MAGNETNI PRETOK – FLUKS

Equation Section 4

Vsebina poglavja: Določitev magnetnega pretoka, brezizvornost magnetnega polja, upodobitev polja z gostotnicami, induktivnost, lastna induktivnost, magnetni sklep.

Veličina, ki jo v magnetiki napogosteje obravnavamo in pogosto imenujemo kar magnetno polje, je gostota magnetnega pretoka (B). Gotovo mora obstajati tudi veličina, ki ji rečemo magnetni pretok? Velja si predstavljati analogijo z gostoto električnega toka J in celotnim tokom I. Pri tokovnem polju smo uporabili zapis $I = \int_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$, kjer I predstavlja tok, ki gre skozi neko (nezaključeno !) ploskev. V magnetiki zapišemo na podoben način

$$\boxed{\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}}, \qquad (4.1)$$

kjer Φ imenujemo magnetni pretok, pogosto pa tudi magnetni fluks ali kar samo fluks. Enota je T m^2, ali pa Wb (Weber),ali pa tudi V s.

SLIKA: Magnetni pretok je enak integralu normalne komponente gostote magnetnega pretoka po določeni površini. Predstavljamo si ga z analogijo med gostoto (električnega) toka in gostoto magnetnega pretoka (J in B) ter tokom in fluksom (I in Φ).

Izračun fluksa. Za izračun magnetnega pretoka moramo torej poznati vektor gostote magnetnega pretoka povsod po površini, skozi katero nas zanima pretok. Pri izračunu pretoka preko določene površine je potrebno upoštevati le tisto komponento gostote pretoka, ki je pravokotna na površino, torej tisto, ki »prebada« površino. V enačbi to izrazimo z uporabo skalarnega produkta med vektorjema polja in diferenciala površine. Rezultat te operacije je skalar. Če je polje homogeno povsod po površini, lahko (4.1) zapišemo v preprostejši obliki:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_A \vec{B} \cdot \vec{e}_n \mathrm{d}A = BA\cos\alpha \qquad (4.2)$$

kjer je alfa kot med smerjo Bja in normalo na površino (SKICA). Če je polje pravokotno na ravno površino, je fluks največji in enak kar

$$\Phi = BA. \qquad (4.3)$$

Primer: Homogeno polje 5 mT je usmerjeno pod kotom 60^0 na normalo na pravokotno zanko površine 4x5 cm^2. Določimo magnetni pretok skozi zanko.

SLIKA: Homogeno polje usmerjeno pod kotom na pravokotno zanko.

Izračun: Zaradi homogenosti polja po površini zanke lahko uporabimo izraz $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = BA\cos\alpha$ in $\Phi = 5\mathrm{mT} \cdot 20 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2 \cos 60^0 = 5\ \mu\mathrm{Vs} = 5\ \mu\mathrm{Wb}$.

Primer: Določimo magnetni pretok skozi pravokotno zanko, ki je v ravnini ravnega vodnika s tokom 36 A in od vodnika oddaljena za a = 5 cm. Dolžina zanke je l = 10 cm, širina pa b = 4 cm.

Izračun: Skicirajmo zanko v ravnini XY in izračunajmo pretok skozi zanko v smeri osi Z. Vodnik naj leži na Y osi, s tokom, usmerjenim v smeri -Y osi. V tem primeru je polje vodnika za $x > 0$ enako $\vec{B} = \vec{e}_z \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$, diferencial površine pa je $\mathrm{d}\vec{A} = \vec{e}_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Velja

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_a^{a+b} \int_0^l \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot \vec{e}_z \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \ln\frac{a+b}{a}.$$

V dobljeno enačbo vstavimo vrednosti in dobimo

$$\Phi = \frac{4\pi 10^{-7} \dfrac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{A\cdot m}} 36\ \mathrm{A}}{2\pi} 0{,}1\ \mathrm{m} \cdot \ln\frac{9\ \mathrm{cm}}{5\ \mathrm{cm}} = 423\ \mathrm{nV\cdot s} = \underline{\underline{423\ \mathrm{nWb}}}.$$

SLIKA: Pravokotna zanka in vzporedno ležeči vodnik.

Primer: Določimo fluks med ravnima vodnikoma (dvovodom) s polmeroma R = 0, 5 cm in medosno razdaljo d = 2 m na dolžini 100 m. Tok v vodnikih je 150 A.

Izračun: Način izračuna je podoben, kot v prejšnjem primeru. Ugotovimo, da se polji med vodnikoma seštevata, zaradi enakih dimenzij vodnikov pa se seštevata tudi fluksa. Zato je $\Phi = 2 \cdot \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{d-R}{R} \cong \underline{\underline{35{,}9\ \mathrm{mWb}}}$.

SLIKA: Ravna vodnika (dvovod).

Brezizvornost magnetnega polja. Koliko pa je fluks skozi zaključeno površino? Ker je polje vrtinčno, enak del pretoka, ki v določen prostor vstopa, tudi izstopa. Integral polja po zaključeni površini bo torej enak nič ali z enačbo

$$\boxed{\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0}. \tag{4.4}$$

SLIKA: Enaka količina fluksa, kot v določen zaključen prostor vstopa, na drugem delu prostora tudi izstopa. Zaključeno površino razdelimo na štiri površine. Vsota štirih fluksov iz te površine je enaka $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = 0$.

To je pomemben rezultat, saj govori o brezizvornosti magnetnega polja. Da torej ne obstaja magnetni izvor in ponor v podobnem smislu, kot to poznamo pri električnem naboju. Temu zapisu lahko rečemo tudi **Gaussov zakon za magnetiko**, in predstavlja eno od Maxwellovih enačb (3.) – zopet le v integralni obliki.

Primerjava z Gaussovim zakonom iz elektrostatike. Tam je bil integral Eja po zaključeni površini sorazmeren zaobjetemu naboju. Iz tega je sledil zaključek, da je električno polje izvorno (izvira na pozitivni nabojih in ponira na negativnih). Analogno električnim nabojem ne moremo najti magnetnega naboja. Torej **magnetno polje ni izvorno**. Včasih rečemo tudi, da je solenoidno.Vsak trajni magnet je tako izvor kot ponor magnetnega polja. Se pa kljub neobstoju magnetnega naboja v smislu analogije in lažjega računanja polj trajnih magnetov včasih uporablja tudi pojem magnetnega naboja, oziroma bolj natančno magnetnega površinskega naboja.

Upodobitev magnetnega polja z gostotnicami. Gostoto pretoka smo lahko prikazali z množico puščic (vektorjev) v prostoru. Če te puščice med seboj povežemo v krivulje, dobimo *gostotnice* (včasih se jih imenuje tudi *silnice*). Prostor med gostotnicami si lahko zamislimo kot cevke z določeno velikostjo pretoka. Pretok torej lahko vizualiziramo (predstavljamo) z *gostotnimi cevkami*. Ker običajno rišemo polje v dveh dimenzijah, gostotne cevke zapolnjujejo prostor med dvema gostotnicama. Običajno jih rišemo tako, da je fluks med sosednjimi gostotnicami konstanten $\Delta\Phi_i = konst$. Gostotne cevke ravnega vodnika ponazorimo s koncentričnimi krogi s polmeri, ki se gostijo v smeri manjšanja razdalje od vodnika. Da bo fluks med dvema vodnikoma konstanten, mora veljati $\Delta\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_{i+1}}{r_i} = konst$, oziroma $\frac{r_{i+1}}{r_i} = e^{k\cdot\Delta\Phi}$. Na podoben način smo risali tudi ekvipotencialne ploskve pri elektrostatiki.

SLIKA: Upodobitev magnetnega polja z gostotnimi cevkami.

INDUKTIVNOST (prvič)

Kot vidimo v izrazih za fluks, je le-ta linearno odvisen od toka. Večji je tok, večji je fluks: $\Phi = nekaj \cdot I$. To »nekaj« definiramo kot **induktivnost (simbol *L*), torej velja** $\Phi = LI$ **.**
Sledi, da je induktivnost strukture definirana kot kvocient fluksa in toka:

$$L = \frac{\Phi}{I}, \tag{4.5}$$

Enota za induktivnost je V s/A ali H (Henry).

Primer: Določimo induktivnost dvovoda iz primera 2, če upoštevamo le fluks med žicama (ne tudi v žicah).

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R} \cong \underline{\underline{240\ \mu\text{H}}}.$$

Če bi želeli eksaktno določiti induktivnost dvovoda, bi morali upoštevati tudi tisti del fluksa, ki gre skozi vodnika. Izpeljana enačba $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}$ torej ni eksaktna enačba induktivnosti dvovoda. Ker pa ta fluks ne zajame celotnega toka vodnika, je izpeljava končnega izraza nekoliko bolj zapletena (AR Sinigoj: Osnove elektrotehnike, str. 354). Če bi upoštevali še to, bi kljub vsej zahtevnosti izračuna dobili preprost izraz : $L = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{R}\right)$. Če bi v ta izraz vstavili vrednosti iz primera, bi dobili rezultat približno 250 μH. Očitno je, da je osnovni izraz dovolj natančen, če je le razdalja med vodnikoma mnogo večja od polmera vodnikov.

Magnetni sklep.
Kadar je vodnik izdelan v taki obliki, da gre fluks skozi velč vodnikov, je smiselno definirati novo veličino, ki jo imenujemo magnetni sklep in ga označimo z veliko grško črko Ψ (psi). Magnetni sklep je enak vsoti fluksov skozi vse zanke, ki jih tvori vodnik. V primeru, da gre enak fluks skozi *N* zank, velja kar $\Psi = N\Phi$.
V primeru, da ima struktura več zank, velja

$$\boxed{L = \frac{\Psi}{I}}. \tag{4.6}$$

V primeru, ko tok *I* skozi vodnik (strukturo) ustvarja magnetni sklep Ψ v isti (lastni) strukturi, govorimo o lastni induktivnosti. Če gre isti fluks skozi N zank velja:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I}, \qquad (4.7)$$

Lastna induktivnost solenoida in toroida.

Induktivnost je osnovni podatek za vsako tuljavo. Pogledali si bomo poenostavljena (vendar pogosto v praksi uporabljana) primera izračuna induktivnosti solenoida in toroida, pri čemer bomo predpostavili, da je polje znotraj solenoida (toroida) homogeno.

Primer: Določimo poenostavljen izraz za lastno induktivnost dolgega solenoida in jo izračunamo za primer: polmer tuljave 1 cm, dolžina 5 cm, 100 ovojev.

Izračun: $B \cong \frac{\mu_0 NI}{l}$, $\Phi \cong \frac{\mu_0 NI}{l}A$, $\Psi = N\Phi \cong \frac{\mu_0 N^2 A}{l}I$

$$L = \frac{N\Phi}{I} \cong \frac{\mu_0 N^2}{l}A \cong \underline{\underline{79\ \mu\text{H}}}\,.$$

SLIKA: Dolga ravna tuljava = solenoid.

Poenostavljen izraz za induktivnost tuljave je torej $L = N^2\frac{\mu_0 A}{l}$. Hitro lahko opazimo podobnost z izrazom za kapacitivnost ploščnega kondenzatorja $C = \varepsilon_0\frac{A}{d}$, kjer je l dolžina tuljave, d pa razdalja med ploščama, A površina preseka tuljave oz. plošče kondezatorja. Ugotovimo lahko, da induktivnost tuljave zelo povečamo z večjim številom ovojev.

Primer: Zapišimo poenostavljen izraz za lastno induktivnost toroida krožnega preseka z notranjim polmerom 4 cm in zunanjim 5 cm. Toroid ima 200 ovojev. (Računamo s srednjim polmerom in homogenim poljem znotraj preseka toroida)

SLIKA: Toroid krožnega preseka.

Izračun: $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_{sr}}$, $\Phi \cong \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_{sr}}A$, $\Psi \cong \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi r_{sr}}\pi r_A^2$, $L \cong \frac{\mu_0 N^2}{2 r_{sr}} r_A^2 \cong \underline{\underline{55{,}85\ \mu\text{H}}}$

Induktivnost je geometrijska lastnost. V elektrostatiki smo definirirali kapacitivnost iz zveze med nabojem in napetostjo $Q = CU$. Izračunali smo jo tako, da smo med dve prevodni telesi priključili napetost *U*, pri čemer se je na telesoma nakopičilo naboja $\pm Q$. Izkazalo se je, da je kapacitivnost odvisna le od geometrijskih lastnosti. Podobno velja za induktivnost, kjer velja zveza $\Psi = LI$. Torej, skozi vodnik (zanko) »pošljemo tok I, določimo fluks oziroma magnetni sklep in iz kvocienta določimo induktivnost: $L = \frac{\Psi}{I}$.

POVZETEK:

1) Magnetni pretok ali fluks skozi poljubno površino smo definirali na enak način kot pri tokovnem polju kot $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$. V preprostem primeru, ko je polje homogeno in konstantno po površini *A*, se izraz poenostavi v $\Phi = BA\cos\alpha$, kjer je alfa kot med normalo na površino in smerjo Bja. Pretok je največji, ko je polje usmerjeno pravokotno na površino. Magnetni pretok skozi zaključeno površino je enak nič, kar matematično zapišemo kot $\oint_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$. To je Gaussov zakon za magnetno polje ali tudi zakon o brezizvornosti magnetnega polja.

3) Lastno induktivnost smo zapisali kot $L = \frac{N\Phi}{I}$, enota je H(enry)

4) Izračuni:
   a. fluks skozi pravokotno zanko ob vodniku: $\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \cdot \ln\frac{r_2}{r_1}$
   b. Aproksimativni izrazi za induktivnost:
      i. ravna tuljava: $L \cong \frac{\mu_0 N^2}{l} A$
      ii. toroid: $L \cong \frac{\mu_0 N^2}{2r_{sr}} r_A^2$
      iii. dvovod (brez izpeljave): $L = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d}{R}\right)$

Naloge:

izpit, 17. septembra 2002
izpit, 3. septembra 2002
izpit, 17. 4. 2003
izpit, 5. septembra 2002
izpit, 31. avgust, 2004
Izpit 4. 9. 2003
1. kolokvij, 22. april 2003
Prvi kolokvij, 9. maj 2002