2. BIOT-SAVARTOV ZAKON

Equation Section 2

Vsebina poglavja: zapis Biot-Savartovega zakona, izračuni magnetnega polja v okolici osnovnih oblik tokovodnikov: premice, daljice, zanke in solenoida.

Polje, ki ga v okolici povzroča neskončen raven vodnik smo že zapisali, ko smo obravnavali silo med dvema ravnima vodnikoma. To polje je $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$. To enačbo in druge, za poljubno obliko vodnika s tokom lahko izračunamo z uporabo Biot-Savartovega zakona.

Polje, ki ga tokovni element $I\mathrm{d}\vec{l}$ povzroča v točki T je:

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\mathrm{d}l\cdot\sin(\theta)}{r^2} \tag{2.1}$$

kjer je r razdalja od tokovnega elementa do točke T, θ pa je kót med vektorjema $\mathrm{d}\vec{l}$ in $\vec{r}$.

Ta enačba dá le velikost polja, ne pa tudi smeri. Smer polja je pravokotna na ravnino, ki jo določata vektorja $d\vec{l}$ in $\vec{r}$, kar lahko zapišemo z vektorskim produktom

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2} \tag{2.2}$$

SLIKA: Tokovni element oddaljen od točke *T* za razdaljo *r* povzroča v točki *T* gostoto magnetnega pretoka, določeno z Biot-Savartovim zakonom.

Da bi določili polje v točki T za celotni tokovodnik, je potrebno sešteti (integrirati) prispevke vseh tokovnih elementov:

$$\boxed{\vec{B}=\int_L\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}. \quad \text{BIOT-SAVARTOV ZAKON} \tag{2.3}$$

MAGNETNO POLJE OSNOVNIH STRUKTUR (TOKOVODNIKOV), IZRAČUNANO Z UPORABO BIOT-SAVARTOVEGA ZAKONA

1. TOKOVNA PREMICA

Raven, neskončen, tanek tokovodnik (tokovna premica) postavimo vzdolž Z osi s tokom v smeri Z osi. Pri $z = 0$ postavimo na oddaljenosti R od izhodišča (od vodnika) točko T, v kateri računamo polje. Na poljubni točki na vodniku na Z osi označimo tokovni element in narišemo vektor $\boldsymbol{r}$ od tokovnega elementa do točke$T$.. Zapišemo Biot-Savartov zakon v obliki $\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\mathrm{d}l \cdot \sin(\theta)}{r^2}$, smer polja pa ugotovimo iz vektorskega produkta tokovnega elemeta in smeri vektorja $\boldsymbol{r}$ in kaže v smeri kóta fi. Velja $\mathrm{d}l = \mathrm{d}z$, $\sin\theta = \frac{R}{r}$, kjer je $r = \sqrt{z^2 + R^2}$. Vstavimo izraze v B-S zakon in dobimo $\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}z \cdot R}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\mathrm{d}z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$. Sedaj je potrebno le še sešteti vplive vseh tokovnih elementov, ki se nahajajo vzdolž Z osi, kar naredimo z integracijo diferenciala polja:

$$B = \int\limits_{\substack{\text{po vseh}\\ \text{tokovnih}\\ \text{elementih}}} \mathrm{d}B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 IR\mathrm{d}z}{4\pi\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}.$$

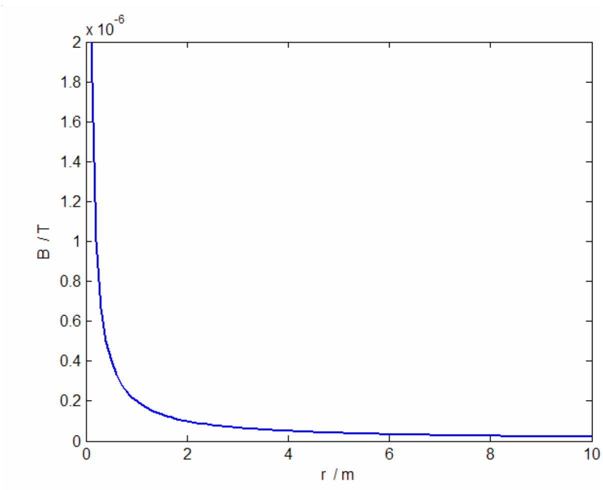
Rešitev tega integrala poiščemo v tablicah integralov. Dobimo

$$B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \left.\frac{z}{R^2\sqrt{z^2 + R^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(1 - (-1)\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Končni rezultat je torej $\boxed{\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$. (2.4)

SLIKA: Tokovna premica postavljena vzdolž Z osi.

SLIKA: Polje tokovnega elementa kaže v smeri vektorskega produkta med vektorjem tokovnega elementa in vektorjem, ki kaže od tokovnega elementa do točke *T*. Ugotovimo, da je smer polja v okolici tokovne premice v smeri kóta fi oziroma v smeri tangente na krožnico. Preprost način določanja smeri toka je tudi s pomočjo prstov desne roke, pri čemer palec desne roke usmerimo v smer toka, prsti, ki ovijajo tokovodnik pa ponazarjajo smer magnetnega polja.




```
function poljepremice
% polje tokovne premice
mi0=4*pi*1e-7
I=1
r=0:0.1:10
B=mi0*I./(2*pi*r);
plot(r,B)
xlabel('r  / m')
ylabel('B  / T')
```

SLIKA: Program v Matlabu za izračun polja v okolici tokovne premice po enačbi (2.4).

2. TOKOVNA DALJICA

Tokovna daljica je en od osnovnih elementov, s pomočjo katerih lahko sestavimo bolj kompleksne tokovodnike. Izpeljava sledi izpeljavi polja v okolici tokovne premice, le meje integracije je potrebno spremeniti od nekega $-z_1$ do $+z_2$. Dobimo

$$B=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_{-z_1}^{+z_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} \quad \text{in} \quad B=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\frac{z}{R^2\sqrt{z^2+R^2}}\Bigg|_{-z_1}^{+z_2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2+R^2}}-\frac{-z_1}{\sqrt{z_1^2+R^2}}\right).$$

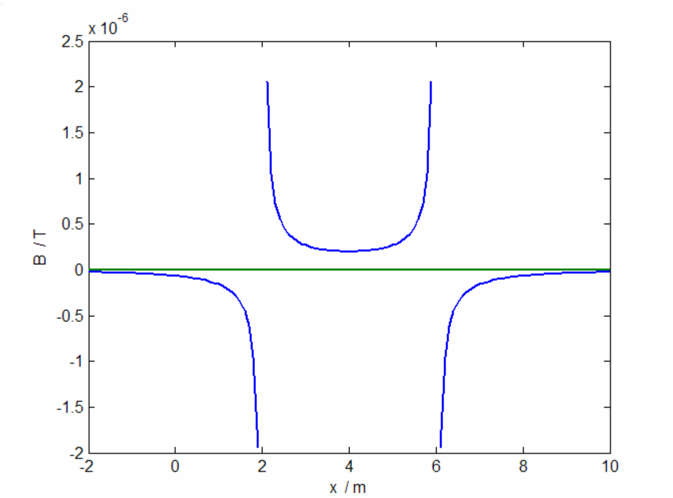
Ta rezultat lahko napišemo tudi nekoliko bolj preprosto, saj je $\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+R^2}}=\cos\theta_1$ in $\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2+R^2}}=-\cos\theta_2$. Sledi:

$$\boxed{\vec{B}=\vec{e}_\varphi\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\cos(\theta_1)-\cos\left(\theta_2\right)\right)}. \tag{2.5}$$

Preverimo še, če dobimo enak rezultat za tokovno premico, če upoštevati $\theta_1=0$ in $\theta_2=\pi$.

SLIKA: Tokovna daljica (določitev razdalje *R* in kótov).

Primer: Narišimo polje v oddaljenosti od dveh premih vodnikov s programom MATLAB. Iz slike določite smer, pozicijo in velikost tokov




```
function polje2premic
%  polje dveh premic
a=4;
mi0=4*pi*1e-7;
I=1;
x=-2:0.1:10;

B1=mi0*I./(2*pi*(x-2));
B2=mi0*I./(2*pi*(x-2-a));
B=B1-B2

plot(x,B,[-2 10],[0 0])
xlabel('x  / m')
ylabel('B  / T')
```

3. TOKOVNA ZANKA (OBROČ)

Tokovna zanka navidezno deluje kot nepomemben element. V resnici pa je vsaj tako pomemben kot tokovna premica. Iz niza tokovnih obročev lahko sestavimo tuljavo (solenoid ali toroid), ki je v magnetiki osnoven element. V kratkem bomo vpeljali tudi koncept magnetnega dipola oziroma magnetnega dipolnega momenta. Ta koncept nam bo med drugim pomagal razložiti polje trajnih magnetov. Gradnik magnetnega dipolnega momenta je tokovna zanka.

Polje v splošni točki v okolici tokovne zanke ni enostavno izračunati, dokaj hitro pa lahko izpeljemo tudi pomembne izraze za polje v središču in osi tokovne zanke.

Polje v središču tokovne zanke.

Zanko polmera R postavimo tako, da ima center v središču valjnega koordinatnega sistema. Označimo tokovni element in razdaljo od tokovnega elementa do središča. Velja $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\varphi, r = R$ in $\sin\theta = \frac{\pi}{2}$. Vstavimo v B-S zakon in dobimo $\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin(\theta)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\mathrm{d}\varphi}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\varphi}{R}$. Sedaj le še seštejemo (integriramo) prispevke vseh tokovnih elementov in dobimo $B = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\varphi}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I2\pi}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\mathrm{R}}$.

V primeru, da je smer toka v smeri kóta fi, je polje usmerjeno v smeri +Z osi in je

$$\boxed{\vec{B} = \vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{2R}}. \qquad (2.6)$$

SLIKA: Tokovna zanka postavljena v središče valjnega koordinatnega sistema.

Polje dela tokovne zanke.

Hitro lahko ugotovimo, da lahko določimo polje dela tokovne zanke tako, da integriramo prispevke le med določenima kótoma, recimo φ_1 in φ_2. Potem je enačba oblike $B=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\varphi}{R}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\varphi_2-\varphi_1\right)$. Če izrazimo razliko kótov $\beta=\varphi_2-\varphi_1$ velja

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\beta} \tag{2.7}$$

SLIKA: Polje dela tokovne zanke, omejen s kótom beta.

Polje v osi tokovne zanke

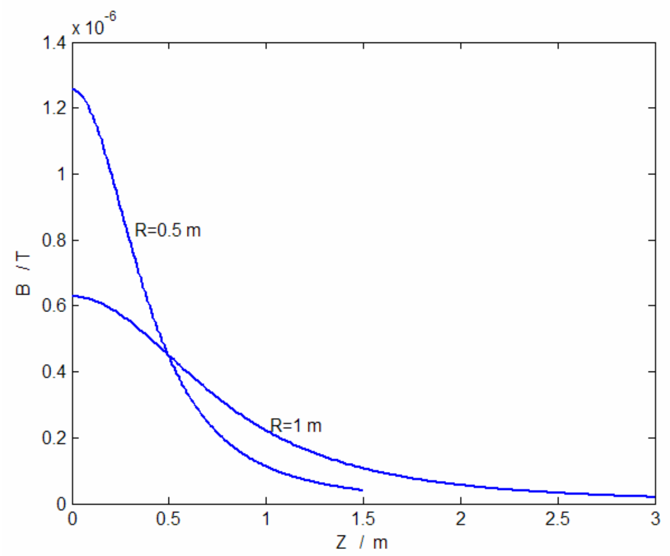
Tudi polje v osi tokovne zanke je dokaj enostavno določiti. Če označimo z R polmer obroča in se točka T nahaja na razdalji z od središča zanke, velja $\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\varphi$, $r=\sqrt{z^2+R^2}$ in $\sin\theta=\frac{\pi}{2}$. Sledi $\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin(\theta)}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\mathrm{d}\varphi}{z^2+R^2}$. Tega izraza še ne smemo integrirati po tokovnih elementih, preprosto zato, ker vektor polja ne kaže v isto smer za vse tokovne elemente. Ugotovimo lahko, da se bo zaradi simetrije ohranila le tista komponenta polja, ki je v smeri osi Z. Zato pišemo $\mathrm{d}B_z=dB\cdot\sin\alpha=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\mathrm{d}\varphi}{z^2+R^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2\mathrm{d}\varphi}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$.

Integracija je preprosta. Dobimo

$B_z=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2\mathrm{d}\varphi}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2 2\pi}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$. Če upoštevamo še smer polja, dobimo

$$\boxed{\vec{B}=\vec{e}_z\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}}. \tag{2.8}$$

SLIKA: Polje v osi tokovne zanke.




```
unction poljevosizanke(R);
set(0,'DefaultLineLineWidth',1.5)
% DEFINICIJA KONSTANT
mi0=4*pi*1e-7;
I=1;  % TOK
% Z os
zmin=0;zmax=3*R; dz=zmax/200;
z=zmin:dz:zmax;
B=0.5*mi0*I*R^2./(R^2+z.^2).^(1.5);
plot(z,B)
```

SLIKA: Primer uporabe programa Matlab za izračun polja v osi zanke. Funkcija je uporabljena 2x, z radijem 1 m in 0,5 m. Vmes smo uporabili ukaz hold on (poljevosizanke(1); hold on; poljevosizanke(0.5))

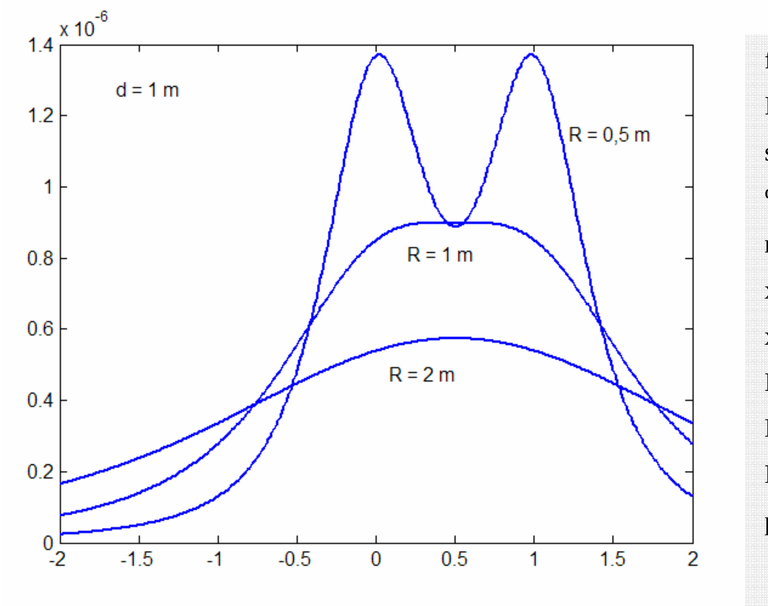
Polje izven osi tokovne zanke

Polje izven osi tokovne zanke ni enostavno izpeljati in tudi rezultat ni preprost. Je pa pomemben, zato ga vseeno zapišimo - vsaj v poenostavljeni obliki, ki velja za večje razdalje od zanke (recimo za razdalje R dosti večje od polmera zanke a) in je v sferičnih koordinatah:

$$\vec{B} = \vec{e}_r \cdot B_r + \vec{e}_\theta \cdot B_\theta = \frac{\mu_0 I a^2}{4R^3}\left(\vec{e}_r \cdot 2\cos(\theta) + \vec{e}_\theta \cdot \sin(\theta)\right). \qquad (2.9)$$

Dobimo tako komponento v smeri radija kot kóta. Pomembno je, da polje pada z razdaljo s tretjo potenco, tako kot električno polje v oddaljenosti od električnega dipola.

SLIKA: Skica polja v okolici tokovne zanke.




```
function poljedvehzank;
I=1; R=2; d=1;
set(0,'DefaultLineLineWidth',1.5)
% DEFINICIJA KONSTANT
mi0=4*pi*1e-7;
xmin=-2*d;xmax=2*d; dx=xmax/200;
x=xmin:dx:xmax;
B1=0.5*mi0*I*R^2./(R^2+x.^2).^(1.5);
B2=0.5*mi0*I*R^2./(R^2+(x-d).^2).^(1.5);
B=B1+B2
plot(x,B)
```

Slika: Primer izračuna polja para v osi vzporednih tokovnih zank oddaljenih za 1 m. Polmeri zank so 2m, 1 m in 0,5 m. Tok je 1 A. Dokaj homogeno polje se utvari v sredini tuljave, ki ima tako polmer kot razdaljo med zankama enako 1 m. Takima zankama rečemo Helmholtzov par in se pogosto (v obliki dveh navitij) uporablja v praksi.

4. POLJE V OSI RAVNE TULJAVE - SOLENOIDA

Solenoid predstavimo kot N zank s tokom I na doložini l. Da bi izračunali polje v poljubni točki na osi, postavimo točko T na razdaljo z od središča k.s.. Nato zapišemo polje, ki ga v tej točki povzroča le ena zanka, ki se nahaja na razdalji z' od izhodišča. Uporabimo že izpeljan izraz za polje v osi tokovne zanke $B_z = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$, ki jo moramo ustrezno preoblikovati v $\mathrm{d}B_z = \dfrac{\mu_0 \mathrm{d}I R^2}{2\left(\left(z-z'\right)^2+R^2\right)^{3/2}}$, kjer d$I$ določimo kot $\mathrm{d}I = \dfrac{NI}{l}\mathrm{d}z'$. Če omejimo tuljavo med $z'=z_1$ in $z'=z_2$, pri čemer le $l=z_2-z_1$, dobimo polje v osi tuljave na razdalji z centra z rešitvijo integrala $B_z = \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\mu_0 NIR^2}{2l\left((z-z')^2+R^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}z'$.

Rešitev je

$$B_z = \frac{\mu_0 NIR^2}{2l}\left(\frac{z'-z}{R^2\sqrt{(z-z')^2+R^2}}\right)_{-z_1}^{z_2} = \frac{\mu_0 NI}{2l}\left(\frac{z_2-z}{\sqrt{(z-z_2)^2+R^2}}-\frac{(z_1-z)}{\sqrt{(z-z_1)^2+R^2}}\right).$$

Ta manj pregleden zapis lahko poenostavimo z ugotovitvijo, da lahko uporabimo kóta

$$\cos\beta_2 = \frac{z_2-z}{\sqrt{(z-z_2)^2+R^2}} \text{ in } \cos\beta_1 = \frac{z-z_1}{\sqrt{(z-z_1)^2+R^2}}.$$

Dobimo $\boxed{\vec{B} = \vec{e}_z\frac{\mu_0 NI}{2l}\left(\cos(\beta_1)+\cos(\beta_2)\right)}$. (2.10)

SLIKA: Polje v osi ravne tuljave - solenoida.

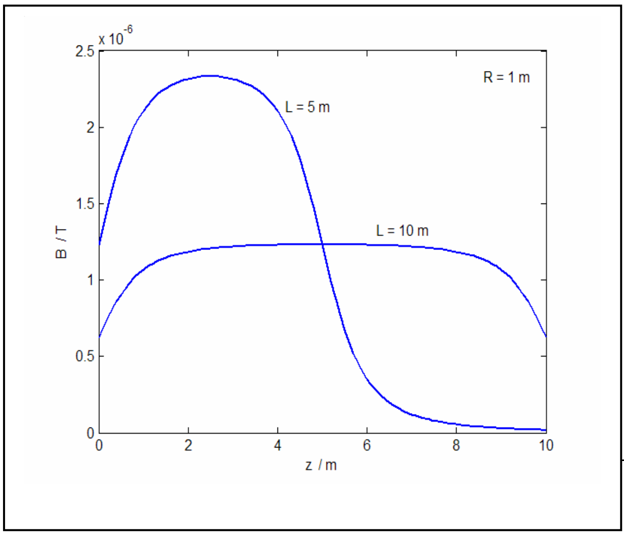
Poenostavljeni izrazi za dolge tuljave:

Izraz za polje v sredini dolge tuljave dobimo, če upoštevamo $\beta_1 = \beta_2 = 0$:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{e}_z\frac{\mu_0 NI}{l}}. \qquad (2.11)$$

Polje na robu dolge tuljave pa dobimo z upoštevanjem $\beta_1 = \pi/2$ in $\beta_2 = 0$:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{e}_z\frac{\mu_0 NI}{2l}}. \qquad (2.12)$$



SLIKA: Polje v osi solenoida s tokom *NI* = 10 A, polmera ovojev 1 m in dolžine 5 m in 10 m. Začetek tuljave je pri *z* = 0 m.

POVZETEK:

1. Iz enačbe za silo med dvema tokovnima elementoma ugotovimo, da nastopa člen $\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin(\theta)}{r^2}$, ki ga poimenujemo gostota magnetnega pretoka. Popolni izraz za gostoto magnetnega pretoka predstavlja Biot-Savartovega zakon in vsebuje vektorski produkt tokovnega elementa in vektorja *r* in integracijo po tokovnih elementih: $\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$.
2. Polje v okolici tokovne premice je $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$. Polje v okolici tokovne premice je rotacijsko, smer polja določimo iz vektorskega produkta $\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}$ ali z ovijanjem prstov desne roke, če tok kaže v smeri palca.
3. Polje tokovne daljice je $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\cos(\theta_1) - \cos\left(\theta_2\right)\right)$. (Razloži *R* in kót theta. Skica.)
4. Polje v središču tokovne zanke je $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2R}$. (Kaj je *R* in kam kaže polje glede na smer toka v zanki in izbiro koordinatnega sistema?)
5. Polje v osi tokovne zanke je $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$. (Kje je največje? V katero smer kaže? Skiciraj potek.)
6. Polje v osi ravne tuljave – solenoida je $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 N I}{2l}\left(\cos(\beta_1) + \cos(\beta_2)\right)$. (Kaj je *l*, kako določimo kóte, poenostavitev enačbe v primeru zelo dolgega solenoida.)

Primeri izpitnih in kolokvijskih nalog:

izpit, 17. septembra 2002
izpit, 16. aprila 2002
izpit, 4. 12. 2001
izpit, 20. september 2006
izpit, 31. avgust 2006
izpit, 19. september 2005
izpit, 3. 12. 2001
izpit, 30. avgust 2005
Izpit 26. 6. 2002
Izpit 4. 9. 2003
1. kolokvij , 17.4.2002
1. kolokvij, 9. maj 2005
izpit, 20. september 2004
Izpit, 17. 01. 2002
Prvi kolokvij, 9. maj 2002