Izmenični signali – metode reševanja vezij

Vsebina poglavja: Metode za analizo vezij z izmeničnimi signali (metoda Kirchoffovih zakonov, metoda zančnih tokov, metoda spojiščnih potencialov), stavki (superpozicije, Theveninovo in Nortonovo nadomestno vezje, Tellegen). Posebnost pri izmeničnih vezjih – obravnava sklopljenih tuljav.

Načine analize enosmernih vezij smo že spoznali. Pri vezjih z izmeničnimi signali lahko ugotovimo, da smo z vpeljavo kompleksorjev toka in napetosti vpeljali sorodne relacije: s kompleksorji zapisane Ohmov zakon ter oba Kirchoffova zakona. Za reševanje vezij z izmeničnimi signali lahko torej uporabimo iste metode reševanja kot pri enosmernih, le s kompleksorji jih moramo pisati.

Sklopljene tuljave. Imamo pa pri izmeničnih signalih še en poseben slučaj. In sicer magnetno sklopljene elemente, ki nastopajo v primeru obravnave vezij z najmanj dvema tuljavama, ki si delita del (ali celoten) fluksa. Ti elementi imajo zaradi sklopitve dodaten padec napetosti na tuljavi, ki se padcu napetosti zaradi lastne induktivnosti prišteva ali pa odšteva.
O označevanju podpiranja fluksov smo že govorili v prejšnjih poglavjih, torej samo na kratko: podpiranje (seštevanje) fluksov označimo tako, da postavimo piko v obeh sklopljenih elementih na začetek ali konec elementa glede na tok v element.
Ta dodatni padec napetosti lahko označimo s posebnim simbolom (romb) in ga imenujemo **tokovno krmiljen napetostni vir**. S takimi in podobnimi elementi si pomagamo tudi pri nadomestnih vezjih bolj kompleksnih elementov, kot so različni tipi nelinearnih elementov (tranzistorjev, ...).

Primer: V veji s tokom $\underline{I}_1 = 10\,\mathrm{A}$ je tuljava z $X_{L1} = 10\ \Omega$, ki ima magnetni sklep (k = 0,8) s tuljavo z $X_{L2} = 90\,\Omega$ v sosednji veji s tokom $\underline{I}_2 = (2 + j5)\,\mathrm{A}$. Fluksa se podpirata. Kolikšna je napetost na tuljavama?
<u>Izračun</u>: Določiti moramo medsebojno induktivnost oziroma upornost zaradi medsebojne induktivnosti $\omega M = \omega k\sqrt{L_1 L_2} = k\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2} = k\sqrt{X_{L1} X_{L2}}$, ki bo 24 Ω. Nato določimo še padec napetosti kot

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot jX_{L1} + \underline{I}_2 \cdot jX_M = 10\,\mathrm{A} \cdot j10\,\Omega + (2 + j5)\,\mathrm{A} \cdot j24\,\Omega = (-120 + j148)\,\mathrm{A}$$
$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot jX_{L2} + \underline{I}_2 \cdot jX_M = (2 + j5)\,\mathrm{A} \cdot j90\,\Omega + 10\,\mathrm{A} \cdot j24\,\Omega + = (-450 + j420)\,\mathrm{A}$$

SLIKA: Magnetno sklopljeni tuljavi. Napetost zaradi medsebojne induktivnosti lahko predstavimo s tokovno krmiljenim napetostnim virom.

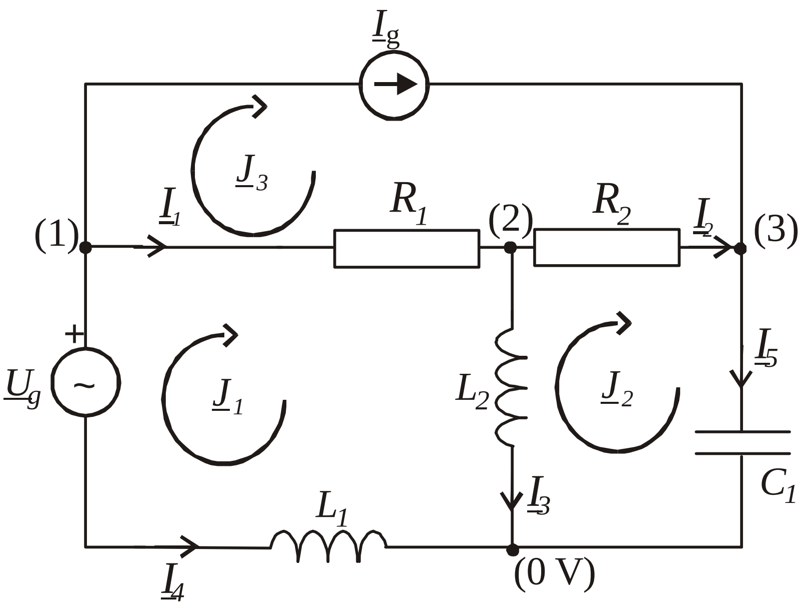
Osnovne metode za analizo vezij:

1) Metoda Kirchoffovih zakonov
2) Metoda zančnih tokov
3) Metoda spojiščnih potencialov

Stavki (teoremi):

1) Stavek superpozicije
2) Stavek Thevenina / Nortona
3) Stavek Tellegena
4) Stavek o največji moči

Vse omenjene metode analize in stavkov bomo prikazali na sledečem primeru vezja.



SLIKA: Primer vezja za analizo vezij: R_1 = 10 Ω, R_2 = 5 Ω, C = 5 μF, L_1 = 150 mH, L_2 = 50 mH, u_g = 100 cos(ωt) V, ig = 1 cos(ωt +π/2) A. (Matlab: metode.m)

Tvorimo kompleksorje impedanc in virov:

$$\underline{Z}_{L_1} = j\omega L = j5\,\Omega\ ,\ \underline{Z}_{L_2} = j15\,\Omega\,,\ \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j20\,\Omega\,,\ \underline{U}_g = 100\text{ V}\,,\ \underline{I}_g = j1\text{ A}\,.$$

1. Metoda Kirchoffovih zakonov.

Temelji na uporabi 1. in 2 K. Z.:

1K.Z.: Vsota vseh tokov iz (ali v) spojišča je enaka nič, število enačb = število spojišč -1.

spojišče (1): $\underline{I}_1 + \underline{I}_4 + \underline{I}_g = 0$
spojišče (2): $-\underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_2 = 0$
spojišče (3): $-\underline{I}_2 + \underline{I}_5 - \underline{I}_g = 0$
spojišče (0): ni potrebno, odvečna enačba

2.K. Z.: Vsota vseh napetosti v zanki je enaka nič, število enačb = številu dopolnilnih vej.

zanka J_1: $\underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_3 \underline{Z}_{L2} + (-\underline{I}_4 \underline{Z}_{L1}) - \underline{U}_g = 0$
zanka J_2: $-\underline{I}_3 \underline{Z}_{L1} + \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_5 \underline{Z}_C = 0$
zanka J_3: ni potrebna, niti je ne moremo zapisati

Dobimo pet enačb za pet tokov. Reševanje takega sistema je lahko zamudno, običajno nam to delo poenostavijo računalniki. Mi moramo le poskrbeti, da sistem enačb zapišemo v matrični obliki. V našem primeru bi tvorili sistem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & j15 & -j5 & 0 \\ 0 & 5 & -j15 & 0 & -j20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j1 \\ 0 \\ j1 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

To je zapis v obliki **A x=b** Poglejmo si primer reševanja takega sistema s programom Matlab. Tvorimo matriko A, ki bo **A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;10,0,15j,-5j,0;0,5,-15j,0,-20j]** in vektor b, ki bo **b=[-j;0;j;100;0].** Matlab ponuja različne načine reševanja sistemov enačb. Še najbolj enostavno dobimo rešitev tako, da invertiramo matriko A in jo pomnožimo z vektorjem b: Dobimo rešitev v obliki vektorja z iskanimi toki. Matlab: **x=inv(A)*b**

Rezultat:

1.0873 - 2.3450i

-0.1135 + 3.1485i

1.2009 - 5.4934i

-1.0873 + 1.3450i

-0.1135 + 4.1485i

Tok $\underline{I}_1$ bo torej (1,0873-j2,3450) A itd.

Drugi načini reševanja sistema enačb: Lahko uporabimo tudi Kramerjevo pravilo z reševanjem z determinanto in poddeterminantami, ki pa je nekoliko bolj zamudno. Determinanto dobimo z ukazom **det(A)**, pri poddeterminantah pa moramo najprej sekvenčno menjati stolpce z vektorjem b. To naredimo s sledečimi ukazi: **D1=A, D1(:,1)=b, I1=det(D1)/det(D)**. Dobimo 1.0873 - 2.3450i, kar je seveda rešitev za tok $\underline{I}_1$. Tretji način je tako imenovana Gaussova eliminacija (več pri matematiki), kjer enak rezultat dobimo s preprostim Matlab ukazom **x=A\b**.

2. Metoda zančnih tokov.

Označimo zanke z zančnimi toki in zapišemo enačbe v skladu z 2 K.Z. Vejske toke zapišemo z zančnimi. Število potrebnih enačb je enako številu dopolnilnih vej (ponovi pojme graf, drevo, veje, dopolnilne veje,... iz OE1).

$$(\underline{J}_1 - \underline{J}_3)R_1 + (\underline{J}_1 - \underline{J}_2)\underline{Z}_{L2} + \underline{J}_1\underline{Z}_{L1} - \underline{U}_g = 0$$
$$(\underline{J}_2 - \underline{J}_1)\underline{Z}_{L2} + (\underline{J}_2 - \underline{J}_3)R_2 + \underline{J}_2\underline{Z}_C = 0$$
$$\underline{J}_3 = \underline{I}_g$$

Dobimo sistem treh enačb, ki pa je pravzaprav le sistem dveh, saj je tok v tretji zanki določen kar s tokom $\underline{I}_g$. Če to upoštevamo v naslednjem koraku, dobimo matrični sistem oblike[1]

$$\begin{bmatrix} R_1+\underline{Z}_{L2}+\underline{Z}_{L1} & -j\underline{Z}_{L2} \\ -\underline{Z}_{L2} & R_2+\underline{Z}_{L2}+\underline{Z}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_g+\underline{I}_g R_1 \\ \underline{I}_g R_2 \end{bmatrix}$$

Tudi ta sistem enačb lahko preprosto rešimo z eno od zgoraj omenjenih načinov. Matrika A bo **A=[10+20j,-15j;-15j,5-5j], b pa b=[100+10j;5j]**. Rešitev dobimo z ukazom **X=inv(A)*b** in dobimo

1.0873 - 1.3450i

-0.1135 + 4.1485i

Zančni tok $\underline{J}_1$ je torej (1,0873-j1,3450) A. Ta tok je tudi enak toku -$\underline{I}_4$, kar se lahko prepričamo iz prejšnje rešitve sistema petih enačb.

3. Metoda spojiščnih potencialov.

Število enačb enako številu spojišč -1. Izhajamo iz tega, da izrazimo toke v vejah s potenciali spojišč.

Če je v veji upor, izrazimo tok v veji s padcem napetosti na tem uporu, le-to pa izrazimo s potenciali spojišč, na katera je priključen. Če je v veji le napetostni vir, tok v tej veji izrazimo s toki v sosednje spojišče (v skladu s 1 KZ). Potencial enega od spojišč lahko poljubno izberemo (običajno ozemljimo).

spojišče (1): $\dfrac{\underline{V}_1-\underline{U}_g}{\underline{Z}_{L1}}+\dfrac{\underline{V}_1-\underline{V}_2}{R_1}+\underline{I}_g=0$

spojišče (2): $\dfrac{\underline{V}_2-\underline{V}_1}{R_1}+\dfrac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_{L2}}+\dfrac{\underline{V}_2-\underline{V}_3}{R_2}=0$

spojišče (3): $\dfrac{\underline{V}_3-\underline{V}_2}{R_2}+\dfrac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_C}-\underline{I}_g=0$

Dobimo sistem treh enačb, rešitev bodo spojiščni potenciali iz katerih nato izračunamo vejske toke, itd. Z Matlabom: **A=[1/5j+1/10,-1/10,0; -1/10,1/10+1/5+1/15j,-1/5;0,-1/5,1/5-1/20j], b=[-j+100/5j;0;j], inv(A)*b**

Rešitev je

93.2751 - 5.4367i

82.4017 +18.0131i

82.9694 + 2.2707i

STAVKI

1) Stavek superpozicije

Če imamo več različnih virov v vezju, lahko pri linearnem vezju odklopimo določen vir in analiziramo vezje kot vsoto več poenostavljenih vezij. Če so viri različnih frekvenc, ne smemo izračunanih kompleksorjev tokov preprosto sešteti, saj gre za časovne signale različnih frekvenc. Seštejemo lahko časovne signale. Z metodo superpozicije lahko analiziramo tudi vezje, ki vključuje enosmerne in izmenične vire.

2) Theveninovo nadomestno vezje.

Enako kot je veljalo za enosmerna vezja, lahko pri (linearnih) izmeničnih vezjih vezje med poljubnima dvema sponkama nadomestimo z realnim napetostnim virom.

Recimo, da nas zanima le en tok v vezju, ki ga analiziramo. Recimo, da je to tok skozi upor R_2. Poiščimo nadomestno Theveninovo upornost in napetost. Theveninova upornost je notranja upornost vezja gledana s sponk upora R_2, pri čemer tokovni vir odklopimo (odprte sponke), napetostnega pa kratko sklenemo. Dobimo $\underline{Z}_{Th} = \left(R_1 + \underline{Z}_{L1}\right) \| \underline{Z}_{L2} + \underline{Z}_C$. Zopet si pomagajmo z Matlabom >>**ZT=1/(1/(10+5j)+1/(15j))-20j**. Rezultat je $\underline{Z}_{Th} = 4{,}5 - \mathrm{j}14\ \Omega$.

SLIKA: Levo: Nadomestimo vezje med sponkama upora R_2 s Theveninovim nadomestnim virom. Desno: Theveninov nadomestni vir.

Napetost Thevenina dobimo kot napetost med sponkama odklopljenega upora. Uporabiti moramo določeno metodo reševanja tudi za izračun te napetosti. Vzemimo za vajo metodo spojiščnih potencialov, pri kateri upoštevamo, da mora biti vsota tokov v spojišče enaka nič:

$$\frac{\underline{V}_1 - \underline{U}_g}{\underline{Z}_{L1}} + \underline{I}_g + \frac{\underline{V}_1}{R_1 + \underline{Z}_{L2}} = 0 \Rightarrow \underline{V}_1\left(\frac{1}{\underline{Z}_{L1}} + \frac{1}{R_1 + \underline{Z}_{L2}}\right) = -\underline{I}_g + \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_{L1}}.$$

Rešitev z Matlabom: >> **V1=(-j+100/5j)/(1/5j+1/(10+15j)).** Rezultat je $\underline{V}_1$=(84-j10,5)V.

Napetost Thevenina je $\underline{U}_{Th} = \underline{U}_{L2} + \underline{U}_C = \underline{V}_1 \dfrac{\underline{Z}_{L2}}{R_1 + \underline{Z}_{L2}} - \underline{I}_g \underline{Z}_C$.

Rešitev z Matlabom >> **UTh=V1*15j/(10+15j)-j*(-20j)**. Rezultat je $\underline{U}_{Th}$ = (43+j31,5) V.

Tok skozi upor R_2 je torej $\underline{I}_{R2} = \dfrac{\underline{U}_{Th}}{\underline{Z}_T + R_2} = \dfrac{43 + j31{,}5\ \text{V}}{4{,}5 - j14 + 5\ \Omega} = (-0{,}1135 + j3{,}1485)\ \text{A}$.

Rezultat je enak kot z metodo Kirchoffovih zakonov.

Poskusimo še z metodo zančnih tokov (pri čemer je sedaj upor R_2 odklopljen): Napetost Thevenina bo $\underline{U}_{Th} = (\underline{J}_1 - \underline{I}_g)\underline{Z}_{L2} + (-\underline{I}_g)(\underline{Z}_C)$. Tok J_1 dobimo iz zančne enačbe

$-\underline{U}_g + \underline{J}_1(R_1 + \underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{L2}) - \underline{I}_g(R_1 + \underline{Z}_{L2}) = 0$, od koder >> **J1=(100+j*(10+15j))/(10+20j)**

$\underline{J}_1 = (2{,}1 - j3{,}2)$ A in >> **UTh=(J1-j)*15j-j*(-20j)** $\underline{U}_{Th} = (43 + j31{,}5)$ V.

Druge posebnosti pri izračunih elementov Theveninovega (ali Nortonovega) nadomestnega vezja:

- Theveninovo (ali Nortonovo) nadomestno upornost določimo kot kompleksno upornost med sponkama, kjer želimo določiti nadomestno vezje. Pri tem napetostne vire v vezju kratko sklenemo, tokovne pa odklopimo. Za lažje pomnenje si lahko pomagamo z vedenjem, da je notranja upornost idealnega napetostnega vira enaka nič, tokovnega pa neskončna.
- V primeru bolj kompleksnega vezja (če ni mogoče kar preprosto seštevati zaporedno in vzporedno vezane elemente vezja) moramo Theveninovo upornost določiti tako, da med sponki priključimo poljubno napetost (npr. Kar 1 V) in določimo tok v vezje. Razmerje med njima pa je vhodna impedanca oziroma Theveninova nadomestna (kompleksna) upornost. Tak primer vezja so tudi vezja s sklopljenimi elementi.
- Theveninovo nadomestno napetost določimo kot napetost odprtih sponk med sponkama (seveda pri priključenih virih).

3) Nortonovo nadomestno vezje

Je ekvivalentno Theveninovemu, le da ga predstavimo z realnim tokovnim virom. Velja $\underline{I}_N = \dfrac{\underline{U}_{Th}}{\underline{Z}_{Th}}$ in $\underline{Z}_{Th} = \underline{Z}_N = 1/\underline{Y}_N$.

Tok $\underline{I}_N$ lahko določimo kot tok kratkega stika med sponkama vezja, ki ga želimo nadomestiti.

SLIKA: Nortonovo nadomestno vezje.

4) Tellegenov stavek.

Tellegenov stavek pravi, da je vsota moči virov enaka vsoti moči bremen. V obravnavanem vezju bo moralo veljati

$$\frac{1}{2}\underline{U}_g(-\underline{I}_4^*)+\frac{1}{2}(\underline{V}_3-\underline{V}_1)\underline{I}_g^* = \frac{1}{2}I_4^2 jX_{L1}+\frac{1}{2}I_3^2\underline{Z}_{L2}+\frac{1}{2}I_5^2\underline{Z}_C+\frac{1}{2}I_2^2R_2+\frac{1}{2}I_1^2R_1 .$$

Izračunamo z Matlabom: >> **PV=0.5*100*(-I(4))+0.5*j*(V(3)-V(1)).** Dobimo $\underline{S}_{virov}=(50{,}5-j122{,}4)\ \mathrm{VA}$.

Moč na bremenih pa je >> **PB=0.5*(I(4)^2*5j+I(3)^2*15j+I(5)^2*(-20j)+I(2)^2*5+I(1)^2*10).** Dobimo $\underline{S}_{bremen}=(50{,}5-j122{,}4)\ \mathrm{VA}$.

Vidimo, da sta moči enaki, kar je tudi dober način preverjanja pravilnega rezultata analize vezja.

Vprašanje: Zakaj smo množili z $-\underline{I}_4^*$ in ne z $\underline{I}_4^*$. Odgovor: Zato, ker moramo upoštevati tok, ki izhaja iz + sponke.

5) Maksimalna moč.

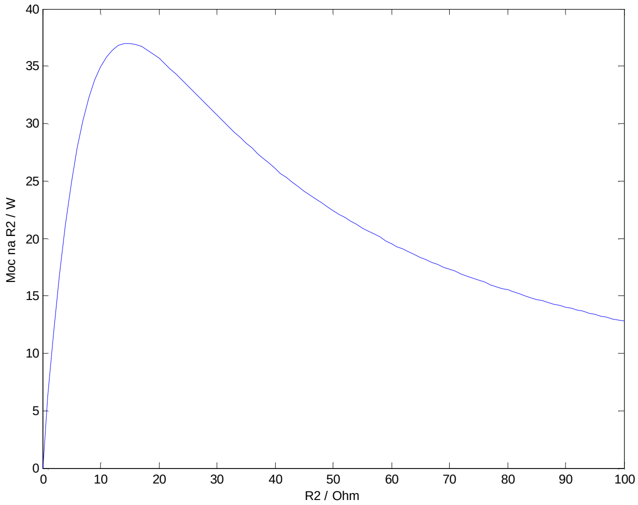
O maksimalni moči smo že govorili v poglavju o moči (PONOVI). Zato tokrat bolj na kratko. Vzemimo primer optimiranja upornosti R_2 iz obravnavanega primera tako, da bo na njem (delovna) moč maksimalna. Iz teorije vemo, da bo to tedaj, ko bo upornost bremena (upora) enaka absolutni vrednosti Theveninove upornosti, ki je $|\underline{Z}_{Th}|=|4{,}5-\mathrm{j}14|\ \Omega = 14{,}7\ \Omega$. Maksimalna moč pa bo[2] >> **Pmax=UTh*conj(UTh)/(4*(5+14.7))**

$$P_{b,max}=\frac{U_{Th}^2}{4\left(R_2+Z_{Th}\right)}\approx 36\ \mathrm{W} .$$

Poleg uporabljene metode lahko uporabimo tudi klasično analizo vezij za določitev maksimalne moči. Uporaba programov Matlab je dobrodošla tudi v primeru optimiranja elementov, saj je izračunavanje (linearnih) sistemov enačb izredno hitro. Naredimo preprost

[2] S »polovičko« pri izrazih za moč je potrebno biti vedno nekoliko previden. Včasih so moči izražene z efektivnimi vrednostmi, tedaj je izraz za moč brez polovičke, če pa so z maksimalnimi, pa je potrebno v izrazu upoštevati ½.

programček, ki povečuje vrednost upora R_2 od 1 do 100 Ω, vsakič izračunamo toke in moč na uporu R_2 ter na koncu izrišemo graf. Iz grafa ugotovimo, da bo največja moč dejansko pri upornosti R_2 med 10 in 20. Glede na natančnost izračuna, dobimo maksimum pri vrednosti upora 15 Ω. Poleg tega odčitamo maksimalno moč približno 36 W.



SLIKA: Moč na uporu R_2 ima maksimum pri vrednosti, ki je enaka absolutni vrednosti Theveninove nadomestne upornosti. (Matlab: Moc_na_R2.m)

```
% Program v Matlabu za izris moči na uporu R2
P=[]; % prazen array
for R2=0:1:100 % povečujem upornost od 0 do 100
A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;10,0,15j,-5j,0;0,R2,-15j,0,-20j]; % matrika
b=[-j;0;j;100;0];
I=inv(A)*b; % resitev tokov, I(2) je tok skozi upor R2
PR2=0.5*I(2).*conj(I(2))*R2 % izracun moci
P=[P PR2] % shranjevanje vrednosti moci v vektor P
end
plot(0:1:100,P) % izris
xlabel('R2 / Ohm')
ylabel('Moc na R2 / W')
```

Vprašanja za obnovo:

1) Upoštevanje sklopljenih tuljav pri analizi vezij. Tokovno krmiljen napetostni vir.
2) Metode reševanja vezij: način uporabe, primer.
3) Stavki: superpozicija, Thevenin/Norton, Tellegen, maksimalna moč: primer uporabe.

izpit, 14. junij 2006
izpit, 28. junij 2006

2 kol. 9.6.1999

*** Reševanje bolj kompleksnih vezij s programsko opremo.** Programi za analizo vezij, kot je na primer Spice, najpogosteje uporabljajo kar »preprosto« metodo Kirchoffovih zakonov, saj reševanje večjega sistema enačb za računalnike ni težava. Reševanje postane težavnejše, ko v analizi upoštevamo kompleksnejše modele nelinearnih elementov. Ti imajo lahko tudi modele, ki so opisani z več kot deset parametri. Zaradi zahtevnosti določanja teh parametrov, pogosto proizvajalci podajajo kar SPICE parametre svojih izdelkov.

```
10BQ100
*****************************************************************************
* SPICE Model Diode                                                         *
*****************************************************************************
.SUBCKT 10BQ100 ANO CAT
D1 ANO 1 CAT
*Define diode model
.model D10BQ100 D(Is=341.4E-06 N=2.664 Rs=3.65E-03 Ikf=37.08E-03 Xti=2 Eg=1.11
+               Cjo=65.57E-12 M=.5751 Vj=4.282 Fc=0.5 Isr=17.26E-27 Nr=5.662
+               Bv=119.9 Ibv=215.5E-06 Tt=43.28E-09)

*****************************************************************************

.ENDS 10BQ100
```

SLIKA: Primer SPICE modela Schottky diode 10BQ100 (zaporna napetost 100 V) proizvajalca International Rectifier. »Preprosto« diodo popišejo z nič manj kot 15 parametri.