Od diferencialnih enačb do kompleksnega računa

Vsebina: prehod od zapisa z diferencialnimi enačbami do kompleksnega računa, osnove kompleksnega računa (prikaz v kompleksni ravnini, konjugirano število, Eulerjev obrazec, osnovne operacije), kompleksor, povezava med časovnim signalom sinusne oblike in kompleksnim zapisom (v obe smeri), povezava med kompleksorjem toka in napetosti na uporu, kondenzatorju in tuljavi, Kirchoffova zakona s kompleksorji, kompleksna upornost in prevodnost (impedanca, admitanca), reaktanca, susceptanca.

Spoznali smo že zveze med tokom in napetostjo na posameznih elementih pri vzbujanju z izmeničnimi signali. Običajno imamo opravka z vezji, v katerih imamo pri napajanju z izmeničnimi signali priključene tako upore kot tudi kondenzatorje in tuljave. Kako v takih primerih analizirati vezje? Vzemimo kar preprost primer tuljave, ki je preko zaporedno vezanega upora priključena na izmenični napetostni generator. Kako določiti tok v vezju ali napetost na tuljavi?

Pokažimo to kar na konkretnem primeru. Upor R = 2 Ω je zaporedno s tuljavo z induktivnostjo L = 10 mH priključen na vir izmenične napetosti $u_g = 10\sin(\omega t)$ V ; $\omega = 50$ Hz .

SLIKA: Zaporedna vezava upora in tuljave priključena na vir izmenične napetosti.

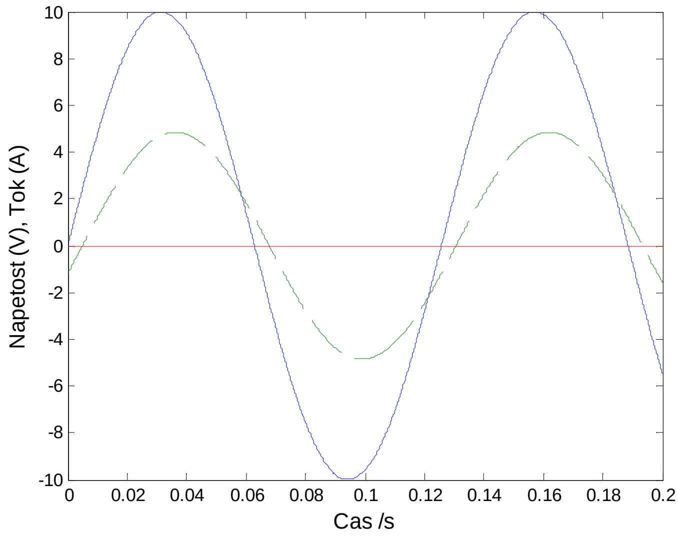
Pri izračunu moramo upoštevati osnovne zveze med tokom in napetostjo na posameznem elementu in Kirchoffova zakona. Odtod sledi $u_g = u_R + u_L$. Sedaj napetosti na uporu in tuljavi izrazimo s tokom:

$$u_g = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Dobimo diferencialno enačbo, katere rešitev bo tok v vezju. Obstaja vrsta načinov reševanja diferencialnih enačb, morda najpreprostejši je kar z uporabo t.i. »nastavka«, to je vnaprej poznane oblike rešitve. V konkretnem primeru bo le ta oblike $i = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$. Ta nastavek uporabimo v diferencialni enačbi in dobimo (za enostavnejše računanje ne upoštevamo enot)

$10\sin(\omega t)=2(A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t))+0{,}01\cdot(A\omega\cos(\omega t)-B\omega\sin(\omega t))$. Sedaj moramo le še združiti člene, ki sodijo skupaj (sinusne in cosinusne člene) in dobimo:

$10\sin(\omega t)=2A\sin(\omega t)-0{,}01B\omega\sin(\omega t)$, od koder mora veljati $10=2A-0{,}5B$ in hkrati $0=2B\cos(\omega t)+0{,}01A\omega\cos(\omega t)$, od koder mora veljati $0=2B+0{,}5A$. Dobimo sistem dveh enačb, od koder določimo konstanti *A* in *B*, ki sta *B* = -1,1765 in *A* = 4,7059. Rešitev je torej $i\cong 4{,}71\sin(\omega t)-1{,}18\cos(\omega t)$. To rešitev lahko zapišemo tudi v obliki $i=K\sin(\omega t+\varphi)$, kjer je $K=\sqrt{A^2+B^2}\cong 4{,}86$ in $\varphi=\mathrm{Arc}\tan\frac{B}{A}\cong -0{,}25$ v radianih oziroma $\varphi\cong -0{,}25\cdot\frac{180^0}{\pi}=-14^0$, torej $i=\underline{\underline{4{,}86\sin(\omega t-14^0)\ \mathrm{A}}}$.



SLIKA: Napetost (modra polna črta) in tok (zelena črtkana črta).

Rezultat je zanimiv in pričakovan. Tok zaostaja za napetostjo za fazni kot 14^0. V primeru, da bi imeli na vir priključen le upor, bi bil tok v fazi z napetostjo, če bi bila priključena le idealna tuljava, bi tok zaostajal za 90^0, če pa sta zaporedno priključena oba elementa, pa tok zaostaja za napetostjo za določen fazni kot, ki je med 0 in 90^0.

<u>Dodatno:</u> Ali bi bila situacija podobna, če bi na napetostni vir priključili vzporedno vezana upor in tuljavo?

<u>Odgovor:</u> Da, tudi v tem primeru bi tok zaostajal za napetostjo. Poskusite preveriti sami!

Ugotovili smo, da je za analizo tudi že preprostega vezja, ki je priključeno na izmenični vir, potrebno zapisati diferencialno enačbo in poiskati njeno rešitev. To pa ni vedno enostavno. Najbolj učinkovita metoda za analizo vezij vzbujanih z izmeničnimi signali se izkaže uporaba kompleksnega računa. S pomočjo kompleksnega računa lahko v osnovi diferencialne enačbe »prevedemo« na preproste algebraične. Poleg analitičnega pristopa nam bo v veliko pomoč tudi grafičen prikaz s t.i. kazalci v kompleksni ravnini.

Osnove kompleksnega računa

Kompleksno število. Kompleksno število sestavlja realni in imaginarni del. Običajno kompleksna števila označimo s črtico pod črko. Primer takega števila je npr. $\underline{Z} = 2 + j3$. 2 je realni del, 3 pa imaginarni del kompleksnega števila.

j je imaginarno število in je enako $\sqrt{-1}$ oziroma, $j^{-1} = -1$. V matematiki ga pogosto označimo s črko *i*, ki pa jo v elektrotehniki pogosto uporabljamo kot simbol za tok.

Kompleksno število lahko prikažemo v t.i. kompleksni ravnini kot točko s koordinatama na realni in imaginarni osi (2, j3). Še bolj pogosto tako število prikažemo s kazalcem – **kompleksorjem** v kompleksni ravnini.

Poljubno kompleksno število zapišemo z realnim in imaginarnim delom kot

$$\boxed{\underline{Z} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} + j\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = X + jY}.$$

X je realni del, *Y* pa imaginarni del kompleksnega števila.

SLIKA: Prikaz kompleksnega števila v kompleksni ravnini kot točka ali v obliki kazalca (vektorja). Določen je z realnim in imaginarnim delom ali pa z amplitudo in faznim kotom.

Pogosto zapišemo kompleksno število tudi v **polarni obliki**, z amplitudo in faznim kotom. Velja $|\underline{Z}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$, fazni kot pa je $\varphi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{Y}{X}\right)$. Narišemo ga s kazalcem (kompleksorjem) v kompleksni ravnini. Velikost kazalca je Z in je od realne osi »zasukan« za kot φ .

Eulerjev obrazec.

Za tvorjenje kompleksnih signalov (kompleksorjev) in za pretvarjanje iz polarnega zapisa v realni in imaginarni del kompleksnega števila se poslužujemo t.i. Eulerjevega obrazca

$$\boxed{e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)} \qquad (18.1)$$

Primeri računanja s kompleksnimi števili.

$\underline{Z}_1 = 2 + j3$; $\underline{Z}_2 = 4 - j5$

Vsota: $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 2 + j3 + 4 - j5 = 6 - j2$

Razlika: $\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = (2 + j3) - (4 - j5) = -2 + j8$

Produkt: $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = (2 + j3) \cdot (4 - j5) = 2 \cdot 4 - j^2 15 + j(12 - 10) \ = 23 + j2$

Kvocient: $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 = \frac{(2 + j3)}{(4 - j5)} = \frac{(2 + j3)}{(4 - j5)}\frac{(4 + j5)}{(4 + j5)} = \frac{-7 + j22}{4^2 + 5^2} = \frac{-7 + j22}{41} \cong -0{,}17 + j0{,}54$

Kvocient s pomočjo polarnega zapisa:

$$\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 = \frac{(2 + j3)}{(4 - j5)} \cong \frac{3{,}6e^{j56^0}}{6{,}4e^{-j51}} \cong 0{,}562e^{j107^0} \cong 0{,}562\left(\cos(107^0) + \mathrm{j}\sin(107^0)\right) = -0{,}164 + j0{,}54 .$$

Razlika med prvim in drugim izračunom nastopi zaradi različnega zaokroževanja. Polarni zapis je bolj primeren za množenje in deljenje. Pri pretvarjanju v polarni zapis je potrebno biti previden v primeru, ko je realni del negativen, saj se to število (kazalec) nahaja v drugem ali tretjem kvadrantu. V tem primeru je potrebno kotu dodati 180^0 oz. π . Primer: Pretvorimo kompleksno število $-2 + j2 = 2\sqrt{2}e^{j\left(\pi + Arc\tan\frac{2}{-2}\right)} = 2\sqrt{2}e^{j(3\pi/4)}$.

Konjugacija: $\underline{Z}_1^* = 2 - j3$. Pri konjugaciji obrnemo predznak imaginarnemu delu. Posebno primerna je uporaba konjugacije za izračun absolutne vrednosti kompleksnega števila:

$$|\underline{Z}_1| = |2 + j3| = \sqrt{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_1^*} = \sqrt{(2 + j3)(2 - j3)} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Prikaz kompleksorjev v kompleksni ravnini. Posamezne kompleksorje lahko prikažemo v kompleksni ravnini, jih seštevamo ali odštevamo na enak način kot vektorje.

SLIKA: Primer seštevanja in odštevanja dveh kompleksorjev v kompleksni ravnini. Princip je enak kot pri seštevanju vektorjev. S konjugacijo se kompleksor prezrcali preko realne osi.

Zapis časovnega signala s kompleksorjem.

S pomočjo Eulerjevega obrazca lahko zapišemo poljuben harmoničen signal, pri čemer pa poleg realnega dela pridobimo še imaginarni del. Vzemimo primer tokovnega signala oblike $i(t) = 2\cos(\omega t)\,\mathrm{A}$. Ta tok lahko zapišemo z upoštevanjem Eulerjevega obrazca kot $\underline{i}(t) = 2\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right)\,\mathrm{A} = 2e^{j\omega t}\,\mathrm{A}$. Tak kompleksen zapis toka seveda nima posebnega fizikalnega pomena. Fizikalno ima pomen le njegov realni del, torej $i(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{i}(t)\right\} = \mathrm{Re}\left\{2\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right)\,\mathrm{A}\right\} = 2\cos(\omega t)\,\mathrm{A}$. V nadaljevanju bomo spoznali, da nam to »kompliciranje« z vpeljavo kompleksnih števil olajša obravnavo vezij vzbujanih s harmoničnimi signali.

Vzemimo sedaj bolj splošen zapis toka $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi)$ in ga zapišimo z upoštevanjem Eulerjevega obrazca kot $\underline{i}(t) = I\left(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\right) = Ie^{j(\omega t + \varphi)} = Ie^{j\varphi}e^{j\omega t} = \underline{I}e^{j\omega t}$. Tvorili smo kompleksor harmonične funkcije $\underline{I} = Ie^{j\varphi}$, ki opisuje amplitudo in fazo (fazni kot) toka, kar pa je tudi popolna informacija o toku v vezju. Frekvenca signala se namreč pri linearnih vezjih vzbujanih s harmoničnim signalom ne spreminja. Dovolj bo torej, da bomo poznali le amplitudo in fazo (fazni kot) signala, seveda relativno na druge signale v vezju, če pa bi nas zanimal trenutni (časovni) potek signala, kompleksor pomnožimo s členom $e^{j\omega t}$ in upoštevamo le realni del.

Primeri: Tvorimo kompleksorje toka za sledeče oblike tokov:

$i_1(t) = 1\cos(\omega t)\,\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = 1\,\mathrm{A}$

$i_2(t) = 2\cos(\omega t + 45^0)\,\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_2 = 2e^{j45^0}\,\mathrm{A}$

$i_3(t) = 3\sin(\omega t)\,\mathrm{A} = 3\cos(\omega t - \pi/2)\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_3 = 3e^{-j\pi/2}\mathrm{A} = 3\left(\cos(-\pi/2) + j\sin(-\pi/2)\right)\mathrm{A} = -j3\,\mathrm{A}$

$i_4(t) = 4\sin(\omega t + 30^0)\,\mathrm{A} = 4\cos(\omega t - 90^0 + 30^0)\ \mathrm{A} = 4\cos(\omega t - 60^0)\ \mathrm{A}$

$$\Rightarrow \quad \underline{I}_4 = 4e^{-j60^0}\,\mathrm{A} = 4\left(\cos(\text{-}60^0)+j\sin(\text{-}60^0)\right)\mathrm{A} = 4\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{A} \cong \left(2-3{,}46\right)\mathrm{A}$$

SLIKA: Prikaz kompleksorjev toka v kompleksni ravnini.

Določitev časovnega signala iz kompleksorja.

Iz znanega kompleksorja vedno lahko dobimo časovno obliko signala. Kompleksor je potrebno pomnožiti z $e^{j\omega t}$ in upoštevati le realni del signala. Vzemimo kot primer kompleksor toka $\underline{I}_2 = 2e^{j45^0}\,\mathrm{A}$, ki ga pomnožimo z $e^{j\omega t}$ in upoštevamo Eulerjev obrazec. Časovno obliko toka dobimo iz relanega dela izraza

$$i_2(t) = \mathrm{Re}\left\{2e^{j45^0}e^{j\omega t}\mathrm{A}\right\} = \mathrm{Re}\left\{2e^{j(\omega t+45^0)}\mathrm{A}\right\} = 5\,\mathrm{Re}\left\{\cos(\omega t+45^0)+j\sin(\omega t+45^0)\right\}\mathrm{A}{=}2\cos(\omega t+45^0)\mathrm{A}$$

Primer: Tok $i(t) = 3\cos(\omega t+30^0)\mathrm{A}$ se razdeli v dve veji. Kolikšen je tok v drugi veji, če je v prvi veji tok enak $i_1(t) = 2\cos(\omega t-45^0)\mathrm{A}$?

SLIKA: Izris tokov v vejah.

Izračun: Tokove zapišemo kot kompleksorje $\underline{I} = 3e^{j30}\mathrm{A}$, $\underline{I}_1 = 2e^{-j45}\mathrm{A}$ in ker mora biti vsota vseh tokov v spojišče enaka nič, bo to veljalo tudi za kompleksorje $\underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1$. Torej lahko zapišemo

$$I_2 = 3e^{j30}\mathrm{A} - 2e^{-j45}\mathrm{A} = 3(\cos(30^0)+j\sin(30^0))\mathrm{A}{+}2(\cos(-45^0)+j\sin(-45^0))\mathrm{A}\,.$$

$$\underline{I}_2 = 3e^{j30}\mathrm{A} - 2e^{-j45}\mathrm{A} = 3(\cos(30^0)+\mathrm{j}\sin(30^0))\ \mathrm{A}{+}2(\cos(\text{-}45^0)+\mathrm{j}\sin(\text{-}45^0))\ \mathrm{A}$$

$\underline{I}_2 = (2{,}6 + j1{,}5)\ \mathrm{A} - (1{,}414 - j1{,}414)\ \mathrm{A} = (1{,}18 + j2{,}9)\ \mathrm{A} = 3{,}15e^{j67{,}9^0}\ \mathrm{A}$. Če želimo zapisati tok v drugi veji v časovni obliki, pomnožimo kompleksor z $e^{j\omega t}$ in upoštevamo le realni del signala $i_2(t) = \mathrm{Re}\left\{3{,}155e^{j67{,}9^0}\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{3{,}15e^{j(\omega t+67{,}9^0)}\mathrm{A}\right\} = 3{,}15\cos(\omega t + 67{,}9^0)\,\mathrm{A}$.

Primer: Rešimo primer zaporedne vezave upora in tuljave na začetku poglavja z uporabo kompleksnega računa.

Izračun: Napetostni signal oblike $u_g = U_m \sin(\omega t) = U_m \cos(\omega t - \pi/2)$ zapišemo kot $\underline{u}_g = U_m e^{j(\omega t - \pi/2)} = \underline{U}e^{j\omega t}$, kjer je $\underline{U} = U_m e^{-j\pi/2} = -jU_m$. Rešitev pričakujemo v obliki $\underline{i} = Ie^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{I}e^{j\omega t}$, kjer je $\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$.

Vstavimo ta zapisa v diferencialno enačbo $u_g = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ in dobimo

$\underline{U}e^{j\omega t} = R\underline{I}e^{j\omega t} + L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underline{I}e^{j\omega t}\right)$ in z odvajanjem $\underline{U}e^{j\omega t} = R\underline{I}e^{j\omega t} + L\underline{I}j\omega e^{j\omega t}$. Člen $e^{j\omega t}$ lahko v enačbi pokrajšamo in tako postane enačba enostavna algebrajska: $\boxed{\underline{U} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I}}$. Iz enačbe določimo kompleksor toka $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{R + j\omega L}$. Razstavimo enačbo na realni in imaginarni del. Če se želimo »znebiti« imaginarnega dela v imenovalcu, moramo imenovalec pomnožiti z njegovo konjugirano kompleksno vrednostjo, to je z $R - j\omega L$. Dobimo

$\underline{I} = \dfrac{\underline{U}(R - j\omega L)}{(R + j\omega L)\cdot(R - j\omega L)} = \dfrac{\underline{U}(R - j\omega L)}{R^2 - (j\omega L)^2} = \dfrac{\underline{U}(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2}$. To je že rešitev, ki jo lahko izrišemo v kompleksni ravnini. Narišemo kompleksor napetosti, ki je

$\underline{U} = U_m e^{-j\pi/2} = -jU_m$, kompleksor toka pa je $\underline{I} = \dfrac{-jU_m(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} = -\dfrac{U_m(\omega L + jR)}{R^2 + (\omega L)^2}$ in ima negativen tako realni kot imaginarni del. Vsota teh dveh kompleksorjev je kompleksor toka, ki zaostaja za kompleksorjem napetosti za kot, ki ga dobimo iz zapisa toka v polarni obliki: $\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$. Amplituda toka je $I = \left|\dfrac{\underline{U}}{R + j\omega L}\right| = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$, fazni kot pa* $\varphi_i = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\mathrm{Im}\{\underline{I}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{I}\}}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{-R}{-\omega L}\right)$. Z vstavitvijo vrednosti dobimo I = 4,85 A in $\varphi_i \cong 76^0 + 180^0 = 256^0$. Kompleksor toka je torej $\underline{I} \cong 4{,}85e^{j256^0}$ A. Spomnimo se lahko, da je bil kompleksor napetosti $\underline{U} = U_m e^{-j\pi/2} = U_m e^{j3\pi/2} = U_m e^{j270^0}$. Fazni kot med tokom in napetostjo je torej $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 270^0 - 256^0 = 14^0$. Kazalec napetosti prehiteva kazalec toka za fazni kot 14^0. To predstavlja **induktivni karakter vezja**.

* Dobljenemu kotu je potrebno prišteti kot 180o, saj sta tako realni kot imaginarni del negativna.

Tok v časovni obliki dobimo tako, da kompleksor toka pomnožimo z $e^{j\omega t}$ in upoštevamo le realni del:

$i(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{I}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{4{,}85e^{j256^0}e^{j\omega t}\mathrm{A}\right\} = \mathrm{Re}\left\{4{,}85e^{j(\omega t+256^0)}\mathrm{A}\right\} = \underline{\underline{4{,}85\cos(\omega t + 256^0)\ \mathrm{A}}}$, kar lahko zapišemo tudi s sinusom:

$i(t) = 4{,}85\sin(\omega t + 90^0 + 256^0)\ \mathrm{A} = 4{,}85\sin(\omega t + 346^0)\ \mathrm{A} = \underline{\underline{4{,}85\sin(\omega t - 14^0)\ \mathrm{A}}}$

SLIKA: Kazalca (kompleksorja) napetosti in toka.

Kompleksorji toka in napetosti na elementih vezja.

Kako si torej pomagamo s kompleksnim računom pri analizi vezij s harmoničnimi signali? Poglejmo si zveze med kompleksorji toka in napetosti na posameznih elementih vezja:

UPOR

Vzemimo $i(t) = I\cos(\omega t)$, kompleksor bo kar $\underline{I} = Ie^{j0} = I$. Tokovni signal pa lahko zapišemo kot $i(t) = Re\{\underline{I}e^{j\omega t}\}$. Napetost na uporu bo $u(t) = Re\{\underline{U}e^{j\omega t}\}$ in bo enaka $u(t) = R \cdot i(t)$ oziroma $Re\{\underline{U}e^{j\omega t}\} = Re\{R\underline{I}e^{j\omega t}\}$ od koder sledi zapis s kompleksorji:

$$\boxed{\underline{U} = R\underline{I}}.$$

Ponovno vidimo, da sta kompleksorja toka in napetosti na uporu v fazi.

SLIKA: Kompleksor napetosti in toka na uporu.

TULJAVA

Vzemimo zopet $i(t) = I\cos(\omega t)$ s kompleksorjem $\underline{I} = Ie^{j0} = I$. Ugotovili smo že, da napetost na tuljavi prehiteva tok za četrtino periode in bo torej enaka $u(t) = I\omega L\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Če ta signal zapišemo kot kompleksor, dobimo $\underline{U} = I\omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = I\omega L \cdot j$, kar v splošnem zapišemo v obliki

$$\boxed{\underline{U} = j\omega L\underline{I}} \qquad (18.2)$$

SLIKA: S prikazom v kompleksni ravnini pokažemo, da napetost na tuljavi prehiteva tok za četrtino periode signala.

KONDENZATOR

Vzemimo zopet $i(t) = I\cos(\omega t)$ s kompleksorjem $\underline{I} = Ie^{j0} = I$. Ugotovili smo že, da napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtino periode in bo torej enaka $u(t) = \frac{I}{\omega C}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. Če ta signal zapišemo kot kompleksor, dobimo $\underline{U} = \frac{I}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{I}{e^{j\frac{\pi}{2}}\omega C} = \frac{I}{j\omega C}$, kar v splošnem zapišemo v obliki

$$\boxed{\underline{U} = \frac{\underline{I}}{j\omega C}} \tag{18.3}$$

ali tudi

$$\underline{U} = -j\frac{\underline{I}}{\omega C}$$

SLIKA: S prikazom v kompleksni ravnini pokažemo, da napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtino periode signala.

Kirchoffova zakona s kompleksnim zapisom.

Pri vezjih z enosmernimi signali je za 1 K.Z. veljalo $\sum_{k=1}^{m} I_k = 0$, kar bi pri vezjih z izmeničnimi signali lahko zapisali v obliki $\sum_{k=1}^{m} i_k\cos(\omega t + \varphi_k) = 0$ oziroma izraženo s kompleksnim zapisom $\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Re}\left\{\underline{I}_k e^{j\omega t}\right\} = 0$, kar bo veljalo, če bo

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m}\underline{I}_k = 0}, \tag{18.4}$$

Z besedami: vsota vseh kompleksorjev toka v spojišče je enaka nič.

SLIKA: Vsota vseh kompleksorjev toka v spojišču je enaka nič.

Podobno bi lahko pokazali, da za drugi K.Z. velja

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \underline{U}_j = 0}, \tag{18.5}$$

vsota vseh kompleksorjev napetosti v zanki je enaka nič.

SLIKA: Vsota vseh kompleksorjev napetosti v zanki je enaka nič.

Kirchoffove zakone torej lahko uporabimo tudi pri zapisu s kompleksorji.

Impedanca in admitanca

Vzemimo tokovni signal oblike $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$, ki ga opišemo s kompleksorjem $\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$, ki na sponkah v dvopolno vezje povzroča padec napetosti oblike $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u)$, ki ga opišemo s kompleksorjem $\underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$. Kvocient komplesorjev napetosti in toka imenujemo **impedanca** ali **kompleksna upornost** (včasih rečemo tudi polna upornost):

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}. \tag{18.6}$$

Velja $\underline{Z} = \dfrac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \dfrac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi}$.

Govorimo lahko o Ohmovem zakonu pri izmeničnih signalih zapisan v obliki

$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}} \tag{18.7}$$

SLIKA: Poljubno (dvovhodno) vezje s priključeno napetostjo in tokom v vezje. Kvocient kompleksorjev napetosti in toka je definiran kot impedanca vezja.

Impedanca je kompleksno število. Absolutna vrednost impedance je kvocient med amplitudo napetosti in toka, argument pa je razlika med faznima kotoma napetostnega in tokovnega signala. Inverzna impedanci je **admitanca** ali kompleksna prevodnost

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}, \tag{18.8}$$

ki jo tudi lahko predstavimo kot $\underline{Y} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = Y e^{-j\varphi}$.

Zapišimo kompleksne upornosti in prevodnosti za posamezne elemente vezja

	Impedanca	**Admitanca**
	$\underline{Z}$	$\underline{Y}$
Upor	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{G}$
Tuljava	$j\omega L = jX_L$	$\frac{1}{j\omega L} = jB_L$
Kondenzator	$\frac{1}{j\omega C} = jX_C$	$j\omega C = jB_C$

Pogosto se uporablja tudi pojma reaktanca in susceptanca. **Reaktanca** predstavlja imaginarni del impedance in je za tuljavo $X_L = \omega L$ in za kondenzator† $X_C = -\frac{1}{\omega C}$. **Susceptanca** predstavlja imaginarni del admitance in je za tuljavo $B_L = -\frac{1}{\omega L}$ in $B_C = \omega C$.

Zaporedna in vzporedna vezava impedanc in admitanc.

Če so impedance vezane zaporedno, jih lahko seštevamo tako, kot smo seštevali zaporedno vezane upornosti pri enosmernih vezjih

$$\underline{Z}_{zaporedno} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \ldots \tag{18.9}$$

SLIKA: Zaporedna vezava impedanc.

† Pogosto se v literaturi pojem reaktance enači s pojmom upornosti pri izmeničnih signalih. V tem smislu se uporablja za reaktanco kondezatorja pozitivno vrednost. Glede na definicijo (reaktanca je imaginarni del impedance), mora biti reaktanca kondenzatorja negativna.

Enako lahko seštevamo tudi vzporedno vezane kompleksne prevodnosti

$$\underline{Y}_{vzporedno} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \ldots \tag{18.10}$$

SLIKA: Vzporedna vezava impedanc (admitanc).

Primer: Določimo impedanco zaporedno vezanega upora R = 100 Ω in kondenzatorja C = 2 μF pri frekvenci ω = 1 kHz.

Izračun: Ker imamo zaporedno vezavo, pišemo $\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = 100\ \Omega + \frac{1}{j10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}\ \Omega = (100 - j500)\ \Omega$. Dobimo realni in imaginarni del impedance, ki jo lahko predstavimo v kompleksni ravnini. Določimo lahko še amplitudo in fazo impedance kot $Z = \sqrt{100^2 + (-500)^2}\ \Omega = 510\ \Omega$ in fazni kot $\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{-500}{100}\right) = -78,7^0$.

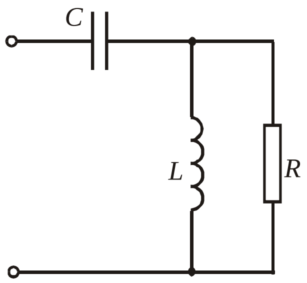
Primer: Določimo admitanco vzporedne vezave upora in kondenzatorja iz prejšnjega primera.

Izračun: Tokrat seštevamo prevodnosti, rezultat bo $\underline{Y} = G + j\omega C$, številčno pa $\underline{Y} = 0,01\ \text{S} + j0,002\ \text{S} = 0,01(1 + j0,2)\ \text{S} = 1,02 \cdot 10^{-2} \text{e}^{j11,3^0}\ \text{S}$

Primer: Tok v vezje vzporedne vezave kondenzatorja in upora iz prejšnjega primera je $i(t) = 20\cos(10^3 \text{s}^{-1} \cdot t)\ \text{mA}$. Določimo napetost na sponkah vezja.

Izračun: Admitanco smo že izračunali v primeru 2, tvorimo še kompleksor tokovnega signala $\underline{I} = 20\,\text{A}$ in upoštevamo $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \frac{20\ \text{mA}}{1,02 \cdot 10^{-2} e^{j11,3^0}\ \text{S}} = 1,96 e^{-j11,3^0}\ \text{V}$. Da dobimo »nazaj« napetostni signal, moramo kompleksor napetosti pomnožiti z $e^{j\omega t}$ in upoštevati le realni del: $u(t) = \text{Re}\left\{1,96 e^{-j11,3^0} \cdot e^{j\omega t}\ \text{V}\right\} = 1,96\cos(10^{-3}\text{s}^{-1} t - j11,3^0)\ \text{V}$.

Primer: Na sponke vezja na sliki priključimo napetostni vir z amplitudo 400 V in frekvenco 50 Hz. Določimo impedanco vezja, tok v vezje in delovno moč. (C = 100 μF, L = 20 mH, R = 20 Ω)



Izračun: Izračunamo impedanco vezja $\underline{Z} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_L \| R$, kjer je $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j31,3\ \Omega$ in $Z_L = j\omega L = j6,28\ \Omega$ in $\underline{Z}_L \| R = \frac{j6,28 \cdot 20}{j6,28 + 20}\ \Omega = (1,79 + j5,7)\ \Omega$. Impedanca vezja je torej $\underline{Z} = (-j31,3 + 1,79 + j5,7)\ \Omega = (1,79 - j25,58)\ \Omega = 26,2e^{-j86^0}\ \Omega$. Tok v vezje je $\underline{I} = \underline{U}\underline{Y} = \frac{400\ \text{V}}{26,2 \cdot e^{-j86^0}}\ \text{S} \cong 15,3e^{j86^0}\ \text{A}$. Delovno moč dobimo iz $P = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi) = \frac{400\,\text{V} \cdot 15,6\,\text{A}}{2}\cos(-86^0) = 213,45\ \text{W}$.

Primer: Tok v zaporedno vezavo dveh elementov je $i(t) = 5\cos(\omega t + 45^0)\ \text{A}$, napetost pa $u(t) = 20\cos(\omega t - 10^0)\ \text{V}$. Določimo vrednosti elementov, če je $\omega = 5\ \text{kHz}$.

Izračun: Tvorimo kompleksorja toka in napetosti: $\underline{I} = 5e^{j45^0}\ \text{A}$ in $\underline{U} = 20e^{-j10}\ \text{V}$. Določimo impedanco: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{20e^{-j10}\ \text{V}}{5e^{j45^0}\ \text{A}} = 4e^{-j55^0}\ \Omega$. Sedaj zapišemo v obliki realnega in imaginarnega dela: $\underline{Z} = 4\left(\cos(-55^0) + j\sin(-55^0)\right) \cong (2,29 - j3,28)\ \Omega$. Očitno bo en element upor vrednosti 2,29 Ω, drug element pa bo kondenzator z reaktanco $-3,28 = -\frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = 6,1\ \mu\text{F}$.

Dodatno: Določite elementa vzporedne vezave vezij za enak tok in napetost.

Izračun: $R \cong 6,98\ \Omega$, $C \cong 97,66\ \mu\text{F}$.

Primeri izpitnih in kolokvijskih nalog

Izpit, 19. 11. 2004

Izpit 20. 06. 2005 (4)

Izpit, 17. 4. 2003

Vprašanja za obnovo:

1) Kako analizirano vezja, ki so vzbujana z izmeničnimi signali?
2) Kompleksno število: računanje s kompleksnimi števili, Eulerjev obrazec, zapis signala s kompleksorjem, prehod iz časovnega v kompleksni zapis in obratno.
3) Zveze med kompleksorji toka in napetosti na uporu, tuljavi in kondenzatorju.
4) Zapis Kirchoffovih zakonov s kompleksorji.
5) Definicija impedance in admitance. Impedanca in admitanca posameznih elemenotv vezja.
6) Definicija reaktance in susceptance. Reaktanca in susceptanca tuljave in kondenzatorja.
7) Zaporedna in vzporedna vezava impedanc in admitanc.