

Resonančni pojav

Vsebina: Zaporedni in vzporedni nihajni krog ali tokovna in napetostna resonanca. Pogo za resonanco in določitev resonančne frekvence in bočnih frekvenc. Dodatni pojmi kot npr. pasovna širina, normirana pasovna širina, kvaliteta vezja, dušenje, razglašenost.

V vezjih s harmoničnimi signali je posebno zanimiv pojav, ko na zunanjih sponkah vezja (pa tudi na določenih elementih vezja) pri določeni frekvenci dosežemo izrazito visoke napetosti ali toke. Tej frekvenci rečemo resonančna frekvenca, vezje pa je tedaj v resonanci. Podrobneje si bomo pogledali le vezji z zaporedno ali vzporedno vezavo upora, kondenzatorja in tuljave. Ti vezji imenujemo tudi zaporedni in vzporedni nihajni krog.

Resonančne pojave v elektrotehniki pogosto koristno uporabimo za različna filtriranja ali prilagoditve, lahko pa so tudi nezaželeni (samozagon motorjev, itd).

Zaporedni nihajni krog - tokovna resonanca

SLIKA: Zaporedni nihajni krog.

Vzemimo najprej primer zaporednega nihajnega kroga, ki ga sestavljajo zaporedna vezava kondenzatorja, upora in tuljave. Na vhod priključimo napetostni harmonični vir $u(t) = U \cos(\omega t)$.

Napetosti na kondenzatorju in tuljavi sta fazno zamaknjeni za π , rečemo tudi, da sta v protifazi. Ko je trenutna moč na tuljavi v naraščanju, je na kondenzatorju v upadanju. Njuna vsota je v resonanci enaka nič. Komplexorji napetosti na posameznih elementih vezja so:

$$\underline{U}_R = \underline{I}R$$

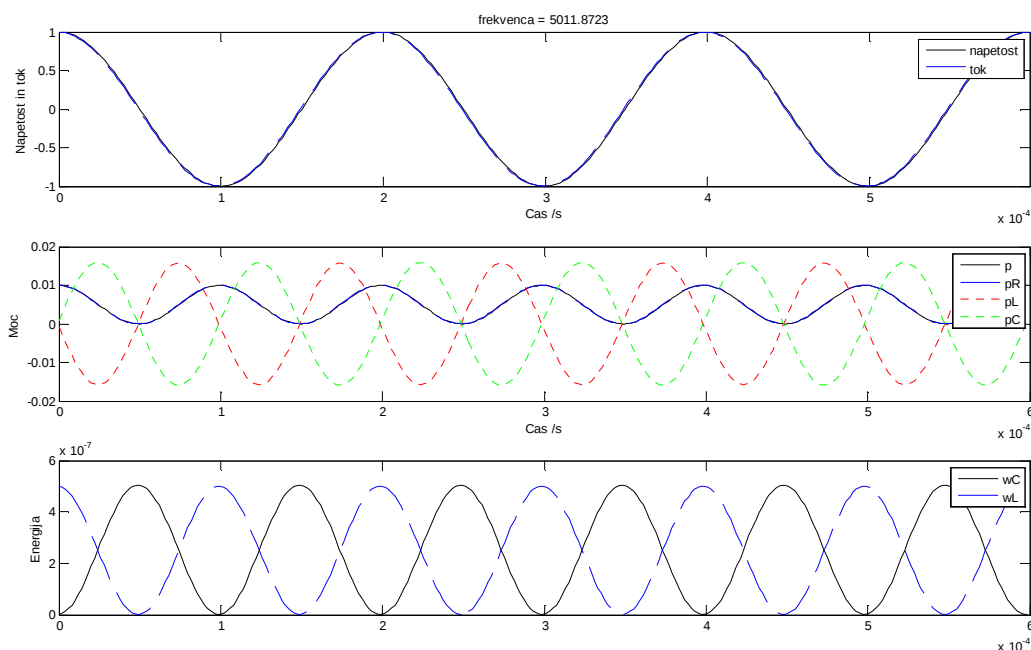
$$\underline{U}_L = \underline{I}j\omega L$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} \frac{1}{j\omega C}$$

Moči določimo kot $P = \frac{1}{2} I^2 R$, $Q_L = \frac{1}{2} I^2 \omega L$ in $Q_C = -\frac{1}{2} I^2 \frac{1}{\omega C}$. Pri nizkih frekvencah (pred resonančno frekvenco) je amplituda moči na kondenzatorju velika, saj je na njem velika napetost. Z višanjem frekvence se povečuje moč na tuljavi, ki je ves čas v protifazi z močjo na kondenzatorju (ti moči se torej (gledano iz zunanjih sponk) odštevata). Z bližanjem resonančni frekvenci se povečuje tok skozi zaporedno vezavo in s tem tudi moč na upor. V resonanci sta moči na tuljavi in kondenzatorju v protifazi in se s stališča zunanjih sponk popolnoma kompenzirata. Tedaj je »breme« čisto ohmsko, napetost in tok sta v fazi, tok je maksimalen in enak U/R .

SLIKA: Kompleksorji napetosti in toka pred, pri in po resonančni frekvenci.

Energija je integral moči. Na upor se energija porablja, na tuljavi in kondenzatorju pa se shranjuje v obliki magnetnega in električnega polja. V resonanci je vezje čisto ohmsko, energija tuljave in kondenzatorja se izmenjuje 2x v periodi.



SLIKA: Prikaz napetosti in toka (zgoraj), moči na posameznih elementih vezja (sredina) in energija na kondenzatorju in tuljavi v resonanci. Tok in napetost na zunanjih sponkah sta v fazi, moči na tuljavi in kondenzatorju sta v protifazi in se odštevata, energija med kondenzatorjem in tuljavo se izmenja 2x v periodi signala.

Izračun resonančne frekvence in toka pri resonanci.

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{I}R + \underline{I}j\omega L + \underline{I}\frac{1}{j\omega C} = \underline{I}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \underline{I}\underline{Z}.$$

Impedanca vezja je torej: $\underline{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}.$

Tok v vezje je $|\underline{I}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{Z}|} = \frac{U}{\left|R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$ Tok bo maksimalen, ko bo

absolutna vrednost impedance najmanjša, ta pa bo tedaj, ko bo $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0$, kar bo pri t.i.

resonančni frekvenci $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$

Pri tej frekvenci bo imaginarni del impedance enak nič, impedanca vezja bo čisto ohmska, tok v vezje pa bo največji. Enak bo

$$I(f = f_0) = I_0 = U / R.$$

Vezje bo torej v resonanci tedaj, ko bo navzven (na zunanjih sponkah) čisto ohmsko: tok in napetost bosta v fazi. Pogoji za resonanco zaporedne vezave RLC je

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0, \quad (22.1)$$

oziroma, ko je

$$\text{Im}\{\underline{Z}\} = 0 \quad (22.2)$$

oziroma, ko je

$$\text{Im}\{\underline{Y}\} = 0. \quad (22.3)$$

Za izračun resonance vezja je primerna enačba (22.1) ali (22.2) ali (22.3), odvisno pač od tega, s katero obliko lažje pridemo do izračuna. Potrebno pa je poudariti, da je lahko pri vezjih, ki niso primer zaporedne ali vzporedne vezave upora, kondenzatorja in tuljave maksimum amplitude toka ali napetosti dosežen tudi pri različnih vrednostih kot izhajajo iz gornjih pogojev. Značilnost resonančnega pojava je v tem, da tedaj prihaja do usklajenega prehajanja energije iz elementov

vezja, ki shranjujejo energijo v magnetnem polju (tuljave) v elemente, ki shranjujejo energijo v električnem polju (kondenzatorji). Zaradi tega so napetosti ali toki na elementih vezja v resonanci lahko mnogo večji kot na vhodnih sponkah. Razlog, da le te niso največje na vhodnih sponkah je v tem, da so ti toki ali napetosti v vezju v protifazi (zamaknjeni za 180° ali blizu) in se navzven med seboj odštevajo.

Lastnosti resonančnega vezja opisujemo z naslednjimi parametri:

Razglašenosť vezja je določena z izrazom

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}, \quad (22.4)$$

Kvaliteta vezja je določena s kvocientom moči na reaktivnem elementu in delovno močjo

$$Q = \frac{Q_{X_0}}{P} \quad (22.5)$$

kjer je $Q_{X_0} = \frac{1}{2} I^2 \omega_0 L = \frac{1}{2} I^2 \frac{1}{\omega_0 C}$ in $P = \frac{1}{2} I^2 R$, torej

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} \quad (22.6)$$

Kvaliteta vezja je mera za »ozkost« resonančne krivulje. Bolj kot je krivulja ozka (strma okoli resonančne frekvence), večja je njena kvaliteta. V primeru zaporedne vezave elementov R, L, C je kvaliteta večja pri manjši upornosti.

Dušenje je soroden pojem kot kvaliteta, saj je definiran kot recipročna vrednost kvalitete

$$D = 1/Q.$$

Bočni frekvenci in pasovna širina

SLIKA: Tok kot funkcija frekvence. Označimo resonančno frekvenco f_0 , tok pri resonančni frekvenci $I_0 = I(f = f_0)$, ter spodnjo in zgornjo bočno frekvenco (f_1 in f_2), ki nastopita pri

$\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ter pasovno širino.

Bočni frekvenci (f_2 in f_1) sta določeni pri vrednostih toka, ki je od maksimalne vrednosti manjši za $\sqrt{2}$.

Razlika med zgornjo in spodnjo bočno frekvenco je **pasovna širina** vezja

$B = f_2 - f_1$. Poznamo tudi normirano pasovno širino, ki je pasovna širina deljena z resonančno frekvenco: $B_{\text{norm}} = \frac{f_2 - f_1}{f_0}$. Kvaliteta je definirana tudi kot recipročna vrednost normirane pasovne

širine $Q = \frac{1}{B_{\text{norm}}} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$.

Določimo pasovno širino za serijsko resonančno vezje. Poiskati moramo frekvenci, pri kateri pade amplituda za $\sqrt{2}$. Veljati mora $I(\omega_{1,2}) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C}\right)^2}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}}$. Enačbi bo zadoščeno,

če bo $R^2 + \left(\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C}\right)^2 = 2R^2$ oziroma $\left|\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C}\right| = R$, to pa bo tedaj, ko bo $\omega_1L - \frac{1}{\omega_1C} = -R$ in

$\omega_2L - \frac{1}{\omega_2C} = R$. Če enačbi seštejemo, dobimo zvezo $LC = \frac{1}{\omega_1\omega_2} = \frac{1}{\omega_0^2}$ oziroma $f_0^2 = f_1f_2$. Če pa

enačbi odštejemo izpeljemo zvezo $B_{\text{norm}} = \frac{R}{\omega_0L}$.

Da bi določili pasovno širino, moramo rešiti kvadratno enačbo, saj iz $\omega_1L - \frac{1}{\omega_1C} = -R$ sledi

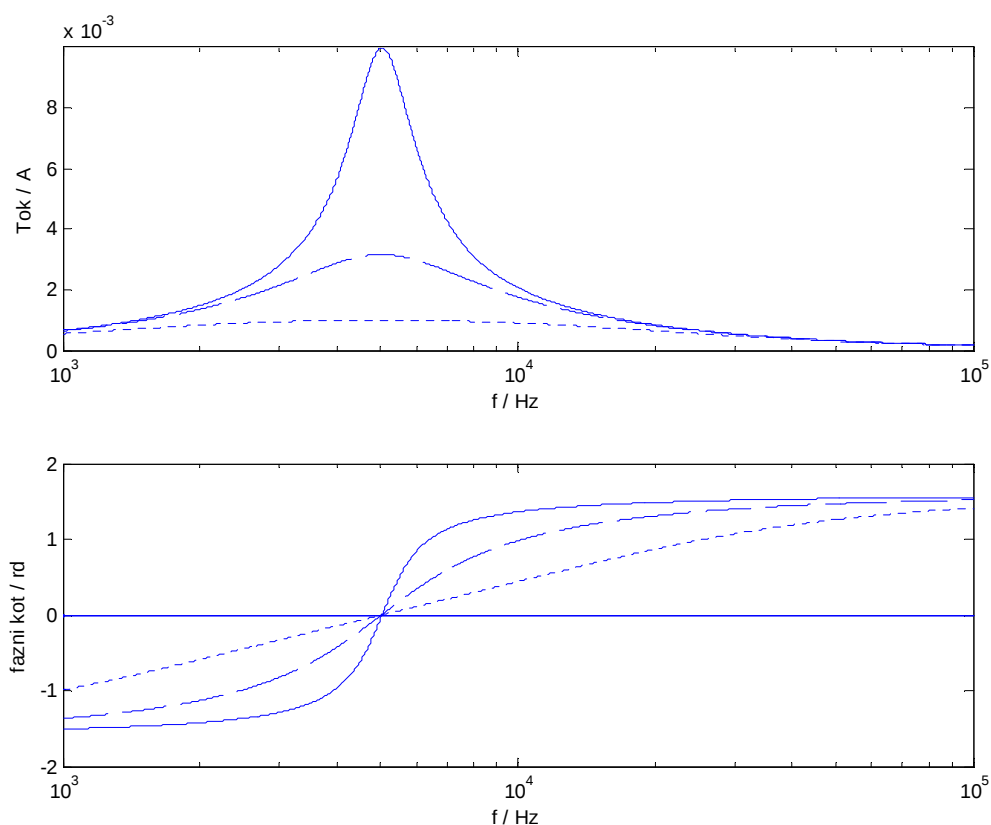
$\omega_1^2L - \frac{1}{C} = \omega_1R$. Rešitvi za ω_1 in ω_2 sta: $\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} + \frac{R}{2L}$ in $\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} - \frac{R}{2L}$.

DODATNI SLIKOVNI MATERIAL:

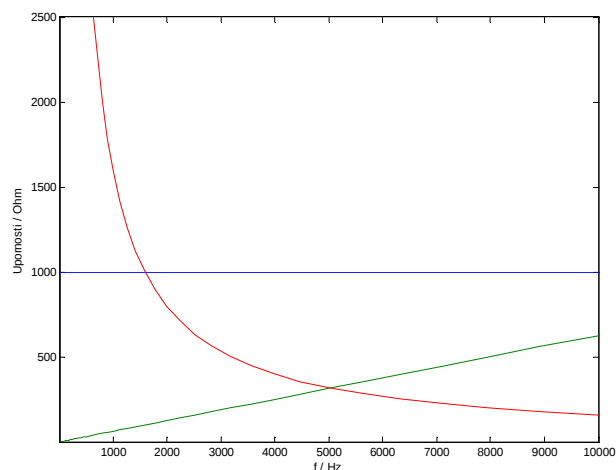
Slika A: Prikaz toka kot funkcijo frekvence (resonančna krivulja) za konkretne podatke za tri različne vrednosti upornosti. Opazujemo lahko obliko krivulj, spreminjanje faznega kota in kvaliteto vezja.

Slika B: Prikaz ohmskih upornosti kot funkcijo frekvence.

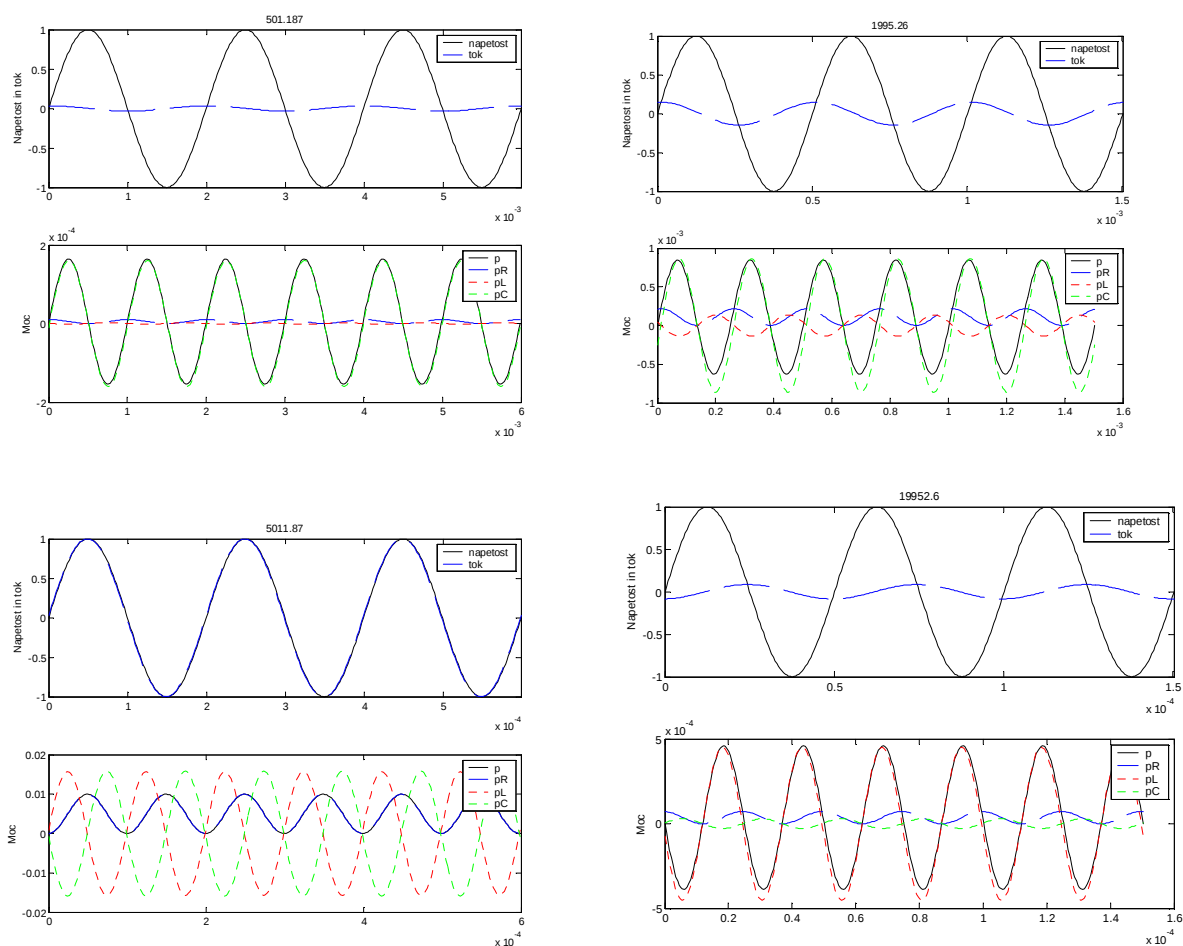
Slika C: Prikaz časovnega signala toka in napetosti ter moči na posameznih elementih pri različnih frekvencah (pred, po in pri resonanci).



SLIKA A: Primer zaporedne resonance pri vrednostih elementov $L = 10 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$, $R = 100 \Omega$ (polna črta), 316Ω (prekinjena črta) in 1000Ω (pikčasta črta). Pri manjši upornosti je krivulja toka bolj ozka, kar določimo tudi s pasovno širino ali kvaliteto nihanjega kroga. Na spodnji sliki vidimo spreminjanje faznega kota, ki je pri resonančni frekvenci enak nič. Skala na abscisi je logaritemska. (RLC2.m)



SLIKA B: Spreminjanje posamezne upornosti s frekvenco. Pri resonančni frekvenci sta reaktanci tuljave in kondenzatorja enaki. (RLC2.m)



SLIKA C: Zgoraj: prikaz časovnega signala napetosti in toka pred (levo zgoraj, $f = 901$ Hz), tik pred (desno zgoraj, $f = 2000$ Hz) pri (levo spodaj, $f = 5011$ Hz) in za (desno spodaj, $f = 901$ Hz) resonančno frekvenco. Spodaj: Moč na upor (pR), moč na tuljavi (pL), moč na kondenzatorju (pC) in skupna moč (p): Jalova moč v resonanci je enaka nič, na posameznih reaktivnih elementih (tuljava, kondenzator) pa je jalova moč velika vendar v protifazi. (RLC3.m)

Vzporedni nihajni krog - napetostna resonanca

Imamo vzporedno vezavo upora, kondenzatorja in tuljave.

SLIKA: Vzporedni nihajni krog.

Napetost na sponkah vezja je $|\underline{U}| = |\underline{I}| |\underline{Z}| = \frac{|\underline{I}|}{|\underline{Y}|} = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$. Napetost na sponkah vezja bo

maksimalna, ko bo izpolnjen pogoj $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$. To pa je tudi tedaj, ko bo admitanca vezja

($\underline{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$) čisto realna, oziroma, ko bo imaginarni del admitance enak nič. Iz tega sledi,

da bo resonančna frekvenca $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, kar je enako kot pri zaporedni resonanci.

Admitanca tega vezja je $\underline{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$. Vezje bo v resonanci, ko bo imaginarni del

admitance enak nič, to je, ko bo $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$.

V čem je torej razlika med »vzporedno« in »zaporedno« resonanco? Razlika je v tem, da je sedaj pri resonančni frekvenci na zunanjih sponkah maksimalna napetost, pri zaporedni resonanci pa tok.

Vzporedno resonanco zato tudi imenujemo napetostna, zaporedno pa tokovna resonanca.

Tudi pri vzporedni resonanci lahko govorimo o razglašenosti $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$, kvaliteti $Q = \frac{\omega_0 C}{G}$ in

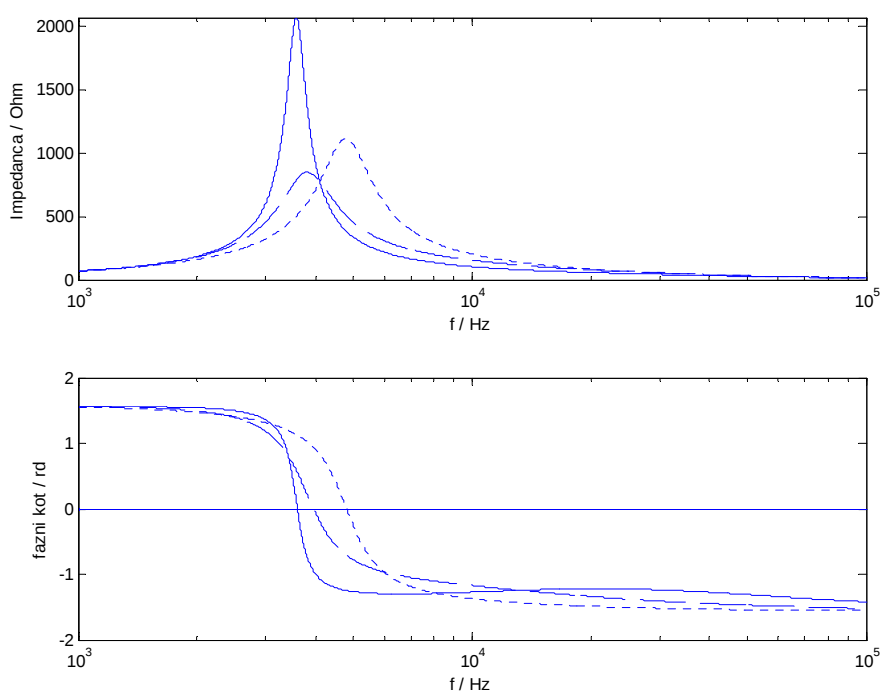
pasovni širini $B = \frac{1}{Q}$. Analogno zaporedni resonanci lahko izpeljemo zvezo med bočnima

frekvencama in resonančno frekvenco $f_0^2 = f_1 f_2$.

Druga vezja. Vzemimo primer vezja vzporedno vezanih dveh impedanc: upora in kondenzatorja v eni veji in tuljave in kondenzatorja v drugi veji. Admitanca vezja bo

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R + j\omega L}. \text{ S pomočjo analize admitance lahko ugotovimo, da gre za primer}$$

napetostne impedance, ki pa nima maksimuma vedno pri faznem kotu enakem nič. Pri $R = 100 \, \Omega$ (polna črta) je pri maksimumu impedance (toka) fazni kot enak 60° , pri $316 \, \Omega$ (prekinjena črta) $11,8^\circ$ in pri $1000 \, \Omega$ (pikčasta črta) $1,7^\circ$. Vidimo tudi, da se pri različnih vrednostih upornosti ne spreminja le amplituda impedance (napetosti), pač pa tudi resonančna frekvenca.



SLIKA: Primer resonance vezja pri faznem kotu, ki je različen od nič. (RLC.m)

Vprašanja za obnovo:

- 1) Kaj je to resonančni pojav? Kaj je značilno za resonančni pojav?
- 2) Kakšne elemente moramo imeti v vezju, da pride do resonančnega pojava?
- 3) Kaj je to zaporedni in vzporedni nihajni krog? Kakšen je pogoj za resonanco? Kako določimo resonančno frekvenco? Kakšen je karakter bremena pri resonanci?
- 4) Prikaz časovnega poteka toka, napetosti in moči pred in ob resonanci.
- 5) Prikaz kazalcev napetosti/toka pri resonanci.
- 6) Razglašenost, kvaliteta vezja, dušenje, bočna frekvenca, pasovna širina.
- 7) Določitev resonančne frekvence za splošno vezje.

Izpit 19. 1. 2006

Izpit, 28. avgust 2006 (4)

Izpit, 6.02.2003 (4)