

Upor, tuljava in kondenzator pri izmeničnih signalih

Vsebina: Zveze med tokom in napetostjo na uporu, tuljavi in kondenzatorju pri vzbujanju z izmeničnimi signali. Časovni poteki toka, napetosti, moči in energije na posameznih elementih. Zaostajanje ali prehitevanje signalov napetosti in toka – fazni kot. Povprečne vrednosti moči in energije. Maksimalna energija. Karakter vezja.

UPOR

Velja zveza $u(t) = Ri(t)$.

Če je tok sinusne oblike $i = I_m \sin(\omega t)$, je napetost tudi sinusne oblike

$u = RI_m \sin(\omega t) = U_m \sin(\omega t)$, kjer je $U_m = RI_m$.

Moč na uporu dobimo kot zmnožek toka in napetosti na uporu

$$p = u \cdot i = i^2 R = I_m^2 R \sin^2(\omega t) \quad (18.1)$$

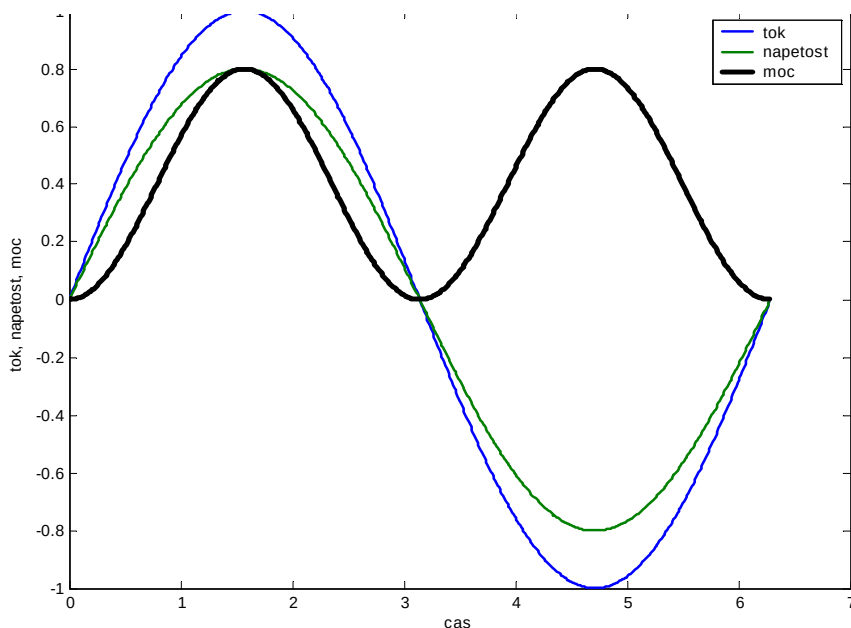
SLIKA: Tok in napetost na uporu sta v fazi. Moč niha z dvojno frekvenco in ima enosmerno komponento, ki je povprečna moč.

Moč. Moč na uporu lahko z uporabo zveze

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$$

zapišemo kot

$$p = \frac{I_m^2 R}{2}(1 - \cos(2\omega t)) \quad (18.2)$$



Ugotovimo, da ima (trenutna) moč na upor tudi sinusno obliko, vendar niha z dvojno frekvenco osnovnega signala, povprečna vrednost pa je $P = \frac{I_m^2 R}{2} = I_{ef}^2 R$. Povprečno vrednost moči določa efektivna vrednost (tokovnega ali napetostnega) signala.

Energija. Določimo še energijo v eni periodi (toplotna energija ali joulske izgube), ki bo

$$W_T = \int_0^T p dt = PT = I_{ef}^2 RT \quad (18.3)$$

Skupne ugotovitve za upor:

- 1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na upor $u = U_m \sin(\omega t)$. **Napetost na upor je v fazi s tokom**, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.
- 2) Amplituda napetosti je $U_m = I_m R$.
- 3) Upornost (R) je neodvisna od frekvence tokovnega (in napetostnega) signala.
- 4) Moč na upor niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala „okoli” enosmerne komponente, ki predstavlja povprečno moč in je enaka $P = \frac{I_m^2 R}{2} = I_{ef}^2 R$.

TULJAVA

Zveza med tokom skozi tuljavo in napetostjo na tuljavi je

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}.$$

Če je tokovni signal oblike $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na tuljavi

$$u = L \frac{d}{dt}(I_m \sin(\omega t)) = LI_m \omega \cos(\omega t) = U_m \cos(\omega t) \text{ ali tudi } u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Napetostni signal je časovno zamaknjen glede na tokovni signal. Rečemo, da napetost prehiteva tok za kot $\pi/2$. To lahko prikažemo tako s časovnim potekom, kot s kazalčnim diagramom ali kasneje – s kompleksorji v kompleksni ravnini.

SLIKA: Časovni potek in kazalčni diagram faznega prehitevanja napetosti na tuljavi pred tokom.

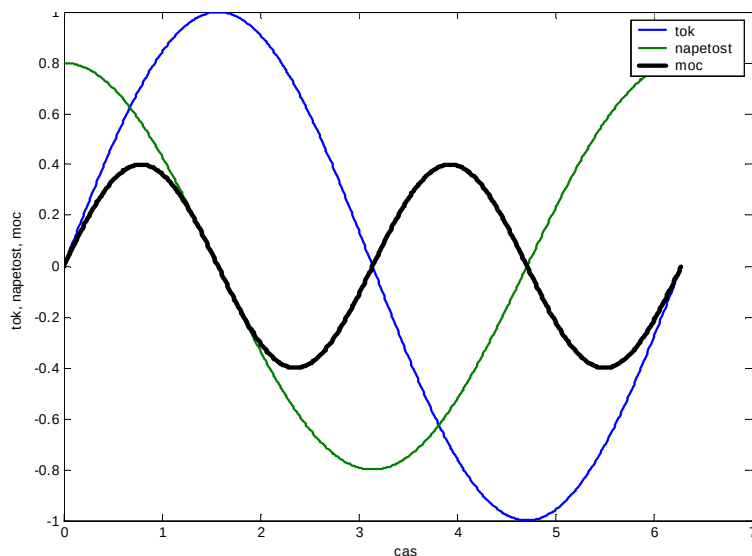
Amplituda napetosti bo torej $U_m = I_m \omega L$, kjer $\omega L = X_L$ imenujemo reaktanca oz. upornost tuljave pri izmeničnih signalih. **Upornost tuljave (reaktanca) pri izmeničnih signalih se večja linearno s**

frekvenco in je enaka $\frac{U_m}{I_m} = X_L = \omega L$.

Moč. Trenutna moč je zmnožek trenutne napetosti in toka na tuljavi, torej

$$p = iu = I_m \sin(\omega t) \cdot U_m \cos(\omega t) = \frac{I_m U_m}{2} \sin(2\omega t) \quad (18.4)$$

Trenutna moč niha z dvojno frekvenco vendar je brez enosmerne komponente. Povprečna (izgubna) moč je 0 W.



SLIKA: Tokovni in napetostni signal na tuljavi sta zamaknjena za četrtno periode. Napetost prehiteva tok, moč na tuljavi niha z dvojno frekvenco in nima enosmerne komponente. Povprečna moč na tuljavi je nič.

Energija. Energijo v tuljavi dobimo z integracijo moči

$$W(t) = \int_0^t p dt = \frac{I_m U_m}{2} \int_0^t \sin(2\omega t) dt = \frac{I_m U_m}{2 \cdot 2\omega} (1 - \cos(2\omega t)).$$
 Energija, ki je akumulirana v magnetnem polju tuljave, niha z dvojno frekvenco osnovnega signala. V vsakem trenutku je pozitivna in v povprečju velika

$$W_{sr} = \frac{I_m U_m}{4\omega} = \frac{LI_m^2}{4}. \quad (18.5)$$

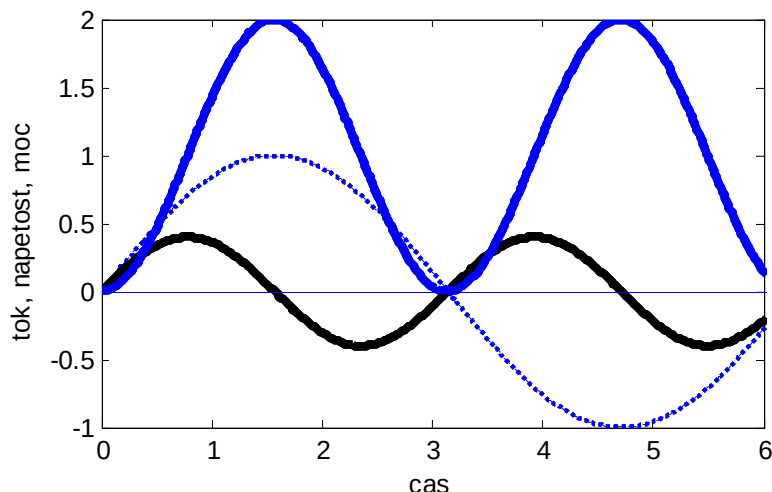
Spomnimo se še druge oblike zapisa trenutne energije. V poglavju (13) smo obravnavali energijo v magnetnem polju tuljave in ugotovili, da jo lahko zapišemo kot

$$W(t) = \int_{t_0}^t p(t) dt = \int_{t_0}^t L \frac{di}{dt} i dt = \int_{i(t_0)}^{i(t)} L i di \quad \text{od koder smo zapisali enačbo za trenutno energijo v}$$

magnetnem polju tuljave z induktivnostjo L v obliki $W = \frac{Li^2}{2}.$

Maksimalna energija v tuljavi nastopi tedaj, ko je maksimalen tok. Tedaj je

$$W_{max} = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (18.6)$$



Slika: Moč (polna črna črta) in energija (polna modra črta) pri vzbujanju tuljave s sinusnim tokovnim signalom (modra črtkana črta).

Skupne ugotovitve za tuljavo:

- 1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na tuljavi $u = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. **Napetost na tuljavi prehiteva tok** za četrtno periode signala, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.
- 2) Amplitudo napetosti lahko zapišemo tudi kot $U_m = I_m \omega L$, kjer je ωL upornost tuljave pri izmeničnih signalih, kar imenujemo tudi **reaktanca** $X_L = \omega L$. Reaktanca se linearno veča s frekvenco.
- 3) Za lažjo predstavo lahko tuljavo pri zelo nizkih frekvencah (enosmerne razmere) nadomestimo s kratkim stikom (zelo majhna upornost), pri zelo visokih pa z odprtimi sponkami (zelo velika upornost).
- 4) Moč na tuljavi niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala, povprečna moč je enaka nič.
- 5) Energija v magnetnem polju tuljave niha z dvojno frekvenco osnovnega signala, je vedno pozitivna in v povprečju velika $\overline{W} = W_{sr} = \frac{LI_m^2}{4}$. Trenutna vrednost je sorazmerna kvadratu toka $W = \frac{Li^2}{2}$, maksimalna energija v tuljavi nastopi vsako četrtno periode signala, ko je velika $W_{max} = \frac{LI_m^2}{2}$.
- 6) Za vezja, v katerih napetost prehiteva tok rečemo, da imajo **induktivni karakter**.

Primer: Na toroidno jedro okroglega preseka površine 1 cm^2 , s srednjim polmerom 2 cm in $\mu_r = 100$, navijemo 500 ovojev. Kolikšna je napetost na tuljavi, če jo vzbujaemo s tokom $i = 0,4 \cos(100\text{s}^{-1}t) \text{ A}$? Določimo še povprečno in maksimalno moč na tuljavi.

Izračun: Induktivnost toroida je $L = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 A}{2\pi r_s} = 25 \text{ mH}$, torej je induktivna upornost

$X_L = \omega L = 2,5 \Omega$, maksimalna napetost je $U_m = I_m X_L = 0,4 \text{ A} \cdot 2,5 \Omega = 10 \text{ V}$. Če bi želeli zapisati napetost na tuljavi v obliki časovnega signala, bi morali upoštevati, da napetost na tuljavi tok prehiteva za fazni kot $\frac{\pi}{2}$, torej bo $u(t) = 10 \cos(100\text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{2}) \text{ V}$. Povprečna moč je enaka nič vatov,

maksimalna moč je $\frac{I_m U_m}{2} = 2 \text{ W}$, povprečna energija je $W_{sr} = \frac{LI_m^2}{4} = 1 \text{ mJ}$, maksimalna pa 2 mJ .

KONDENZATOR

Zopet vzemimo sinusno obliko toka $i = I_m \sin(\omega t)$. Tok izrazimo s časovno spremembo naboja na

ploščah kondenzatorja $i = \frac{dQ}{dt}$ in upoštevamo zvezo med nabojem na ploščah in napetostjo

$Q(t) = Cu(t)$ in dobimo $i = C \frac{du}{dt}$. Ker tok poznamo, zanima pa nas napetost, izrazimo napetost na

kondenzatorju kot¹ $\int_0^t du = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$. Za sinusno obliko toka bo napetost enaka

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I_m \sin(\omega t) \cdot dt + u(0) = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t) = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ oziroma}$$

$u = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. Napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtno periode.

SLIKA: Časovni potek in kazalčni diagram faznega zaostajanja napetosti na kondenzatorju pred tokom.

Amplituda napetosti je torej $U_m = \frac{I_m}{\omega C}$.

Člen $\frac{1}{\omega C}$ ima enoto upornosti in tudi predstavlja upornost kondenzatorja pri izmeničnih signalih.

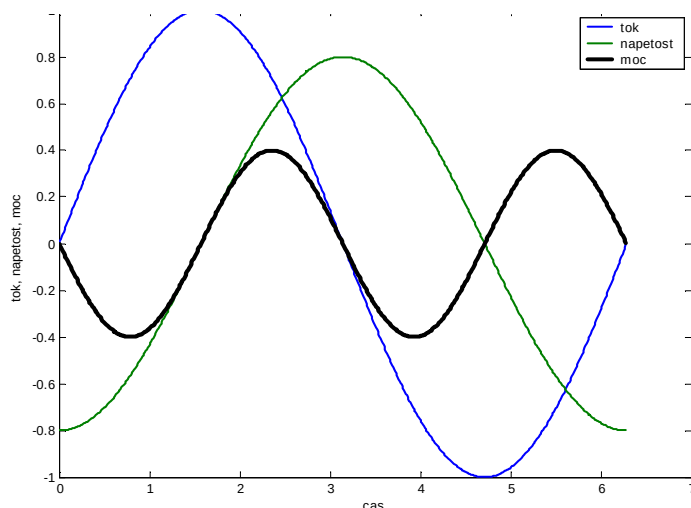
Moč. Trenutna moč je zmnožek trenutne napetosti in toka na kondenzatorju, torej

$$p = iu = -I_m \sin(\omega t) \cdot U_m \cos(\omega t) = -\frac{I_m U_m}{2} \sin(2\omega t) \quad (18.7)$$

Trenutna moč niha z dvojno frekvenco vendar brez enosmerne komponente, enako kot pri tuljavi. Povprečna (izgubna) moč je torej tako kot na tuljavi enaka nič vatov.

¹ Zakaj dodamo $u(0)$? Pri veličinah, ki so določene z integralom, je potrebno upoštevati "zgodovino" integranta. Torej

bi bilo vedno potrebno slediti integrirano veličino od $-\infty$, torej $u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u(0)$.

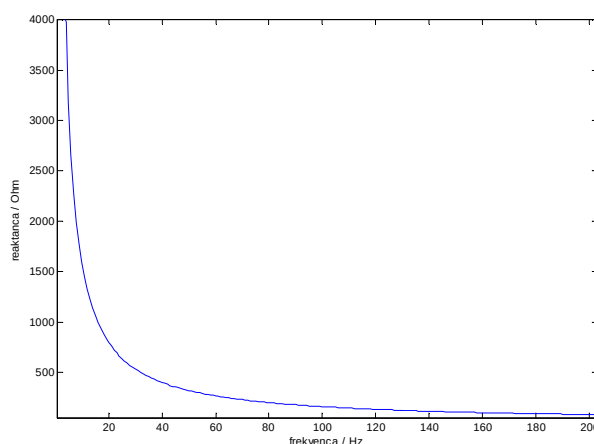


SLIKA: Tokovni in napetostni signal na kondenzatorju. Napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtno periode signala.

Energija. Podobno kot pri tuljavi energija v kondenzatorju niha z dvojno frekvenco osnovnega signala. Je vedno pozitivna, v povprečju enaka $W_{sr} = \frac{CU_m^2}{4}$. Maksimalna energija shranjena v polju

kondenzatorja pa je $W_{max} = \frac{CU_m^2}{2}$.

SLIKA: Kapacitivna upornost $X_C = \frac{1}{\omega C}$
se zmanjšuje s višanjem frekvence
vzbujalnega signala s funkcijsko
odvisnostjo $\frac{1}{f}$. Na sliki je reaktanca za
 $C = 10 \mu F$.



Skupne ugotovitve za kondenzator:

- 1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na kondenzatorju $u = U_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

Tok na kondenzatorju prehiteva napetost za četrtno periode signala, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.

- 2) Amplitudo napetosti lahko zapišemo tudi kot $U_m = \frac{I_m}{\omega C}$, kjer je $\frac{1}{\omega C}$ upornost kondenzatorja pri izmeničnih signalih². Upornost kondenzatorja se manjša s frekvenco.
- 3) Za lažjo predstavo lahko kondenzator pri zelo nizkih frekvencah (enosmerne razmere) nadomestimo z odprtimi sponkami (zelo velika upornost), pri zelo visokih pa s kratkim stikom (zelo majhna upornost).
- 4) Moč na kondenzatorju niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala, povprečna moč je enaka nič.
- 5) Energija niha z dvojno frekvenco osnovnega signala, v povprečju je enaka $W_{sr} = \frac{CU_m^2}{4}$, maksimalna energija v kondenzatorju nastopi vsako četrtno periode signala, ko je velika $W_{max} = \frac{CU_m^2}{2}$. Energija je akumulirana v električnem polju kondenzatorja.
- 6) Za vezja, v katerih napetost zaostaja za tokom rečemo, da imajo **kapacitivni karakter**.

Primer: Na kondenzator kapacitivnosti $8 \mu\text{F}$ priključimo vir napetosti sinusne oblike amplitude 1 V. Kolikšna mora biti frekvenca napetostnega signala, da bo imel tok kondenzatorja amplitudo 2,5 mA?

Izračun: Iz $U_m = \frac{I_m}{\omega C}$ dobimo $\omega C = \frac{1 \text{ V}}{2,5 \text{ mA}} = 400 \Omega$, od koder je

$$\omega = \frac{1}{400 \Omega \cdot 8 \mu\text{F}} = 312,50 \text{ s}^{-1} \text{ oziroma } f = \frac{312,50}{2\pi} \text{ Hz} \approx 50 \text{ Hz}.$$

Vprašanja za obnovo:

- 1) Določitev napetosti na upor, tuljavi, kondenzatorju pri vzbujanju z izmeničnim signalom.
- 2) Zveze med amplitudami toka in napetosti. Upornosti pri izmeničnih signalih.
- 3) Prehitevanje ali zaostajanje toka za napetostjo, karakter vezja.
- 4) Moč: časovni signal, povprečna moč.
- 5) Energija: trenutna, povprečna, maksimalna.

Kolokvijske in izpitne naloge:

kolokvij, 13. 06.2002
 izpit, 20. junij 2003
 Izpit 26. 6. 2002
 izpit, 8. aprila 2002

² Pogosto se uporablja zapis reaktance kondenzatorja kot $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Kasneje bomo ugotovili, da je reaktanca

definirana kot imaginarni del impedance in je v primeru kondenzatorja negativna, torej $X_C = -\frac{1}{\omega C}$.