Moč s kompleksnim računom

Vsebina: Zapis moči s kompleksnim računom, delovna, jalova, navidezna moč, bilanca moči, kompenzacija jalove moči, maksimalna moč.

Ugotovili smo že, da moč poljubnega (linearnega) dvopola niha z dvojno frekvenco vzbujalnega signala okoli povprečne – delovne moči $P=\frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi)$. Moč niha s amplitudo $S=\frac{U_m I_m}{2}$ okoli povprečne (delovne) moči. S imenujemo navidezna moč. Jalovo moč, ki je definirana kot $Q=\frac{U_m I_m}{2}\sin(\varphi)$ direktno iz časovnega signala moči ne moremo razbrati (razen če je breme čisto kapacitivno ali induktivno), lahko pa jo določimo iz. t.i. trikotnika moči, saj velja $S^2=P^2+Q^2$. Lahko pa časovni signal moči razdelimo na dva signala: enega, ki je vedno pozitiven in niha okoli povprečne moči. To je skupna moč na uporih. Drug signal niha okoli ničle in predstavlja moč na tuljavah in kondenzatorjih, ki je v povprečju enaka nič, njena amplituda pa je $Q=\frac{U_m I_m}{2}\sin(\varphi)$.

SLIKA: Prikaz časovnega signala moči in razdelitev na dva signala: enega, ki predstavlja moč na uporih in enega, ki predstavlja moč na tuljavah in kondenzatorjih.

Navidezno moč lahko zapišemo tudi s kompleksorjem v obliki

$$\underline{S}=P+jQ, \tag{21.1}$$

oziroma

$$\underline{S}=S\left(\cos(\varphi)+j\sin(\varphi)\right)=Se^{j\varphi} \tag{21.2}$$

Fazni kot je razlika faznih kotov napetostnega in tokovnega signala: $\varphi=\varphi_u-\varphi_i$. Če to upoštevamo v enačbi (21.2), lahko kompleksor moči zapišemo v obliki $\underline{S}=\frac{I_m U_m}{2}e^{j\varphi_u}e^{-j\varphi_i}$, oziroma kot

$$\boxed{\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{U}\cdot\underline{I}^*}, \tag{21.3}$$

pri čemer sta $\underline{U} = U_m e^{j\varphi_u}$ in $\underline{I} = I_m e^{j\varphi_i}$ kompeksorja napetosti in toka. Pri izračunu moči s kompleksorji je torej potrebno upoštevati konjugirano vrednost kompleksorja toka.

Če pri enačbi (21.3) upoštevamo še Ohmov zakon v kompleksnem zapisu, dobimo uporabne zveze:

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{I}\,\underline{Z}\,\underline{I}^* = \frac{1}{2}|\underline{I}|^2\underline{Z} = \frac{1}{2}I^2\underline{Z} = \frac{1}{2}U^2\underline{Y}^* \tag{21.4}$$

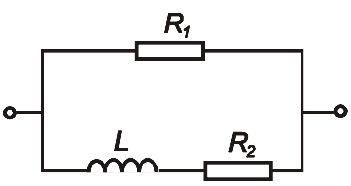
Delovna moč predstavlja realno, jalova pa imaginarno komponento kompeksorja navidezne moči,

$$P = \mathrm{Re}\{\underline{S}\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}I^2\underline{Z}\right\} = \frac{1}{2}I^2\,\mathrm{Re}\{\underline{Z}\} \tag{21.5}$$

$$Q = \mathrm{Im}\{\underline{S}\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}I^2\underline{Z}\right\} = \frac{1}{2}I^2\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} \tag{21.6}$$

Pri gornjih zapisih je potrebno biti previden v toliko, da se zavedamo, da smo tvorili kompleksorje toka in napetosti z upoštevanjem amplitude časovnega signala. Pogosto se v literaturi pojavljajo tudi oblike zapisa moči z upoštevanjem efektivnih vrednosti toka in napetosti, ki so od maksimalnih pri harmoničnih signalih manjše za $\sqrt{2}$. Primer zapisa z efektivnimi vrednostmi toka in napetosti bi torej bil $\underline{S} = \underline{U}_{ef}\cdot\underline{I}_{ef}^*$, pri čemer se pogosto index *ef* kar izpušča. Za pravilno uporabe formule za moč moramo torej vedeti, da pri uporabi amplitud signalov upoštevamo faktor $1/2$, pri efektivnih pa je že upoštevan.

Primer: Izračunajmo delovno, jalovo in navidezno moč vezja na sliki, ki je vzbujano z napetostnim signalom $u(t) = 50\sin(\omega t)$ V. $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $L = 100$ mH, $\omega = 50\ \mathrm{s}^{-1}$.

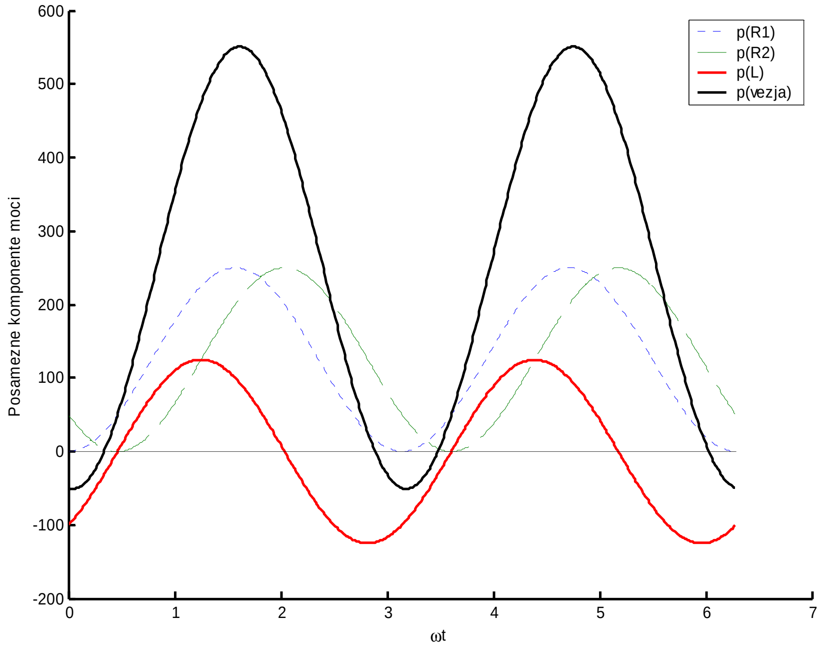


Izračun: V konkretnem primeru je najenostavneje izračunati admitanco vezja, ki je enaka $\underline{Y} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L}$, kar je z vstavitvijo vrednosti enako $\underline{Y} = \frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{(5 + j50\cdot 0{,}1)\ \Omega} = 0{,}1\ \mathrm{S} + \frac{1-j}{10}\ \mathrm{S} = 0{,}1(2 - j)\ \mathrm{S}$. Za določitev moči zadostuje poznavanje absolutne vrednosti napetosti (ali toka). Dobimo

$\underline{S} = \frac{1}{2}U^2\underline{Y}^* = \frac{1}{2}(50\,\mathrm{V})^2 \cdot 0{,}1(2+j)\mathrm{S} = 125(2+j)\ \mathrm{VA}$, torej je delovna moč 250 W, jalova 125 Var-ov, navidezna pa 279,5 VA. Faktor moči je $\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = 0{,}45$.

Dodatno: vprašajmo se o močeh na posameznih elementih vezja. Naredimo primerjavo tako, da izračunamo posebej moč na uporu R_1 in R_2. Moč na uporu R_1 lahko izračunamo neposredno, saj je na tem uporu celotna priključena napetost in je torej $P_{R1} = \frac{U^2}{2R_1} = \frac{(50\,\mathrm{V})^2}{2 \cdot 10\,\Omega} = 125\,\mathrm{W}$. Moč na uporu R_2 dobimo iz toka skozi ta upor, ki je $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R_2 + j\omega L}$, oziroma amplituda toka $I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} = 7{,}07\,\mathrm{A}$. Moč na tem uporu bo torej $P = \frac{1}{2}(7{,}07\,\mathrm{A})^2 5\Omega = 125\ \mathrm{W}$.

Oglejmo si še sliko, ki prikazuje posamezne prispevke moči v vezju ter seštevek.



SLIKA: Posamezne komponente moči na elementih vezja in skupna moč. Moč niha z dvojno frekvenco, na uporih je vedno pozitivna, na tuljavi pa niha okoli ničle. Amplituda izmenjalne moči je jalova moč (125 VAr-ov), amplitudi posameznih delovnih moči pa sta tudi 125 W, skupaj 250 W. (moc2.m)

Bilanca moči. Vzemi primer iz prejšnjega poglavja in izračunajmo moč, ki jo v vezje pošilja napetostni generator. Ugotovimo lahko, da je ta moč $p_g(t) = u_g(t) \cdot i_g(t)$ enaka moči vezja. Torej je moč, ki jo generator pošilja v vezje enaka potrošeni moči. Lahko ugotovimo še več: to moč lahko razdelimo v jalovo in delovno in ugotovimo, da mora veljati tudi ta bilanca. Poleg tega velja tudi splošno, za več generatorjev.

Vsota moči virov (generatorjev) = vsota moči na bremenih vezja

Primer: Kot primer lahko vzamemo kar prejšnji primer, kjer smo že ugotovili, da je moč na uporih enaka 2x125 W, na tuljavi pa 125 Var-ov, skupaj torej $\underline{S} = 125(2 + j)$ VA. Tok v vezje dobimo iz admitance in bo $\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = 50\,\mathrm{V} \cdot 0{,}1(2 - j)\,\mathrm{S} = 5(2 - j)\mathrm{A}$. Moč v vezje bo torej $\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{U} \cdot \underline{I}^* = \frac{1}{2}U^2\underline{Y}^*$, kar pa je ista enačba, s katero smo že izračunali moč vezja.

Kompenzacija jalove moči

Večina električnih naprav ima induktivni karakter, saj za pretvarjanje iz električne v mehansko energijo potrebujejo razna navitja. To so predvsem razni motorji, transformatorji, dušilke, varilni aparati, indukcijske peči, fluorescenčne svetilke in podobno. Ti potrebujejo energijo za vzpostavljanje in »zmanjševanje« magnetnega polja, ki se manifestira v izmenjalni moči, ta pa v jalovi moči, ki je definirana kot amplituda te izmenjalne moči. Ta moč je potrebna a delovanje električnih naprav, torej se ji ne moremo izogniti. Bremeni pa ta moč električno omrežje in jo v tem smislu porabnik tudi plačuje. Jalovo moč je navzven mogoče do določene mere kompenzirati, to pomeni, da bremenu dodamo elemente, ki izmenjujejo energijo z bremenom. V ta namen se uporablja vzporedno vezavo kondenzatorjev. Ločimo **popolno in nepopolno kompenzacijo**. Pri popolni kompenzaciji breme navzven deluje kot ohmsko, torej je jalova moč navzven enaka nič. Pri nepopolni kompenzaciji pa jalovo moč le zmanjšamo do določene mere. Pogosto za mero kompenzacije uporabimo faktor delavnosti $\cos(\varphi)$. Popolna kompenzacija terja, da je faktor delavnosti enak 1.

Primer: Določimo velikost kompenzacijskega kondenzatorja (kondezatorjev) za popolno kompenzacijo bremena iz primera 1. Kondenzator(je) vežemo vzporedno bremenu.

Izračun: Tudi pri priključenem kondenzatorju je (jalova) moč tuljave še vedno enaka 125 Var-ov, zapišimo jo kot $Q_L = 125\,\mathrm{VAr}$. Ta je pozitivnega predznaka, ki jo kompenziramo z reaktivno (jalovo) močjo kondezatorja, ki bo $jQ_C = \frac{1}{2}U^2\underline{Y}_C^* = \frac{1}{2}U^2(-j\omega C)$, oziroma $Q_C = -\frac{1}{2}U^2\omega C$. Veljati mora $Q_L + Q_C = 0$, oziroma $C = \frac{2 \cdot 125\,\mathrm{VAr}}{U^2 \cdot \omega} = 2\,\mathrm{mF}$ *.

SLIKA: Trikotnik moči s prikazom popolne kompenzacije jalove moči.

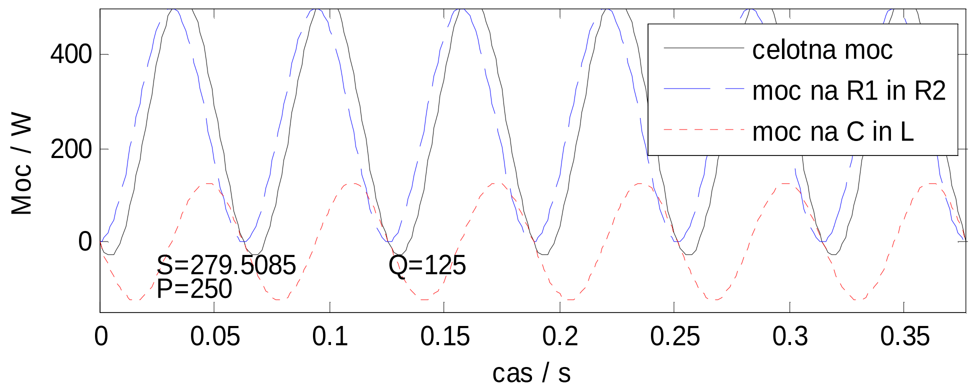
Pogosto ne želimo ali pa ne potrebujemo popolne kompenzacije delovne moči. V tem primeru uporabimo kondenzatorje za zmanjšanje, ne pa tudi izničenje jalove moči. Poglejmo kar primer.

Primer: Vzemimo, da želimo za kompenzacijo moči iz primera 1 in 2 uporabiti kondenzator s kapacitivnostjo 0,5 mF. Za koliko procentov bomo zmanjšali jalovo energijo?

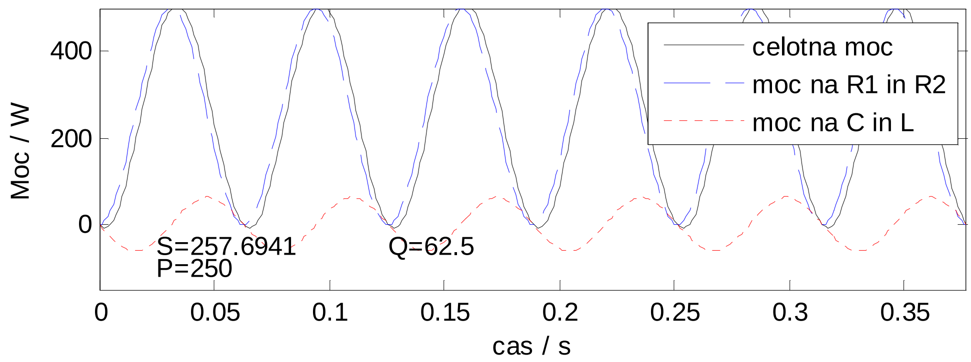
Izračun: Z uporabo enakih zvez kot v primeru 2 ugotovimo jalovo komponento moči na kondenzatorju, ki bo $Q_C = -\frac{1}{2}U^2\omega C = -31{,}25\,\mathrm{VAr}$. Celotno jalovo komponento bomo zmanjšali za $125\,\mathrm{VAr} - 31{,}25\,\mathrm{VAr} = 93{,}75\,\mathrm{VAr}$, kar je za 25%. Izračunajmo še faktor moči, ki bo sedaj $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 267\,\mathrm{VA}$ in $\cos(\varphi) = \frac{P}{S} \cong 0{,}94$.

SLIKA: Trikotnik moči z delno kompenzacijo jalove moči.

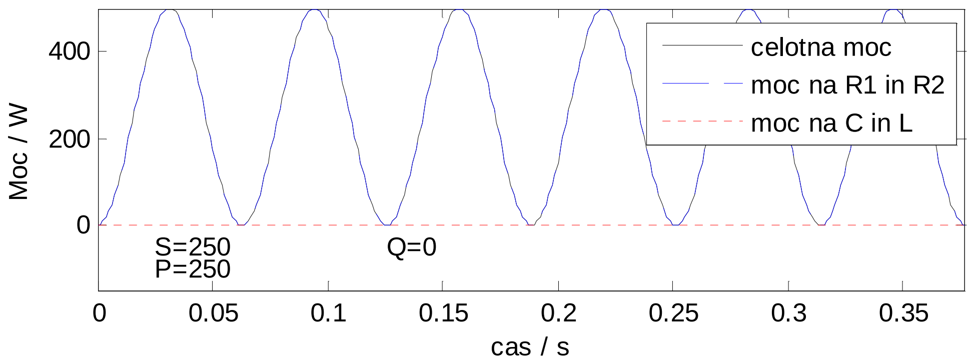
* To je precejšnja vrednost za kapacitivnost. V praksi je za izračun primerne kompenzacije potrebno vzeti v obzir vse stroške, torej tudi stroške nabave in vzdrževanja kondenzatorjev, dielektrične izgube, kot tudi število obratovalnih ur v višji in nižji tarifi itd.



a)

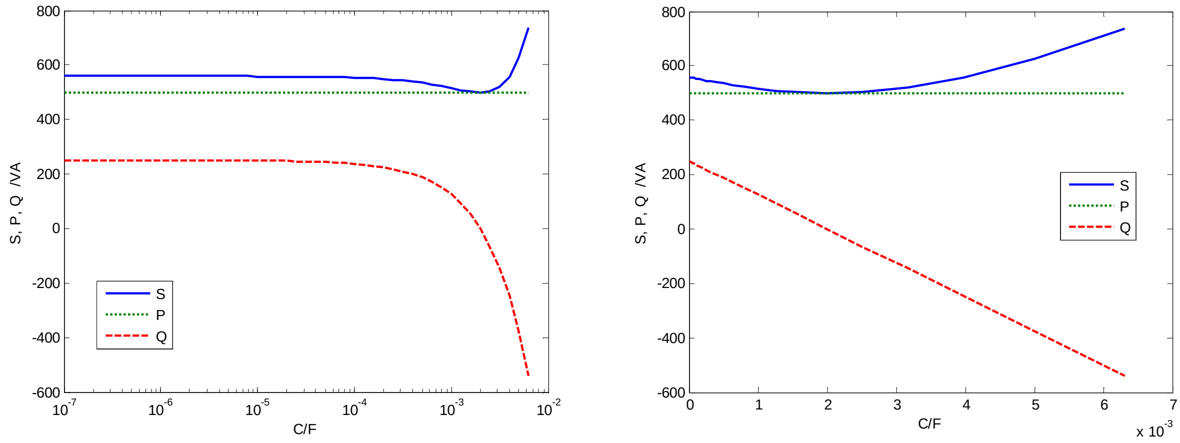


b)



c)

SLIKA: Celotna moč, moč na uporih R_1 in R_2 ter moč na C in L pri a) nekompenziranem vezju, b) delno kompenziranem vezju (C = 1 mF) in c) popolnom kompenziranem vezju (C = 2 mF). (RL_kompenzacija_moci.m)



SLIKA: Spreminjanje *S*, *P* in *Q* s spreminjanjem vrednosti kompenzacijskega kondezatorja. Na desni linearna, na levi logaritemska skala abscise. Ko je *Q* = 0 Varov, je navidezna moč (S) najmanjša in enaka delovni moči (P). (RRL_kompenzacija_moci.m)

Prilagoditev bremena – maksimalna delovna moč

V katerem primeru bo moč na bremenu največja? Enako vprašanje smo si zastavili tudi pri enosmernih vezjih in prišli do zaključka, da bo to tedaj, ko bo upornost bremena enaka nadomestni notranji upornosti gledano s sponk bremena. Pogosto smo jo določili kot Theveninovo ali Nortonovo nadomestno upornost. Tudi pri vezjih z izmeničnimi signali ni dosti drugače.

Ogledati si moramo razmere, ko na realni vir, ki ga lahko opišemo s kompleksorjema napetosti generatorja $\underline{U}_g$ in notranje kompleksne upornosti generatorja $\underline{Z}_g$, priključimo kompleksno breme $\underline{Z}_b$. Moč na bremenu dobimo kot realni del kompleksorja navidezne moči $P = \mathrm{Re}\{\underline{S}_b\}$ in je $P = \frac{1}{2} I^2 \,\mathrm{Re}\{\underline{Z}_b\} = \frac{1}{2} I^2 R_b$. Amplitudo toka dobimo iz preproste zveze $\underline{U}_g = \underline{I}(\underline{Z}_g + \underline{Z}_b) = \underline{I}\left(R_g + R_b + j(X_g + X_b)\right)$ od koder izpeljemo

$$P_b = \frac{1}{2} R_b \frac{U_g^2}{(R_g + R_b)^2 + (X_g + X_b)^2}. \tag{21.7}$$

Sedaj se vprašamo, v katerem primeru bo ta moč največja. Vsekakor tedaj, ko bo imenovalec čim manjši, to pa bo tedaj, ko bo

$$X_g = -X_b\,. \tag{21.8}$$

Najprimernejši ohmski upornosti pa bi dobili z odvajanjem moči po določeni upornosti. Ugotovili bi podobno kot pri enosmernih vezjih, da bo delovna moč največja tedaj, kot bosta ohmski upornosti bremena in generatorja enaki:

$$R_g = R_b\,. \tag{21.9}$$

Če združimo ugotovitve o reaktivnih in ohmskih komponentah v en zapis, lahko zapišemo pogoj za maksimalno delovno moč na bremenu

$$\boxed{\underline{Z}_g = \underline{Z}_b^*} \tag{21.10}$$

In seveda tudi obratno, $\underline{Z}_b = \underline{Z}_g^*$. Ko to velja rečemo tudi, da je **breme prilagojeno na harmoničen vir**.

Pogoja za maksimalno moč (21.8) in (21.9) vstavimo v enačbo (21.7) in dobimo†

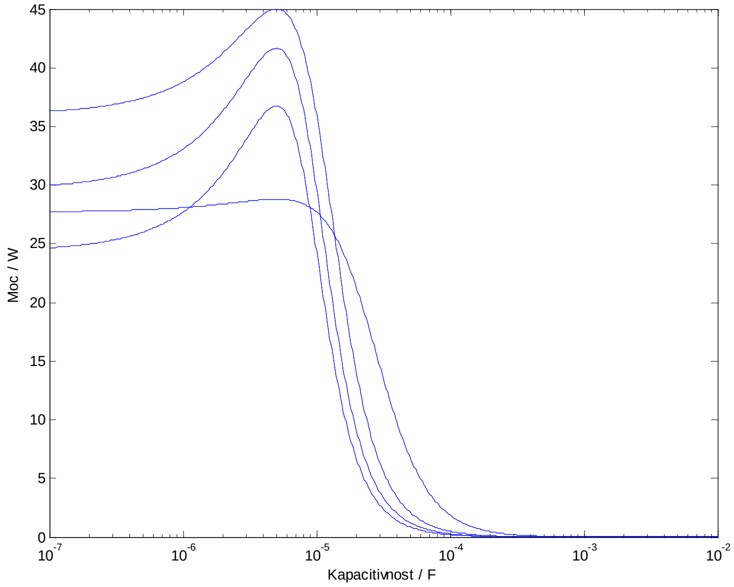
$$\boxed{P_{b,\max} = \frac{U_g^2}{8R_g}} \tag{21.11}$$

Primer: Vir z notranjo upornostjo, ki jo predstavimo z zaporedno vezavo upora $R_g = 10\,\Omega$ in tuljave z $X_L = \omega L = 10\ \Omega$ je priključen na breme iz vzporedno vezanega upora in kondezatorja. Določimo vrednosti bremenskih upornosti, da bo na bremenu maksimalna moč. $\omega = 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$.

Izračun: Veljati mora $\underline{Z}_b = \underline{Z}_g^*$, torej tudi $\underline{Y}_b = \dfrac{1}{\underline{Z}_g^*} = \dfrac{1}{R_b - j\omega L} = \dfrac{1}{10 - j10}\mathrm{S} = \dfrac{1+j}{20}\mathrm{S}$. Ker je $\underline{Y}_b = G_b + j\omega C$, mora biti ob izpolnitvi pogoja za maksimalno moč na bremenu $G_b = \dfrac{1}{20}\mathrm{S} \;\Rightarrow\; R_b = 20\,\Omega$ in $C = \dfrac{1}{\omega \cdot 20} = 5\ \mu\mathrm{F}$.

SLIKA: Vezje priključeno na kompleksno breme.

† Če je kompleksor napetosti določen iz efektivne vrednosti, velja $U_{g,ef} = U_g/\sqrt{2}$ in $P_{b,\max} = \dfrac{U_{g,ef}^2}{4R_g}$ -



SLIKA: Slika prikazuje delovno moč na bremenu pri spreminjanju kapacitivnosti za različne upornosti bremena. Upornosti se vrstijo od 5 Ω, 20 Ω, 35 Ω in 50 Ω. Največjo moč dosežemo (kot pričakovano) pri kapacitivnosti 5 µF in upornosti bremena 20 Ω. (maxmoc.m)

```
% maksimalna moc, Matlab program
Rg=10; L=1e-3; om=1e4; Rb=20; U=60;
Zg=Rg+j*om*L;
for Rb=5:15:50
ii=2:0.01:7;
C=10.^(-ii);
Yb=1/Rb+j*om.*C;
Zb=1./Yb;
I=U./(Zg+Zb);
Pb=0.5*I.*conj(I).*real(Zb);
semilogx(C,Pb)
hold on
end
xlabel('Kapacitivnost / F')
ylabel('Moc / W')
```

Maksimalna moč pri le ohmskem ali le induktivnem bremenu

Kaj pa če ne moremo poljubno izbirati vseh komponent? Na primer, da ima vir le ohmsko ali pa le induktivno breme. Potem ugotovimo, da lahko $\underline{Z}_g = \underline{Z}_b^*$ pomnožimo s konjugiranimi vrednostmi in dobimo pravilo, da morajo biti enake absolutne vrednosti bremena in vira:

$$\left|\underline{Z}_b\right| = \left|\underline{Z}_g\right| \tag{21.12}$$

Če imamo na razpolago le R_b ne pa tudi X_b, mora biti le ta za maksimalno moč enak $R_b = \left|\underline{Z}_g\right|$.

Ustrezno se spremeni tudi izraz za maksimalno moč, ki bo sedaj $P_{b,max} = \dfrac{U_g^2}{4\left(R_g + Z_g\right)}$. (21.13)

Za obnovo:

1) Izračun moči s kompleksorjem toka in napetosti.
2) Zapis kompleksne moči z delovno in jalovo komponento. Trikotni moči.
3) Različni zapisi moči z upoštevanjem Ohmovega zakona.
4) Tellegenov stavek – bilanca moči.
5) Kompenzacija jalove moči. Priključitev kondenzatorja. Popolna in nepopolna kompenzacija. Izračun potrebne velikost kondenzatorja.
6) Prilagoditev moči – maksimalna moč na bremenu: kdaj nastopi, pogoj če je breme kompleksno ali če je čisto realno (upor). Kako določimo potrebno velikost bremena za optimalno prilagoditev? Enačba za določitev maksimalne moči.

Primeri izpitnih in kolokvijskih nalog

Izpit, 9. junij 2005
izpit, 14. junij 2006
izpit, 20. junij 2006 (5)
izpit, 14. junij 2006
2. kolokvij, 16. junij 2004
2. kolokvij, 13. 06.2002