uporu 3 kΩ), če gre skozi upor tok oblike na sliki (v amperih).

Izračun: Trenutna moč na uporu je $p = u_R i_R = i_R^2 R$. Povprečna moč pa bo

$$\overline{p} = P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T i_R^2 R dt = R \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i_R^2 dt = R I_{R,ef}^2.$$

Povprečno moč običajno označimo z veliko črko P . Očitno je povprečna moč na uporu sorazmerna kvadratu efektivne vrednosti toka. Tu se že kaže pomembnost definiranja efektivne vrednosti: med drugim določa povprečno moč na uporu pri izmeničnih signalih. V konkretnem primeru je povprečna moč na uporu enaka $P = R \cdot I_{R,ef}^2 = 3 \text{ k}\Omega \cdot 1,5275 \text{ A}^2 = \underline{\underline{7 \text{ kW}}}$.

Če bi želeli preračunati moč, ki se na ohmskem bremenu troši z merilnikom, ki določa efektivno vrednost iz usmerjene vrednosti, bi dobili vrednost $1,25 \cdot 1,1107 = 1,3884$ namesto pravilne vrednosti 1,5275. Napaka prikaza bi bila 9,1 %.