Energija magnetnega polja

Vsebina: moč in energija, energija sistema tuljav, nadomestna induktivnost, energija v nelinearnih magnetnih strukturah, gostota energije, izračun induktivnosti iz magnetne energije, energija histerezne zanke, izgube v jedru, produkt BH, magnetna sila.

Izhajamo iz moči na tuljavi, ki je enaka produktu toka in napetosti na tuljavi $p = u_L \cdot i_L$. To so sedaj časovno spreminjajoče veličine, lahko bi torej pisali tudi $p(t) = u_L(t) \cdot i_L(t)$. Upoštevamo še izraz za padec napetosti na tuljavi $u_L = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, ki je izražena s produktom induktivnosti in spremembe toka v tuljavi in dobimo $p(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \cdot i(t)$. Integracija moči po času pa je energija $W(t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\mathrm{d}t$. Integracijo po času nadomestimo z integracijo po toku $W(t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} i\mathrm{d}t = \int_{i(t_0)}^{i(t)} Li\mathrm{d}i$ in dobimo $W(t) = \frac{1}{2}L\left(i^2(t) - i^2(t_0)\right)$. Vzemimo, da na začetku ni bilo toka skozi tuljavo ($i(t_0) = 0\,\mathrm{A}$), potem je trenutna energija sorazmerna kvadratu trenutne vrednosti toka skozi tuljavo

$$\boxed{W(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)} \qquad (12.1)$$

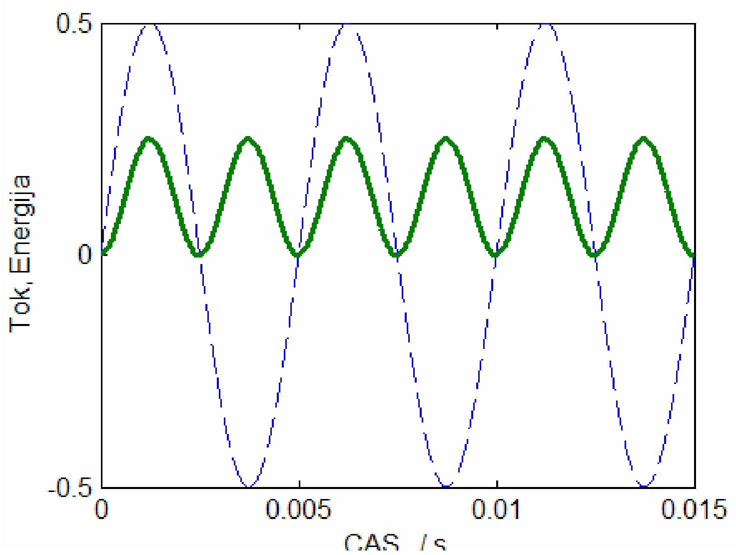
To je energija, ki je shranjena v magnetnem polju tuljave v časovnem trenutku *t*.
Z upoštevanjem zveze med magnetnim sklepom in tokom skozi tuljavo $\Psi(t) = Li(t)$, lahko energijo izrazimo tudi s trenutno vrednostjo magnetnega sklepa

$$W(t) = \frac{\Psi^2(t)}{2L} \ . \qquad (12.2)$$

Primer: Izračunajmo in skicirajmo časovni potek energije v tuljavi z induktivnostjo 2 mH, če skozi ovoje teče tok $0{,}5\sin(\omega t)$ A, kjer je perioda signala T = 5 ms. Določimo še maksimalno vrednosti te energije.

Izračun: Časovna potek energije v tuljavi je $W(t) = 0{,}5 L I_0^2 \sin^2(\omega t)$. Maksimalna energija nastopi pri četrtini periode tokovnega vzbujanja (pri $\omega t = \pi/2$), tedaj je $W_{max} = \underline{\underline{0{,}25\ \mathrm{mJ}}}$.

Napotek: Funkcijo $\sin^2(\omega t)$ enostavno izrišemo, če upoštevamo zvezo $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\omega t)\right)$. Gre torej za harmonični signal dvojne frekvence osnovnega, ki ima dodatno enosmerno komponento, ki je ravno enaka polovici amplitude.



SLIKA: Časovni potek toka (črtkano, v [A]) in magnetne energije (polno, v [mJ])v polju tuljave. Energija je sorazmerna kvadratu toka in v primeru harmoničnega vzbujanja doseže maksimum v četrtini periode signala. Takrat je enaka $0{,}5 L I_0^2$, kjer je I_0 amplituda toka. Matlab: t=0:1e-6:15e-3; om=2*pi/5e-3; i=0.5*sin(om.*t); W=0.25*sin(om.*t).^2; plot(t,i,t,W)

Energija sistema več tuljav. Kakšne pa so energijske razmere, če je tuljav več, med njimi pa je magnetni sklep? V tem primeru je potrebno upoštevati še magnetno energijo zaradi skupnega tvorjenja magnetnega polja v sistemu več tuljav.

Energija v sistemu dveh tuljav je

$$W = \int_{t_0}^{t} \left(\left(u_{L_1} \pm u_{M_{12}} \right) i_1 + \left(u_{L_2} \pm u_{M_{21}} \right) i_2 \right) \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \left[\left(L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M_{12} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \right) i_1 + \left(L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \pm M_{21} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \right) i_2 \right] \mathrm{d}t$$

Predznak je v obeh primerih enak: pozitiven, če se fluksa tuljav »podpirata« in negativen, če se »ne podpirata«. Skupna energija je ob upoštevanju zveze $M = M_{12} = M_{21}$ enaka[1]

$$\boxed{W = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2}. \tag{12.3}$$

Poglejmo še poseben primer, ko gre skozi obe tuljavi isti tok. Tedaj lahko pišemo $W = \frac{1}{2}L_1 i^2 + \frac{1}{2}L_2 i^2 \pm M i^2$. Izpostavimo $i^2/2$ in dobimo

$$\boxed{W = \frac{1}{2}(L_1 + L_2 \pm 2M)i^2}. \tag{12.4}$$

Izraz v oklepaju lahko »razumemo« kot skupno (nadomestno) induktivnost, ki bo torej

$$\boxed{L_{nad} = L_1 + L_2 \pm 2M}, \tag{12.5}$$

tako, da je energija sistema dveh sklopjenih tuljsv s skupnim tokom enaka

$$\boxed{W = \frac{1}{2}L_{nad}i^2}.$$

Splošna formula za sistem N sklopljenih tuljav je[2]

$$W(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} L_{jk} \cdot i_j(t) \cdot i_k(t) \tag{12.6}$$

.

Primer: Tuljavi z induktivnostima 2 mH in 4 mH sta vezani zaporedno. Njuna fluksa se podpirata s faktorjem sklopa 0,8. Tok skozi tuljavi je simetrične žagaste oblike s periodo 5 ms in amplitudo 2 A. Skicirajmo potek skupne energije tuljav in izračunajmo velikost energije v času t = 2,5 ms.

---

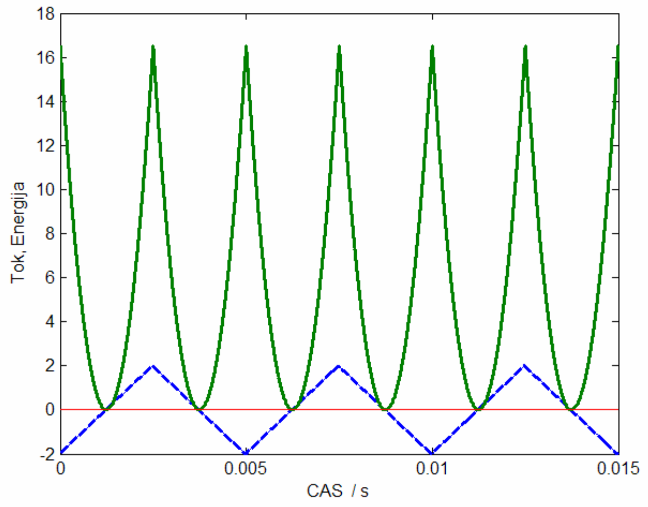
[1] Rešujemo enačbo

$$W = \int_{t_0}^{t}\left(\left(u_{L_1} \pm u_{M_{12}}\right)i_1 + \left(u_{L_2} \pm u_{M_{21}}\right)i_2\right)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t}(L_1 i_1 \mathrm{d}i_1 \pm M_{12} i_1 \mathrm{d}i_2 + L_2 i_2 \mathrm{d}i_2 \pm M_{21} i_2 \mathrm{d}i_1)$$ pri čemer smatramo, da velja $M = M_{12} = M_{21}$. Z upoštevanjem integracije »per partes«: $\mathrm{d}(i_1 i_2) = i_1 \mathrm{d}i_2 + i_2 \mathrm{d}i_1$ velja $\pm(M_{12} i_1 \mathrm{d}i_2 + M_{21} i_2 \mathrm{d}i_1) = \pm M \mathrm{d}(i_1 i_2)$ dobimo

$$\int_{t_0}^{t}(L_1 i_1 \mathrm{d}i_1 + L_2 i_2 \mathrm{d}i_2 \pm M \mathrm{d}(i_1 i_2)) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 .$$

[2] Za izpeljavo glej npr. A.R.Sinigoj, Osnove elektromagnetiko, 367- 370.

SLIKA: Sistem dveh sklopljenih tuljav z istim tokom in nadomestno vezje.



SLIKA: Tok (modra črtkana, v [A]) in skupna energija sistema dveh tuljav (polna črta, v [mJ]). MATLAB: Lnad=8.26e-3; t=0:1e-6:15e-3; om=2*pi/5e-3; i=2*sawtooth(om.*t,0.5); W=1e3*0.5*Lnad*i.^2; plot(t,i,t,W,t,zeros(1,length(t)))

Izračun: Medsebojno induktivnost določimo kot $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0{,}8\sqrt{2\cdot 4}\ \mathrm{mH} \cong 2{,}26\ \mathrm{mH}$. Ker se fluksa vzajemno podpirata je nadomestna induktivnost enaka $L_{nad} = L_1 + L_2 + 2M = (2+4+2\cdot 2{,}26)\ \mathrm{mH} = 10{,}52\ \mathrm{mH}$. Časovni potek energije je parabolično naraščanje in upadanje z dvojno periodo tokovnega vzbujanja. V času 2,5 ms je tok enak 2A in velikost energije

$$W = \frac{1}{2} i^2 L_{nad} = 0{,}5\cdot(2\mathrm{A})^2\cdot 10{,}52\ \mathrm{mH} = 21{,}04\ \mathrm{mJ}.$$

Energija magnetnega polja v nelinearnih magnetnih strukturah

Pri doslej izpeljanih izrazih za energijo v magnetnem polju magnetnih struktur (tuljav) smo predpostavili linearno zvezo med fluksom in tokom: $\Phi = Li$. Ta predpostavka je pogosto upravičena, vsekakor tedaj, ko nimamo opravka z magnetnimi materiali ali pa tedaj, ko je upravičena linearizacija magnetilne krivulje. V teh primerih je relativna permeabilnost konstantna.

Sedaj pa bomo obdelali še primer, ko linearizacija magnetilne krivulje ni upravičena, oziroma, bi s tovrstno poenostavitvijo naredili preveliko poenostavitev. Zanima nas torej energija magnetnega polja v nelinearnih strukturah, v feromagnetnih jedrih, kjer je zveza med B-jem in H-jem oziroma magnetnim sklepom in vzbujalnim tokom nelinearna. Še več, običajno imamo opravka s histerezno zanko.

Izhajamo iz osnovne zveze $p = i \cdot u$ in $u = \dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$, od koder je $\mathrm{d}W = p\mathrm{d}t = i\mathrm{d}\Psi$.

Energija, potrebna za magnetenje od časa 0 do t je enaka $W_{mag}(t) = \int_0^t i\mathrm{d}\Psi$. Vzemimo feromagnetno jedro, tesno ovito z N ovoji, kjer velja Amperov zakon $Ni = \oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$; za diferencial magnetnega sklepa lahko pišemo $\mathrm{d}\Psi = N\mathrm{d}\Phi = N\left(\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}\right)$. Z upoštevanjem obeh zvez, pa tudi tega, da bo potrebno paziti na časovno spremembo Bja, dobimo $W_{mag}(t) = \int_0^t \oint_L \int_A \left(\frac{1}{N}\vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\right)\left(N\mathrm{d}\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}\right)$. Enačbo preuredimo tako, da združimo integracijo po površini in dolžini v integracijo po volumnu[3]:

$$W_{mag}(t) = \int_V \left(\int_0^t \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{B} \right) \mathrm{d}V \qquad (12.7)$$

V oklepaju v enačbi (12.7) lahko razpoznamo **gostoto magnetne energije**, ki jo lahko zapišemo kot

$$\boxed{w_{mag}(t) = \int_{B(t)} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{B}}, \qquad (12.8)$$

---

[3] To lahko naredimo, ker so trije od štirih vektorjev v integralu kolinearni (enako usmerjeni). To so $d\vec{B}, d\vec{A}, d\vec{l}$. Zato lahko združimo $\left(\vec{H} \cdot d\vec{B}\right)$ in $\left(d\vec{l} \cdot d\vec{A}\right)$.

pri čemer je potrebno integrirati jakost polja po gostoti pretoka. Če magnetimo material od B = 0 T do nekega B_0, bo $w(B_0) = \int_0^{B_0} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{B}$.

SLIKA: Integracija gostote magnetne energije. Integriramo vzdolž B osi!

Gostota energije pri linearni magnetilni krivulji.

V primeru, da imamo opravka z materialom, ki ga lahko opišemo z linearno magnetilno krivuljo, lahko uporabimo zvezo $B = \mu H$, kar vstavimo v gornjo enačbo in določimo gostoto energije kot

$$\boxed{w = \frac{B^2}{2\mu}} \qquad (12.9)$$

oziroma, če magnetimo do B_0 je $w(B_0) = \frac{B_0^2}{2\mu}$.

Celotno energijo magnetenja dobimo z integracijo gostote energije po volumnu

$$W = \int_V \frac{B^2}{2\mu} \mathrm{d}V . \qquad (12.10)$$

Če predpostavimo homogeno polje v volumnu, pa je energija kar

$$W = \frac{B^2}{2\mu} V . \qquad (12.11)$$

To enačbo lahko zapišemo tudi s H-jem kot $W = \frac{\mu H^2}{2} V$.

Pokažite enakost izraza $W = \frac{\mu H^2}{2} V$ in $W = \frac{Li^2}{2}$.

Primer: Jedro brez zračne reže iz feromagnetnega materiala z μ_r = 850 ima 350 ovojev. Presek jedra ima površino 3 cm^2, srednja dolžina gostotnice pa je 60 cm. Določimo magnetno energijo v jedru pri enosmernem toku skozi ovoje 2 A.

Izračun: $H = \dfrac{NI}{l} = \dfrac{350 \cdot 2\text{A}}{0{,}6\text{m}} = 1166{,}7\,\text{A/m}$

$$w = \frac{\mu_r \mu_0 H^2}{2} = \frac{850 \cdot 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} (1166{,}7 \frac{\text{A}}{\text{m}})^2}{2} = 727\ \text{J/m}^3$$

$$W = wV = 727 \cdot 0{,}6 \cdot 3 \cdot 10^{-4}\ \text{J} = \underline{\underline{0{,}13\,\text{J}}}\,.$$

SLIKA: Primer jedra z linearno magnetilno krivuljo s prikazom gostote energije v jedru kot površine med magnetilno krivuljo in B osjo.

Energija v nelinearnih magnetnih strukturah.

V primeru, da je magnetilna krivulja nelinearna, je potrebno energijo računati neposredno iz enačbe (12.8). Lahko tudi zapišemo *diferencial gostote magnetne energije*, ki bo

$$\mathrm{d}w = \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{B}\,. \tag{12.12}$$

Gostoto energije dobimo torej z integracijo površine med magnetilno krivuljo in osjo B:

$$w = \int_{B_{začetna}}^{B_{končna}} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{B}\,. \tag{12.13}$$

Če upoštevamo celotno histerezno zanko, ugotovimo, da bo gostota energije v tem materialu enaka površini histerezne zanke:

$$w = A_{\text{BH zanke}}\,. \tag{12.14}$$

SLIKA: Primer jedra z nelinearno magnetilno krivuljo s prikazom gostote energije v jedru kot površine med magnetilno krivuljo in H osjo.

Primer: Vzemimo primer linearizirane magnetilne krivulje, ki jo opišemo s prelomnima točkama B_1 = 1T, H_1 = 1200 A/m in B_2 = 1,2 T, H_2 = 2400 A/m. Določimo gostoto magnetne energije v jedru feromagnetika s podano magnetilno krivuljo, če ga magnetimo od 0 T do gostote 1,1 T.

Izračun: Izračunati je potrebno integral po enačbi (12.13), ki pa ga v primeru linearizirane krivulje lahko določimo preprosto iz delnih površin krivulje:

$$w = \frac{1200\,\mathrm{A/m}\cdot 1\mathrm{T}}{2} + 1200\,\mathrm{A/m}\cdot 0{,}1\mathrm{T} + \frac{600\,\mathrm{A/m}\cdot 0{,}1\mathrm{T}}{2} = \underline{\underline{750\,\mathrm{J/m^3}}}$$

SLIKA: Odsekoma zvezna magnetilna krivulja in gostota energije kot površina med histerezno krivuljo in B osjo.

Produkt B in H

V poglavju 9 smo že govorili o trdomagnetnih in mehkomagnetnih materialih in omenili, da je lastnost trdomagnetnih materialov velika remanenčna gostoto polja (B_r), pa tudi velika koercitivna jakost polja (H_c). Ugotovitev tega poglavja je, da je gostota magnetne energije sorazmerna produktu Hja in Bja. V tem smislu lahko delimo materialne na trdomagnetne in mehkomagnetne po maksimalni gostoti energije, ki jo dosežejo ti materiali. Ta produkt določimo kot pravokotnik z največjo površino v drugem kvadrantu magnetilne $B(H)$ krivulje. S pojmom gostote energije se v praksi predvsem označuje trdomagnetne materiale, ki se jih glede na ta kriterij lahko deli še nadalje: v t.i. konvencionalne tromagnetne materiale s produktom $(BH)_{max}$ med 2 in 80 kJ/m^3 (npr. AlNiCo: aluminij-nikelj-kobalt) in visokoenergijske trdomagnetne materiali (npr. SmCo: samarij-kobalt in NeFeB: neodij.železo-bor) s produktom

$(BH)_{\max}$ nad 80 kJ/m^3. Tipične vrednosti prikazujeta sledeči tabeli (ponovno ugotovimo vzrajnost pojavljanja enot kot so Oe: Oerstead in G: Gauss):

Material	Composition (*wt* %)	*Remanence* B_r [*tesla* (*gauss*)]	*Coercivity* H_c [*amp-turn/m* (*Oe*)]	$(BH)_{max}$ [*kJ/m*^{3} (*MGOe*)]	*Curie Temperature* T_c [°C (°F)]	*Resistivity* ρ (Ω-*m*)
Tungsten steel	92.8 Fe, 6 W, 0.5 Cr, 0.7 C	0.95 (9500)	5900 (74)	2.6 (0.33)	760 (1400)	3.0×10^{-7}
Cunife	20 Fe, 20 Ni, 60 Cu	0.54 (5400)	44,000 (550)	12 (1.5)	410 (770)	1.8×10^{-7}
Sintered alnico 8	34 Fe, 7 Al, 15 Ni, 35 Co, 4 Cu, 5 Ti	0.76 (7600)	125,000 (1550)	36 (4.5)	860 (1580)	—
Sintered ferrite 3	$BaO{-}6Fe_2O_3$	0.32 (3200)	240,000 (3000)	20 (2.5)	450 (840)	$\sim 10^4$
Cobalt rare earth 1	$SmCo_5$	0.92 (9200)	720,000 (9,000)	170 (21)	725 (1340)	5.0×10^{-7}
Sintered neodymium-iron-boron	$Nd_2Fe_{14}B$	1.16 (11,600)	848,000 (10,600)	255 (32)	310 (590)	1.6×10^{-6}

SLIKA: Trdomagnetni materiali: kompozicija, B_r, H_c, $(BH)_{\max}$, Curiejeva temperatura in specifična upornost. Vir: Povzeto po ASM Handbook, Vol.2, ASM International, 1990.

Material	Composition (*wt* %)	*Initial Relative Permeability* μ_i	*Saturation Flux Density* B_s [*tesla* (*gauss*)]	*Hysteresis Loss/Cycle* [*J/m*^{3} (*erg/cm*^{3})]	*Resistivity* ρ (Ω-*m*)
Commercial iron ingot	99.95Fe	150	2.14 (21,400)	270 (2700)	1.0×10^{-7}
Silicon–iron (oriented)	97Fe, 3Si	1400	2.01 (20,100)	40 (400)	4.7×10^{-7}
45 Permalloy	55Fe, 45Ni	2500	1.60 (16,000)	120 (1200)	4.5×10^{-7}
Supermalloy	79Ni, 15Fe, 5Mo, 0.5Mn	75,000	0.80 (8000)	—	6.0×10^{-7}

SLIKA: Mehkomagnetni materiali: kompozicija, začetna permeabilnost, maksimalna (saturacijska) gostota polja, histerezne izgube (gostota energije), specifična upornost. Vir: Povzeto po ASM Handbook, Vol.2, ASM International, 1990.

Izgube v jedru.

Energija, vložena v grajenje magnetnega polja v nelinearni magnetni strukturi je nepovratna. Uporabi se za magentenje materiala, za obračanje t.i. Weissovih obsegov, pri čemer pride do (mehanskega) trenja. Če je tok v ovojih na jedru izmeničen in »obhodi« histerezno krivuljo f krat na sekundo (frekvenca signala), bo gostota izgubne moči enaka (iz $w = pT$):

$$p_{hist} = fA_{\text{BH zanke}} \tag{12.15}$$

celotna *histerezna izgubna moč* pa bo enaka gostoti moči pomnoženi z volumnom materiala[4]

$$P_{hist} = p_{hist} V \,. \qquad (12.16)$$

Opozorilo: $A_{\mathrm{BH\ zanke}}$ predstavlja gostoto energije, enota je $\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\mathrm{T} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right]$, V predstavlja volumen [m^3].

Primer: Določimo histerezno izgubno moč jedra prostornine 120 cm^3, katerega magnetilna krivulja je na sliki. (Je v obliki kvadrata z B_r = 1,5 T in H_c = 2000 A/m). Vzbujalni signal ima frekvenco 50 Hz.

SLIKA: Histezna zanka določena z B_r in H_c.

Izračun: Površina histerezne zanke je 4·1,5T·2000 A/m = 12000 J/m^3. To je gostota magnetne energije, ki je potrebna za magnetenje jedra. Gostota izgubne moči je po enačbi (12.14): 50s^{-1}·12000 J/m^3=6·10^5 J/(s m^3), celotna moč histereznih izgub pa 120·10^{-6} m^3·6·10^5 J/(s m^3) = 72 W.

[4] V praksi se običajno histerezne izgube računa po formuli $k_h f B^2$ [W/kg], kjer je k_h konstanta. Za več informacij o načrtovanju transformatorjev in dušilk priporočam priročnik F. Mlakar, I Kloar: Mali transformatorji in dušilke, Elektrotehniški vestnik, 1970. (na razpolago v knjižnici FE). V praktičnih formulah pogosto namesto kvadrata Bja nastopa lahko tudi različen faktor, tako recimo Steinmetzova formula vzame za eksponent vrednost 1,6, konstanta k_h pa npr. 0,0002 za mehko železo in 0,003 za jeklo. (M.A. Plonus: Applied Electromagnetics). Poleg histreznih izgub lahko nastopajo še izgube zaradi vrtinčnih tokov. Te so za prevodne feromagnetike običajno sorazmerne kvadratu gostote pretoka in kvadratu frekvence ($f^2 B^2$).

Določevanje induktivnosti iz magnetne energije.

Enačba za izračun energije v magnetnem polju je primerna tudi za določevanje lastne induktivnosti. Pri enosmernem toku skozi vodnik je magnetna energija v prostoru enaka

$$W = \frac{LI^2}{2} \tag{12.17}$$

Če je induktivnost neznana, magnetno energijo, ki jo v prostoru povzroča tok v vodniku pa znamo določiti na drug način, lahko induktivnost iz energije določimo iz

$$\boxed{L = \frac{2W}{I^2}}. \tag{12.18}$$

Kako pa izračunamo magnetno energijo na drugačen način kot s pomočjo induktivnosti? Iz poznavanja gostote magnetnega pretoka v prostoru. Določimo gostoto energije po enačbi $w = \dfrac{B^2}{2\mu}$ in jo integriramo po volumnu:

$$W = \int_V w\mathrm{d}V \tag{12.19}$$

Ta zapis je posebno primeren tedaj, ko je težko določiti fluks skozi ploskev. Tak primer so polni vodniki, ki imajo magnetno polje tudi v notranjosti vodnika in ne le v zunanjosti. Torej je tudi v notranjosti vodnika določena magnetna energija, ki prispeva k celotni induktivnosti vodnika.

Primer: Določimo induktivnost na enoto dolžine za notranjost (okroglega) vodnika polmera 1,5 cm. Vodnik je iz neferomagnetnega materiala.

Slika: Okrogel vodnik polmera R.

Izračun: Najprej z uporabo Amperovega zakona določimo gostoto pretoka v notranjosti in dobimo $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r$ (glej poglavje o Amperovem zakonu). Nato zapišemo gostoto energije znotraj vodnika v skladu z enačbo:

$w=\frac{B^2}{2\mu_0}=\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2}r\right)^2/\frac{1}{2\mu_0}$. Gostoto energije je potrebno integrirati po celotnem volumnu vodnika $W=\int_V w\mathrm{d}V=\int_0^{r_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2}r\right)^2\frac{1}{2\mu_0}\left(2\pi r\mathrm{d}r\cdot l\right)=\frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$, kjer je l dolžina vodnika. Induktivnost znotraj vodnika je enaka $L=\frac{2W}{I^2}\ \Rightarrow\ L/l=\frac{\mu_0}{8\pi}$. Dobimo zanimiv rezultat, da induktivnost notranjosti vodnika ni odvisna od polmera vodnika. Na enoto dolžine je enaka $L/l=\frac{4\pi 10^{-7}\,\mathrm{H/m}}{8\pi}=\underline{\underline{50\ \mathrm{nH/m}}}$.

<u>Dodatno:</u> Določimo še preostalo induktivnost vodnika (v okolici).

Polje je tudi izven vodnika, kar je seveda tudi potrebno upoštevati pri induktivnosti vodnika. Gostota polja izven vodnika je $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, gostota energije je torej $w=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2$, celotna energija pa $W=\int_{r_0}^{\infty}\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 l2\pi r\mathrm{d}r=k\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r}=\infty$.

Dobimo rezultat, s katerim prav gotovo ni nekaj v redu, saj energija ne more biti neskončna. Pa vendar, rezultat je smiseln, če je smiseln tudi neskončen vodnik. Neskončen vodnik pa je le koncept, ki nam poenostavi razumevanje polja, saj zelo dolg vodnik v svoji okolici povzroča polje, ki ni dosti drugačno, kot bi ga povzročal neskončen vodnik. Se pa zaplete pri določenih izračunih, kjer postane neskončnost problematična, kot je na primer računanje fluksa ali energije v neskončni okolici vodnika. Rešitev je v upoštevanju realnih primerov, kjer mora biti vodnik zaključen, da lahko v njem teče tok. Tak je primer dvovoda, ki smo ga že obravnavali v poglavju o magnetnem pretoku, kjer smo izračunali induktivnost med dvovodoma. Lahko pa induktivnost takega dvovoda obravnavamo tudi iz izraza za energijo, kjer je potrebno namesto integracijo do neskončnosti integrirati od polmera vodnika do sredine drugega vodnika. Dobimo $W=\int_{r_0}^{d}\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 l2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_{r_0}^{d}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{d}{r_0}$ in $L=\frac{2W}{I^2}=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{d}{r_0}$. S tem smo upoštevali šele energijo, ki jo prispeva en vodnik. Za celotno induktivnost dvovoda moramo upoštevati fluksa obeh vodnikov, skupni rezultat še z induktivnostjo v notranjosti vodnika bo $L_{dvovoda} = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{r_0} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d}{r_0}\right)$.[5]

Magnetna sila.

Ko nas zanima sila med poloma magneta, v zračni reži magneta ali pa med dvema vodnikoma s tokom, moramo ločiti dva primera:

1) **ko ni virov, ki bi dovajali energijo v sistem. Tedaj bo X komponenta sile enaka**

$$\boxed{F_x = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial x}\right|_{\Phi=konst}} \tag{12.20}$$

ali v splošnem

$$\overline{F} = -\left.\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}, \frac{\partial W_m}{\partial y}, \frac{\partial W_m}{\partial z}\right)\right|_{\Phi=konst}, \tag{12.21}$$

kjer je ∂W sprememba energije shranjene v magnetnem polju. Mehansko delo bo v tem primeru zmanjšalo magnetno energijo. Tipičen primer je trajni magnet.

2) **Ko je vir priključen in konstanten bo X komponenta sile enaka**

$$\boxed{F_x = \left.\frac{\partial W_m}{\partial x}\right|_{I=konst}}. \tag{12.22}$$

V tem primeru pa bo opravljeno mehansko delo rezultiralo v povečanju magnetne energije, ki bo "prišla" iz vira(ov). Tipičen primer je elektromagnet.

Vzemimo trajni magnet z režo razdalje x in preseka A v smeri osi X. Magnetna energija v zračni reži je $\boxed{W_\delta = \frac{B_\delta^2 Ax}{2\mu_0}}$. Pri tem smo predpostavili, da v zračni reži ni stresanja polja. Silo dobimo z odvajanjem energije po x-u: $\boxed{F_x = \frac{\partial W_\delta}{\partial x} = \frac{B_\delta^2 A}{2\mu_0}}$.

[5] Rezultat je pravilen, čeprav je bil izračun induktivnosti izven notranjosti vodnika nekoliko poenostavljen. Bolj poglobljena analiza upošteva razdelitev vodnika na splošne zanke in izračun povprečnega pretoka med dvovodoma. (Glej na npr. A.R: Sinigoj: Osnove elektromagnetike) Končni rezultat pa je enak, kot ta, ki smo ga navedli.

Pozitivni predznak pomeni predvsem to, da bo energija sistema po opravljenem mehanskem delu večja kot pred tem.

Sila med poloma je vedno taka, da ju vleče skupaj, kar velja tudi za sistem magnet – feromagnetik. V tem primeru pride do analognega procesa kot pri električni indukciji. Na strani feromagnetika, ki je bliže severnemu polu magneta, se inducira južni pol (usmerijo se magnetni dipolni momenti), kar pomeni, da se trajni magnet in feromagnetik privlačita. Poseben primer so diamagnetiki, ki bi se odbijajo od magnetov[6].

Primer: Magnetno jedro E oblike na skici (a = 5 cm, A = 1 cm^2) z μ_r = 1000 ima magnetilno tuljavo na srednjem stebru. Določimo težo pločevine, ki jo še lahko drži elektromagnet, če je v N = 200 ovojih tok 1,2 A. Magnetno upornost pločevine zanemarimo, zaradi hrapavosti površine pa upoštevamo 50 μm širine zračne reže.

Slika: Magnetno jedro E oblike.

Izračun: Narišemo magnetno vezje in določimo fluks v srednjem stebru. Dobimo

$$\Phi_2\left(R_{m2}+R_\delta+\frac{R_{m1}+R_\delta}{2}\right)=NI$$

$$\Phi_2=\frac{NI}{\dfrac{a}{\mu_r\mu_0 A}+\dfrac{\delta}{\mu_0 A}+\dfrac{2a}{2\mu_r\mu_0 A}+\dfrac{\delta}{2\mu_0 A}}=\frac{\mu_0 ANI}{\dfrac{2a}{\mu_r}+\dfrac{3\delta}{2}}\cong 172{,}34\ \mu\text{Wb}\ .$$

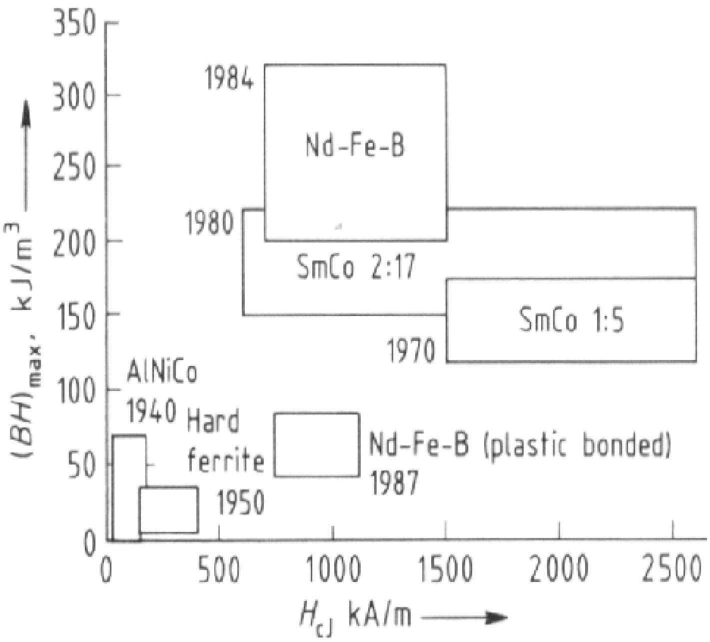
Upoštevati moramo silo v vseh treh zračnih režah, formulo za silo v zračni reži pa zapišemo s fluksom $F=\dfrac{B^2 A}{2\mu_0}=\dfrac{\Phi^2}{2\mu_0 A}$. Upoštevamo še, da je v stranskih stebrih fluks 2x manjši od tistega v srednjem stebru in dobimo

[6] Odboj je neodvisen od postavitve diamagnetika in omogoča lebdenje (levitacija) diamagnetnega materiala. Ker pa so ti efekti zelo šibki, so za opazovanje lebdenja potrebna zelo velika polja, ki jih običajno dosežemo s superprevodnimi magneti.

$$F=\frac{1}{2\mu_0 A}\left(2\Phi_1^2+\Phi_2^2\right)=\frac{3/2\,\Phi_2^2}{2\mu_0 A}\cong 177{,}3\ \mathrm{N}$$. To silo izenačimo s silo teže in dobimo

$$m\cong\frac{177{,}3\ \mathrm{N}}{9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}\cong\underline{\underline{18{,}1\ \mathrm{kg}}}.$$

SLIKA: Gostota energije je pomemben podatek za izbiro trajnih magnetov. Največjo energijsko vrednost imata materiala Nd-Fe-B in Sm-Co. V končni fazi je seveda izbira materiala odvisna od razmerja med ceno in učinkom.



Primer kolokvijskih in izpitnih nalog :

Magnetna sila:

izpit, 23. januar 2007
izpit, 4. februar 2005

Energija:
Drugi kolokvij OE II , 29.05 2002

2. kolokvij (11.06.2002)

POVZETEK:

1) V primeru linearne zveze med fluksom in tokom v magnetni strukturi, lahko energijo sistema (tuljave) izrazimo z lastno induktivnostjo kot $W(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$.
2) V primer dveh sklopljenih linearnih sistemov velja zveza $W = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$, ki je v primeru istega toka skozi oba elementa $W = \frac{1}{2}\left(L_1 + L_2 \pm 2M\right)i^2$ ali tudi $W = \frac{1}{2}L_{nad}i^2$, kjer je $L_{nad} = L_1 + L_2 \pm 2M$. Predznak je odvisen od tega ali se fluksa obeh tuljav podpirata (+) ali nasprotujeta (-).
3) Če je zveza med fluksom in tokom nelinearna, je potrebno magnetno energijo določiti iz gostote energije, ki je enaka $w_{mag}(t) = \int\limits_{B(t)} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{B}$. Gre za integracijo magnetilne krivulje vzdolž B osi.
4) V primeru linearne ali linearizirane magnetilne krivulje, je gostota energije določena z $w(B_0) = \frac{B_0^2}{2\mu}$, celotna energija v jedru (ob predpostavki homogenosti polja v jedru) pa $W = \frac{B^2}{2\mu}Al$.
5) Površina histrezne zanke je sorazmerna histereznim izgubam. Zato so za uporabo pri velikih izmeničnih signalih (npr. transformatorji) bolj primerna mehkomagnetna jedra. Moč histereznih izgub je $p_{hist} = f \cdot A_{\mathrm{BH\ zanke}}$, kjer je f frekvenca vzbujalnega signala, $A_{\mathrm{BH\ zanke}}$ pa površina histerezne zanke.
6) Z upoštevanjem izraza za energijo tuljave $W = \frac{LI^2}{2}$ lahko ob poznavanju energije določimo lastno indukcivnost kot $L = \frac{2W}{I^2}$.
7) Silo v magnetnem polju dobimo s parcialnim odvajanjem magnetne energije in je $\vec{F} = \pm\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}, \frac{\partial W_m}{\partial y}, \frac{\partial W_m}{\partial z}\right)$. Predznak je odvisen od tega, ali je v sistem vključen vir (pozitivni predznak) ali ni vira (negativen predznak). Sila v zračni reži je $F = -\frac{B_\delta^2 A}{2\mu_0}$. Negativni predznak nastopa v smislu zmanjšanja energije sistema.