

## MAGNETNE LASTNOSTI SNOVI

**Vsebina poglavja: vektor magnetizacije, magnetni naboj?, zveza med vektorjem magnetizacije in tokom, magnetna poljska jakost in razširjen Amperov zakon, zveza med B, H in M, magnetna susceptibilnost, relativna permeabilnost, zveza med B in H, magnetna napetost, magnetni potencial, mejni pogoji magnetnega polja.**

Vemo, da trajni (permanentni) magnet v svoji okolici povzroča magnetno polje. Kot smo že ugotavljali, splošno velja Gaussov zakon za magnetno polje, ki »govori« o brezizvornosti magnetnega polja. Od kod torej trajnim magnetom lastnost, da povzročajo magnetno polje? Že Ampere je razrešil to vprašanje s trditvijo, da morajo obstajati nekakšni tokovi v snovi, ki to polje povzročajo. Spoznanja moderne fizike so pokazala, da kroženje elektronov okoli jedra atoma pa tudi lastno vrtenje elektrona okoli svoje osi določajo magnetne lastnosti snovi. Kroženje elektrona okoli lastne osi opišemo s spinom elektrona. Spin elektrona je v osnovi pojav, ki ga je mogoče razložiti le z upoštevanjem kvantne fizike, pri čemer se izkaže, da elektron poseduje kotni moment, ki ga je mogoče povezati z magnetnim dipolnim momentom  $m = IA$ . Vsi atomi imajo določene magnetne lastnosti, vendar velika večina zelo šibke, saj se magnetno polje magnetnih momentov posameznih elektronov zaradi njihovega naključnega gibanja izničuje. Snovi s takimi lastnostmi imenujemo *diamagnetiki*. Obstajajo pa določeni atomi, v katerih se magnetni momenti ne izničujejo in povzročajo izrazito magnetno polje v svoji okolici. Materiale s takimi lastnostmi imenujemo *feromagnetiki* (po železu, latinsko Ferrum). Ti lahko tvorijo trajne magnetne, ki si jih lahko predstavljamo kot skupek velikega števila majhnih enako usmerjenih magnetkov. Te magnetke pa lahko opišemo z njihovimi magnetnimi dipolnimi momenti (tokovnimi zankicami), ki v svoji okolici povzročajo magnetno polje, ki je vsota polj posameznih zankic.

**SLIKA: Trajni magnet (S in N), razdeljen na vrsto majhnih magnetov, ki jih opišemo z množico tokovnih zankic.**

**Vektor magnetizacije.** Prehod iz mikroskopskega v makroskopsko obravnavo magnetnega polja trajnih magnetov omogoča definiranje **vektorja magnetizacije**. Ta je definiran kot povprečje magnetnih dipolnih momentov na enoto volumna:

$$\bar{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \bar{m}}{\Delta V}, \quad (8.1)$$

kjer je  $\Delta V$  makroskopsko majhen volumen (ki še vedno vsebuje milijone atomov oziroma magnetnih momentov). Trajni magnet lahko torej namesto z upoštevanjem velikega števila (atomskih - mikroskopskih) magnetnih momentov obravnavamo z (makroskopskim) vektorjem magnetizacije. Ta način obravnave je zelo podoben načinu obravnave električnih lastnosti snovi z vpeljavo vektorja polarizacije  $P$ . Enota vektorja magnetizacije je

$$\left[ \frac{\text{A} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^3} \right] = \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}} \right].$$

### SLIKA: Vektor magnetizacije kot (volumska) gostota magnetnih dipolnih momentov.

**Primer:** Magnet v obliki cilindrične palice premera 1 cm in dolžine 5 cm ima enakomerno magnetizacijo  $M = 5,3 \cdot 10^3 \text{ A/m}$ . Kolikšen je magnetni dipolni moment celotne palice?

Izračun: Uporabimo enačbo (8.1) in pišemo  $m = M \cdot V = M \cdot \pi r^2 L = 2,08 \cdot 10^{-2} \text{ Am}$ .

**Magnetni naboj**<sup>1</sup>. Zgodovinsko gledano je bil za razlago trajnih magnetov, še bolj pa za izračun polja, dolgo v uporabi koncept magnetnega naboja, pač analogno električnemu naboju. Kljub temu, da se zavedamo, da magnetnega naboja v naravi ni, ga lahko definiramo v smislu analogije z električnim nabojem. Obravnavamo ga s površinsko gostoto magnetnega naboja  $\sigma_m$ , ki je lahko pozitiven (na N strani magnetu) ali negativen (na S strani). Celotni magnetni naboj na N površini je tako  $Q_m = \sigma_m \cdot A$ . Če ta naboj primerjamo z vektorjem magnetizacije, ugotovimo, da velja  $\sigma_m = -M_{\perp}$ , kjer je  $M_{\perp}$  komponenta vektorja magnetizacije, ki je pravokotna na površino (normalna komponenta), torej  $\sigma_m = \vec{e}_n \cdot \bar{M}$ .

<sup>1</sup> Kljub temu, da je koncept magnetnega naboja napačen v smislu njenega neobstoja, se v določenih primerih še vedno uporablja (tako v študijski literaturi (npr. W. Saslow: Electricity, magnetism and light, Thomson Learning 2002), kot v praksi).

Magnetni naboj »nastopa« torej le na mestih, kjer je vektor magnetizacije pravokoten na površino. Analogija z elektrostatiko je neposredna: Električna sila na električni naboj je  $\vec{F}_e = Q_e \cdot \vec{E}$ , magnetna sila na »magnetni naboj« pa je  $\vec{F}_m = Q_m \cdot \vec{B}$ . Silo med dvema dolgima paličastima magnetoma razmaknjenima za razdaljo  $r$  (ki je dosti manjši od dolžine) lahko v tem smislu ocenimo kar kot silo med dvema »točkastima« magnetnima nabojema (če upoštevamo le bližnja »pola«):  $F_m = \frac{\mu_0 Q_m^2}{4\pi r^2}$ .

**SLIKA: Vpliv magnetizacije lahko upoštevamo z vpeljavo (fiktivnega) magnetnega naboja, na N strani magneta s pozitivno gostoto magnetnega naboja  $\sigma_m$ , na S strani pa z negativno.**

Ker smo uporabili analogijo z električnim nabojem, lahko uporabimo tudi izraze, ki smo jih izpeljali za električno polje v okolici naelektrenih teles za določitev magnetnega polja v okolici magnetiziranih teles. Na primer, magnetno polje tik nad tanko namagnetneno ploščo lahko določimo analogno električni poljski jakosti naelektrene ravnine  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  kot  $B = \mu_0 \frac{\sigma_m}{2}$

**Primer:** Ocenimo magnetno polje tik nad površino trajnega magneta iz Alnica (AlNiCo) dolžine 15 cm, pravokotnega preseka  $A = 1 \text{ cm}^2$ , z magnetizacijo vzdolž daljše osi  $M = 8,5 \cdot 10^5 \text{ A/m}$ .

Izračun: Največji prispevek lahko pričakujemo od prispevka magnetnega naboja na površini, kjer računamo polje. Tu lahko zaradi velike površine glede na točko merjenja (tik nad površino) uporabimo enačbo za namagnetneno ploščo, torej  $B = \mu_0 \frac{\sigma_m}{2}$ , kjer je  $\sigma_m = M$  in je torej  $B = \mu_0 \frac{M}{2} \cong 0,53 \text{ T}$ . Drugi »pol« je dosti bolj oddaljen in njegov prispevek lahko ocenimo kot prispevek »točkastega magnetnega naboja«. Ta prispevek bo torej velik  $B = \frac{\mu_0 Q_m}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 MA}{4\pi r^2} \cong 377 \text{ }\mu\text{T}$ . To vrednost je potrebno odšteti od že izračunanega, vidimo pa, da

je dosti manjši in ga lahko tudi zanemarimo. Naj ponovno povemo, da magnetnih nabojev NI, lahko pa ta koncept izkoristimo za izračun magnetnega polja v okolici magnetov ali sile na magnetne.

**Zveza med magnetizacijo in površinskim tokom.** Če primerjamo polje, ki ga v svoji okolici povzroča trajni magnet in polje ravne tuljave, ugotovimo, da sta ti dve polji navzven enaki. To nas tudi navede na misel, da lahko polje trajnega magneta prikažemo tudi kot posledico površinskega toka oz. tokovne obloge ( $K_m$ ) ali pa kot tuljavo z  $N$  ovoji in tokom  $I_m$ . Preproste zveze to pokažejo na sledeč način

$$M = \frac{m}{\Delta v} = \frac{I_m \cdot \Delta A}{\Delta A \cdot \Delta l} = \frac{I_m}{\Delta l} \cdot \frac{N}{N} = \frac{NI_m}{l} = K_m. \quad (8.2)$$

**SLIKA: Trajni magnet s prikazom magnetizacije in tokovnih zankic, katerih vpliv na magnetno polje ohranja le prispevek tokov na površini telesa. V tem smislu lahko opišemo vpliv magnetizacije s površinskim tokom oz. tokovno oblogo.**

**Primer:** Ocenimo velikost magnetnega polja v sredini trajnega magneta v obliki diska polmera  $R = 2$  cm in debeline  $l = 5$  mm z magnetizacijo  $M = 5 \cdot 10^4$  A/m v smeri osi. Uporabimo koncept izračuna s pomočjo opisa magneta s tokovno zanko s površinskim tokom.

**Izračun:** Iz enačbe (8.2) ugotovimo, da je  $M = K$ , torej je tok v zanki  $NI_m = Kl = Ml = 250$  A. V

skladu z enačbo za polje v sredini tokovne zanke velja  $B = \frac{\mu_0 I_m}{2R} \cong \underline{\underline{7,85 \text{ mT}}}$ .

**Magnetna poljska jakost (H) in razširjen Amperov zakon.**

Naredimo preprost eksperiment. Vzemimo zračni toroid za katerega smo že pokazali, da je polje v sredini ovojev enako

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}, \quad (8.3)$$

kjer je  $l$  dolžina srednje poti in  $N$  število ovojev. Polje lahko izmerimo na primer s postavitvijo Hallove sonde v sredino ovojev. Nato vzamemo toroidno jedro iz feromagnetika in ga ovijemo z enakim številom ovojev. Pri vzbujanju s tokom  $I$  ugotovimo povečanje polja v sredini ovojev (v praksi bi morali narediti majhno odprtino (režo) v feromagnetik za vstavev Hallove sonde)<sup>2</sup>.

### SLIKA: Primerjava gostote magnetnega pretoka v zračnem toroidu in toroidu s feromagnetnim jedrom.

Amperov zakon, kot smo ga poznali do sedaj, očitno ne bo več primeren za izračun polja v feromagnetiku, saj povečanja polja ne predvidi. Zakon je potrebno spremeniti tako, da bo upošteval tudi vplive magnetnih momentov v feromagnetiku. Spremenjena oblika bo

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N(I + I_m), \quad (8.4)$$

kjer smo z  $NI_m$  označili tok zaradi magnetizacije feromagnetika. Ta tok lahko povežemo z vektorjem magnetizacije, kot smo prikazali z enačbo (8.2). Polje znotraj toroida s feromagnetikom bi torej lahko zapisali kot

$$B = \mu_0 \left( \frac{NI}{l} + \frac{NI_m}{l} \right) = \mu_0 \left( \frac{NI}{l} + M \right). \quad (8.5)$$

Enačbo lahko preuredimo tako, da bo na desni strani enačbe le vzbujanje  $NI$

$$\frac{B}{\mu_0} - M = \frac{NI}{l}. \quad (8.6)$$

Očitno bi torej lahko zapisali Amperov zakon v obliki, ki bi imela na desni strani enačbe le vzbujanje  $NI$ , če bi pisali

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = NI. \quad (8.7)$$

<sup>2</sup> Reža v feromagnetiku bo sicer nekoliko zmanjšala velikost polja, kar s poznavanjem vpliva zračne reže lahko pri izračunu upoštevamo. (To bomo kasneje tudi naredili.) Da bi se izognili temu problemu, lahko spremembo velikosti polja v feromagnetiku ugotovimo tudi posredno z vzbujanjem z izmeničnim signalom in merjenjem inducirane napetosti na dodatnem (sekundarnem) navitju na toroidu. Tudi to bomo spoznali v nadaljevanju.

Enačba postane zopet podobna prvotnemu zapisu Amperovega zakona, če definiramo novo veličino, *magnetno poljsko jakost*  $\vec{H}$  kot

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (8.8)$$

Amperov zakon dobi obliko

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (8.9)$$

V slošnem je potrebno upoštevati, da je integral jakosti magnetnega polja po zaključeni poti enak vsoti vseh objetih konduktivnih tokov, kar lahko zapišemo (tokovno polje!) v obliki

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J}_c \cdot d\vec{A} \quad \text{}^3 \text{ AMPEROV ZAKON} \quad (8.10)$$

$L$  predstavlja zaključeno zanko s površino  $A$ . Bistvena razlika med tem zapisom Amperovega zakona in osnovnim (z Bjem) je v tem, da ta ni odvisen od snovi temveč le od vzbujalnih tokov, ki jih zanka zajame. Vpliv snovi pa dobimo s povezavo med  $B$ ,  $H$  in  $M$ .

Podobno, kot smo modificirali Amperov zakon, lahko modificiramo tudi Biot-Savartov zakon

za izračun polja v okolici tokovodnikov, saj preprosto upoštevamo kar  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ ; ( $\vec{M} = 0$ ):

$$\vec{H} = \int_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (8.11)$$

**Zveza med  $B$ ,  $H$  in  $M$ .** V primeru, da nas zanima gostota magnetnega pretoka pri uporabi feromagnetikov, lahko najprej izračunamo jakost polja (z Amperovim zakonom ali pa z Biot-Savartovim zakonom za  $H$ ), nato pa iz enačbe (8.8) še gostoto pretoka. Pri tem enačbo (8.8) običajno zapišemo kot

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (8.12)$$

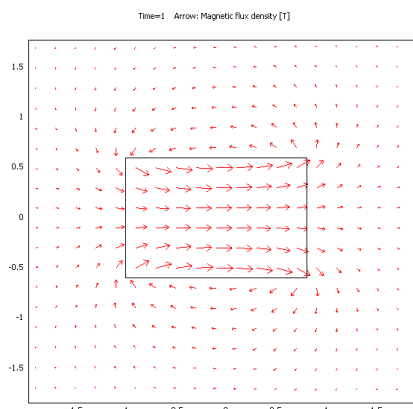
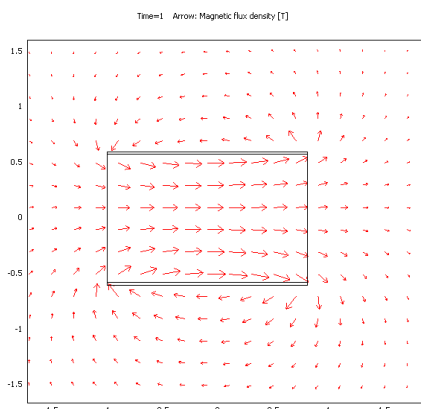
<sup>3</sup> Amperov zakon je ena od osnovnih enačb za opis elektromagnetnega polja. V splošni obliki, ki je tudi znana kot prva Maxwellova enačba, je za tok na desni strani enačbe (8.12) potrebno upoštevati vse vrste tokov, ki vplivajo na razvoj magnetnega polja (konduktivni in poljski tok) in je v integralni obliki običajno zapisana v

obliki  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J}_c \cdot d\vec{A} + \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$ .

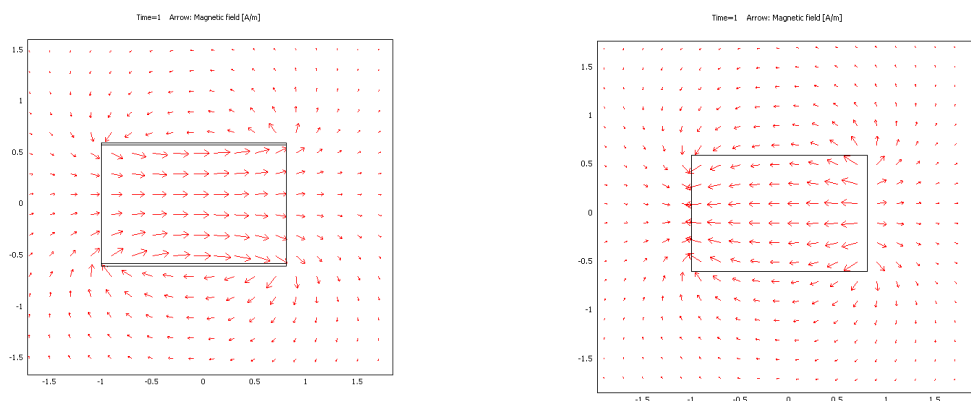
Magnetna poljska jakost ima očitno enako enoto kot vektor magnetizacije, torej A/m in je neposredno povezana s tokovnim vzbujanjem.

**Primer:** Skicirajmo polje znotraj in v okolici trajnega magneta cilindrične oblike z magnetizacijo v smeri osi. Vpliv magnetizacije upoštevajmo kot vpliv tokovne obloge, torej polje določimo kot polje v okolici ravne tuljave (solenoida).

- 1) Gostota magnetnega pretoka (magnetno polje) ima enako obliko kot polje solenoida.
- 2) Zunaj magneta magnetizacije ni  $M = 0$ , torej je v skladu z enačbo (8.12) jakost magnetnega polja  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$  in ima enako smer kot gostota magnetnega pretoka.
- 3) Jakost magnetnega polja znotraj magneta je usmerjena v nasprotni smeri kot je vektor magnetizacije. To sledi iz razširjenega Amperovega zakona, saj ker ni zunanega tokovnega vira velja  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$ , torej mora biti določen del H-ja v smeri poti usmerjen v drugo smer, da bo celotni integral po zaključeni (poljubni) poti enak nič.
- 4) Poleg tega, da je H znotraj magneta v nasprotni smeri, kot je M (in tudi B), je tudi smer drugačna kot smer M-a in B-ja, saj mora veljati  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ , pri čemer sta znotraj magneta B in M drugače usmerjena (razen na osi).



**SLIKA:** Prikaz gostote magnetnega pretoka v okolici tuljave (levo) in trajnega magneta (desno). Trajni magnet ima homogeno magnetizacijo v smeri v desno.



**SLIKA: Prikaz jakost magnetnega polja v okolici tuljave (levo) in trajnega magneta (desno). Trajni magnet ima homogeno magnetizacijo v smeri v desno.**

**Magnetna susceptibilnost in relativna permeabilnost.** Velikost magnetizacije je odvisna od velikost tokovnega vzbujanja. Običajno velja, da večanje vzbujanja povečuje magnetozacijo, saj se usmerjenost magnetnih dipolov z večanjem vzbujanja vedno bolj orientira v smer vzbujalnega polja. To zvezo opišemo kot

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H} \quad ^4, \quad (8.13)$$

kjer  $\chi_m$  imenujemo *magnetna susceptibilnost*, ki je mera za dovzetnost materiala za magnetizacijo pri vzpostavitvi magnetnega polja. Z upoštevanjem te zveze v enačbi (8.12), dobimo

$$\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \chi_m \bar{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\bar{H} = \mu_0\mu_r \bar{H}, \quad (8.14)$$

kjer  $\mu_r$  imenujemo *relativna permeabilnost* in je brez enote. V skladu z enačbo (8.14) določimo  $\mu_r$  iz zveze med  $H$ jem in  $B$ jem

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}. \quad (8.15)$$

**SLIKA: Linearna in nelinearna B/H karakteristika.**

<sup>4</sup> Ta zveza je lahko tudi bolj kompleksna, saj se lahko material različno magnetizira v različnih smereh pri vzpostavitvi magnetnega polja. V takem primeru je potrebno susceptibilnost zapisati kot tenzor (v obliki matrike), kar seveda še dodatno zaplete analizo magnetnih materialov. V tem primeru rečemo, da ima material izotropne lastnosti, sicer pa anizotropne.



Za določen material torej iz poznanega vzbujanja ( $H_j$ ) in izmerjenega polja ( $B_j$ ) določimo relativno permeabilnost. Za feromagnetne materiale se izkaže, da ni linearna in je torej funkcija vzbujanja  $\mu_r = \mu_r(H)$ . Pa ne le to, izkaže se, da se relativna permeabilnost po izključitvi vzbujanja spreminja drugače, kot pri vključitvi. Tej lastnosti rečemo **histereza** in bistveno vpliva na uporabo magnetnih materialov v elektrotehniki.

**Zveza med B in H.** Enačbo (8.14) običajno pišemo kar v obliki

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (8.16)$$

kjer je  $\mu = \mu_r \mu_0$ .

**Analogija z elektrostatiko.** Vsekakor je mogoče najti analogijo z elektrostatiko, kjer smo električne lastnosti materialov opisali z električno susceptibilnostjo ali relativno dielektričnostjo ter zvezo med gostoto električnega pretoka in električno poljsko jakostjo  $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$ . Pri tem velja omeniti, da v smislu osnovnih veličin (tiste, ki so neposredno povezane s pojmom sile) v magnetiki nastopa gostota magnetnega pretoka  $B$ , v elektrostatiki pa električna poljska jakost  $E$ . Gostota električnega pretoka  $D$  in magnetna poljska jakost  $H$  pa sta uvedeni predvsem v smislu lažje obravnave električnega in magnetnega polja v snoveh.

**Primer:** V toroidnem feromagnetnem jedru srednje dolžine 12 cm s 150 ovoji in tokom 1,2 A je vzdolž srednje dolžine gostota magnetnega pretoka 1,22 T. Kolikšna je jakost magnetnega polja, magnetizacija, relativna permeabilnost in magnetna susceptibilnost?

Izračun:

$$H = \frac{NI}{l} = 1500 \text{ A/m},$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H \cong 9,69 \cdot 10^5 \text{ A/m},$$

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} \cong 647, \quad \chi = \mu_r - 1 \cong 646$$

**Magnetna napetost.** V enačbi (8.9) nastopa tok pomnožen s številom ovojev kot vzbujanje (vir) magnetnega polja. Zato ga pogosto imenujemo tudi *magnetna napetost*  $\Theta = NI$  in enačbo (8.9) zapišemo kot  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Theta$  ali v obratnem vrstnem redu kot

$$\Theta = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}. \quad (8.17)$$

Magnetna napetost je pomemben koncept pri analizi magnetnih sestavov iz feromagnetnih materialov in navitij, ki jih lahko obravnavamo kot magnetna vezja. Tam magnetna napetost predstavlja analogijo z električno napetostjo, le da se je potrebno zavedati, da je to v bistvu vzbujaalni tok pomnožen s številom ovojev. Njegova enota je torej A(mpere), pogosto rečemo tudi Amperski ovoji.

**Primer:** Določimo magnetno napetost iz prejšnjega primera. Izračun:  $\Theta = NI = 180 \text{ Aov}$ .

**Magnetni potencial**<sup>5</sup>. Če obstaja magnetna napetost, ali obstaja tudi magnetni potencial? Obstaja, oziroma, lahko ga definiramo, vendar z eno omejitvijo. Za električni potencial je v elektrostatiki veljalo, da je integral električne poljske jakosti po zaključeni poti enak nič, v magnetostatiki pa to ne velja, saj je integral jakosti magnetnega polja po zaključeni poti enak magnetni napetosti, oziroma toku, ki ga zanka oklene. Torej ima smisel definirati magnetni potencial le tedaj, ko ga ne računamo po zaključeni poti. V tem primeru bo magnetna napetost

med točkama  $T_1$  in  $T_2$  določena kot  $V_m(T_1) - V_m(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$ . Če si v točki  $T_2$  izberemo

magnetni potencial enak nič, lahko *magnetni potencial* v točki  $T_1$  zapišemo kot

$$V_m(T_1) = \int_{T_1}^{T_2(V_m=0)} \vec{H} \cdot d\vec{l}. \quad (8.18)$$

Ko bomo obravnavali magnetna vezja bomo torej lahko govorili o tem, da imamo vzdolž zaključene poti po jedru delne padce napetosti, ki so posledica magnetnih upornosti

<sup>5</sup> Bolj natančno rečemo magnetnemu potencialu, ki ga opisuje enačba (8.18) **skalarni magnetni potencial**, saj poznamo tudi **vektorski magnetni potencial**. Že ime samo pove, da je slednji definiran kot vektor (običajno zapisan s simbolom  $\vec{A}$ ) in ima v teoriji elektromagnetike pomembno vlogo, ga pa v okviru tega predmeta zaradi dodatne zahtevnosti ne obravnavamo.

materialov. Ker pa bomo računali po zaključeni poti, bo vsota padcev magnetnih napetosti enaka magnetnim vzbujanjem, določenim s tokovi v navitjih okoli jedra.

## Mejni pogoji magnetnega polja

Zanima nas, kako se spremeni magnetno polje pri prehodu iz ene snovi v drugo. Ti snovi morata seveda imeti različne magnetne lastnosti, ki jih opišemo z njunima relativnima permeabilnostima. Vzemimo dve snovi (prostora) s permeabilnostima  $\mu_1$  in  $\mu_2$  in poljema  $\vec{B}_1$  in  $\vec{B}_2$ , ki sta tik ob skupni meji (SKICA). Mejne pogoje lahko določimo z upoštevanjem dveh splošno veljavnih zakonov: o brezizvornosti magnetnega polja (Gaussov zakon za magnetiko)  $\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$  in o vrtinčnosti magnetnega polja (Amperov zakon)

$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ . Če si zamislimo mali volumen, ki sega v obe snovi in obravnavamo

Gaussov zakon v limiti, ko stiskamo volumen proti mejam obeh snovi, ugotovimo, da se mora fluks skozi mejno površino ohranjati, oziroma, da mora veljati  $B_{n2} \cdot A = B_{n1} \cdot A$ , kjer sta  $B_{n1}$  in  $B_{n2}$  komponenti polja na meji snovi z indeksom 1 in 2, ki sta v smeri (iste) normale na površino. Torej mora veljati

$$B_{n2} = B_{n1}. \quad (8.19)$$

V vektorski obliki pa enačbo (8.19) zapišemo kot  $\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$ .

**SLIKA: Skica dveh snovi in meje, fluks skozi mali volumen pri stiskanju v smeri meje. stranski fluksi se izničijo, normalni se ohrani.**

Ugotovili smo torej, da morata normalni komponenti gostote magnetnega pretoka ostati nespremenjeni. Ali velja to tudi za tangencialni komponenti? To obravnavajmo najprej v primeru, ko na meji ni površinskih tokov. V tem primeru si zamislimo pravokotno zankico, ki vsebuje polje obeh snovi. Upoštevamo Amperov zakon, ko zanko stiskamo v smeri meje. Magnetne napetosti na stranicah s procesom stiskanja zanke (v limiti) izzvenijo, vzdolžne pa se izenačijo, oziroma  $H_{t2} \cdot l - H_{t1} \cdot l = 0$ , kar tudi pomeni, da se ohranjata tangencialni komponenti jakosti polja:

$$H_{t2} = H_{t1}. \quad (8.20)$$

**SLIKA: Zanka, ki oklepa tako snov 1 kot 2 s smerjo integracije, tangencialnega H-ja in limitiranje v smeri meje.**

Kako torej dobimo še tangencialni komponenti gostote magnetnega pretoka? Preprosto, z

upoštevanjem  $H = \frac{B}{\mu}$  (iz enačbe (8.14)) velja

$$\frac{B_{t2}}{\mu_2} = \frac{B_{t1}}{\mu_1}. \quad (8.21)$$

Če sedaj upoštevamo še možnost, da po površini med snovema teče površinski tok (tokovna obloga označena s simbolom  $K$ ), moremo ugotoviti, da mora biti razlika tangencialnih magnetnih jakosti ravno enaka gostoti toka po površini (tokovni oblogi  $K$ ):  $H_{t2} \cdot l - H_{t1} \cdot l = \pm K$ . Gre za  $K$ , ki je pravokoten na smer tangencialnih komponent H-ja, pa še smer (predznak)  $K$ -ja je pomembna. V tem smislu je ta pogoj najbolje zapisati kar z uporabo vektorskega produkta kot

$$\vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}, \quad (8.22)$$

pri čemer je pomembna tudi smer normale, ki je definirana od snovi z indeksom 1 v snov z indeksom 2.

**Primer:**  $H_{t1} = 0$ ,  $H_{t2} = 10$  A/m. Skicirajmo smer in velikost tokovne obloge.

**Rešitev:**  $K = H_{t2} = 10$  A/m, smer pa je pravokotna na  $H_{t2}$  in sicer tako, da v prvem mediju ustvari polje, ki je nasprotno usmerjeno kot  $H_{t2}$ , saj se morata vpliva H-ja v drugem mediju in tokovne obloge izničiti.

**Primer:** V zraku je homogeno polje 1,5 mT, ki je usmerjeno pod kotom  $30^\circ$  na normalo na površino feromagnetika z relativno permeabilnostjo 1200. Kolikšna je gostota magnetnega pretoka v feromagnetiku in pod kakšnim kotom je glede na normalo? NARIŠI SLIKO.

### SLIKA:

**Izračun:** Normalna komponenta polja se ohranja in je torej enaka (glej (8.19))

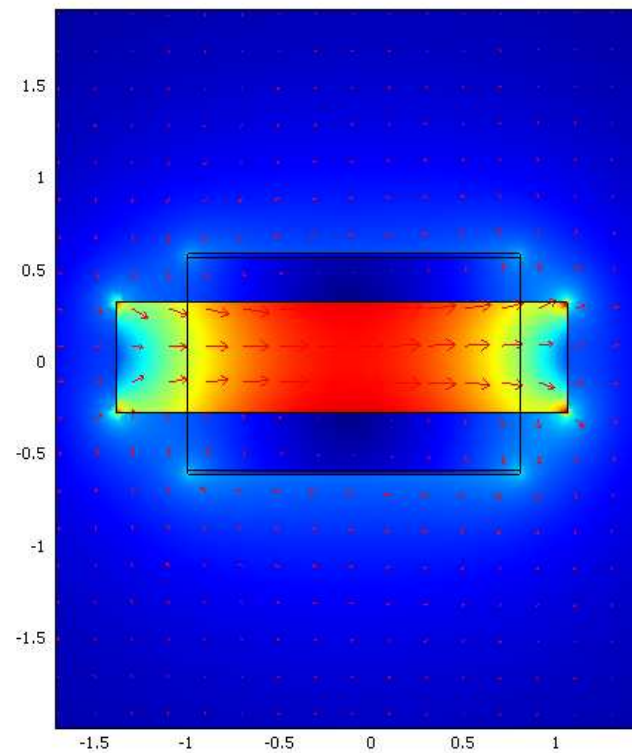
$B_{n2} = B_{n1} = B_1 \cdot \cos(30^\circ) = 1,3$  mT. Tangencialna komponenta pa se »ojača« za razmerje permeabilnosti (glej (8.21)):  $B_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot B_{t1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot B_1 \cdot \sin(30^\circ) = 0,9$  T. V feromagnetiku je torej

polje precej »ojačano« glede na zunanost. Normalna komponenta polja ne prispeva skoraj nič k skupnemu polju v notranjosti:  $B_2 = \sqrt{B_{n2}^2 + B_{t2}^2} = 0,9$  T. Zanimivo je pogledati še smer polja

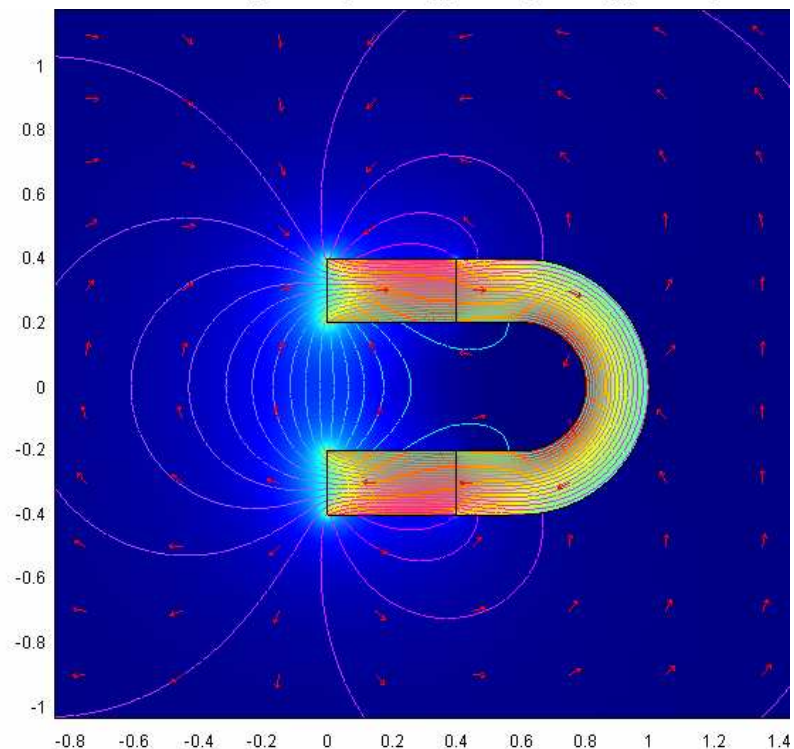
v feromagnetiku. Glede na normalo bo ta kot enak  $\alpha = \text{Arc tan} \left( \frac{B_{t2}}{B_{n2}} \right) = 98,9^\circ$ , torej skoraj enak  $90^\circ$ . To je pomemben rezultat, saj kaže, da čim magnetno polje vstopi v feromagnetik, se njegova pot popolnoma spremeni in usmeri praktično vzdolž njegove oblike.

Surface: Magnetic flux density, norm [T] Arrow: Magnetic flux density [T]

**SLIKA: Magnetno polje v okolici tuljave (puščice in barve) z vloženim feromagnetnim materialom. Polje znotraj feromagnetika se izrazito poveča v skladu z mejnimi pogoji. Predvsem se poveča tangencialna komponenta (v razmerju permeabilnosti), kar ima tudi za posledico prevladujočo usmerjenost fluksa v smeri vzdolž feromagnetika. (simulacija s programom Comsol Multiphysics)**



**SLIKA: Polje podkvastega magneta. Ravna dela imata trajno magnetizacijo, ukrivljen del je iz feromagnetnega materiala. (simulacija s programom Comsol Multiphysics)**



## POVZETEK:

1. Magnetne lastnosti snovi so posledica rotacije elektronov okoli jedra in spina elektronov v atomih. Te rotacije lahko opišemo kot majhne tokovne zanke, te pa z magnetnim dipolnim momentom. Na te deluje magnetna sila oz. navor, ki jih poskuša zavrteti v smer polja.
2. Vpliv velikega števila usmerjenih magnetnih dipolnih momentov na celotno magnetno polje modeliramo z vpeljavo vektorja magnetizacije, ki predstavlja (volumsko) gostoto magnetnih dipolnih momentov.
3. Magnetno polje se poveča, če vanj vnesemo feromagnetni material, kar je posledica usmerjanja magnetnih dipolnih momentov v feromagnetiku v smer polja. To povečanje polja zapis Amperovega zakona v obliki  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$  ne predvidi, ker ne upošteva dodatnih tokov magnetizacije. V ta namen smo modificirali Amperov zakon v obliko  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$ , kjer je H magnetna poljska jakost (v A/m). Bolj splošen zapis je  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J}_c \cdot d\vec{A}$ , kjer desna stran predstavlja zaobjeti konduktivni (vzbujalni) tok. Prednost tega zapisa Amperovega zakona je v tem, da je H neodvisen od prisotnosti magnetnih materialov.
4. Zveza med B in H je  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ . Med vzbujanjem H in magnetizacijo M vpeljemo zvezo  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ , kjer je  $\chi_m$  magnetna susceptibilnost, ki je snovna lastnost.. Sledi zveza  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$ , kjer  $\mu_r$  imenujemo relativna permeabilnost. Za feromagnetike je zveza med B in H nelinearna.
5. Analogno električni napetosti lahko definiramo magnetno napetost, ki pa po zaključeni poti ni enaka nič pač pa zaobjetemu vzbujalnemu toku  $\Theta = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$ . Enota je torej A(mpere), včasih zapišemo tudi kot »amperske ovoje« Aov.. O magnetnem potencialu lahko govorimo le v primeru nezaključene poti.
6. Na meji dveh magnetnih snovi se ohranja normalna komponenta gostote magnetnega pretoka  $B_{n2} = B_{n1}$  in v primeru, da na meji ni površinskega toka tudi tangencialna komponenta magnetne poljske jakosti  $H_{t2} = H_{t1}$ . V primeru, ko je na površini tok (ki ga opišemo s tokovno oblogo K), je razlika tangencialnih komponent enaka temu toku, ki pa je usmerjen prečno na tangencialno komponento.

### **PRIMERI MAGNETNIH MATERIALOV (POKAŽI)**

1. RLS prečno magnetiziran magnet za dajalnike kota (NeFeB)
2. Iskra magneti: Prečno magnetiziran magnet za majhne motorčke (AlNiCo)
3. Iskra magneti: Močan magnet za magnetne zavore
4. Magnet za pritrditev mobitela (NS NS magnetizacija), problem pritrditve
5. NSNSNS magneti za otroke
6. Iskra Feriti: Feritni lončki
7. Iskra Feriti: Nikelj (surovina)

#### **Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:**

##### **Mejni pogoji:**

- 1. kolokvij, 13. april 2006
- 1. kolokvij 19.04.2001
- Izpit, 28. avgust 2006
- Izpit 28. 01. 2005
- Izpit, 18. 09. 2003
- izpit, 6. februar 2003
- Izpit, 17. 01. 2002