



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE II

Magnetostatika

Dejan Križaj

2011

KRATKO KAZALO (GLAVNA POGLAVJA)

UVOD - ZGODOVINA MAGNETIKE

1. SILA NA (TOKO)VODNIK V MAGNETNEM POLJU

2. BIOT-SAVARTOV ZAKON

Magnetno polje zemlje

3. AMPEROV ZAKON

4. MAGNETNI PRETOK – FLUKS

5. DELO MAGNETNIH SIL

6. NAVOR NA (TOKO)VODNIK

7. GIBANJE NABOJEV V ELEKTRIČNEM IN MAGNETNEM POLJU

8. MAGNETNE LASTNOSTI SNOVI

9. MAGNETNI MATERIALI

10. ANALIZA MAGNETNIH STRUKTUR

Uporaba feromagnetikov in ferimagnetikov v praksi

11. Inducirana napetost

Primeri upoštevanja matematične magnetilne krivulje pri izračunu inducirane napetosti

12. Energija magnetnega polja.....

13. Lastna in medsebojna induktivnost

14. Razširjen Amperov zakon

15. Povzetek enačb elektromagnetnega polja

KAZALO

KAZALO	2
UVOD - ZGODOVINA MAGNETIKE	6
<i>Kompas (Kitajska, 200 bc).....</i>	<i>6</i>
<i>Magnetit (Grčija, bc).....</i>	<i>6</i>
<i>Gilbert (anglija, 1600) – prvi znanstven pristop.....</i>	<i>7</i>
1700 – 1800	8
<i>Oersted (Danska, 1820) – eksperiment s tokom in kompasom</i>	<i>8</i>
1. SILA NA (TOKO)VODNIK V MAGNETNEM POLJU	10
<i>Permeabilnost vakuumu</i>	<i>11</i>
<i>Enota za električni tok</i>	<i>11</i>
<i>Tokovni element.....</i>	<i>12</i>
<i>Magnetna sila na tokovni element</i>	<i>13</i>
2. BIOT-SAVARTOV ZAKON.....	19
<i>Magnetno polje osnovnih struktur (tokovodnikov), izračunano z uporabo biot-savartovega zakona</i>	<i>20</i>
Magnetno polje zemlje.....	31
<i>Združeno magnetno polje zemlje in sonca.....</i>	<i>33</i>
3. AMPEROV ZAKON	35
<i>Izračuni polja s pomočjo amperovega zakona.....</i>	<i>37</i>
4. MAGNETNI PRETOK – FLUKS.....	43
<i>Izračun fluksa</i>	<i>43</i>
<i>Brezizvornost magnetnega polja</i>	<i>45</i>
<i>induktivnost (prvič)</i>	<i>48</i>
<i>Magnetni sklep</i>	<i>48</i>
5. DELO MAGNETNIH SIL	51
6. NAVOR NA (TOKO)VODNIK	56
<i>Navor na tokovno zanko v magnetnem polju.....</i>	<i>58</i>
<i>Magnetni dipol in magnetni dipolni moment.....</i>	<i>59</i>
<i>D'Arsonvalov amperimeter.....</i>	<i>62</i>
7. GIBANJE NABOJEV V ELEKTRIČNEM IN MAGNETNEM POLJU	63
<i>Gibanje nabojev v električnem polju.....</i>	<i>63</i>

<i>Gibanje nabojev v magnetnem polju</i>	<i>63</i>
<i>Lorentzova sila</i>	<i>65</i>
<i>Odklanjanje delcev v magnetnem polju zemlje</i>	<i>66</i>
<i>Katodna cev</i>	<i>67</i>
<i>Obstoj elektrona in določitev naboja elektrona.....</i>	<i>68</i>
<i>Hallov pojav</i>	<i>69</i>
<i>Merjenje magnetnega polja s hallovim efektom</i>	<i>70</i>
<i>Ciklotron.....</i>	<i>71</i>
<i>Masni spektrograf.....</i>	<i>73</i>
<i>** Dodatno: relativističen pogled na gibanje delcev.....</i>	<i>75</i>
<i>** Dodatno: Kvantni Hallov efekt</i>	<i>75</i>
8. MAGNETNE LASTNOSTI SNOVI	77
<i>Od kod trajnim magnetom lastnost, da povzročajo magnetno polje?</i>	<i>77</i>
<i>Vektor magnetizacije</i>	<i>78</i>
<i>Zveza med magnetizacijo in površinskim tokom</i>	<i>79</i>
<i>Magnetna poljska jakost (H) in razširjen Amperov zakon</i>	<i>80</i>
<i>Zveza med B, H in M</i>	<i>82</i>
<i>Magnetna susceptibilnost in relativna permeabilnost</i>	<i>83</i>
<i>Zveza med B in H.....</i>	<i>84</i>
<i>Magnetna napetost.....</i>	<i>85</i>
<i>Magnetni potencial.....</i>	<i>86</i>
<i>Mejni pogoji magnetnega polja.....</i>	<i>86</i>
<i>** Dodatno: Magnetni naboj.....</i>	<i>92</i>
9. MAGNETNI MATERIALI	94
<i>Diamagnetiki.....</i>	<i>94</i>
<i>Paramagnetiki</i>	<i>94</i>
<i>Antiferomagnetiki.....</i>	<i>95</i>
<i>Feromagnetiki.....</i>	<i>96</i>
<i>Superparamagnetiki</i>	<i>96</i>
<i>Feromagnetiki.....</i>	<i>97</i>
10. ANALIZA MAGNETNIH STRUKTUR.....	102
<i>Postopek računanja magnetnih struktur</i>	<i>103</i>
<i>PRIMERI izračunov.....</i>	<i>104</i>
<i>Delovna točka (trajnega) magneta.....</i>	<i>110</i>

<i>Magnetna vezja</i>	<i>111</i>
Uporaba feromagnetikov in ferimagnetikov v praksi	115
<i>Efektivna permeabilnost in faktor induktivnosti.....</i>	<i>115</i>
<i>Upoštevanje temperaturne in frekvenčne karakteristike</i>	<i>116</i>
<i>Uporaba programov za numerično simulacijo magnetnih struktur.....</i>	<i>118</i>
<i>Upoštevanje stresanja fluksa v zračni reži</i>	<i>118</i>
<i>Trajni magneti.....</i>	<i>119</i>
<i>Kako izračunati in izbrati ustrezno tuljavo?.....</i>	<i>121</i>
<i>Nekaj aplikacij.....</i>	<i>122</i>
<i>Induktivni senzorji bližine.....</i>	<i>122</i>
<i>Gradiometrični senzor polja.....</i>	<i>123</i>
<i>Eksperimenti</i>	<i>124</i>
11. Inducirana napetost	125
<i>Časovna sprememba fluksa skozi tuljavo</i>	<i>125</i>
<i>Inducirana napetost v zanki pri znani spremembi magnetnega pretoka skozi zanko</i>	<i>127</i>
<i>Inducirana napetosti na tuljavi pri znanem toku skozi ovoje tuljave in padec napetosti na tuljavi.....</i>	<i>128</i>
<i>Padec napetosti na tuljavi pri vzbujanju tuljave s harmoničnim (sinusnim) tokom.....</i>	<i>129</i>
<i>Realna tuljava – ohmska in induktivna upornost.....</i>	<i>130</i>
<i>Kazalci, ohmska in induktivna upornost</i>	<i>132</i>
<i>Inducirana napetost v tuljavi zaradi spremembe fluksa v drugi tuljavi</i>	<i>133</i>
<i>Transformatorska in Gibalna (rezalna) inducirana napetost.....</i>	<i>138</i>
Primeri upoštevanja matematične magnetilne krivulje pri izračunu inducirane napetosti	143
12. Energija magnetnega polja	153
<i>Energija shranjena v polju tuljave.....</i>	<i>153</i>
<i>Energija sistema več tuljav</i>	<i>155</i>
<i>Izpeljava izraza za gostoto magnetne energije</i>	<i>157</i>
<i>Energija v linearnih magnetnih strukturah</i>	<i>158</i>
<i>Energija v nelinearnih magnetnih strukturah</i>	<i>159</i>
<i>Produkt B in H (pomemben pri trajnih magnetih)</i>	<i>160</i>
<i>Histerezne izgube.....</i>	<i>161</i>
<i>Določitev induktivnosti iz magnetne energije.....</i>	<i>162</i>
<i>Induktivnost premega vodnika in induktivnost dvovoda</i>	<i>163</i>
<i>Magnetna sila</i>	<i>164</i>

13. Lastna in medsebojna induktivnost	167
14. Razširjen Amperov zakon	171
<i>Premikalni (poljski) tok</i>	<i>172</i>
<i>Kdaj bi bil za analizo bolj pomemben konduktivni in kdaj premikalni tok?</i>	<i>173</i>
<i>Difuzija ravninskega polja v prevodniku (dodatno, kot informacija)</i>	<i>173</i>
15. Povzetek enačb elektromagnetnega polja	177
1. <i>Maxwellova enačba = razširjen Amperov zakon.....</i>	<i>177</i>
2. <i>Maxwellova enačba = Faradayev zakon indukcije.....</i>	<i>177</i>
3. <i>Maxwellova enačba = Gaussov zakon za magnetni polje.....</i>	<i>178</i>
4. <i>Maxwellova enačba = Gaussov zakon za električno polje</i>	<i>178</i>

UVOD - ZGODOVINA MAGNETIKE

Imena za naravni magnet v različnih jezikih:

Francosko: *aimant* (ljubeč)

Kitajsko: *tzhu shih* (ljubezenski kamen)

Angleško: *lodestone* (leading, guiding stone)

KOMPAS (KITAJSKA, 200 BC)



Kos magnetita z močno magnetizacijo tvori železov magnet, ki na plavajoči podlagi vedno kaže v isto smer. Kitajci so prvi, ki so dokumentirano spoznali magnetni učinek in ga med drugim uporabili za izum kompasa (dinastija Quin, 221-206 pred našim štetjem). Prvi dokumentiran zapis o kompasu izvira iz leta 1297. Ta pomemben izum, ki omogoča ladjam navigacijo tudi daleč od kopnega, se je hitro razširil tudi v Arabijo in v Evropo.

MAGNETIT (GRČIJA, BC)

Stari Grki poznajo magnet, saj izvira ime magnet iz pokrajine Magnesia (sedaj v Turčiji), kjer so našli primerke kamnov (magnetita) z magnetnimi lastnostmi. Že Thales iz Mileta trdi, da ima magnet dušo. Lucretius je predstavnik atomistov in v delu *De Rerum Natura* opisuje, da magnet privlači železo tako, da odganja atome v njegovi okolici. V resnici povzema učenje Epicurijusa (342 – 270 BC), ki je naslednik učenja Demokrita. Po njihovem učenju naj bi bila vsa snov sestavljena iz atomov, ki pa so ob smrti razpadli (ni bilo življenja po smrti). Iz tistega časa izvira tudi prepričanje, da česen zmanjša moč magnetov. To prepričanje se je vleklo vse do leta 1600, še posebno so se česna izogibali morjeplovci.



Magnetit (Fe_3O_4) je narvni mineral, ki ima od vseh naravnih magnetnih materialov najbolj izražene magnetne lastnosti.

GILBERT (ANGLIJA, 1600) – PRVI ZNANSTVEN PRISTOP

Prve resnejše in obsežne poskuse iz magnetike opravi W. Gilbert in jih objavi v knjigi »De Magnete« leta 1600. Znan je bil kot osebni doktor kraljice Elizabete. Gilbert je bil trden zagovornik Kopernika, kar je bilo v drugih, bolj dogmatičnih državah, življenjsko nevarno. Istega leta, kot je izšla njegova knjiga, so Giordano Bruna v Italiji zakurili na grmadi. Gilbert je delal mnogo poskusov iz elektrike, pri čemer je uporabljal elektroskop. Naredil je obsežen seznam materialov, ki se bolj ali manj naelektrijo – dandanes to imenujemo triboelektrična lestvica. Ugotovil je tudi, da je električna sila različna od magnetne, da naelektren objekt nima polov, kot jih ima magnet in da je mogoče električno silo zmanjšati s kosom papirja, magnetno pa ni mogoče. (Ena pomembnejših stvari, ki se jih lahko naučimo od Gilberta, je spoznanje, kako je pomembno proučiti in preverjati dejstva in ne le povzemanje pisanje drugih. Še posebno, če ne temelji na znanstvenem delu. To vodilo bi lahko bilo v veljavi še danes. Čeprav je vrsta pojavov že zelo natančno pojasnjena, je za pravo razumevanje najboljše lastno preverjanje. Če je le mogoče, naj to velja za vse, ki se učijo.)

Gilbert je proučeval tako naravne magnete iz magnetita (loadstone), kot tudi umetno namagnetene materiale – železo. V popolnosti je tudi razumel inducirano magnetno polje, kjer nenamagnetni vendar (fero)magnetni material prevzame magnetne lastnosti ob stiku.

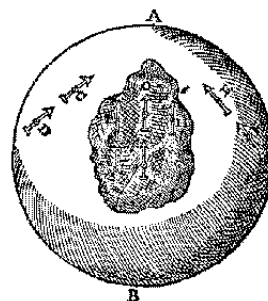
Ugotovil je, da ne le, da kaže magnetna igla (kompas) proti severu, pač pa tudi pod določenim kotom na površino zemlje. Predlagal je uporabo naprave, s katero bi lahko določali ne le smer severa, pač pa tudi geografsko višino iz tega kota. Gilbert je naredil model zemlje, ki ga je poimenoval terella (majhna zemlja) v katerega je vgradil trajni magnet. S tem modelom prikazuje delovanje kompasa na zemlji in ugotavlja, da je sama zemlja en velik magnet. Kdor raziskuje se lahko tudi moti: Gilbert v zadnjem delu knjige predvideva (pod vplivom Kopernikove teorije), da je magnetno polje tisto, ki prispeva k gibanju teles v vesolju.



William Gilbert (1540 - 1603) se smatra prvi, ki se je znanstveno lotil raziskovanja magnetnih pojavov in jih opisal v knjigi De



Knjiga W. Gilberta De Magnete.



Po Gilbertovih dognanjih se je dve desetletji na področju raziskav magnetike dogajalo bolj malo.

1700 – 1800

Do leta 1800 velja omeniti nekaj pomembnejših dognanj pri razumevanju elektrike. Otto von Guericke (1672) izumi naelektritveno sfero n prvo vakumsko steklenico. Sledi odkritje t.i. Leidenske steklenice oziroma prvega kondenzatorja, ki omogoča začasno hranjenje večje količine električnega naboja oziroma doseganje višjih napetosti. Benjamin Franklin predlaga koncept le enega naboja, pozitivnega ali negativnega. Luigi Galvani eksperimentira z živalsko elektriko, kar nadaljuje Alessandro Volta, ki je med drugim zaslužen za izum elektroskopa in baterije. Ta omogoča bolj konstanten in trajnejši tok kot elektrostatični generatorji. Charles Coulomb v Franciji s pomočjo magnetne igle, ki ji visela na tanki nitki zazna šibke odklone pri bližanju drugega magneta. Coulomb je ugotovil, da sila pada s kvadratom razdalje, kot pri električni ali gravitacijski sili. Inštrument, kot ga je zasnoval Coulomb, je bil osnova magnetnih detektorjev za nadaljnjih 170 let. Silo odboja uporabi Jonathan Swift v Guliverjevih potovanjih, kjer otok lebdi v prostoru zaradi »anti-gravitacije«. Kljub vsem raziskavam, v tem času še ni bila znana povezava med elektriko in magnetiko. Coulomb celo trdi, da te povezave ni.

OERSTED (DANSKA, 1820) – EKSPERIMENT S TOKOM IN KOMPASOM

Leta 1820 profesor Hans Christian Oersted v Kopenhagenu (Danska) pripravlja eksperiment iz segrevanja prevodnika in tudi iz magnetike. Presenečeno ugotovi, da se igla kompasa premakne vsakič, ko sklene tokokrog. Ugotovi, da se kompas ne usmeri v smeri električnega toka pač pa prečno na smer toka in da magnetno polje obkroža tok. Svoje delo objavi julija 1820 in



Oerstedov eksperiment in kompas, na katerem je opazil premik ob toku v vodniku. Po Oerstedu se imenuje tudi enota za jakost magnetnega polja. Ta enota se je uporabljala v sistemu enot CGS (centimeter, gram, sekunda) in se dandanes več ne uporablja, nadomestila jo je SI enota [A/m]. Ker pa se jo v

s tem naredi pomemben korak pri razumevanju elektrike in magnetike. Da sta elektrika in magnetika pravzaprav povezana, saj električni tok povzroča magnetno polje.



Kristale magnetita najdemo tudi v določenih bakterijah ter v možganih čebel, termitov in nekaterih ptic. Ocenjuje se, da so lahko ti materiali vzrok za sposobnosti določenih živali, da se orientirajo v magnetnem polju zemlje, kar imenujemo magnetorecepcija. Poiščite več o tem na spletu.

1. SILA NA (TOKO)VODNIK V MAGNETNEM POLJU

— Vsebina poglavja: izraz za silo med dvema vzporednima tokovodnikoma, privlačna in odbojna sila, permeabilnost vakuumu, enota za električni tok, tokovni element, gostota magnetnega pretoka.

Andre-Marie Ampère je v Franciji takoj preveril ugotovitve Oersteda in jih tudi razdelal. Pravilno je predvidel, da če električni tok povzroča magnetno polje in s tem odklon magnetne igle, mora obstajati tudi sila med dvema vodnikoma s tokom. To je tudi dokazal in to silo tudi ovrednotil. Izkazalo se je, da je sila med dvema vzporednima vodnikoma sorazmerna produktu toka v obeh vodnikih in njune dolžine in nasprotno sorazmerna razdalji med vodnikoma. To bi matematično zapisali kot

$$F = k \cdot \frac{I_1 I_2 l}{r}. \quad (1.1)$$

Ampère je tudi ugotovil, da je sila privlačna, če toka tečeta v isto smer in odbojna, če toka tečeta v nasprotno smer.

SLIKA: Vzporedno ležeča vodnika s tokom v isto smer se privlačita, s tokom v nasprotno smer pa se odbijata.

Konstanta k je enaka $\frac{\mu_0}{2\pi}$, kjer je μ_0 permeabilnost vakuumu in ima vrednost $4\pi 10^{-7}$. Torej je enačba za silo med dvema ravnima vzporednima vodnikoma iz (1.1) enaka:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}. \quad (1.2)$$

PERMEABILNOST VAKUUMA

Poglejmo, kakšno enoto mora imeti μ_0 , da bo ustrezalo enačbi (1.1): $N = [\mu_0] \frac{A \cdot A \cdot m}{m}$ oziroma

$$[\mu_0] = \frac{N}{A^2} \cdot^1$$

Določimo velikost sile med dvema ravnima vzporednima (neskončno dolgima) vodnikoma s tokom 1 A na dolžini enega metra, ki sta med sabo razmaknjena za 1 m.

Izračun: Ta sila je enaka $F = \frac{4\pi 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 1\text{A} \cdot 1\text{A} \cdot 1\text{m}}{2\pi \cdot 1\text{m}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$, kar je tudi osnova za enoto

amper [A], ki si jo je Ampère prislužil za svoja pomembna odkritja na področju raziskovanja električnih pojavov. To je tudi edina električna enota, ki jo potrebujemo za povezavo med elektriko in mehaniko.

ENOTA ZA ELEKTRIČNI TOK

Amper je enota za električni tok: Med dvema neskončnima ravnima vodnikoma zanemarljivega prereza s tokom 1 A, ki sta razmaknjena za 1 m, je v vakuumu sila $2 \cdot 10^{-7} \text{ Nm}$.²

OSNOVNE SI ENOTE

Katere so torej osnovne enote po mednarodnem sistemu SI (Système International – SI po konvenciji iz leta 1875)? Meter (m), kilogram (kg), sekunda (s), Ampère (A), Kelvin (K), mol (mol) in kandela (cd). Izpeljane enote pa so na primer newton, joule, watt, coulomb, volt, ...)

¹ Kasneje bomo ugotovili, da enoto za permeabilnost pogosteje zapišemo z osnovnimi ali izpeljanimi električnimi enotami (H je enota za induktivnost): $[\mu_0] = \frac{N}{A^2} = \frac{V \cdot s}{A \cdot m} = \frac{H}{m}$.

² Ampère je skonstruiral več t.i. tokovnih tehtnic, s pomočjo katerih je ugotavljal sile med tokovodniki. Da bi povečal sile med vodniki je večkrat navil vodnike okoli iste osi in tako dobil prve primere tuljav....

TOKOVNI ELEMENT

Enačba (1.1) za silo med vodnikoma velja le, če sta vodnika vzporedna. Za izračun sile na (toko)vodnik poljubne oblike, je Ampère vpeljal koncept tokovnega elementa $I d\vec{l}$. Tokovni element imenujemo produkt toka v vodniku z vektorjem majhne (diferencialne) razdalje v smeri vodnika.

SLIKA: Tokovni element je predstavljen kot (diferencialen) del dolžine vodnika pomnožen s tokom v vodniku: $I \cdot d\vec{l}$.

Silo na tokovni element $I_1 d\vec{l}_1$ lahko zapišemo kot

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \cdot I_2 dl_2 \cdot \sin \theta}{r_{12}^2},$$

kjer je $\vec{r}_{12}$ vektor od tokovnega elementa 2 do tokovnega elementa 1 in θ kot med tem vektorjem in smerjo tokovnega elementa 2.

SLIKA: Dva tokovna elementa in sila med njima.

MAGNETNA SILA NA TOKOVNI ELEMENT

Da bi določili celotno silo na tokovni element 1, moramo sešteti vse prispevke tokovnih elementov na tem mestu. Če to upoštevamo, lahko enačbo zapišemo tudi kot

$$dF_{12} = I_1 dl_1 \cdot B,$$

kjer imenujemo B magnetno polje³ oziroma bolj natančno **gostota magnetnega pretoka** na mestu tokovnega elementa $I_1 dl_1$. Pomembna je tudi smer gostote pretoka. Sila na tokovni element je pravokotna tako na tokovni element, kot na magnetno polje. Sila je največja, ko je magnetno polje pravokotno na tok(ovni element). To lahko zapišemo z vektorskim produktom $d\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}$, ki jo v končni obliki lahko pišemo brez indeksov:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (1.3)$$

POENOSTAVLJENE ENAČBE

Če na ravni vodnik deluje homogeno polje B , ki je pravokotno na vodnik, je sila nanj enaka

$$F = I l B, \quad (1.4)$$

kar je znana enačba iz srednje šole (BIL).

Če je polje homogeno, ni pa med smerjo polja in toka pravi kot, je potrebno upoštevati vektorski produkt vektorjev, od katerih en kaže v smeri toka na katerega računamo silo, drugi pa smer gostote magnetnega pretoka (B). V tem primeru bo velikost sile $F = I l B \sin(\theta)$, smer sile pa bo vedno pravokotna na ravnino, ki jo določata smer toka v vodniku in polja, ki deluje na vodnik.

Gostota magnetnega pretoka je posledica delovanja električnega toka (tokov). Obstajajo pa tudi snovi, ki povzročajo v svoji okolici magnetno polje brez dodatnega tokovnega vzbujaanja. To so trajni magneti, ki pa jih bomo podrobneje obravnavali kasneje.

Vektorski produkt

Vektorski produkt vektorjev $\vec{A}$ in $\vec{B}$ je

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{e}_n A \cdot B \cdot \sin(\theta)$, kjer je $\vec{e}_n$ vektor (normale), ki kaže pravokotno na ravnino, ki jo določata vektorja $\vec{A}$ in $\vec{B}$. Pravilno smer vektorja C dobimo kot smer vrtenja tako, da zavrtimo prvi vektor (A) v najkrajši smeri proti drugemu vektorju (B).

SLIKA

³ Pogosto za (vektor) gostote magnetnega pretoka uporabljamo bolj poljuden izraz magnetno polje ali kar kratko polje.

SLIKA: Magnetna sila na tokovni element deluje v smeri, ki je pravokotna tako na tokovni element kot na vektor gostote pretoka. Theta je kót med $d\vec{l}$ in $\vec{B}$.

DEFINICIJA GOSTOTE MAGNETNEGA PRETOKA

Iz enačbe (1.4) tudi izhaja definicija za gostoto magnetnega pretoka, ki jo lahko zapišemo kot **silo na tokovni element**:

$$B = \frac{F}{Il}. \quad (1.5)$$

Poišči analogijo z definicijo električne poljske jakosti: sila na enoto naboja.

Podobno, kot je bil pri elektrostatiki osnovni gradnik, ki je povzročal magnetno polje, naboj Q oziroma diferencial naboja dQ , je v magnetostatiki osnovni gradnik, ki povzroča magnetno polje tok I oz. tokovni element $I d\vec{l}$.

Poglejmo si najprej nekaj primerov računanja sile po enačbi (1.3):

V ravnem bakrenem vodniku je tok 28 A. Kolikšna mora biti velikost in smer gostote magnetnega pretoka, da bo sila na vodnik dolžine 1 m enako velika a nasprotne smeri kot sila gravitacije? Žica ima linearno gostoto snovi 46,6 g/m.

Izračun:

$$IlB = mg$$

$$B = \frac{(m/l)g}{I} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ T.}$$

Preveri še smer (tok v vodniku v tablo, smer Bja na desno)

ENOTA ZA B je Tesla (T), starejša enota je Gauss. Velja $1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gaussa}$.

TIPIČNE VELIKOSTI POLJA

- V magnetno zaščiteni sobi 10^{-14} T
- V medgalaktičnem prostoru 10^{-10} T
- Na površini zemlje 10^{-4} T
- Na površini majhnega trajnega magneta 10^{-2} T
- V bližini velikega elektromagneta 1,5 T
- Na površini nevtronske zvezde 10^8 T

Običajno so torej v elektromagnetiki vrednosti B-ja od militesla do 1 tesla.

Pokazali smo že dva primera izračuna sile na ravne (toko)vodnike. Kolikšna pa je sila, če vodnik ni raven? Tedaj je potrebno vodnik razdeliti na manjše dele in določiti silo na vsak tak del.

Določimo silo na del vodnika v obliki polkroga s polmerom $R = 4 \text{ cm}$ in s tokom 6 A, ki je v homogenem polju velikosti 0,5 T . Polje je pravokotno na vodnik.

Izračun: Uporabimo izraz $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$, kjer (diferencialni) del polkroga zapišemo kot $d\vec{l} = R d\varphi$:
 $dF = IR d\varphi \cdot B$. Potrebno je seštevati le tisto komponento sile, ki je usmerjena v smeri osi Z, zato velja:

$$dF_z = F \sin \varphi \quad \text{in} \quad F_z = 2 \int_0^{\pi/2} IRB \sin \varphi d\varphi = 2IRB = \underline{\underline{240 \text{ mN}}}$$

SLIKA: Sila na vodnik v obliki polkroga v homogenem polju.

Kolikšna je sila na vodnik s tokom 6 A , ki je postavljen vzdolž X osi, na razdalji od $x = 0$ m do $x = 4$ m in nanj deluje nehomogeno magnetno polje $\vec{B} = 10^{-3} (2 \text{ T/m} \cdot x, 2 \text{ T}, 0)$. x je v metrih.

Izračun: Ker je polje nehomogeno, je potrebno uporabiti integracijo diferenciala sile $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$, kjer je

$$d\vec{F} = I dx \vec{e}_x \times \vec{B} = I dx (1, 0, 0) \times 10^{-3} (2 \frac{\text{T}}{\text{m}} x, 2 \text{ T}, 0)$$

$$d\vec{F} = I dx \vec{e}_x \times \vec{B} = I dx 2 \frac{\text{T}}{\text{m}} 10^{-3} (0, 0, 1)$$

$$\vec{F} = I 2 \frac{\text{T}}{\text{m}} (0, 0, 1) \int_0^{4 \text{ m}} dx = \underline{\underline{\vec{e}_z 48 \text{ mN}}}$$

Dodatno: Kaj če je y komponenta polja enaka x komponenti?

SLIKA: Izračun sile na vodnik v nehomogenem polju.

POVZETEK:

1. Velikost magnetne sile med dvema ravnima vodnikoma stokoma I_1 in I_2 je

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}.$$

2. Sila je privlačna, če je smer toka v vzporednih ravnih vodnikih enaka.
3. Definicija enote 1 A: sila med dvema vzporednima vodnikoma v vakuumu s tokom 1 A, ki sta oddaljena za 1 m, je $2 \cdot 10^{-7}$ N/m.
4. Tokovni element $I d\vec{l}$ je definiran kot produkt toka v vodniku in diferenciala dolžine vodnika.
5. Sila na tokovni element je $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$, kjer B imenujemo gostota magnetnega pretoka. Smer sile je pravokotna tako na vektor $d\vec{l}$ kot na vektor $\vec{B}$.
6. Podobno, kot lahko električno poljsko jakost definiramo kot (električno) silo na naboj ($E = F_e / Q$), lahko gostoto magnetnega pretoka definiramo kot (magnetno) silo na tokovni element $B = \frac{F_m}{Il}$.

1. Poiščite na spletu informacije o osnovnih SI enotah.

2. Poiščite informacije o tokovnih tehtnicah, ki omogočajo »tehtanje« magnetne sile. (ključne besede v ang.: current balance, history)

3. Galvanometer je osnovna merilna naprava, ki uporablja koncept sile na tokovodnik v magnetnem polju (slika desno). Poiščite več informacij na spletu.

**Primeri nalog:**

izpit, 16. aprila 2002

izpit, 28. junij 2006

2. BIOT-SAVARTOV ZAKON

— Vsebina poglavja: zapis Biot-Savartovega zakona, izračuni magnetnega polja v okolici osnovnih oblik tokovodnikov: premice, daljice, zanke in solenoida.

Polje, ki ga v okolici povzroča neskončen raven vodnik smo že zapisali, ko smo obravnavali silo med dvema ravnima vodnikoma. To polje je $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$. To enačbo in druge, za poljubno obliko vodnika s tokom lahko izračunamo z uporabo Biot-Savartovega zakona.

Polje, ki ga tokovni element $I d\vec{l}$ povzroča v točki T je:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \cdot \sin(\theta)}{r^2} \quad (2.1)$$

kjer je r razdalja od tokovnega elementa do točke T , θ pa je kót med vektorjema $d\vec{l}$ in $\vec{r}$.

Ta enačba dá le velikost polja, ne pa tudi smeri. Smer polja je pravokotna na ravnino, ki jo določata vektorja $d\vec{l}$ in $\vec{r}$, kar lahko zapišemo z vektorskim produktom

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (2.2)$$

SLIKA: Tokovni element oddaljen od točke T za razdaljo r povzroča v točki T gostoto magnetnega pretoka, določeno z Biot-Savartovim zakonom.

Da bi določili polje v točki T za celotni tokovodnik, je potrebno sešteti (integrirati) prispevke vseh tokovnih elementov:

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad \text{BIOT-SAVARTOV ZAKON} \quad (2.3)$$

MAGNETNO POLJE OSNOVNIH STRUKTUR (TOKOVODNIKOV), IZRAČUNANO Z UPORABO BIOT-SAVARTOVEGA ZAKONA

TOKOVNA PREMICA

Raven, neskončen, tanek tokovodnik (tokovna premica) postavimo vzdolž Z osi s tokom v smeri Z osi. Pri $z = 0$ postavimo na oddaljenosti R od izhodišča (od vodnika) točko T , v kateri želimo določiti polje. Na poljubni točki na vodniku na Z osi označimo tokovni element in narišemo vektor r . Ugotovimo, da kaže od tokovnega elementa do točke T (v list). Zapišemo Biot-Savartov zakon v obliki

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \cdot \sin(\theta)}{r^2}, \text{ smer polja pa ugotovimo iz vektorskega produkta tokovnega elementa in}$$

smeri vektorja r in kaže v smeri kóta ϕ . Velja $dl = dz$, $\sin \theta = \frac{R}{r}$, kjer je $r = \sqrt{z^2 + R^2}$. Vstavimo

izraze v B-S zakon in dobimo

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz \cdot R}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRdz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}. \text{ Sedaj je potrebno le še sešteti vplive vseh tokovnih elementov,}$$

ki se nahajajo vzdolž Z osi, kar naredimo z integracijo diferenciala polja:

$$B = \int_{\text{po vseh tokovnih elementih}} dB = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 IR dz}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

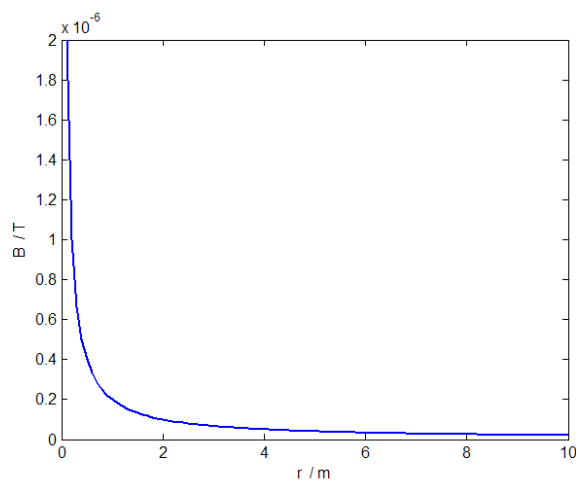
Rešitev tega integrala poiščemo v tablicah integralov. Dobimo

$$B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \frac{z}{R^2 \sqrt{z^2 + R^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (1 - (-1)) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Končni rezultat je torej $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$ (2.4)

SLIKA: Tokovna premica postavljena vzdolž Z osi.

SLIKA: Polje tokovnega elementa kaže v smeri vektorskega produkta med vektorjem tokovnega elementa in vektorjem, ki kaže od tokovnega elementa do točke T . Ugotovimo, da je smer polja v okolici tokovne premice v smeri kóta $\hat{\phi}$ oziroma v smeri tangente na krožnico. Preprost način določanja smeri toka je tudi s pomočjo prstov desne roke, pri čemer palec desne roke usmerimo v smer toka, prsti, ki ovijajo tokovodnik pa ponazarjajo smer magnetnega polja.



SLIKA: Program v Matlabu za izračun polja v okolici tokovne premice po enačbi (2.4).

```
function poljepremice

% polje tokovne premice

mi0=4*pi*1e-7

I=1

r=0:0.1:10

B=mi0*I./(2*pi*r);

plot(r,B)

xlabel('r / m')

ylabel('B / T')
```

TOKOVNA DALJICA

Tokovna daljica je en od osnovnih elementov, s pomočjo katerih lahko sestavimo bolj kompleksne tokovodnike. Izpeljava sledi izpeljavi polja v okolici tokovne premice, le meje integracije je potrebno

spremeniti od nekega $-z_1$ do $+z_2$. Dobimo $B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_{-z_1}^{+z_2} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$ in

$$B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \frac{z}{R^2 \sqrt{z^2 + R^2}} \Big|_{-z_1}^{+z_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + R^2}} - \frac{-z_1}{\sqrt{z_1^2 + R^2}} \right).$$
 Ta rezultat lahko napišemo tudi

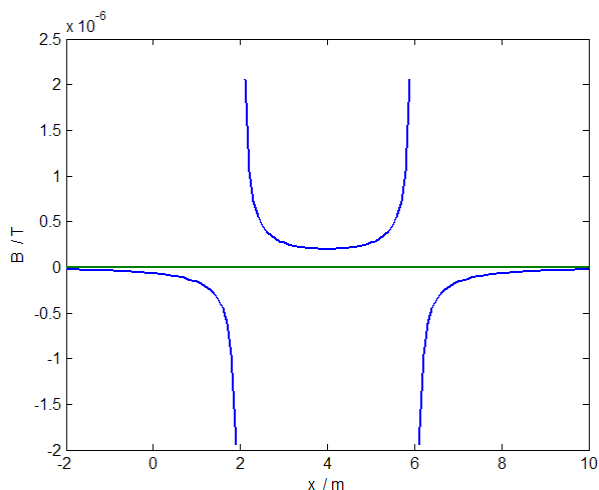
nekoliko bolj preprosto, saj je $\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + R^2}} = \cos \theta_1$ in $\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + R^2}} = -\cos \theta_2$. Sledi:

$$\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)). \quad (2.5)$$

Preverimo še, če dobimo enak rezultat za tokovno premico, če upoštevati $\theta_1 = 0$ in $\theta_2 = \pi$.

SLIKA: Tokovna daljica (določitev razdalje R in kótov).

Narišimo polje v oddaljenosti od dveh premih vodnikov s programom MATLAB. Iz slike določite smer, pozicijo in velikost tokov



```
function polje2premic
% polje dveh premic
a=4;
mi0=4*pi*1e-7;
I=1;
x=-2:0.1:10;

B1=mi0*I./(2*pi*(x-2));
B2=mi0*I./(2*pi*(x-2-a));
B=B1-B2

plot(x,B,[-2 10],[0 0])
xlabel('x / m')
ylabel('B / T')
```


TOKOVNA ZANKA (OBROČ)

Tokovna zanka navidezno deluje kot nepomemben element. V resnici pa je vsaj tako pomemben kot tokovna premica. Iz niza tokovnih obročev lahko sestavimo tuljavo (solenoid ali toroid), ki je v magnetiki osnoven element. V kratkem bomo vpeljali tudi koncept magnetnega dipola oziroma magnetnega dipolnega momenta. Ta koncept nam bo med drugim pomagal razložiti polje trajnih magnetov. Gradnik magnetnega dipolnega momenta je tokovna zanka.

Polje v splošni točki v okolici tokovne zanke ni enostavno izračunati, dokaj hitro pa lahko izpeljemo tudi pomembne izraze za polje v središču in osi tokovne zanke.

Polje v središču tokovne zanke.

Zanko polmera R postavimo tako, da ima center v središču valjnega koordinatnega sistema. Označimo tokovni element in razdaljo od tokovnega elementa do središča. Velja

$dl = R d\varphi$, $r = R$ in $\sin \theta = \frac{\pi}{2}$. Vstavimo v B-S zakon in dobimo

$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin(\theta)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\varphi}{R}$. Sedaj le še seštejemo (integriramo) prispevke vseh

tokovnih elementov in dobimo $B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\varphi}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi}{R} = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

V primeru, da je smer toka v smeri kóta ϕ , je polje usmerjeno v smeri $+Z$ osi in je

$$\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (2.6)$$

SLIKA: Tokovna zanka postavljena v središče valjnega koordinatnega sistema.

Polje dela tokovne zanke

Hitro lahko ugotovimo, da lahko določimo polje dela tokovne zanke tako, da integriramo prispevke le med določenima kótoma, recimo φ_1 in φ_2 . Potem je enačba oblike

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\varphi}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\varphi_2 - \varphi_1). \text{ Če izrazimo razliko kótov } \beta = \varphi_2 - \varphi_1 \text{ velja}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \beta \quad (2.7)$$

SLIKA: Polje dela tokovne zanke, omejen s kótom beta.

POLJE V OSI TOKOVNE ZANKE

Tudi polje v osi tokovne zanke je dokaj enostavno določiti. Če označimo z R polmer obroča in se točka T nahaja na razdalji z od središča zanke, velja $dl = R d\varphi$, $r = \sqrt{z^2 + R^2}$ in $\sin \theta = \frac{z}{r}$. Sledi

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin(\theta)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi}{z^2 + R^2}. \text{ Tega izraza še ne smemo integrirati po tokovnih elementih, preprosto zato, ker vektor polja ne kaže v isto smer za vse tokovne elemente. Ugotovimo lahko, da se bo zaradi simetrije ohranila le tista komponenta polja, ki je v smeri osi Z. Zato pišemo}$$
$$dB_z = dB \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi}{z^2 + R^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2 d\varphi}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

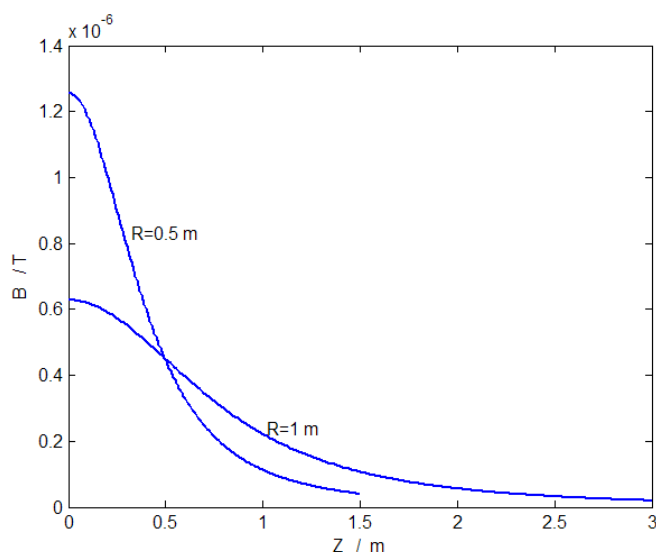
Integracija je preprosta. Dobimo

$$B_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2 d\varphi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2 2\pi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}. \text{ Če upoštevamo še smer polja,}$$

dobimo

$$\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 IR^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (2.8)$$

SLIKA: Polje v osi tokovne zanke.



SLIKA: Primer uporabe programa Matlab za izračun polja v osi zanke. Funkcija je uporabljena 2x, z radijem 1 m in 0,5 m. Vmes smo uporabili ukaz hold on (poljevosizanke(1); hold on; poljevosizanke(0.5))

```
function poljevosizanke(R);  
  
set(0,'DefaultLineLineWidth',1.5)  
  
% DEFINICIJA KONSTANT  
  
mi0=4*pi*1e-7;  
  
I=1; % TOK  
  
% Z os  
  
zmin=0;zmax=3*R; dz=zmax/200;  
  
z=zmin:dz:zmax;  
  
B=0.5*mi0*I*R^2./(R^2+z.^2).^(1.5);  
  
plot(z,B)
```

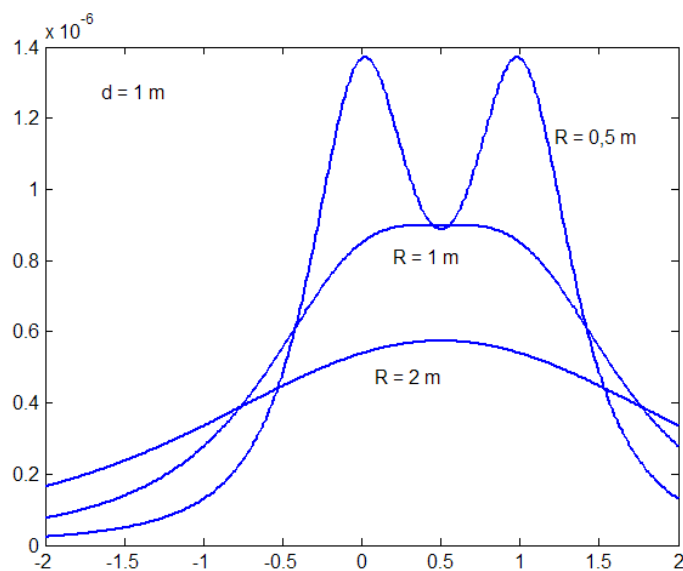
POLJE IZVEN OSI TOKOVNE ZANKE

Polje izven osi tokovne zanke ni enostavno izpeljati in tudi rezultat ni preprost. Je pa pomemben, zato ga vseeno zapišimo - vsaj v poenostavljeni obliki, ki velja za večje razdalje od zanke (recimo za razdalje R dosti večje od polmera zanke a) in je v sferičnih koordinatah:

$$\vec{B} = \vec{e}_r \cdot B_r + \vec{e}_\theta \cdot B_\theta = \frac{\mu_0 I a^2}{4R^3} (\vec{e}_r \cdot 2 \cos(\theta) + \vec{e}_\theta \cdot \sin(\theta)). \quad (2.9)$$

Dobimo tako komponento v smeri radija kot kóta. Pomembno je, da polje pada z razdaljo s tretjo potenco, tako kot električno polje v oddaljenosti od električnega dipola.

SLIKA: Skica polja v okolici tokovne zanke.



Slika: Primer izračuna polja para v osi vzporednih tokovnih zank oddaljenih za 1 m. Polmeri zank so 2m, 1 m in 0,5 m. Tok je 1 A. Dokaj homogeno polje se utvari v sredini tuljave, ki ima tako polmer kot razdaljo med zankama enako 1 m. Takima zankama rečemo Helmholtzov par in se pogosto (v obliki dveh navitij) uporablja v praksi.

```
function poljedvehzank;

I=1; R=2; d=1;

set(0,'DefaultLineLineWidth',1.5)

% DEFINICIJA KONSTANT

mi0=4*pi*1e-7;

xmin=-2*d;xmax=2*d; dx=xmax/200;

x=xmin:dx:xmax;

B1=0.5*mi0*I*R^2./(R^2+x.^2).^1.5;

B2=0.5*mi0*I*R^2./(R^2+(x-d).^2).^1.5;

B=B1+B2

plot(x,B)
```

POLJE V OSI RAVNE TULJAVE - SOLENOIDA

Solenoid predstavimo kot N zank s tokom I na doložini l . Da bi izračunali polje v poljubni točki na osi, postavimo točko T na razdaljo z od središča k.s.. Nato zapišemo polje, ki ga v tej točki povzroča le ena zanka, ki se nahaja na razdalji z' od izhodišča. Uporabimo že izpeljan izraz za

polje v osi tokovne zanke $B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$, ki jo moramo ustrezno preoblikovati v

$$dB_z = \frac{\mu_0 dI R^2}{2((z - z')^2 + R^2)^{3/2}}, \text{ kjer } dI \text{ določimo kot } dI = \frac{NI}{l} dz'. \text{ Če omejimo tuljavo med } z' = z_1$$

in $z' = z_2$, pri čemer le $l = z_2 - z_1$, dobimo polje v osi tuljave na razdalji z centra z rešitvijo

$$\text{integrala } B_z = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mu_0 N I R^2}{2l((z - z')^2 + R^2)^{3/2}} dz'.$$

Rešitev je

$$B_z = \frac{\mu_0 N I R^2}{2l} \left(\frac{z' - z}{R^2 \sqrt{(z - z')^2 + R^2}} \right)_{-z_1}^{z_2} = \frac{\mu_0 N I}{2l} \left(\frac{z_2 - z}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} - \frac{(z_1 - z)}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} \right).$$

Ta manj pregleden zapis lahko poenostavimo z ugotovitvijo, da lahko uporabimo kóta

$$\cos \beta_2 = \frac{z_2 - z}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} \text{ in } \cos \beta_1 = \frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}}.$$

$$\text{Dobimo } \vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 N I}{2l} (\cos(\beta_1) + \cos(\beta_2)). \quad (2.10)$$

SLIKA: Polje v osi ravne tuljave - solenoida.

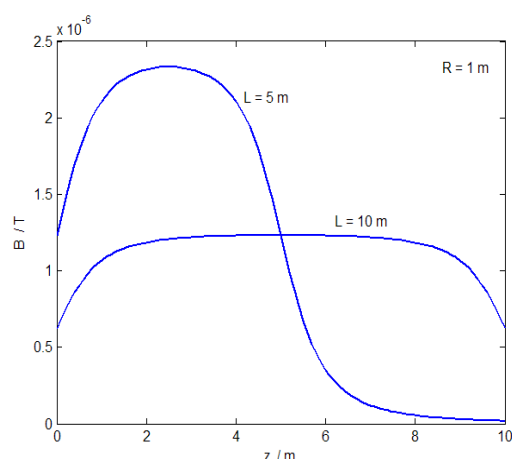
Poenostavljeni izrazi za dolge tuljave:

Izraz za polje v sredini dolge tuljave dobimo, če upoštevamo $\beta_1 = \beta_2 = 0$:

$$\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 NI}{l}. \quad (2.11)$$

Polje na robu dolge tuljave pa dobimo z upoštevanjem $\beta_1 = \pi/2$ in $\beta_2 = 0$:

$$\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 NI}{2l}. \quad (2.12)$$



SLIKA: Polje v osi solenoida s tokom $NI = 10$ A, polmera ovojev 1 m in dolžine 5 m in 10 m. Začetek tuljave je pri $z = 0$ m.

POVZETEK:

1. Iz enačbe za silo med dvema tokovnimi elementoma ugotovimo, da nastopa člen $\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin(\theta)}{r^2}$, ki ga poimenujemo gostota magnetnega pretoka. Popolni izraz za gostoto magnetnega pretoka predstavlja Biot-Savartov zakon in vsebuje vektorski produkt tokovnega elementa in vektorja r in integracijo po tokovnih elementih:

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}.$$

2. Polje v okolici tokovne premice je $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$. Polje v okolici tokovne premice je rotacijsko, smer polja določimo iz vektorskega produkta $d\vec{l} \times \vec{r}$ ali z ovijanjem prstov desne roke, če tok kaže v smeri palca.

3. Polje tokovne daljice je $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$. (Razloži R in kót theta.

Skica.)

4. Polje v središču tokovne zanke je $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2R}$. (Kaj je R in kam kaže polje glede na smer toka v zanki in izbiro koordinatnega sistema?)
5. Polje v osi tokovne zanke je $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$. (Kje je največje? V katero smer kaže? Skiciraj potek.)
6. Polje v osi ravne tuljave – solenoida je $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 N I}{2l} (\cos(\beta_1) + \cos(\beta_2))$. (Kaj je l , kako določimo kóte, poenostavitev enačbe v primeru zelo dolgega solenoida.)

Primeri izpitnih in kolokvijskih nalog:

izpit, 17. septembra 2002

izpit, 16. aprila 2002

izpit, 4. 12. 2001

izpit, 20. september 2006

izpit, 31. avgust 2006

izpit, 19. september 2005

izpit, 3. 12. 2001

izpit, 30. avgust 2005

Izpit 26. 6. 2002

Izpit 4. 9. 2003

1. kolokvij , 17.4.2002

1. kolokvij, 9. maj 2005

izpit, 20. september 2004

Izpit, 17. 01. 2002

Prvi kolokvij, 9. maj 2002

MAGNETNO POLJE ZEMLJE

Magnetno polje zemlje je posledica tokov zunanje plasti jedra zemlje. Pogosto ta efekt imenujemo dinamo efekt. Poenostavljeno ga lahko predstavimo kot polje magnetno polje tokovne zanke oziroma trajnega magneta. Velikost polja se nekoliko spreminja po površini zemlje in se giblje med $30 \mu\text{T}$ do $60 \mu\text{T}$. To polje torej ni enako veliko povsod po površini zemlje, poleg tega pa ima tudi lokalne spremembe, predvsem na področjih, kjer je v zemlji mnogo magnetita (naravnega feromagnetnega materiala – železovega oksida). Te razlike je potrebno upoštevati pri navigaciji s pomočjo kompasa, zato so korekcijske vrednosti dandanes vpisane v navigacijskih kartah.

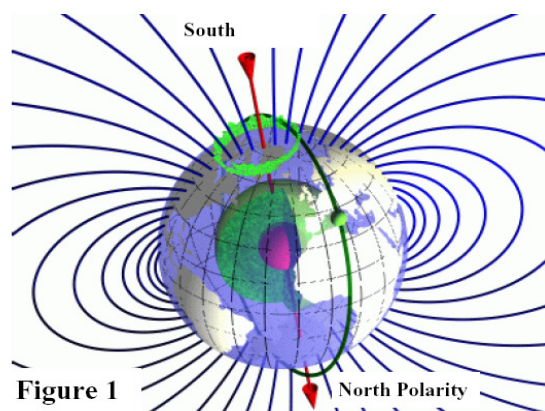
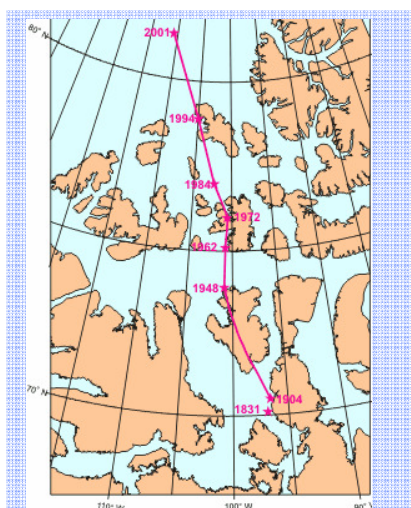


Figure 1



Spreminjanje lokacije magnetnega severnega pola.

Vir:

http://science.nasa.gov/headlines/y2003/29dec_magneticfield.htm

Geografski severni pol ni na enakem mestu kot geomagnetni. Poleg tega, da je geomagnetni nekoliko zamaknjen v osi (cca 11°), je tudi obrnjen: na geografskem severnem polu je geomagnetni južni pol.

Znano je, da se ta s časom spreminja, kar je potrebno pri natančni navigaciji upoštevati. Kompas je en pomembnejših izumov človeštva, saj je bistveno olajšal potovanje po odprtem morju.

Zanimivo je tudi, da se magnetno polje zemlje zasuka (obrne) na vsakih deset tisoč do milijon let, v povprečju na približno 250 000 let.

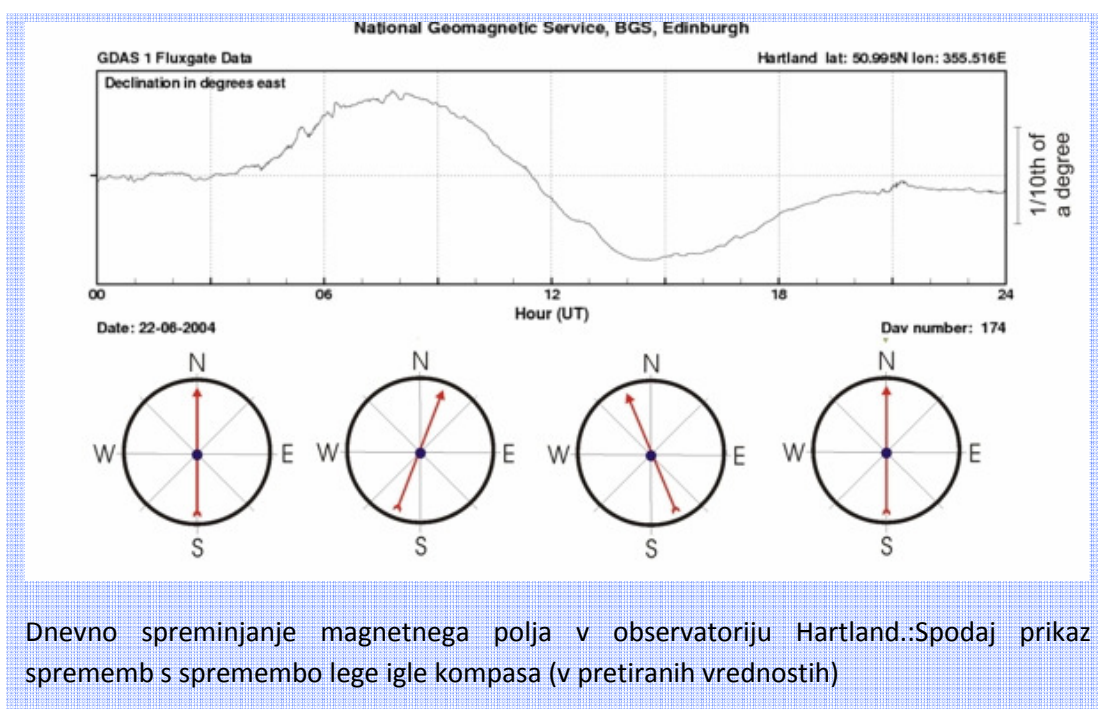


Levo: Model prvega kompasa iz Kitajske; žlica iz naravnega magnetnega materiala na bakreni skledici. Na desni namagnetena igla na vodi – primer navigacijskega kompasa.

Vir: <http://www.computersmiths.com/chineseinvention/compass.htm>

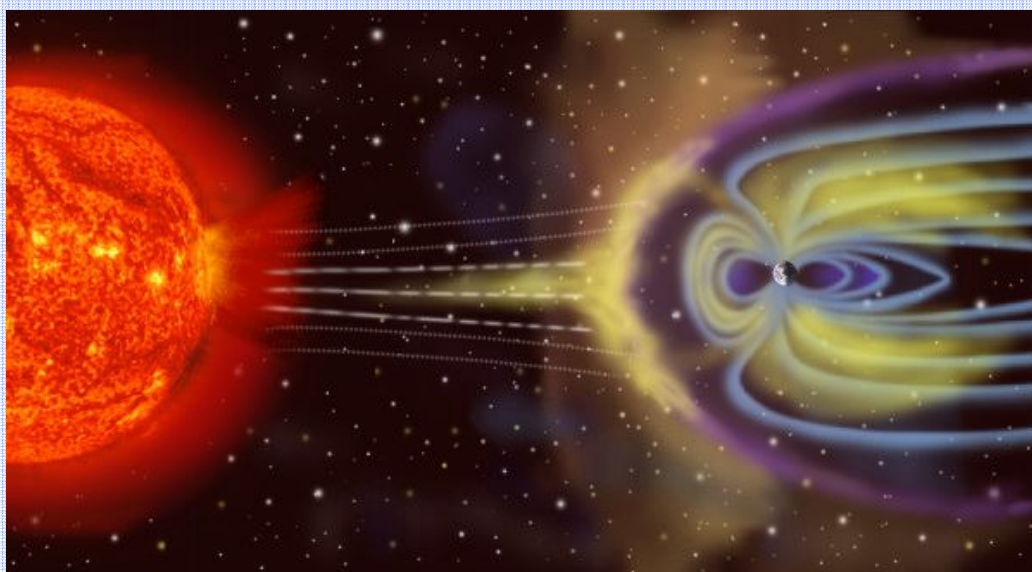
<http://en.wikipedia.org/wiki/Compass>

Mogoče je zaznati tudi dnevne fluktuacije (spremembe) magnetnega polja. Te so posledica elektirčnih tokov visoko nad površino zemlje – v ionisferi. V ionosferi nastaja namreč mnogo nabojev kot posledica trkanja visokoenergijskega žarčenja (UV-žarki in X-žarki). Iz nevtralnih delcev tako nastanejo pozitivni in negativni delci, ki povzročajo električni tok, ta pa magnetno polje. Ta proces je najmočnejši med poldnevom, ko je žarčenje sonca na zemljo najmočnejše, kar se lepo zazna z občutljivimi inštrumenti.



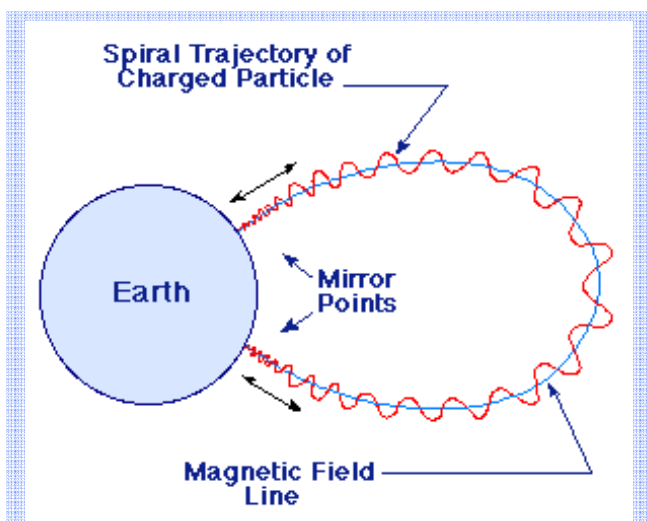
Dnevno spreminjanje magnetnega polja v observatoriju Hartland.:Spodaj prikaz sprememb s spremembo lege igle kompasa (v pretiranih vrednostih)

ZDRUŽENO MAGNETNO POLJE ZEMLJE IN SONCA



Slika prikazuje popularizirano obliko spremenjenega magnetnega polja zemlje (na desni) zaradi vpliva sončnega vetra. <http://www.aurorawatch.york.ac.uk/popmagnet/>

Tudi sonce ima svoje magnetno polje, katero močno vpliva na spremembe magnetnega polja na zemlji. Sonce povzroča t.i. solarni (sončni) veter, ki je v osnovi plazma nabitih delcev, ki se giblje stran od sonca s povprečno hitrostjo 400 km/h. Vsled tega se magnetno polje zemlje spremeni in ga imenujemo magnetosfera. Med magnetosfero in področjem sončnega vetra je ozko področje, ki ga imenujemo magnetopauza. Več: http://www.kvarkadabra.net/fizika/teksti/severni_sij.html

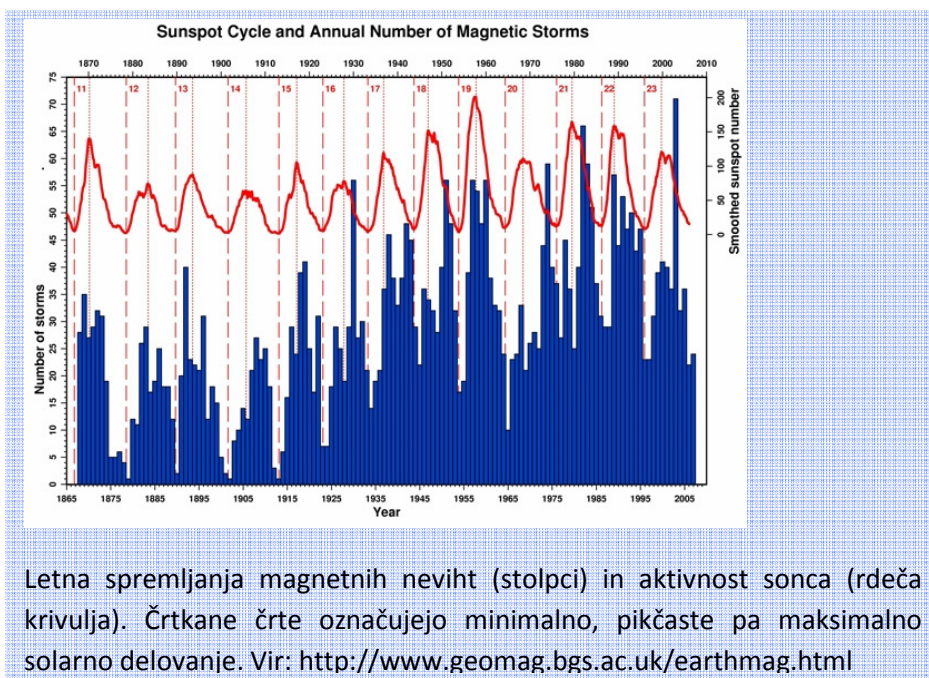


Slika prikazuje ujetje in vijuganje naelektrenega delca v Van Allenovem pasu.

<http://www.geo.mtu.edu/weather/aurora/>.

Naelektreni delci se odklanjajo v magnetnem polju. Leta 1950 so raziskovalci odkrili, da zemljo obdajata dva pasova z izrazito povečano koncentracijo nabitih delcev. Poimenovali so jo Van Allenovi radiacijski pasovi. Ti so v osnovi posledica solarnega vetra. Nabiti delci, ki vstopijo v ta pasov, začnejo krožiti se se usmerjati v smeri polov. Tam dosežejo ozračje zemlje in s trki z delci ozračja (kisikove in dušikove molekule) povzročajo spektakularne svetlobne efekte, ki jih imenujemo severni ali južni sij : aurora borealis in aurora australis. (Lepe slike so na spletni strani

Ti efekti so posebno izraziti v obdobju aktivnejšega delovanja sonca, ki ima cikle aktivnejšega delovanja na 11 let. Posledice tega aktivnejšega delovanja niso vidne le v svetlobnih sijih, pač pa tudi v kvarnih efekti na omrežnih transformatorjih (zaradi povečanih induciranih tokov lahko pride do okvar), povečanja korozije na plinovodih, nevarnemu izpostavljanju sevanja astronautov, segrevanju zemlje in ekspanziji ozračja, zaradi česar lahko na zemljo padejo sateliti, povečani obremenitvi sevanja na satelitih.



3. AMPEROV ZAKON

Vsebina poglavja: Integral polja po zaključeni zanki je sorazmeren toku, ki ga zanka objame. Izračuni polja s pomočjo Amperovega zakona za: tokovno premico, solenoid, toroid, polje znotraj vodnika, tokovno oblogo.

Amperov zakon zapišemo na sledeč način:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{objeti}} \quad (3.1)$$

oziroma z besedami: integral gostote magnetnega pretoka po ZAKLJUČENI POTI (zanki) je sorazmeren toku, ki ga oklepa zanka. V skladu z zapisanim skalarnim produktom je potrebno integrirati le tisto komponento polja, ki je v smeri poti. Včasih ta zakon imenujemo tudi zakon vrtnčnosti polja, saj je vrednost takega integrala različna od nič le, če je polje vrtnčno. (Koliko je bil v elektrostatiki $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$? Kaj to pomeni v primerjavi z Amperovim zakonom?)

SLIKA: Zanka v magnetnem polju. Integral komponente magnetnega polja v smeri zanke je sorazmeren toku, ki ga zanka oklepa. (v zanki, ki oklepa tokovodnike ni toka)

Amperov zakon je en osnovnih zakonov elektromagnetike. V nekoliko preoblikovani (bolj splošni obliki) je znan tudi kot ena od štirih Maxwellovih enačb. Te v celoti popisujejo elektromagnetno polje.

Poglejmo najprej, če zakon velja za premi tokovodnik, ki ga obkrožimo z zanko v obliki krožnice. (SKICA) Polje po poti krožnice je konstantno in kaže v isti smeri kot $d\vec{l}$, torej velja

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \int_0^{2\pi} dl = B \cdot 2\pi R = \mu_0 I. \text{ Iz enačbe sledi } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Dobimo enak rezultat za polje v okolici tokovne premice kot z uporabo Biot-Savartovega zakona.

SLIKA: Integracija polja po krožnici v sredini katere je premi tokovodnik.

Kaj pa, če vzamemo drugačno obliko zanke? Dobimo zopet enak rezultat, saj če B ni v smeri $d\vec{l}$ -a, B vedno kaže v smeri kota (SKICA) in se manjša z razdaljo od premice, $d\vec{l}$ pa lahko razstavimo na komponento v smeri B ja (kota) in pravokotno. Dobimo

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot d\vec{l} &= \vec{e}_\varphi B(r) \cdot d\vec{l} (\vec{e}_\varphi \cos(\theta) + \vec{e}_r \sin(\theta)) = \\ &= B(r) \cdot d\vec{l} \cdot \cos(\theta) = B(r) \cdot r d\varphi\end{aligned}$$

Z integracijo pridemo do enakega rezultata kot zgoraj. Kar pomeni, da rezultat integracije B ja po zaključeni poti vedno enak in torej neodvisen od oblike poti: Rezultat je enak oklenjenemu toku pomnoženemu s permeabilnostjo vakuumu.

SLIKA: Integracija polja po krožnici znotraj katere je premi tokovodnik.

Primer: Določite $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ za določene konfiguracije vodnikov in zank.



SLIKA: Zanka in vodniki.

Amperov zakon, kot smo ga zapisali, ne velja popolnoma splošno, saj obstajajo materiali (magneti), kjer nimamo vzbujačih tokov, pa vendar je B različen od nič in je vrtilinčen. Zakon, kot smo ga spoznali danes primeru analize polja ob prisotnosti magnetnih materialov nekoliko dopolniti, da bo veljal tudi za take primere.

IZRAČUNI POLJA S POMOČJO AMPEROVEGA ZAKONA

Za analitičen izračun polja v poljubnih strukturah je uporaba Amperovega zakona pogosto neprimerna, saj iščemo neznano veličino znotraj integrala. Uporaba tega zakona za izračun polja je posebno primerna le tedaj, ko imamo neko simetrično porazdelitev toka: tipični primeri so:

- Zunanost in notranost ravnega vodnika
- Dolga ravna tuljava – solenoid
- Toriod pravokotnega preseka – eksaktno (auditorne vaje)
- Toroid okroglega preseka – približno
- Tokovna obloga

POLJE POLNEGA VODNIKA

Zamislimo si pot integracije po krožnici polmera r znotraj vodnika polmera R ($r < R$). Ker so vse točke na krožnici enako oddaljene od središča lahko predpostavimo, da je polje v vseh točkah na krožnici enako veliko in torej odvisno le od polmera krožnice: $\vec{B} = \vec{e}_\varphi B(r)$. Ker gre za integracijo po krožnici je $d\vec{l} = \vec{e}_\varphi r d\varphi$. Skalarni produkt teh dveh vektorjev je

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{e}_\varphi B(r) \cdot \vec{e}_\varphi r d\varphi = B(r) r d\varphi, \text{ integracija pa dá } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B(r) r d\varphi = B(r) 2\pi r.$$

Desna stran enačbe je enaka permeabilnosti vakuumu pomnoženi z objetim tokom zanke

$$\mu_0 I_{\text{objeti}} = \mu_0 J A(r) = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \pi r^2.$$

SLIKA: Polni vodnik: skica za izračun polja, b) potek polja znotraj in zunaj zanke.

Združimo levo in desno stran enačbe $B2\pi r = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \pi r^2$ in dobimo $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$.

Polje narašča linearno z oddaljevanjem od središča vodnika do površine vodnika. Izven vodnika se manjša v skladu z enačbo $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Pomembna razlika med elektrostatičnim poljem in magnetostatičnim poljem je ta, da pri elektrostatiki električnega polja znotraj prevodnika ni, magnetno polje v tokovodniku pa je.

POLJE DOLGE TULJAVE - SOLENOIDA

Za del razsežnega (neskončnega) solenoida predpostavimo, da je polje znotraj homogeno in vzporedno z dolžino tuljave, v zunanosti pa ga ni. Zamislimo si pravokotno zanko, ki seka del ovojev na dolžini l . Če zapišemo Amperov zakon in ga razčlenimo po štirih odsekih zanke, ugotovimo, da je vrednost integrala različna od nič le na odseku, kjer je polje vzporedno s smerjo zanke. Ostali prispevki so enaki nič, saj je v zunanosti tuljave polje enako nič, na dveh delih poti pa je polje pravokotno na smer integracije. Na dolžini l z zanko zaobjamemo N zank in torej NI toka.. Dobimo:

$$Bl + 0 + 0 + 0 = \mu_0 NI.$$

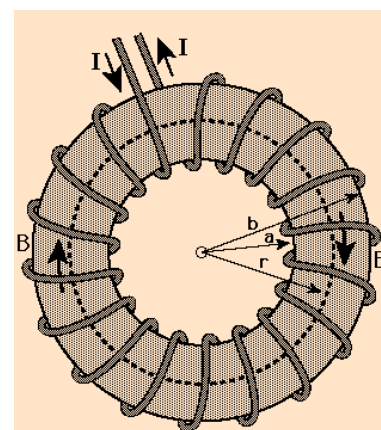
Rezultat za polje solenoida je $B = \frac{\mu_0 NI}{l}$. Ta rezultat je skladen s tistim, ki smo ga dobili z uporabo B-S zakona in poenostavili za primer dolge tuljave.

SLIKA: Solenoid: zanka in oznake.

POLJE TOROIDA

Toroid je tuljava, ki je vase zaključena (zaokrožena). Zamislimo si zanko po sredini toroida po krožnici polmera r . Z enakim razmislekom kot pri solenoidu lahko zapišemo $B2\pi r = \mu_0 NI$ in

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



SLIKA: Toroid.**POLJE TOKOVNE OBLOGE**

Določimo gostoto magnetnega pretoka tokovne obloge. Tokovna obloga je tok vzdolž tankega vodnika velike površine na enoto prečne dolžine: $K = \frac{I}{l}$. Enota je A/m.

SLIKA: Razlaga tokovne obloge.

Magnetno polje tokovne obloge nad in pod oblogo je usmerjeno vzporedno z ravnino vendar prečno na smer toka, kar lahko ugotovimo, če tokovno oblogo razdelimo na vrsto tokovnih premic. Poleg tega se smer polja zamenja na drugi strani tokovne obloge.

Zamislimo si pravokotno zanko, ki seka tokovno oblogo na dolžini l . Rezultat integracije polja je različen od nič le na odsekih, ki so vzporedni z ravnino.

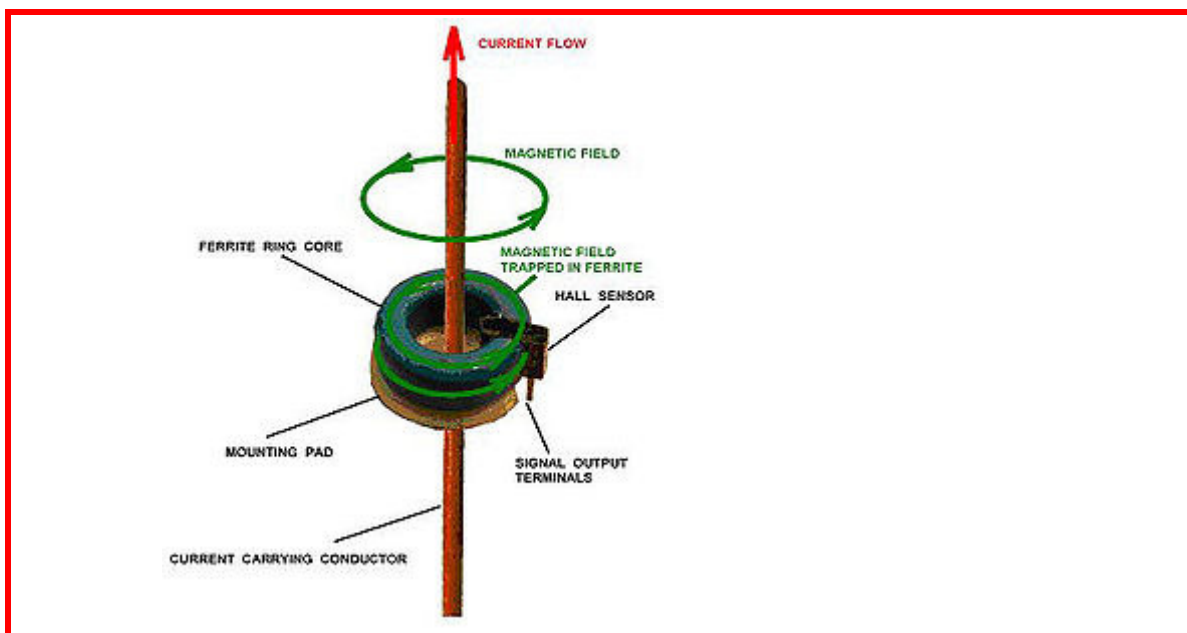
Zapišemo: $B \cdot l + 0 + B \cdot l + 0 = \mu_0 K \cdot l$. Rezultat je $B = \frac{\mu_0 K}{2}$. (3.3)

Smer polja je prečna na smer toka, določimo jo tako, kot da bi imeli opravka s tokovno premico nad točko. Če prevodna površina leži na XY ravnini ($z=0$) in je tok (tokovna obloga) v smeri osi Y, bo za

$$z > 0: \vec{B} = -\vec{e}_x \frac{\mu_0 K}{2}$$

$$z < 0: \vec{B} = +\vec{e}_x \frac{\mu_0 K}{2}$$

SLIKA: Polje v okolici tokovne obloge je konstantno.**APLIKACIJA: TOKOVNE KLEŠČE**



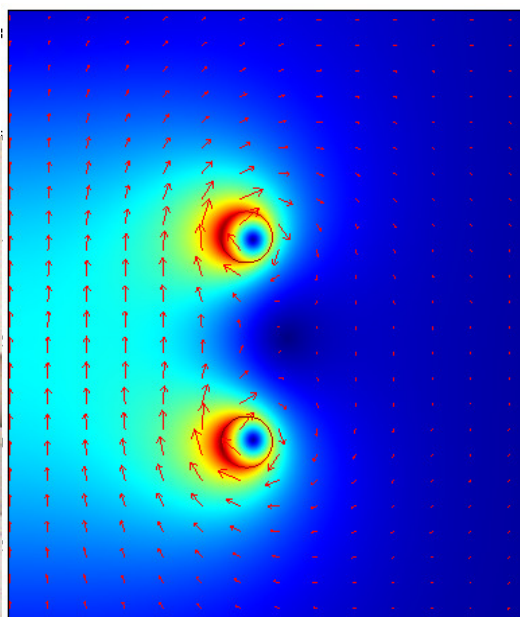
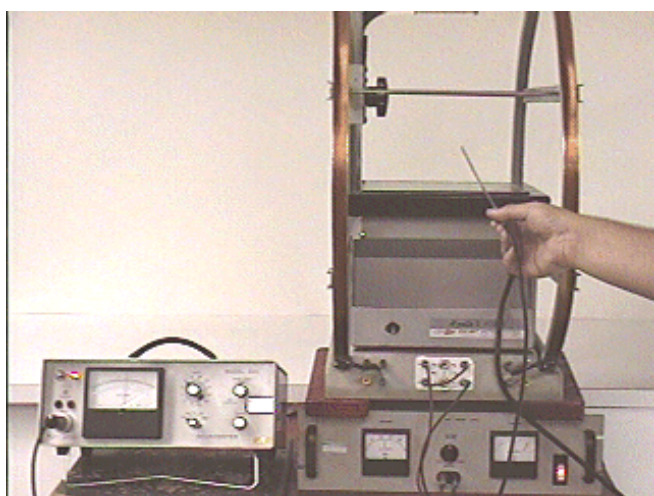
SLIKA: Inštrumenti za merjenje toka uporabljajo princip Amperovega zakona za merjenje toka s pomočjo merjenja magnetnega polja. Levo: Nekoliko bolj »napreden« inštrument s tokovnimi kleščami uporablja za merjenje Hallov element (Fluke 345). Desno: Hallov element integriran v feritni obroček za merjenje toka. (<http://www.ayainstruments.com/applications3.html>, http://www.kew-ltd.co.jp/en/support/mame_02.html, http://en.wikipedia.org/wiki/Hall_effect)

POVZETEK:

- 1) Integral gostote magnetnega pretoka v smeri poljubno izbrane zaključene poti (zanke) je sorazmeren toku, ki ga zanka oklepa ali z enačbo: $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{objeti}}$. Ta zapis imenujemo Amperov zakon.
- 2) Predznak zaobjetega toka je odvisen od smeri integracije v zanki in smeri toka v vodniku, ki ga zanka obkroža. Predznak je pozitiven, če je smer integracije v smeri rotacije polja.
- 3) S pomočjo Amperovega zakona smo določili približne izraze za polje v sredini solenoida in toroida. Rezultat je $B = \frac{\mu_0 NI}{l}$, kjer je l dolžina tuljave, oziroma dolžina srednje poti v toroidu.
- 4) S pomočjo Amperovega zakona smo zapisali polje tokovne obloge, kjer tok opišemo s površinsko gostoto toka K [A/m]. Dobimo $B = \frac{\mu_0 K}{2}$. Polje je prečno na smer toka, smer določimo enako kot smer B ja okoli vodnika.
- 5) V elektrostatiki smo imeli $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ in smo rekli, da je tako polje potencialno. Posledica tega namreč je, da lahko E zapišemo kot gradient potenciala. Kot vidimo, je

magnetno polje drugačno, lahko rečemo da je polje rotacijsko ali vrtilno.

- 6) Kasneje bomo obravnavali še razširjeno obliko Amperovega zakona, ki predstavlja eno od Maxwellovih enačb. Za osnovo ima zapisano obliko, ki pa je spremenjena v toliko, da upošteva tudi toke zaradi magnetizacije snovi ter toke časovno spreminjajočega se električnega polja.



SLIKA: Na desni je primer prikaza polja v okolici dveh zank (Helmholtzov par), kjer je prikazano le polje za polovico zanke. Celotno polje bi dobili z rotacijo okoli leve stranice. Opazimo lahko precejšnjo homogenost polja v osi tuljav. Na levi je primer merjenja polja v sredini Helmholtzovega para.



Andre Marie Ampere na spletu: <http://chem.ch.huji.ac.il/history/ampere.htm>

Primeri izpitnih in kolokvijskih nalog:

- 1. kolokvij , 17.4.2002
- 1. kolokvij, 3. maj 2004
- izpit, 20. junij 2001
- Prvi kolokvij OE II 23.04 2002

4. MAGNETNI PRETOK – FLUKS

Vsebina poglavja: Definicija magnetnega pretoka, izračun magnetnega pretoka, brezizvornost magnetnega polja, upodobitev polja z gostotnicami, induktivnost, lastna induktivnost, magnetni sklep.

Veličina, ki jo v magnetiki morda najpogosteje obravnavamo in pogosto imenujemo kar magnetno polje, je gostota magnetnega pretoka (B). Gotovo mora obstajati tudi veličina, ki ji rečemo magnetni pretok? Lahko si predstavljamo analogijo z gostoto električnega toka J in tokom I . Pri tokovnem polju smo uporabili zapis $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$, kjer I predstavlja tok, ki gre preko

(nezaključene !) ploskve. V magnetiki zapišemo na podoben način

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (4.1)$$

kjer Φ imenujemo magnetni pretok, pogosto pa tudi magnetni fluks ali kar samo fluks. Z besedami: magnetni pretok je enak integralu gostote magnetnega pretoka po površini A .

Enota je $T m^2$, ali pa Wb (Weber), ali pa tudi $V s$.

SLIKA: Magnetni pretok je enak integralu normalne komponente gostote magnetnega pretoka po določeni površini. Predstavljamo si ga z analogijo med gostoto (električnega) toka in gostoto magnetnega pretoka (J in B) ter tokom in fluksom (I in Φ).

IZRAČUN FLUKSA

Za izračun magnetnega pretoka moramo torej poznati vektor gostote magnetnega pretoka povsod po površini, skozi katero nas zanima pretok. Pri izračunu fluksa preko določene površine je potrebno upoštevati le tisto komponento gostote pretoka, ki je pravokotna na površino, torej tisto, ki »prebada« površino. V enačbi to izrazimo z uporabo skalarnega produkta med vektorjem polja in vektorjem diferenciala površine. Rezultat te operacije je skalar. Če je polje homogeno povsod po površini, lahko enačbo (4.1) zapišemo v preprostejši obliki:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{B} \cdot \vec{e}_n dA = BA \cos \alpha \quad (4.2)$$

kjer je alfa kot med smerjo B in normalo na površino (SKICA). Če je polje pravokotno na ravno površino, je fluks največji in enak kar $\Phi = BA$. (4.3)

Primer: Homogeno polje gostote 5 mT je usmerjeno pod kotom 60° na normalo na ravno površino. Določite pretok polja skozi zanko površine 20 cm^2 , ki leži na površini. Določimo magnetni pretok skozi zanko.

SLIKA: Homogeno polje usmerjeno pod kotom na pravokotno zanko.

Izračun: Zaradi homogenosti polja lahko uporabimo izraz $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA \cos \alpha$ in dobimo $\Phi = 5 \text{ mT} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cos 60^\circ = 5 \mu\text{Vs} = 5 \mu\text{Wb}$.

Primer: Določimo magnetni pretok skozi pravokotno zanko, ki je v ravnini ravnega vodnika s tokom 36 A in je od vodnika oddaljena za $a = 5 \text{ cm}$. Dolžina zanke je $l = 10 \text{ cm}$, širina pa $b = 4 \text{ cm}$.

Izračun: Skicirajmo zanko v ravnini XY in izračunajmo pretok skozi zanko v smeri osi Z. Vodnik naj leži na Y osi, s tokom, usmerjenim v smeri -Y osi. V tem primeru je polje vodnika za

$x > 0$ enako $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$, diferencial površine pa je $d\vec{A} = \vec{e}_z dx dy$. Velja

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^{a+b} \int_0^l \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot \vec{e}_z dx \cdot dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \ln \frac{a+b}{a}.$$

V dobljeno enačbo vstavimo vrednosti in dobimo

$$\Phi = \frac{4\pi 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} 36 \text{ A}}{2\pi} 0,1 \text{ m} \cdot \ln \frac{9 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 423 \text{ nV} \cdot \text{s} = \underline{\underline{423 \text{ nWb}}}.$$

SLIKA: Pravokotna zanka in vzporedno ležeči vodnik.

Primer: Določimo fluks med ravnima vodnikoma (dvovodom) s polmeroma $R = 0,5 \text{ cm}$ in medosno razdaljo $d = 2 \text{ m}$ na dolžini 100 m . Tok v vodnikih je 150 A .

Izračun: Način izračuna je podoben kot v prejšnjem primeru. Ugotovimo, da se polji med vodnikoma seštevata, zaradi enakih dimenzij vodnikov pa se seštevata tudi fluksa. Zato je

$$\Phi = 2 \cdot \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d+R}{R} \cong \underline{\underline{35,9 \text{ mWb}}}.$$

SLIKA: Ravna vodnika (dvovod).

BREZIZVORNOST MAGNETNEGA POLJA

Koliko pa je fluks skozi zaključeno površino? Ker je polje vrtilno, enak del pretoka, ki v določen prostor vstopa, tudi izstopa. Integral polja po zaključeni površini bo torej enak nič ali z enačbo

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

(4.4)

SLIKA: Enaka količina fluksa, kot v določen zaključen prostor vstopa, na drugem delu prostora tudi izstopa. Zaključeno površino razdelimo na štiri površine. Vsota štirih fluksov iz te površine je enaka $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = 0$.

To je pomemben rezultat, saj govori o brezizvornosti magnetnega polja. Da torej ne obstaja magnetni izvor in ponor v podobnem smislu, kot to poznamo pri električnem naboju. Temu zapisu lahko rečemo tudi **Gaussov zakon za magnetiko**, in predstavlja eno od Maxwellovih enačb (3.) – zopet le v integralni obliki.

PRIMERJAVA Z GAUSSOVIM ZAKONOM IZ ELEKTROSTATIKE

V elektrostatičnem polju je integral E po zaključeni površini sorazmeren zaobjetemu naboju. Iz tega je sledil zaključek, da je električno polje izvorno (izvira na pozitivni nabojih in ponira na negativnih). Analogno električnim nabojem ne moremo najti magnetnega naboja⁴. Torej **magnetno polje ni izvorno**. Včasih rečemo tudi, da je solenoidno. Vsak trajni magnet je tako izvor kot ponor magnetnega polja. Se pa kljub neobstoju magnetnega naboja v smislu analogije in lažjega računanja polj trajnih magnetov včasih uporablja tudi pojem magnetnega naboja, oziroma bolj natančno magnetnega površinskega naboja.

SLIKA: Primerjava električnega in magnetnega polja. Primer električnega polja naelektrenega cilindra (levo) in magnetnega polja polnega tokovodnika.

⁴ Zanimivo je, da se je nedavno zanimanje za magnetne monopole povečalo. Več objav v vrhunskih strokovnih revijah govori o prisotnosti magnetnih monopolov, npr. [Magnetic monopoles in spin ice](#), C. Castelnovo, R. Moessner and S. L. Sondhi, *Nature* 451, 42-45 (3 January 2008) ali ["Magnetic Monopoles Detected In A Real Magnet For The First Time"](#). *Science Daily*. 4 September 2009. Gre pa večinoma za opazovanje redkega pojava v trdih snoveh, kjer pride ob skupnem delovanju ionov in elektronov, kar so opazili v močno ohlajenih določenih kristalih. Glej npr. http://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_monopole.

UPODOBITEV MAGNETNEGA POLJA Z GOSTOTNICAMI

Gostoto pretoka smo lahko prikazali z množico puščic (vektorjev) v prostoru. Če te puščice med seboj povežemo v krivulje, dobimo *gostotnice* (včasih se jih imenuje tudi *silnice*). Prostor med gostotnicami si lahko zamislimo kot cevke z določeno velikostjo pretoka. Pretok torej lahko vizualiziramo (predstavljamo) z *gostotnimi cevkami*. Ker običajno rišemo polje v dveh dimenzijah, gostotne cevke zapolnjujejo prostor med dvema gostotnicama. Običajno jih rišemo tako, da je fluks med sosednjimi gostotnicami konstanten $\Delta\Phi_i = konst$. Gostotne cevke ravnega vodnika ponazorimo s koncentričnimi krogi s polmeri, ki se gostijo v smeri manjšanja razdalje od vodnika. Da bo fluks med dvema vodnikoma konstanten, mora veljati $\Delta\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} = konst$, oziroma $\frac{r_{i+1}}{r_i} = e^{k \cdot \Delta\Phi}$. Na podoben način smo risali tudi ekvipotencialne ploskve pri elektrostatiki.

SLIKA: Upodobitev magnetnega polja z gostotnimi cevkami.

INDUKTIVNOST (PRVIČ)

Kot vidimo v izrazih za fluks, je le-ta linearno odvisen od toka. Večji kot je tok, večji je fluks, kar matematično zapišemo kot $\Phi = \text{nekaj} \cdot I$. To »nekaj« definiramo kot **induktivnost** (simbol L), torej velja

$$\Phi = LI. \quad (4.5)$$

Sledi, da je induktivnost strukture definirana kot kvocient fluksa in toka:

$$L = \frac{\Phi}{I}. \quad (4.6)$$

Enota za induktivnost je V s/A ali H (Henry).

Primer: Določimo induktivnost dvovoda iz primera 2, če upoštevamo le fluks med žicama (ne tudi v žicah).

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R} \cong 240 \mu\text{H}.$$

Če bi želeli eksaktno določiti induktivnost dvovoda, bi morali upoštevati tudi tisti del fluksa, ki gre skozi vodnika. Izpeljana enačba $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}$ torej ni eksaktna enačba induktivnosti dvovoda. Ker pa ta fluks ne zajame celotnega toka vodnika, je izpeljava končnega izraza nekoliko bolj zapletena (AR Sinigoj: Osnove elektrotehnike, str. 354). Če bi upoštevali še to, bi kljub vsej zahtevnosti izračuna dobili preprost izraz : $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{R} \right)$. Če bi v ta izraz vstavili vrednosti iz primera, bi dobili rezultat približno 250 μH . Očitno je, da je osnovni izraz dovolj natančen, če je le razdalja med vodnikoma mnoga večja od polmera vodnikov.

MAGNETNI SKLEP

Kadar je vodnik izdelan v taki obliki, da gre fluks skozi več vodnikov, je smiselno definirati novo veličino, ki jo imenujemo magnetni sklep in jo označimo z veliko grško črko Ψ (psi). Magnetni sklep je enak vsoti fluksov skozi vse zanke, ki jih tvori vodnik. Če gre enak fluks skozi N zank, velja kar $\Psi = N\Phi$. Ko gre fluks skozi več zank, je potrebno induktivnost določiti kot

$$L = \frac{\Psi}{I}. \quad (4.7)$$

V primeru, ko tok I skozi vodnik (strukturo) ustvarja magnetni sklep Ψ v isti (lastni) strukturi, govorimo o lastni induktivnosti. Če gre isti fluks skozi N zank velja:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I}, \quad (4.8)$$

SLIKA: Magnetni sklep

LASTNA INDUKTIVNOST SOLENOIDA IN TOROIDA

Induktivnost je osnovni podatek za vsako tuljavo. Pogledali si bomo poenostavljena (vendar pogosto v praksi uporabljena) primera izračuna induktivnosti solenoida in toroida, pri čemer bomo predpostavili, da je polje znotraj solenoida (toroida) homogeno.

Primer: Določimo poenostavljen izraz za lastno induktivnost dolgega solenoida in jo izračunamo za primer: polmer tuljave 1 cm, dolžina 5 cm, 100 obojev.

$$\text{Izračun: } B \cong \frac{\mu_0 NI}{l}, \quad \Phi \cong \frac{\mu_0 NI}{l} A, \quad \Psi = N\Phi \cong \frac{\mu_0 N^2 A}{l} I$$

$$L = \frac{N\Phi}{I} \cong \frac{\mu_0 N^2}{l} A \cong \underline{\underline{79 \mu\text{H}}}.$$

Poenostavljen izraz za induktivnost tuljave je torej $L = N^2 \frac{\mu_0 A}{l}$. Hitro lahko opazimo

podobnost z izrazom za kapacitivnost ploščnega kondenzatorja $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$, kjer je l dolžina tuljave, d pa razdalja med ploščama, A površina preseka tuljave oz. plošče kondenzatorja. Ugotovimo lahko, da induktivnost tuljave zelo povečamo z večjim številom obojev.

Primer: Zapišimo poenostavljen izraz za lastno induktivnost toroida krožnega preseka z notranjim polmerom 4 cm in zunanjim 5 cm. Toroid ima 200 obojev. (Računamo s srednjim polmerom in homogenim poljem znotraj preseka toroida)

$$\text{Izračun: } B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_{sr}}, \quad \Phi \cong \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_{sr}} A, \quad \Psi \cong \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi r_{sr}} \pi r_A^2, \quad L \cong \frac{\mu_0 N^2}{2r_{sr}} r_A^2 \cong \underline{\underline{55,85 \mu\text{H}}}$$

INDUKTIVNOST JE GEOMETRIJSKA LASTNOST

V elektrostatiki smo definirali kapacitivnost iz zveze med nabojem in napetostjo $Q = CU$. Izračunali smo jo tako, da smo med dve prevodni telesi priključili napetost U , pri čemer se je na telesoma nakopičilo naboja $\pm Q$. Izkazalo se je, da je kapacitivnost odvisna le od geometrijskih lastnosti (razdalje med ploščama, površine plošč). Podobno velja za induktivnost, kjer velja zveza $\Psi = LI$.

Torej, če želimo določiti analitični izraz za induktivnost določenega elementa (zanke, tuljave, itd) skozi vodnik (zanko) »pošljemo tok I , določimo fluks oziroma magnetni sklep in iz kvocienta določimo induktivnost: $L = \frac{\Psi}{I}$. Zaopet ugotovimo, da je induktivnost snovno-geometrijska lastnost.

POVZETEK

- 1) Magnetni pretok ali fluks skozi poljubno površino smo definirali na enak način kot tok pri tokovnem polju $\left(I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \right)$ kot $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$. V preprostem primeru, ko je polje homogeno in konstantno po površini A , se izraz poenostavi v $\Phi = BA \cos \alpha$, kjer je alfa kot med normalo na površino in smerjo B ja. Pretok je največji, ko je polje usmerjeno pravokotno na površino. Magnetni pretok skozi zaključeno površino je enak nič, kar matematično zapišemo kot $\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$. To je Gaussov zakon za magnetno polje ali tudi zakon o brezizvornosti magnetnega polja.
- 3) Lastno induktivnost smo zapisali kot $L = \frac{\Psi}{I}$, kjer Ψ imenujemo magnetni sklep in je enak produktu števila obojev in fluksa skozi oboje. Enota je H(enry)
- 4) Izračuni:
 - a. fluks skozi pravokotno zanko ob vodniku: $\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$
 - b. Aproximativni izrazi za induktivnost:

$$\text{Ravna (dolga) tuljava: } L \cong \frac{\mu_0 N^2}{l} A$$

$$\text{Toroid: } L \cong \frac{\mu_0 N^2}{2r_{sr}} r_A^2$$

$$\text{Dvovod (brez izpeljave): } L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{R} \right)$$

Naloge:

izpit, 17. septembra 2002, izpit, 3. septembra 2002, izpit, 17. 4. 2003

izpit, 5. septembra 2002, izpit, 31. avgust 2004, izpit 4. 9. 2003

1. kolokvii. 22. april 2003. Prvi kolokvii. 9. mai 2002

5. DELO MAGNETNIH SIL

Vsebina poglavja: izračun dela magnetnih sil iz razlike velikosti fluksa skozi zaključen tokovodnik v začetni in končni poziciji.

Equation Chapter (Next) Section 5 Spoznali smo že enačbo za izračun sile na vodnik v magnetnem polju

$$\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (5.1)$$

SLIKA: Tokovodnik v magnetnem polju. Sila na tokovni element.

Sedaj nas zanima, kolikšno delo opravimo pri premiku vodnika s tokom I v magnetnem polju $\vec{B}$ iz začetne pozicije, ki jo bomo označili s P_1 , v končno pozicijo P_2 . To dobimo z integracijo sile po poti $S(P_1 \rightarrow P_2)$

$$A = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (5.2)$$

kjer smo z $d\vec{s}$ označili diferencial poti v smeri premika in z S celotno pot. Z vstavitvijo

$$\text{enačbe (5.1) v (5.2) dobimo } A = \int_S I (d\vec{l} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = I \int_{P_1}^{P_2} (d\vec{s} \times d\vec{l}) \cdot \vec{B}.$$

Sedaj moramo pogledati, kaj predstavlja produkt $d\vec{s} \times d\vec{l}$ oziroma celotna integracija tega produkta na poti od začetne do končne pozicije zanke. $d\vec{s} \times d\vec{l}$ predstavlja diferencial površine ($d\vec{A}$), ki kaže v smeri normale na površino. Če to površino skalarno pomnožimo z vektorjem gostote pretoka dobimo diferencial fluksa $(d\vec{s} \times d\vec{l}) \cdot \vec{B} = d\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot d\vec{A} = d\Phi$ in v skladu s to ugotovitvijo lahko delo zapišemo v obliki

$$A = I \int_{\text{Začetna pozicija}}^{\text{Končna pozicija}} d\Phi = I \Phi_{\text{plašča}}.$$

Rezultat integracije je celoten fluks, ki gre skozi »plašč«, ki ga opiše vodnik na poti. Ker pa je, kot smo že spoznali, magnetno polje brezizvorno ($\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$), mora biti celoten

fluks skozi navidezno telo, ki ga opiše premikajoči vodnik, enak nič. To pa tudi pomeni, da mora biti fluks skozi plašč enak razliki fluksa skozi površino, ki jo opisuje vodnik v končnem položaju in fluksu v začetnem položaju. Če želimo pri tem fluks skozi zanko, ki jo opisuje vodnik, računati v isti smeri tako v začetni kot v končni poziciji, dobimo $\Phi_{\text{plašča}} = \Phi_{\text{končni}} - \Phi_{\text{začetni}}$. Smer teh fluksov računamo v t.i. pozitivni smeri, ki jo določa tok v gibajoči zanki (smer polja v zanki, ki jo povzroča tok I).

$$A = I (\Phi_{\text{končni}} - \Phi_{\text{začetni}}) \quad (5.3)$$

SLIKA: Primer premikanja tokovne zanke iz lege P_1 v lego P_2 v polju B.

Kdaj bo rezultat (delo magnetnih sil) pozitiven? Tedaj, ko bo fluks skozi zanko v končni legi večji kot v začetni. Če ima torej tokovna zanka možnost prostega gibanja, se bo zanka postavila tako, da bo fluks skozi zanko največji. (Enako ugotovitev bomo postavili tudi v naslednjem poglavju, ko se bomo srečali z navorom na tokovno zanko.) Če je rezultat pozitiven, pomeni, da so delo opravile magnetne sile magnetnega polja, če pa je negativen pa to, da je delo za premik zanke v magnetnem polju moral vložiti nek zunanji vir (recimo kar mi sami): $A_{\text{mag}} + A_{\text{zun}} = 0$.

PRIMER: Tokovna zanka površine 4 cm^2 s tokom 2 A se nahaja v magnetnem polju. Skozi zanko je fluks $20 \text{ } \mu\text{Vs}$. Nato premaknemo zankico tako, da je v končni legi fluks skozi zanko $60 \text{ } \mu\text{Vs}$. Določimo delo pri premiku zanke v magnetnem polju.

Izračun: V skladu z enačbo (5.3) izračunamo delo ob premiku zanke v magnetnem polju kot:

$$A = 2 \text{ A} (60 - 20) 10^{-6} \text{ Vs} = \underline{\underline{80 \text{ } \mu\text{J}}}.$$

Rezultat je pozitiven, kar pomeni, da je delo posledica premika zanke pod vplivom magnetnega (in ne zunanje) polja.

PRIMER

Vzporedno z ravnim vodnikom s tokom $I_1=10$ A, na oddaljenosti $c = 2$ cm leži pravokotna zanka dolžine $a = 5$ cm in širine $b=3$ cm s tokom $I_2 = 0,2$ A. Koliko dela opravi magnetno polje za translatorsni premik zanke stran od vodnika za razdaljo $d = 2$ cm? Primer reši tako z integracijo magnetnih sil kot z razliko fluksov. (SLIKA)

Izračun: Sila deluje na dva vodnika zanke, ki sta vzporedna z vodnikom. Delo magnetnih sil potrebno za premik bo torej:

$$A = A' + A''$$

$$\vec{F}' = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\vec{e}_x), A' = \int_c^{a+c} \vec{F}' \cdot \vec{e}_x dx', A' = -I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{a+c}{c}$$

$$\vec{F}'' = \vec{e}_x I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x''}, A'' = \int_{a+c}^{a+c+d} \vec{F}'' \cdot \vec{e}_x dx'', A'' = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{a+c+d}{a+c}$$

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \left(\frac{c}{a+c} \frac{d+c+a}{c+a} \right) \cong \underline{\underline{-5,3 \text{ nJ}}}$$

Drugi način:

$$A = I_2 (\Phi_{\text{končni}} - \Phi_{\text{začetni}})$$

$$\Phi_{\text{končni}} = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_{c+a}^{d+c+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{d+c+a}{c+a}$$

$$\Phi_{\text{začetni}} = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_c^{c+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c}$$

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \left(\frac{c}{a+c} \frac{d+c+a}{c+a} \right) \cong \underline{\underline{-5,3 \text{ nJ}}}$$

Vprašanje: Zakaj je končni rezultat negativen? Odgovor: Če računamo delo z integracijo sile po poti vidimo, da je sila na bližjo stranico zanke usmerjena v smeri vodnika (privlačna), sila na daljno pa je odbojna. Torej mora delo opraviti zunanji vir.

PRIMER

Koliko dela opravi magnetno polje, da se zanka iz primera 1 zavrti okoli sredinske osi za kot 90° ? SLIKA

Izračun: Delo najlažje izračunamo iz spremembe fluksa skozi zanko. Pred vrtenjem je bil fluks skozi zanko maksimalen, enak $\Phi_{\text{začetni}} = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_c^{c+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c}$, po vrtenju pa je fluks skozi zanko enak nič (enako veliko fluksa, kot v zanko vstopa, tudi iz zanke izstopa). Zato je delo enako $A = I_2 (0 - \Phi_{\text{začetni}}) = -I_2 \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c} = \underline{\underline{-8,3 \text{ nJ}}}$.

Vprašanja:

1. Zakaj je rezultat negativen? Ker mora delo opraviti zunanji vir. Zanko moramo zavrteti v nasprotni smeri, kot bi se zavrtela pod vplivom magnetne sile.
2. Zakaj je fluks skozi zanko enak nič, ko je zanka postavljena prečno na osnovno lego? Ker gre skozi en del zanke fluks skozi zanko v pozitivni smeri, skozi drugi (enako velik) del pa enako velik fluks v negativni smeri.
3. Kateri je stabilen položaj zanke? Zanka se želi postaviti tako, da je fluks skozi zanko največji. Torej tedaj, ko leži ravni vodnik v ravnini zanke. Ta lega je stabilna, če so sile usmerjene stran od zanke in labilna, če so sile na vodnik v smeri osi zanke.
4. Kolikšen bi bil rezultat, če bi zanko zavrteli za 180° ? Fluks skozi zanko je v končni legi enako velik kot v začetni legi, le nasprotnega predznaka je. Torej bo rezultat $A = 2I_2 \Phi_{T2}$. Kaj pa, če zanko zavrtimo tako, da zopet pride v začetno lego (obrat za 360°)? Takrat je fluks skozi zanko enako velik, kot na začetku, vendar če je v prvi polovici zasuka (za 180°) delo negativno, bo v drugem delu zasuka delo pozitivno (delo opravi magnetno polje), skupno delo pa bo enako nič. Lahko pa s pomočjo preklopa smeri toka v zanki ob polovici obrata zagotovimo pogoje (komutator), v katerih bo sila na zanko vedno v smeri rotacije, kar je osnovni princip delovanja raznovrstnih motorjev.

POVZETEK

- 1) Delo magnetnih sil lahko izračunamo iz osnovne zveze $A = \int_{T_1}^{T_2} \vec{F}_m \cdot d\vec{l}$, ali pa kar iz razlike fluksov skozi zanko v končni in začetni poziciji $A = I(\Phi_{\text{končni}} - \Phi_{\text{začetna}})$. Fluks je potrebno računati v pozitivni smeri (kot bi kazal $\vec{B}$ v notranjost premikajoče zanke, ki ga povzroča tok v zanki). Negativen rezultat pomeni, da je delo za premik morala opraviti zunanja sila, pozitiven pa, da je delo opravilo magnetno polje – da se je zanka gibala v smeri rezultirajočih magnetnih sil na zanko.
- 2) Naredili smo primer iz translatornega premika in pokazali, da dobimo enak rezultat z integracijo magnetne sile po poti in iz produkta toka zanke in razlike fluksov skozi zanko v začetni in končni legi zanke.
- 3) S pomočjo komutacije toka v zanki omogočimo vrtenje zanke v magnetnem polju.

Naloge:**izpit, 24. junij 2003****izpit, 31. avgust, 2004****izpit, 20. september 2004**

6. NAVOR NA (TOKO)VODNIK

— Vsebina poglavja:

- Navor kot vektorski produkt ročice in (magnetne) sile.
- Magnetni dipol in magnetni dipolni moment.
- Navor na magnetni dipol.

Potrebna matematična znanja: vektorski in skalarni produkt.

Navor na zanko je osnovni princip delovanja vseh vrtljivih delov pri izkoriščanju pojava magnetnega polja kot npr. prikazovalniki z vrtljivimi tuljavicami ali motorji. Pri razumevanju in analizi navora na tokovodnik v magnetnem polju nam pomaga koncept magnetnega dipola. Poleg tega nam koncept magnetnega dipola pomaga pri razlagi magnetnih pojavov v snovi.

Če na tokovodnik v magnetnem polju deluje sila, potem v primeru vpetja z ročico dolžine r deluje na vodnik navor⁵

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.1)$$

Velikost navora je torej $T = rF \sin \theta$, kjer je θ kot med smerjo vektorja ročice in sile. Smer vrtenja je pravokotna na ravnino, ki jo določata vektorja ročice in sile.

SLIKA: Na tokovodnik v magnetnem polju deluje sila. Navor deluje v smeri vektorskega produkta med silo in ročico.

⁵ Včasih se za navor uporablja tudi simbol M . Za pravilno smer navora je potrebno zavrteti vektor $\mathbf{r}$ v $\mathbf{F}$ in ne obratno.

Primer:

Vodnik v obliki zanke (tokovna zanka) s tokom 10 A dolžine 10 cm in stranice 5 cm vpet na zgornjem vodniku kot kaže slika. Prečno na zanko, pod kotom 30° na normalo na zanko, je

SLIKA: Viseča zanka vpeta na zgornji stranici.

$$\vec{r} = -\vec{e}_y r = (0, -r, 0)$$

$$\vec{F} = (F \sin \alpha, -F \cos \alpha, 0), \text{ kjer je } F = IlB.$$

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & -r & 0 \\ F \sin \alpha & -F \cos \alpha & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z r F \sin \alpha$$

ali krajše: z izračunom le amplitude navora: $T = rF \sin \alpha = 2,5 \text{ mNm}$.

Primer: Kolikšen tok bi moral teči skozi tokovno zanko na sliki, če želimo, da se zanka postavi pod kotom 45° na osnovno lego, ko zanka visi vpeta na zgornjo stranico. $L=10 \text{ cm}$, $R=4 \text{ cm}$, $B=50 \text{ mT}$. Pri izračunu poenostavimo navor na zanko zaradi sile gravitacije tako, da upoštevamo le silo na spodnjo stranico z maso 10 g. (Magnetno polje je usmerjeno v smeri gravitacije)

$$F_n = \dots = mg = 10^{-2} \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2$$

SLIKA: Slika zanke zamaknjene za kot 45° .

NAVOR NA TOKOVNO ZANKO V MAGNETNEM POLJU.

Običajno nas zanima navor na zanko v magnetnem polju. Vzemimo pravokotno prevodno zanko s tokom I , dolžine l in širine d , ki je v sredini vpeta na os, kot kaže slika. Navor na zanko v homogenem polju, ki je za kot θ zamaknjeno od normale na površino zanke dobimo z upoštevanjem sile na stranico dolžine l . Poleg sile, ki deluje med vodniki lastne zanke (ki ne povzroča rotacije zanke), delujeta v zunanjem magnetnem polju na stranici zanke sili $\vec{F}_{B,l}$ na levo in $\vec{F}_{B,d}$ na desno stranico. Če označimo z $\vec{d}$ vektor, ki kaže od levega do desnega vodnika, velja

$$\vec{T} = \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_{B,d} + \left(-\frac{\vec{d}}{2} \right) \times \vec{F}_{B,l}.$$

Če je zanka v homogenem polju, velja $\vec{F}_{B,l} = -\vec{F}_{B,d}$, od koder sledi

$$\vec{T} = \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_{B,d} + \left(-\frac{\vec{d}}{2} \right) \times (-\vec{F}_{B,d}) = \vec{d} \times \vec{F}_{B,d}.$$

Z upoštevanjem, da je $\vec{F}_{B,d} = I\vec{l} \times \vec{B}$ dobimo

$\vec{T} = \vec{d} \times (I\vec{l} \times \vec{B}) = I(\vec{d} \times \vec{l}) \times \vec{B}$. Vektorski produkt $\vec{d} \times \vec{l}$ je enak površini zanke, smer pa ima pravokotno na površino, v smeri polja, ki ga povzroča tok zanke v sredini zanke. Torej je $\vec{d} \times \vec{l} = \vec{e}_n dl = \vec{e}_n A = \vec{A}$. Z uvrstitvijo v enačbo dobimo končen izraz

$$\vec{T} = \vec{e}_n IA \times \vec{B} \quad (6.2)$$

SLIKA: Navor na pravokotno zanko v homogenem magnetnem polju. Prikaz sil na stranice zanke, smer polja in kota med vektorjem ročice in sile.

MAGNETNI DIPOL IN MAGNETNI DIPOLNI MOMENT

Enačbo (6.2) lahko zapišemo tudi v splošni obliki $\vec{T} = I \vec{A} \times \vec{B}$, kjer je $\vec{A} = \vec{e}_n A = \vec{e}_n dl$ vektor, katerega absolutna vrednost je enaka površini zanke, smer pa je pravokotna na površino zanke – enaka je smeri polja, ki ga povzroča tok zanke v središču zanke. Produkt toka in površine zanke ima poseben pomen v magnetiki (elektrotehniki) in ga imenujemo **magnetni dipolni moment**.

$$\vec{m} = \vec{e}_n I A, \quad (6.3)$$

Magnetni dipol predstavlja torej zankica s tokom. To je osnovni element v magnetiki, tako, kot je električni dipolni moment (dva razmaknjena nasprotno predznačena naboja) osnovni element v elektrostatiki.

SLIKA: Magnetni in električni dipol. Magnetni dipol si predstavljamo v obliki zankice s tokom I . Magnetni dipolni moment je enak produktu površine zanke in toka zanke. Smer pa je pravokotna na površino zanke.

Z upoštevanjem definicije za magnetni dipolni moment lahko enačbo (6.2) za navor na zanko zapišemo tudi z magnetnim dipolnim momentom kot:

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (6.4)$$

Kdaj je navor na tokovno zanko največji?

Navor deluje na tokovno zanko v magnetnem polju tako, da jo zasuka prečno na smer polja, oziroma tako, da bo smer magnetnega momenta enaka smeri polja. Hkrati lahko ugotovimo, da se zanka v magnetnem polju obrne tako, da je pretok magnetnega polja skozi zanko največji.

SLIKA: a) Zanka pravokotna na smer zunanjega polja – navor je enak nič in b) zanka položena v smeri zunanjega polja – navor je maksimalen in enak mB , c) zanka z magnetnim momentom v nasprotni smeri polja – navor je nič, labilna lega.

Primer:

Določite torzijsko konstanto polžaste vzmeti galvanometra z vrtljivo tuljavico in trajnim magnetom tako, da bo odklon kazalca pri toku $100 \mu\text{A}$ enak 28° . Tuljavica z 250 ovoji je dolga 2,1 cm in široka 2,1 cm in se nahaja v homogenem polju 0,23 T.

Izračun: Tuljavica se nahaja v enako velikem polju neodvisno od kota φ , kar pomeni, da bo navor neodvisen od kota φ ter linearno odvisen od toka I . Navor lahko povečamo z večjim številom ovojev tuljave.

$$M_{\text{vzmeti}} = M_{\text{tuljave}} \Rightarrow k\varphi = NIAB$$

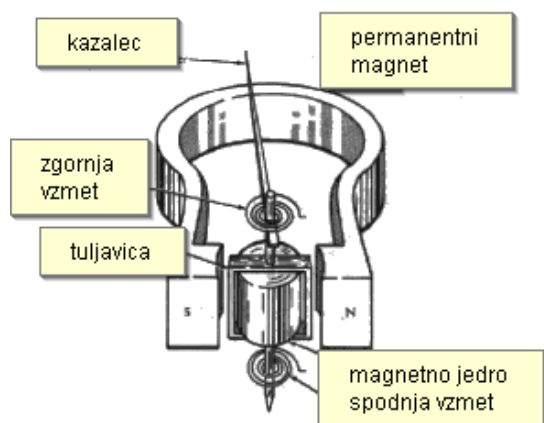
SLIKA: Navor na zanko v homogenem magnetnem polju.

Povzetek:

1. Navor na tokovno zanko v magnetnem polju določa vektorski produkt ročic(e) in sil(e): $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$. Po velikost je enak $T = rF \sin \theta$, kjer je θ kot med smerjo vektorja ročice in vektorja sile.
2. Magnetni dipol je zankica s tokom. (spomni se tudi električnega dipola)
3. Magnetni dipolni moment definiramo kot produkt toka in površine zanke. Ima smer, ki je pravokotna na površino zanke in usmerjena enako kot polje, ki ga povzroča tok zanke v središču zanke. Velja: $\vec{m} = I \vec{A} = \vec{e}_n IA$.
4. Navor na zanko lahko izrazimo z magnetnim dipolnim momentom in je enak $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$.
5. Tokovna zanka se v magnetnem polju postavi (zarotira) pravokotno na smer polja oziroma tako, da je smer magnetnega dipolnega momenta enaka smeri polja oziroma tako, da je fluks skozi zanko največji.

D'ARSONVALOV AMPERMETER

Francoski fizik Ars ne d'Arsonval je leta 1882 izumil merilnik toka na osnovi vrtljive tuljave vstavljene v radialno homogeno magnetno polje, kar je dosegel z uporabo permanentnega magnetna in železnega jedra. Sili na tuljavo v magnetnem polju nasprotuje vzmet s konstanto



vzmeti.



D'Arsonvalov galvanometer ima nad tuljavico malo zrcalce, v katerega usmerimo snop svetlobe in opazujemo njen odklon.

<http://en.wikipedia.org/wiki/Galvanometer>

http://physics.kenyon.edu/EarlyApparatus/ElectricalMeasurements/DArsonval_Galvanometer/DArsonval_Galvanometer.html

7. GIBANJE NABOJEV V ELEKTRIČNEM IN MAGNETNEM POLJU

Vsebina poglavja: električna in magnetna sila na naboj, Lorentzova sila, rotacija naboja v magnetnem polju, pomembne aplikacije: katodna cev, Hallov pojav, ciklotron.

GIBANJE NABOJEV V ELEKTRIČNEM POLJU

Gibanje nabojev v električnem polju smo že spoznali. Pozitivno naelektren delec se giblje v smeri električnega polja, sila na naboj Q je $\vec{F}_e = Q\vec{E}$. Dinamiko gibanja opišemo z enačbo $m\vec{a} = Q\vec{E}$ oziroma $\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \frac{Q\vec{E}}{m}$. Ker deluje pospešek v smeri električnega polja, se naelektrenemu delcu s potjo povečuje/zmanjšuje hitrost ($v = \int a dt$) in s tem kinetična energija ($W_k = \frac{mv^2}{2}$). Zmanjšuje/povečuje pa se mu potencialna energija, saj se giblje v smeri zmanjšanja/povečanja potenciala.

SLIKA: Gibanje naboja v električnem polju.

GIBANJE NABOJEV V MAGNETNEM POLJU

Poznamo izraz za silo na vodnik v magnetnem polju: $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$. Tok zapišemo v obliki $\frac{dQ}{dt}$ in dobimo $d\vec{F} = \frac{dQ}{dt} d\vec{l} \times \vec{B} = dQ \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}$, pri čemer je $\frac{d\vec{l}}{dt}$ hitrost gibanja naboja dQ . Dobimo $d\vec{F} = dQ\vec{v} \times \vec{B}$ oziroma ⁶

⁶ Velja poudariti, da je v formuli potrebno hitrost delca upoštevati kot hitrost relativno na opazovalca.

$$\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.1)$$

Iz enačbe (7.1) sledi, da sila na naboj Q v magnetnem polju ne deluje v smeri magnetnega polja temveč pravokotno na to smer. Poleg tega deluje ta sila le v primeru, če se naboj giblje (v električnem polju pa deluje električna sila tudi na mirujoč naboj).

Sila je v skladu z enačbo (7.1) pravokotna na smer vektorja hitrosti in magnetnega polja.

SLIKA: Gibanje naboja v magnetnem polju. Smer vektorja magnetnega polja, hitrosti in sile. V homogenem polju bo delec rotiral po krožnici. Smer je odvisna od predznaka naboja.

V primeru, da bo naelektrjen delec priletel v homogeno polje, ki je pravokotno na smer leta, bo rotiral okoli centra s pospeškom $\vec{a} = \frac{Q}{m} \vec{v} \times \vec{B}$. Radij rotacije dobimo z izenačenjem magnetne in centrifugalne sile $\frac{mv^2}{R} = QvB$:

$$R = \frac{mv}{QB} \quad (7.2)$$

Ker deluje sila na delec pravokotno na vektor hitrosti delca, se delcu v magnetnem polju ne spreminja kinetična energija⁷.

⁷ Zopet drugače kot v električnem polju, kjer delec pospešuje/zavira v smeri polja in se mu povečuje/zmanjšuje hitrost in s tem kinetična energija.

PRIMER

Proton prileti s kinetično energijo 5 MeV v prostor homogenega magnetnega polja velikosti 1,5 mT, ki je pravokotno na smer priletelega delca. S kolikšno silo deluje nanj magnetno polje, kolikšen je radialni pospešek delca in kolikšen radij bi opisal v homogenem polju?

Izračun: Kinetična energija delca je $W_k = \frac{mv^2}{2}$ in se jo v fiziki delcev pogosto obravnava z enoto eV (elektron-volt), ki ustreza energiji $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Ker je masa protona (približno) enaka $1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, bo hitrost delca enaka $v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}} \cong 31,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Sila bo enaka $F_m = QvB \cong 7,6 \cdot 10^{-15} \text{ N}$. To je majhna sila, ki pa deluje na majhno maso, zato je kljub temu vpliv pomemben: radialni pospešek je enak: $a = \frac{F_m}{m} \approx 4,7 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2$. Radij kroženja je $R = \frac{mv}{QB} \cong \underline{\underline{210 \text{ m}}}$.

LORENTZOVA SILA

Če na naboj deluje tako električno kot magnetno polje, je potrebno zapisati silo kot vsoto električne in magnetne sile:

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.3)$$

Temu zapisu rečemo tudi *Lorentzova sila*. Ta bi v principu zadoščala za obravnavo električnih in magnetnih pojavov. Poznati bi morali porazdelitev nabojev, nato pa bi računali njihovo gibanje v prostoru, preprosto z reševanjem diferencialne enačbe $m\vec{a} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$. V praksi je problem bolj kompleksen, saj je gibanje delcev v snovi zelo zapleteno. Je pa omenjen zapis primeren za obravnavo gibanja nabojev v vakuumu (zraku).

Primer: Kako se giblje delec, če sta tako električno kot magnetno polje usmerjena v isto smer? Naboj pospešuje v smeri polja in rotira okoli Bja. Gibanje je torej helično.

SLIKA: Gibanje delca v homogenem električnem in magnetnem polju: a) E v isti smeri kot B, $v = 0$; b) E v smeri v, B pravokotno; c) E in B v isti smeri vendar pravokotno na v.

ODKLANJANJE DELCEV V MAGNETNEM POLJU ZEMLJE

Primer heličnega gibanja je tudi gibanje nabojev v zemeljskem magnetnem polju, še posebno v pasovih povečanega magnetnega polja, ki je znan kot **Van Allenov radiacijski pas**, kjer se ionizirani delci iz vesolja ujamejo v magnetno polje zemlje. Ker se to polje zgoščuje v smeri proti poloma, se delci gibljejo helično z vedno večjo frekvenco proti polu vendar obenem opravljajo



SLIKA: Primer severnega sija, ki nastane kot posledica vpada energijskih delcev v zemeljsko atmosfero kot posledica povečane sončeve aktivnosti in spiralnega kroženja nabojev v Van Allenovem radijacijskem pasu.

(aurora australis).

vedno manjšo pot. Na nekem delu se ustavijo in začnejo krožiti v obratni smeri. Temu principu rečemo magnetno zrcalo. Delec je ujet v magnetno polje, čemur rečemo tudi magnetna steklenica. Ob povečani sončevi aktivnosti dodatno injicirani močno energetizirani elektroni in protoni v Van Allenovem radijacijskem pasu povzročijo spremembo električnega polja v področju odboja delcev, ki se namesto odboja usmerijo proti zemeljski površini. Pri tem trkajo v atome in molekule zraka, ki ob trkih sevajo svetlobo. Ta svetloba ustvarja sij, ki ga poznamo kot severni sij (aurora borealis). Poznamo tudi južni sij

SLIKA: Gibanje delcev v Van Allenovem radijacijskem pasu.

Pomembnejši primeri odklanjanja delcev:

- Katodna cev.
- Ciklotron
- Masni spektroskop
- Fuzijski reaktor
- Odklanjanje delcev v magnetnem polju zemlje

• KATODNA CEV

Katodna cev je steklena cev z zmanjšanim tlakom v notranjosti. V njej je katoda, ki je izpostavljena močnemu električnemu polju in je primerno segreta, da iz nje z lahkoto izhajajo elektroni. Ti potujejo v smeri električnega polja, ki ga ustvarimo z virom visoke napetosti (več kV). V sredini anode je luknjica, ki prepušča elektrone in jih v bistvu fokusira. Elektroni nadaljujejo pot proti fluorescentnemu zaslonu, med potjo pa preletijo prečno električno in magnetno polje, ki ga ustvarjajo kondenzatorji in tuljave. Ti s svojim poljem omogočajo usmerjanje (curka) elektronov in s tem risanje slike po zaslonu.

SLIKA: Katodna cev.

PRIMER

V polju z napetostjo med anodo in katodo 2 kV pospešimo elektron do končne hitrosti. Nato prileti v sredino med ravni plošči, kjer je v prečni smeri homogeno električno polje 10 kV/m. Dolžina elektrod je $L=10$ cm. Kolikšen je odklon elektrona na dolžini elektrod? Nariši še potrebno smer polja?

Odklanjajo jih s pospeškom $a_y = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m}$, torej bo hitrost $v_y = a \cdot t$ in pot v smeri polja

$y = \frac{1}{2} a \cdot t^2$, v smeri zaslona pa $L = v_x \cdot t$. Odklon je torej enak $y = \frac{QEL^2}{2mv_x^2}$. Če hitrost v smeri

x-a določimo iz izenačenja kinetične in potencialne energije $\frac{mv_x^2}{2} = QU \Rightarrow v_x^2 = \frac{2QU}{m}$ in

dobimo $y = \frac{EL^2}{4U}$. $y = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ V/m} \cdot (0,1\text{m})^2}{4 \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ V}} = 2,5 \text{ mm}$.

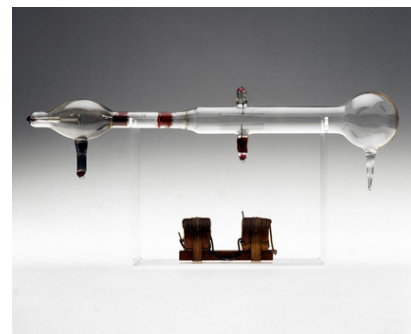
OBSTOJ ELEKTRONA IN DOLOČITEV NABOJA ELEKTRONA

S podobnim eksperimentom (glej sliko) je leta 1897 **J. J. Thomson** na univerzi v Cambridge(u) dokazal obstoj elektronov. Če upoštevamo še silo, ki jo ustvarjamo z magnetnim poljem, dosežemo ravnotežje sil, ko velja $QE = QvB$, od koder je $v = \frac{E}{B}$. Iz razmerja sil (električne poljske jakosti in gostote magnetnega pretoka) lahko določimo hitrost delca, kar pa lahko določimo tudi iz odklona. Torej lahko iz odklona delca in znanega električnega in magnetnega polja določimo razmerje med

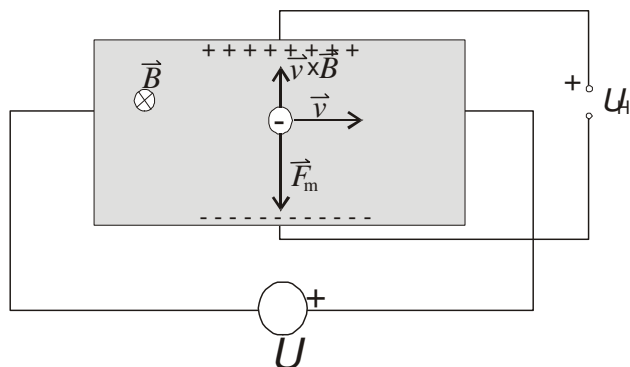
maso in nabojem, kar je naredil JJ Thomson: $\frac{m}{Q} = \frac{B^2 L^2}{2yE}$.

S tem je uspel dognati osnovne značilnosti elektrona, osnovnega naboja, zato se ta eksperiment obravnava kot odkritje elektrona. Ker ni natančno poznal mase elektrona, iz poskusa ni mogel določiti velikosti osnovnega naboja.

Prvo natančnejšo vrednost za velikost osnovnega naboja je postavil **Robert A. Millikan** leta 1910-1913 s svojim znamenitim poskusom s kapljicami olja v električnem polju (Nobelova nagrada 1923). Ko je naprševal kapljice olja v komoro, med elektrodi ploščnega kondenzatorja, je ugotavljal, da lahko kapljice ohrani v fiksni poziciji, ko se izenači sila teže in električna sila. Kapljice olja je naelektril z ionizacijo zraka, ki jo je povzročil z virom X-žarkov. (Kar je sicer zdravju neprijazno). Ko je izenačil sili ($mg = QE$) je ugotovil, da obstaja določen najmanjši naboj in ga ocenil na vrednosti $1,5924 \times 10^{-19}$ As, kar je samo en procent odstopanja od prave vrednosti.



HALLOV POJAV



Ali se odklonijo tudi naboji v prevodniku, če je le ta izpostavljen magnetnemu polju. Odgovor je pozitiven in prvi ga je dokazal **Edvin H Hall** leta 1879, takrat še 24 letni absolvent univerze Johns Hopkins. Elektroni v prevodniku potujejo s hitrostjo drifta, ki jo poznamo iz tokovnega polja, kjer je gostota toka $J = \rho v_d$, ρ je

volumska gostota naboja. Na te naboje v prečnem magnetnem polju deluje sila $F_m = QvB$ in povzroči rotiranje in kopičenje elektronov proti eni strani prevodne ploščice. Na drugi strani hkrati nastane pomanjkanje elektronov oziroma kopičenje pozitivnega naboja. Prečno na tok v vodniku se torej vzpostavi električno polje in s tem napetost, ki je sicer običajno majhna pa še vedno merljiva (velikosti μV). Ker mora nastopiti ravnovesje med električno in magnetno silo

velja $QE = QvB$, od koder je *Hallova napetost* $U_H = Ew = vBw = \frac{J}{\rho} Bw = \frac{I}{wd} Bw = \frac{IB}{\rho d}$,

kjer je w širina traku, d pa debelina. Iz Hallove napetosti lahko določimo hitrost drifta nabojev ali gostoto nabojev, najpogosteje pa se Hallova napetost uporablja za merjenje gostote

magnetnega pretoka. Pri tem se običajno uporablja kar formula $U_H = R_H \cdot \frac{IB}{d}$, kjer se R_H

imenuje *Hallov koeficient*. Iz izraza vidimo, da je Hallova napetost inverzno proporcionalna koncentraciji prostega naboja. Zato so za realizacijo Hallovega senzorja bolj primerni polprevodniški materiali. Običajno so nosilci naboja elektroni, tedaj dobimo polariteto Hallove napetosti kot je prikazano na skici. Če pa je polprevodnik tipa p, v njem prevajajo vrzeli (pomanjkanje elektronov), kar se odraža v spremembi predznaka Hallove napetosti. Hallov senzor je realiziran s polprevodniško tehnologijo, ki omogoča miniaturizacijo in natančno določitev dopiranja (dodajanja primesi) polprevodnika, točk zajema napetosti, v modernejši izvedbi pa tudi realizacijo z vgrajenim tokovnim virom in ojačevalcem Hallove napetosti.

Nekaj spletnih povezav:



http://en.wikipedia.org/wiki/Hall_effect

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/hall.html>

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw2_ge/kap_2/backbone/r2_1_3.html

MERJENJE MAGNETNEGA POLJA S HALLOVIM EFEKTOM

Ena najpogostejših uporab Hallovega efekta je merjenje gostote magnetnega pretoka. Pri realizaciji je pomembno zagotoviti čim bolj natančen tokovni vir, kar dandanes omogoča integracija Hallovega elementa z ostalimi elektronskimi elementi v čipu.

Večina tokovnih klešč vsebuje Hallov senzor, najdemo ga v elektronskih kompasih, za merjenje pomikov, rotacije, itd.



SLIKA: Čip senzorja s Hallovimi elementi. Nad njim vrteči trajni magnet. Aplikacija: abosultni merilnik kota. Podjetje RLS (www.rls.si). Na sredini možen principi merjenja obratov s Hallovim senzorjem. Desno: Hallov senzor v čipu ob kovancu za četrt dolarja. Desno primer uporabe Hallovega senzorja za merjenje toka.

PRIMER

Določite Hallovo napetost, če je prečno na $d = 0,5 \text{ mm}$ debel bakreni trak s tokom 50 A magnetno polje gostote 2 T . Koncentracija nosilcev naboja je $n = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

Izračun: Velja $\rho = Q_e \cdot n = 13,44 \cdot 10^9 \text{ C/m}^3$ in zato

$$U_H = Ew = vBw = \frac{J}{\rho} Bw = \frac{I/(wd)}{\rho} Bw = \frac{IB}{\rho d} \cong 15 \mu\text{V}.$$

* **DODATNO:** merjenje Hallove napetosti na isti strani lističa.

Ni nujno, da merimo napetost med nasprotnima točkama traku. Upoštevati moramo, da naboji ne potujejo le pod vplivom magnetne sile, pač pa tudi zaradi vzdolžne električne sile. Vzdolžno

polje je $E_{\text{vzdolž}} = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{\sigma dt}$. Izraz za prečno silo smo že zapisali in je enak $E_{\text{prečno}} = \frac{IB}{\rho dt}$, torej bo

razmerje med prečnim in vzdolžnim poljem $\frac{E_{\text{prečno}}}{E_{\text{vzdolžno}}} = \frac{\sigma}{\rho} B$. V primeru bakra

($\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$) dobimo razmerje enako $8,5 \cdot 10^{-3}$ oziroma kot 0,5 stopinj. Enako Hallovo napetost bi izmerili, če bi bili merilni točki na isti strani vendar zamaknjeni za ta kot.

Obstajajo tudi bolj občutljivi merilniki magnetnega polja. Na primer taki, ki delujejo na principu spreminjanja upornosti pri vzpostavitvi magnetnega polja. Senzorji takega tipa se na primer uporabljajo kot tipala v diskih.

CIKLOTRON

Ciklotron je naprava za pospeševanje nabitih delcev s pomočjo magnetnega polja. No, samo magnetno polje ne more biti dovolj, saj delec v magnetnem polju ne pospešuje (razen tega, da ima radialni a konstanten pospešek). Dodaten efekt pospeševanja dosežemo tako, da znotraj rotacije delec preleti kratko razdaljo v električnem polju, ki delcu doda hitrost in s tem kinetično

energijo. Delcu se nekoliko poveča tudi radij kroženja $R = \frac{mv}{QB}$. Tako se delcu ob vsaki rotaciji

nekoliko poveča hitrost, energija in radij kroženja do dokončnega izstopa iz polja. Pomembno je, da se pri kroženju ne spreminja frekvenca kroženja, saj je $v = \omega R$ in zato $\omega = \frac{QB}{m}$. S to

frekvenco deluje tudi vzbujevalno električno polje.

Za večje energije delcev (več kot 50 MeV) ciklotron ni več primeren, saj je potrebno upoštevati, da se hitrost delca približuje hitrosti svetlobe in se ne povečuje več linearno. V namene pospeševanja do večjih energij je potrebno uporabiti npr. sinhrotrone, ki so bistveno večji (radij kilometer ali več) in sproti korigirajo smer delcev z električnim in magnetnim poljem.

PRIMER

Ion z nabojem $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ in maso $5,2 \cdot 10^{-20} \text{ kg}$ pospešimo v električnem polju s potencialno razliko 1 kV, nakar vstopi v področje homogenega magnetnega polja 80 mT, ki je prečno na smer leta iona. Na kolikšni razdalji od vhodne točke v polje delec prileti v zaslon, če je zaslon od vstopne točke oddaljen za 25 cm?

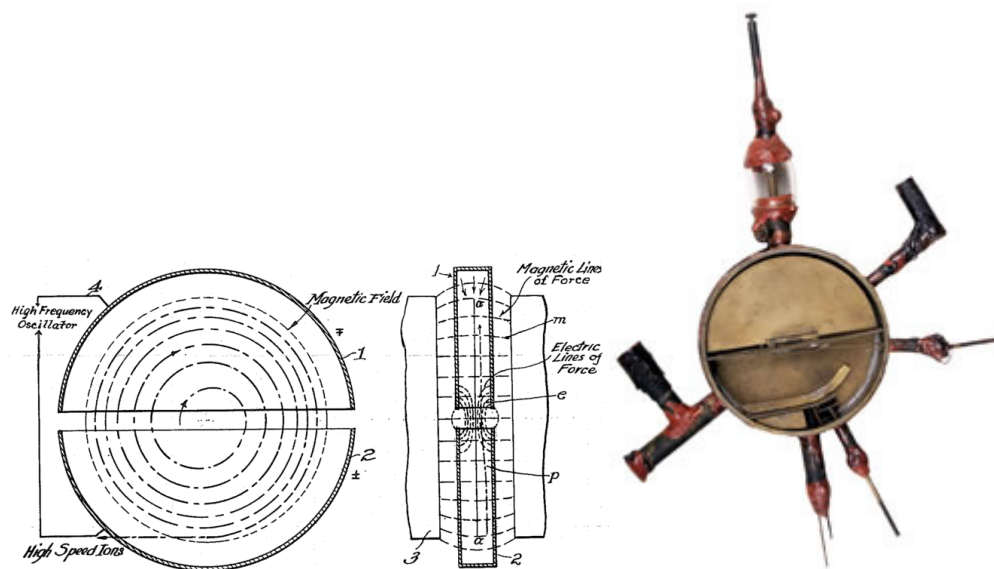
Izračun: Hitrost delca pri vstopu v polje določimo iz izenačenja kinetične in potencialne energije $\frac{mv^2}{2} = QU$, od koder je hitrost delca ob vstopu v polje enaka

$v = \sqrt{\frac{2QU}{m}} \cong 78,44 \text{ m/s}$, radij kroženja pa $R = \frac{mv}{QB} \cong 319 \text{ m}$. Ker velja

$l = R \cdot \sin \theta \Rightarrow \theta = 44,9 \cdot 10^{-3}^\circ$ in $y = R - R \cos(\theta) \cong \underline{\underline{98 \mu\text{m}}}$



SLIKA: Levo: Zgradba ciklotrona iz dveh D-jev (nasproti obrnjenih črk D). Desno: največji ciklotron na svetu: TRIUMPH (University of British Columbia, Kanada) pospeši H- ione do energije 520 MeV. Je premera 18 m, težek 18 ton, znotraj je polje 0,46 T, delce pa pospešuje napetostni vir 186 kV pri frekvenci 23 MHz (Wikipedia).



SLIKA: Levo: slika delovanja ciklotrona iz patenta US1948384, avtor Ernest O. Lawrence. Desno: prvi delujoči ciklotron iz University of California.

Nekaj spletnih povezav:

<http://www.lbl.gov/Science-Articles/Archive/early-years.html>

<http://bancroft.berkeley.edu/Exhibits/physics/bigscience02.html>

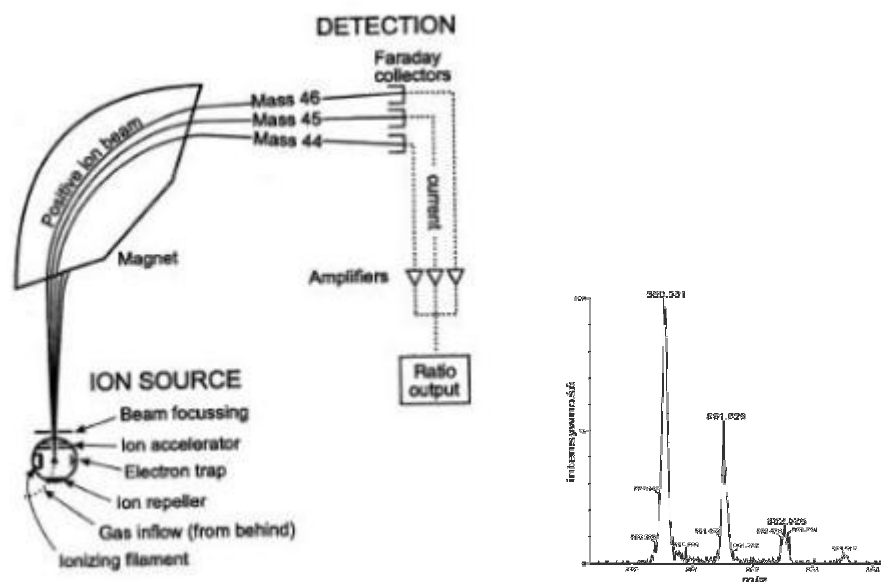
http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/articles/kullander/index.html

<http://en.wikipedia.org/wiki/Cyclotron>



MASNI SPEKTROGRAF

Je naprava, ki s pridom uporablja efekt odklanjanja nabitih delcev v magnetnem polju. Delce z znano hitrostjo usmerimo v področje s homogenim poljem, kjer začnejo krožiti. Na izhodu iz področja s poljem je fotografski film ali detektor, ki zazna prilet naboja. Iz znane začetne hitrosti in polmera poti delca lahko določimo maso delca in s tem sam delec.



SLIKA: Shematski prikaz delovanja masnega spektrogra. Desno: primer spektrogra.

POVZETEK:

- 1) Sila na naboj v električnem polju je $\vec{F}_e = Q\vec{E}$. Gibanje delca določa enačba $m\vec{a} = Q\vec{E}$. Gibanje je pospešeno, v smeri polja, delcu se povečuje kinetična, zmanjšuje pa potencialna energija (ali obratno). Kinetična energija naboja je $\frac{mv^2}{2}$, potencialna pa QV .
- 2) Sila na naboj v magnetnem polju je $\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B}$. Sila deluje le na gibajoč naboj, usmerjena pa je pravokotno na ravnino, ki jo določata vektorja hitrosti in polja. Naboj v magnetnem polju rotira, polmer rotacije v homogenem polju je $R = \frac{mv}{QB}$. Smer rotacije je odvisna od predznaka naboja. Hitrost naboja ostaja pri rotaciji ista, zato se mu ne spreminja kinetična energija.
- 3) V električnem in magnetnem polju je potrebno upoštevati obe sili, dobimo $\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$. Ta zapis imenujemo Lorentzova sila.

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:

1. kolokvij, 11. april 2005

1. kolokvij , 17.4.2002

1. kolokvij, 4. maj 2006

1. kolokvij, 3. maj 2004

1. kolokvij , 17.4.2002

izpit, 19. januar 2006

izpit, 8. aprila 2002

izpit, 29. januar 2007

Izpit, 20. aprila 2005

** DODATNO: RELATIVISTIČEN POGLED NA GIBANJE DELCEV

Spoznali smo, da lahko gibanje nabojev opišemo z Lorentzovo silo $\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$. Problem razumevanja te sile lahko nastane, če na ta zapis gledamo iz različnih prostorov – koordinatnih sistemov. Lorentz se je s temi vprašanji ubadal in prišel zelo blizu teoriji, ki je dandanes poznana kot teorija relativnosti. Einstein pa jo je opisal v svojem znamenitem delu iz leta 1905 z naslovom »O elektrodinamiki telesa v gibanju«. Govori o tem, da mora veljati relativistična invariantnost vsake teorije. Tudi elektromagnetne. Torej morajo veljati enaki zakoni v kakršnem koli koordinatnem sistemu. S klasičnim razumevanjem Lorentzove sile tako lahko pridemo v težave v primeru, ko se tudi koordinatni sistem premika z enako hitrostjo kot naboj. Običajno je lažje razmišljati na način, da se opazovalec (mi) giblje obenem z nabojem. Glede na opazovalca naboj miruje in nanj ne more delovati magnetna sila, saj je zanjo potrebno, da se delec giblje. Za zunanega opazovalca, recimo mu O2, ki pa se ne giblje in vidi gibanje naboja in prvega opazovalca (O1), pa na naboj deluje sila. Ker ne more biti, da v enem primeru na naboj deluje sila, v drugem pa ne (zahteva po invariantnosti) je rešitev v t.i. Lorentzovi transformaciji, ki upošteva gibanje različnih koordinatnih sistemov. V konkretnem primeru lahko zaplet rešimo tako, da premikajoči opazovalec tudi opazi silo na naboj, ki pa ne bo magnetna temveč električna. Enaka bo vB , kjer je v (skupna) hitrost gibanja. Iz tega vidimo, da sta električno in magnetno polje neposredno povezana. Kaj pa, če se koordinatni sistem giblje z drugo hitrostjo, recimo u , delec pa s hitrostjo v . Tedaj lahko pišemo $\vec{F}' = Q\vec{E}' + Q(\vec{v} - \vec{u}) \times \vec{B}'$. Z enakim razmislekom kot prej dobimo $F' = QuB + Q(v - u)(B) = QvB$. Zopet enak rezultat in potrditev invariantnosti. Torej opazovalec, ki se giblje z različno hitrostjo kot delec »vidi« dve polji, tako električno kot magnetno, ki pa se delno med sabo izničita in rezultirata v enaki obliki kot prej. (povzeto po I Galili, D. Kaplan: »Changing approach to teaching electromagnetism in a conceptually oriented introductory physics course«, Am.J.Phys 65 (7), July 1997.)

** DODATNO: KVANTNI HALLOV EFEKT

Leta 1980 je nemški fizik Klaus von Klitzing odkril (Nobelova nagrada za leto 1985), da se Hallova upornost ne spreminja zvezno s spremembo magnetnega polja pač pa skokovito in da ti skoki nastopajo pri upornostih, ki niso odvisne od lastnosti materialov pač pa od določene kombinacije osnovnih fizikalnih konstant deljenih s celim številom. Ugotovil je torej, da je tudi upornost kvantizirana. Pri teh upornostih »običajna« Ohmska upornost izostane in material postane superprevoden. Hallova prevodnost je s kvantnim Hallovim efektom določena z enačbo

$\sigma = n \frac{Q_e^2}{h}$, kjer je n celo število, Q_e naboj elektrona in h Plankova konstanta ($6,626 \cdot 10^{-34}$ J s) in je

izredno natančno določena, tako, da je tudi sprejeta

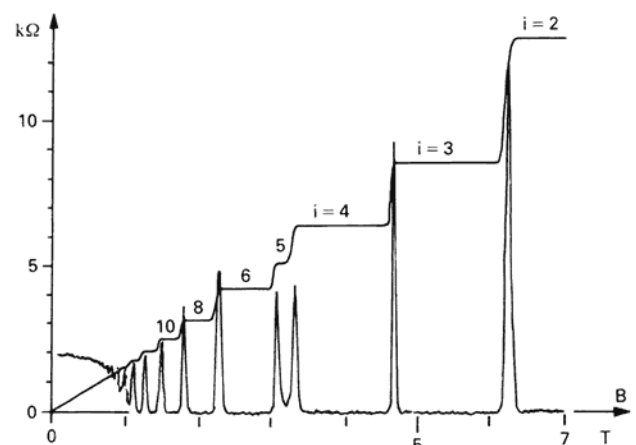
kot merilo za upornost ($\frac{h}{Q_e^2}$ je približno 25 812,8

ohmov,

http://en.wikipedia.org/wiki/Fractional_quantum_Hall_effect).

SLIKA: Skokovito spreminjanje upornosti z magnetnim poljem.

(http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1998/press.html, K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. 45, 494, 1980).



8. MAGNETNE LASTNOSTI SNOVI

— **Vsebina poglavja:** vektor magnetizacije, magnetni naboj?!, zveza med vektorjem magnetizacije in tokom, magnetna poljska jakost in razširjen Amperov zakon, zveza med B , H in M , magnetna susceptibilnost, relativna permeabilnost, zveza med B in H , magnetna napetost, magnetni potencial, mejni pogoji magnetnega polja.

V tem poglavju si bomo pogledali, kako razumeti in upoštevati magnetne lastnosti snovi. Potrebno bo definirati nove veličine kot npr. vektor magnetizacije (M) in magnetna poljska jakost (H). Poleg tega bomo ugotovili, da je potrebno Amperov zakon v primeru prisotnosti snovi spremeniti - dopolniti.

OD KOD TRAJNIM MAGNETOM LASTNOST, DA POVZROČAJO MAGNETNO POLJE?

Vemo, da trajni (permanentni) magnet v svoji okolici povzroča magnetno polje. Toda hkrati smo ugotovili, da magnetno polje povzroča električni tok, torej gibajoči naboji. Poleg tega smo že ugotavljali, da splošno velja Gaussov zakon za magnetno polje, ki »govori« o brezizvornosti magnetnega polja. Že Ampere je razrešil problem obravnave lastnosti trajnih magnetov s trditvijo, da morajo v snovi obstajati nekakšni tokovi, ki to polje povzročajo. Spoznanja moderne fizike so pokazala, da kroženje elektronov okoli jedra atoma pa tudi lastno vrtenje elektrona okoli svoje osi določajo magnetne lastnosti snovi. Kroženje elektrona okoli lastne osi opišemo s spinom elektrona. Spin elektrona je v osnovi pojav, ki ga je mogoče razložiti le z upoštevanjem kvantne fizike, pri čemer se izkaže, da elektron poseduje kotni moment, ki ga je mogoče povezati z magnetnim dipolnim momentom $m = IA$. Vsi atomi imajo določene magnetne lastnosti, vendar velika večina zelo šibke, saj se magnetno polje magnetnih momentov posameznih elektronov zaradi njihovega naključnega gibanja izničuje. Snovi s takimi lastnostmi imenujemo *diamagnetiki*. Obstajajo pa določeni atomi, v katerih se magnetni momenti ne izničujejo in povzročajo izrazito magnetno polje v svoji okolici. Materiale s takimi lastnostmi imenujemo *feromagnetiki* (po železu, latinsko Ferrum). Ti lahko tvorijo trajne magnete, ki si jih lahko predstavljamo kot skupek velikega števila majhnih enako usmerjenih magnetkov. Te magnetke pa lahko opišemo z njihovimi magnetnimi dipolnimi momenti (tokovnimi zankicami), ki v svoji okolici povzročajo magnetno polje, ki je vsota polj posameznih zankic.

SLIKA: Način kroženja in spin elektronov vplivata na magnetne lastnosti atomov

SLIKA: Trajni magnet (S in N), razdeljen na vrsto majhnih magnetov, ki jih opišemo z množico tokovnih zankic. Vsota vplivov vseh tokovnih zankic je enaka vplivu tokovne obloge.

VEKTOR MAGNETIZACIJE

Prehod iz mikroskopskega v makroskopsko obravnavo magnetnega polja trajnih magnetov omogoča definiranje **vektorja magnetizacije**. Ta je definiran kot povprečje magnetnih dipolnih momentov na enoto volumna:

$$\overline{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \overline{m}}{\Delta V}, \quad (8.1)$$

kjer je ΔV makroskopsko majhen volumen (ki še vedno vsebuje milijone atomov oziroma magnetnih momentov). Trajni magnet lahko torej namesto z upoštevanjem velikega števila (atomskih - mikroskopskih) magnetnih momentov obravnavamo z (makroskopskim) vektorjem magnetizacije. Ta način obravnave je zelo podoben načinu obravnave električnih lastnosti snovi z

vpeljavo vektorja polarizacije P . Enota vektorja magnetizacije je $\left[\frac{\text{A} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^3} \right] = \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$.

SLIKA: Vektor magnetizacije kot (volumska) gostota magnetnih dipolnih momentov.

PRIMER

Magnet v obliki cilindrične palice premera 1 cm in dolžine 5 cm ima enakomerno magnetizacijo $M = 5,3 \cdot 10^3 \text{ A/m}$. Kolikšen je magnetni dipolni moment celotne palice?

Izračun: Uporabimo enačbo (8.1) in pišemo $m = M \cdot V = M \cdot \pi r^2 L = 2,08 \cdot 10^{-2} \text{ Am}$.

ZVEZA MED MAGNETIZACIJO IN POVRŠINSKIM TOKOM

Če primerjamo polje, ki ga v svoji okolici povzroča trajni magnet in polje ravne tuljave, ugotovimo, da sta ti dve polji navzven enaki. To nas tudi navede na misel, da lahko polje trajnega magneta prikažemo tudi kot posledico površinskega toka oz. tokovne obloge (K_m) ali pa kot tuljavo z N ovoji in tokom I_m . Preproste zveze to pokažejo na sledeč način

$$M = \frac{m}{\Delta v} = \frac{I_m \cdot \Delta A}{\Delta A \cdot \Delta l} = \frac{I_m}{\Delta l} \cdot \frac{N}{N} = \frac{NI_m}{l} = K_m. \quad (8.2)$$

SLIKA: Trajni magnet s prikazom magnetizacije in tokovnih zankic, katerih vpliv na magnetno polje ohranja le prispevek tokov na površini telesa. V tem smislu lahko opišemo vpliv magnetizacije s površinskim tokom oz. tokovno oblogo.

PRIMER

Ocenimo velikost magnetnega polja v sredini trajnega magneta v obliki diska polmera $R = 2 \text{ cm}$ in debeline $l = 5 \text{ mm}$ z magnetizacijo $M = 5 \cdot 10^4 \text{ A/m}$ v smeri osi. Uporabimo koncept izračuna s pomočjo opisa magneta s tokovno zanko s površinskim tokom.

Izračun: Iz enačbe (8.2) ugotovimo, da je $M = K$, torej je tok v zanki $NI_m = Kl = Ml = 250 \text{ A}$. V

skladu z enačbo za polje v sredini tokovne zanke velja $B = \frac{\mu_0 NI_m}{2R} \cong \underline{\underline{7,85 \text{ mT}}}$.

MAGNETNA POLJSKA JAKOST (H) IN RAZŠIRJEN AMPEROV ZAKON

Naredimo preprost eksperiment. Vzemimo zračni toroid za katerega smo že pokazali, da je polje v sredini ovojev enako

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}, \quad (8.3)$$

kjer je l dolžina srednje poti in N število ovojev. Polje lahko izmerimo na primer s postavitvijo Hallove sonde v sredino ovojev. Nato vzamemo toroidno jedro iz feromagnetika in ga ovijemo z enakim številom ovojev. Pri vzbujaanju s tokom I ugotovimo povečanje polja v sredini ovojev (v praksi bi morali narediti majhno odprtino (režo) v feromagnetik za vstavitve Hallove sonde)⁸.

SLIKA: Primerjava gostote magnetnega pretoka v zračnem toroidu in toroidu s feromagnetnim jedrom.

Amperov zakon, kot smo ga poznali do sedaj, očitno ne bo več primeren za izračun polja v feromagnetiku, saj povečanja polja ne predvidi. Zakon je potrebno spremeniti tako, da bo upošteval tudi vplive magnetnih momentov v feromagnetiku. Spremenjena oblika bo

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N(I + I_m), \quad (8.4)$$

kjer smo z NI_m označili tok zaradi magnetizacije feromagnetika. Ta tok lahko povežemo z vektorjem magnetizacije, kot smo prikazali z enačbo (8.2). Polje znotraj toroida s feromagnetikom bi torej lahko zapisali kot

$$B = \mu_0 \left(\frac{NI}{l} + \frac{NI_m}{l} \right) = \mu_0 \left(\frac{NI}{l} + M \right). \quad (8.5)$$

Enačbo lahko preuredimo tako, da bo na desni strani enačbe le vzbujaanje NI

⁸ Reža v feromagnetiku bo sicer nekoliko zmanjšala velikost polja, kar s poznavanjem vpliva zračne reže lahko pri izračunu upoštevamo. (To bomo kasneje tudi naredili.) Da bi se izognili temu problemu, lahko spremembo velikosti polja v feromagnetiku ugotovimo tudi posredno z vzbujaanjem z izmeničnim signalom in merjenjem inducirane napetosti na dodatnem (sekundarnem) navitju na toroidu. Tudi to bomo spoznali v nadaljevanju.

$$\frac{B}{\mu_0} - M = \frac{NI}{l}. \quad (8.6)$$

Očitno bi torej lahko zapisali Amperov zakon v obliki, ki bi imela na desni strani enačbe le vzbujanje NI , če bi pisali

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = NI. \quad (8.7)$$

Enačba postane zopet podobna prvotnemu zapisu Amperovega zakona, če definiramo novo veličino, *magnetno poljsko jakost* $\vec{H}$ kot

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \quad (8.8)$$

Amperov zakon dobi obliko

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (8.9)$$

V splošnem je potrebno upoštevati, da je integral jakosti magnetnega polja po zaključeni poti enak vsoti vseh objetih konduktivnih tokov, kar lahko zapišemo (tokovno polje!) v obliki

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J}_c \cdot d\vec{A} \quad {}^9 \text{ AMPEROV ZAKON} \quad (8.10)$$

L predstavlja zaključeno zanko s površino A . Bistvena razlika med tem zapisom Amperovega zakona in osnovnim (z Bjem) je v tem, da ta ni odvisen od snovi temveč le od vzbujačih tokov, ki jih zanka zajame. Vpliv snovi pa dobimo s povezavo med B , H in M .

Podobno, kot smo modificirali Amperov zakon, lahko modificiramo tudi Biot-Savartov zakon za

izračun polja v okolici tokovodnikov, saj preprosto upoštevamo kar $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$; ($\vec{M} = 0$):

$$\vec{H} = \int_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (8.11)$$

⁹ Amperov zakon je ena od osnovnih enačb za opis elektromagnetnega polja. V splošni obliki, ki je tudi znana kot prva Maxwelllova enačba, je za tok na desni strani enačbe (8.12) potrebno upoštevati vse vrste tokov, ki vplivajo na razvoj magnetnega polja (konduktivni in poljski tok) in je v integralni obliki običajno

zapisana v obliki $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J}_c \cdot d\vec{A} + \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$.

ZVEZA MED B, H IN M

V primeru, da nas zanima gostota magnetnega pretoka pri uporabi feromagnetikov, lahko najprej izračunamo jakost polja (z Amperovim zakonom ali pa z Biot-Savartovim zakonom za H), nato pa iz enačbe (8.8) še gostoto pretoka. Pri tem enačbo (8.8) običajno zapišemo kot

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (8.12)$$

Magnetna poljska jakost ima očitno enako enoto kot vektor magnetizacije, torej A/m in je neposredno povezana s tokovnim vzbujanjem.

PODOBNOST IN RAZLIKA MAGNETNEGA POLJA TRAJNEGA MAGNETA IN TULJAVE

Skicirajmo polje znotraj in v okolici trajnega magneta cilindrične oblike z magnetizacijo v smeri osi. Vpliv magnetizacije upoštevajmo kot vpliv tokovne obloge, torej polje določimo kot polje v okolici ravne tuljave (solenoida).

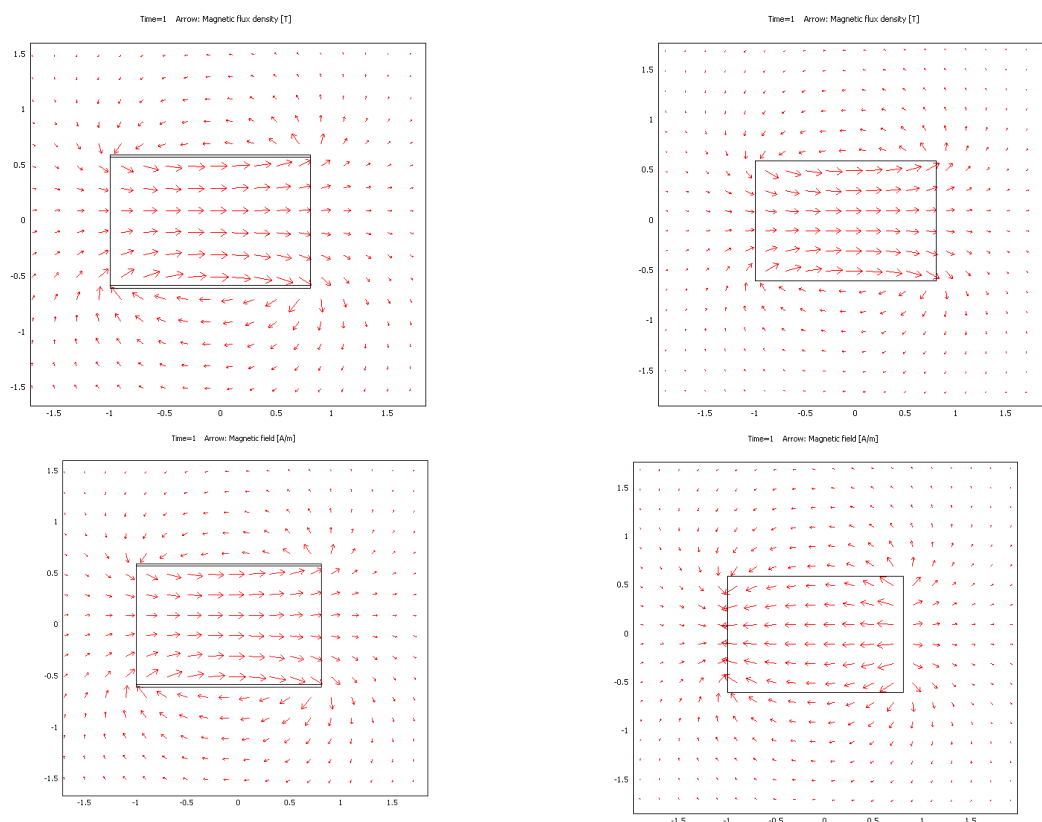
Gostota magnetnega pretoka (magnetno polje) ima enako obliko kot polje solenoida.

Zunaj magneta magnetizacije ni $M = 0$, torej je v skladu z enačbo (8.12) jakost magnetnega polja $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ in ima enako smer kot gostota magnetnega pretoka.

Jakost magnetnega polja znotraj magneta je usmerjena v nasprotni smeri kot je vektor magnetizacije. To sledi iz razširjenega Amperovega zakona, saj ker ni zunanega tokovnega vira

velja $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$, torej mora biti določen del H-ja v smeri poti usmerjen v drugo smer, da bo celotni integral po zaključeni (poljubni) poti enak nič.

Poleg tega, da je H znotraj magneta v nasprotni smeri, kot je M (in tudi B), je tudi smer drugačna kot smer M-a in B-ja, saj mora veljati $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$, pri čemer sta znotraj magneta B in M drugače usmerjena (razen na osi).



SLIKA: Prikaz gostote magnetnega pretoka v okolici tuljave (levo) in trajnega magneta (desno). Trajni magnet ima homogeno magnetizacijo v smeri v desno.

MAGNETNA SUSCEPTIBILNOST IN RELATIVNA PERMEABILNOST

Velikost magnetizacije je odvisna od velikost tokovnega vzburjanja. Običajno velja, da večanje vzburjanja povečuje magnetizacijo, saj se usmerjenost magnetnih dipolov z večanjem vzburjanja vedno bolj orientira v smer vzbujačnega polja. To zvezo opišemo kot

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad ^{10}, \quad (8.13)$$

kjer χ_m imenujemo *magnetna susceptibilnost*, ki je mera za dovzetnost materiala za magnetizacijo pri vzpostavitvi magnetnega polja. Z upoštevanjem te zveze v enačbi (8.12), dobimo

¹⁰ Ta zveza je lahko tudi bolj kompleksna, saj se lahko material različno magnetizira v različnih smereh pri vzpostavitvi magnetnega polja. V takem primeru je potrebno susceptibilnost zapisati kot tenzor (v obliki matrike), kar seveda še dodatno zaplete analizo magnetnih materialov. V tem primeru rečemo, da ima material izotropne lastnosti, sicer pa anizotropne.

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad (8.14)$$

kjer μ_r imenujemo *relativna permeabilnost* in je brez enote. V skladu z enačbo (8.14) določimo μ_r iz zveze med H jem in B jem

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}. \quad (8.15)$$

SLIKA: Linearna in nelinearna B/H karakteristika.

Za določen material torej iz poznanega vzbujanja (H ja) in izmerjenega polja (B ja) določimo relativno permeabilnost. Za feromagnetne materiale se izkaže, da ni linearna in je torej funkcija vzbujanja $\mu_r = \mu_r(H)$. Pa ne le to, izkaže se, da se relativna permeabilnost po izključitvi vzbujanja spreminja drugače, kot pri vključitvi. Tej lastnosti rečemo **histereza** in bistveno vpliva na uporabo magnetnih materialov v elektrotehniki.

ZVEZA MED B IN H

Enačbo (8.14) običajno pišemo kar v obliki

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (8.16)$$

kjer je $\mu = \mu_r \mu_0$.

Analogija z elektrostatiko. Vsekakor je mogoče najti analogijo z elektrostatiko, kjer smo električne lastnosti materialov opisali z električno susceptibilnostjo ali relativno dielektričnostjo ter zvezo med gostoto električnega pretoka in električno poljsko jakostjo $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$. Pri tem velja omeniti, da v smislu osnovnih veličin (tiste, ki so neposredno povezane s pojmom sile) v magnetiki nastopa gostota magnetnega pretoka B , v elektrostatiki pa električna poljska jakost E . Gostota električnega pretoka D in magnetna poljska jakost H pa sta uvedeni predvsem v smislu lažje obravnave električnega in magnetnega polja v snoveh.

PRIMER

V toroidnem feromagnetnem jedru srednje dolžine 12 cm s 150 ovoji in tokom 1,2 A je vzdolž srednje dolžine gostota magnetnega pretoka 1,22 T. Kolikšna je jakost magnetnega polja, magnetizacija, relativna permeabilnost in magnetna susceptibilnost?

Izračun:

$$H = \frac{NI}{l} = 1500 \text{ A/m},$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H \cong 9,69 \cdot 10^5 \text{ A/m},$$

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} \cong 647, \quad \chi = \mu_r - 1 \cong 646$$

MAGNETNA NAPETOST

V enačbi (8.9) nastopa tok pomnožen s številom obojev kot vzbujanje (vir) magnetnega polja. Zato ga pogosto imenujemo tudi *magnetna napetost* $\Theta = NI$ in enačbo (8.9) zapišemo kot

$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Theta$ ali v obratnem vrstnem redu kot

$$\Theta = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}. \quad (8.17)$$

Magnetna napetost je pomemben koncept pri analizi magnetnih sestavov iz feromagnetnih materialov in navitij, ki jih lahko obravnavamo kot magnetna vezja. Tam magnetna napetost predstavlja analogijo z električno napetostjo, le da se je potrebno zavedati, da je to v bistvu vzbujaalni tok pomnožen s številom obojev. Njegova enota je torej A(mpere), pogosto rečemo tudi Amperski oboji.

PRIMER

Določimo magnetno napetost za jedro in vzbujanje iz prejšnjega primera.

Izračun: $\Theta = NI = 180 \text{ Aov}.$

MAGNETNI POTENCIAL¹¹.

Če obstaja magnetna napetost, ali obstaja tudi magnetni potencial? Obstaja, oziroma, lahko ga definiramo, vendar z eno omejitvijo. Za električni potencial je v elektrostatiki veljalo, da je integral električne poljske jakosti po zaključeni poti enak nič, v magnetostatiki pa to ne velja, saj je integral jakosti magnetnega polja po zaključeni poti enak magnetni napetosti, oziroma toku, ki ga zanka oklene. Torej ima smisel definirati magnetni potencial le tedaj, ko ga ne računamo po zaključeni poti. V tem primeru bo magnetna napetost med točkama T_1 in T_2 določena

kot $V_m(T_1) - V_m(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$. Če si v točki T_2 izberemo magnetni potencial enak nič, lahko

magnetni potencial v točki T_1 zapišemo kot

$$V_m(T_1) = \int_{T_1}^{T_2 (V_m=0)} \vec{H} \cdot d\vec{l}. \quad (8.18)$$

Ko bomo obravnavali magnetna vezja bomo torej lahko govorili o tem, da imamo vzdolž zaključene poti po jedru delne padce napetosti, ki so posledica magnetnih upornosti materialov. Ker pa bomo računali po zaključeni poti, bo vsota padcev magnetnih napetosti enaka magnetnim vzbujanjem, določenim s tokovi v navitjih okoli jedra.

MEJNI POGOJI MAGNETNEGA POLJA

Zanima nas, kako se spremeni magnetno polje pri prehodu iz ene snovi v drugo. Ti snovi morata seveda imeti različne magnetne lastnosti, ki jih opišemo z njunima relativnima permeabilnostima. Vzemimo dve snovi (prostora) s permeabilnostima μ_1 in μ_2 in poljema $\vec{B}_1$ in $\vec{B}_2$, ki sta tik ob skupni meji (SKICA). Mejne pogoje lahko določimo z upoštevanjem dveh splošno veljavnih zakonov: o brezizvornosti magnetnega polja (Gaussov zakon za magnetiko) $\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ in o vrtinčnosti magnetnega polja (Amperov zakon)

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

Če si zamislimo mali volumen, ki sega v obe snovi in obravnavamo Gaussov zakon v limiti, ko stiskamo volumen proti mejam obeh snovi, ugotovimo, da se mora fluks skozi mejno površino ohranjati, oziroma, da mora veljati $B_{n2} \cdot A = B_{n1} \cdot A$, kjer sta

¹¹ Bolj natančno rečemo magnetnemu potencialu, ki ga opisuje enačba (8.18) **skalarni magnetni potencial**, saj poznamo tudi **vektorski magnetni potencial**. Že ime samo pove, da je slednji definiran kot vektor (običajno zapisan s simbolom $\vec{A}$) in ima v teoriji elektromagnetike pomembno vlogo, ga pa v okviru tega predmeta zaradi dodatne zahtevnosti ne obravnavamo.

B_{n1} in B_{n2} komponenti polja na meji snovi z indeksom 1 in 2, ki sta v smeri (iste) normale na površino. Torej mora veljati

$$B_{n2} = B_{n1}. \quad (8.19)$$

V vektorski obliki pa enačbo (8.19) zapišemo kot $\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$.

SLIKA: Skica dveh snovi in meje, fluks skozi mali volumen pri stiskanju v smeri meje. stranski fluksi se izničijo, normalni se ohrani.

Ugotovili smo torej, da morata normalni komponenti gostote magnetnega pretoka ostati nespremenjeni. Ali velja to tudi za tangencialni komponenti? To obravnavajmo najprej v primeru, ko na meji ni površinskih tokov. V tem primeru si zamislimo pravokotno zankico, ki vsebuje polje obeh snovi. Upoštevamo Amperov zakon, ko zanko stiskamo v smeri meje. Magnetne napetosti na stranicah s procesom stiskanja zanke (v limiti) izzvenijo, vzdolžne pa se izenačijo, oziroma $H_{t2} \cdot l - H_{t1} \cdot l = 0$, kar tudi pomeni, da se ohranjata tangencialni komponenti jakosti polja:

$$H_{t2} = H_{t1}. \quad (8.20)$$

SLIKA: Zanka, ki oklepa tako snov 1 kot 2 s smerjo integracije, tangencialnega H-ja in limitiranje v smeri meje.

Kako torej dobimo še tangencialni komponenti gostote magnetnega pretoka? Preprosto, z upoštevanjem $H = \frac{B}{\mu}$ (iz enačbe (8.14)) velja

$$\frac{B_{t2}}{\mu_2} = \frac{B_{t1}}{\mu_1}. \quad (8.21)$$

Če sedaj upoštevamo še možnost, da po površini med snovema teče površinski tok (tokovna obloga označena s simbolom K), moremo ugotoviti, da mora biti razlika tangencialnih magnetnih jakosti ravno enaka gostoti toka po površini (tokovni oblogi K): $H_{t2} \cdot l - H_{t1} \cdot l = \pm K$. Gre za K , ki je pravokoten na smer tangencialnih komponent H -ja, pa še smer (predznak) K -ja je pomembna. V tem smislu je ta pogoj najboljše zapisati kar z uporabo vektorskega produkta kot

$$\vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}, \quad (8.22)$$

pri čemer je pomembna tudi smer normale, ki je definirana od snovi z indeksom 1 v snov z indeksom 2.

PRIMER: Izničuje vpliv magnetnega polja s tokovno oblogo.

V snovi z indeksom 1 je tangencialna komponenta polja 5 A/m. Določimo velikost in smer tokovne obloge, ki bi v snovi z indeksom 2 izničila vpliv magnetnega polja snovi 1. Ali se ob vzpostavitvi tokovne obloge spremeni tudi polje v snovi z indeksom 1?

Izračun: Brez upoštevanja tokovne obloge bi bila v skladu z mejnim pogojem $H_{t2} = H_{t1}$ jakost polja $H_{t2} = H_{t1} = 5$ A/m in enako usmerjena kot H_{t1} . Vzpostaviti moramo tako veliko in prečno usmerjeno tokovno oblogo, ki bo izničila jakost 5 A/m, torej potrebujemo v skladu z enačbo za polje v okolici tokovne obloge (tokrat za H in ne za B) $H = \frac{K}{2}$ velikost K ja 10 A/m.

Tokovno oblogo usmerimo tako, da se v snovi z indeksom 2 polji izničila, v snovi z indeksom 1 pa se seštevata. Končni rezultat je torej $H_{t1} = 0$, $H_{t2} = 10$ A/m. Skicirajmo smer in velikost tokovne obloge.

SLIKA: Levo: polje brez tokovne obloge; desno: polje z dodano tokovno oblogo.

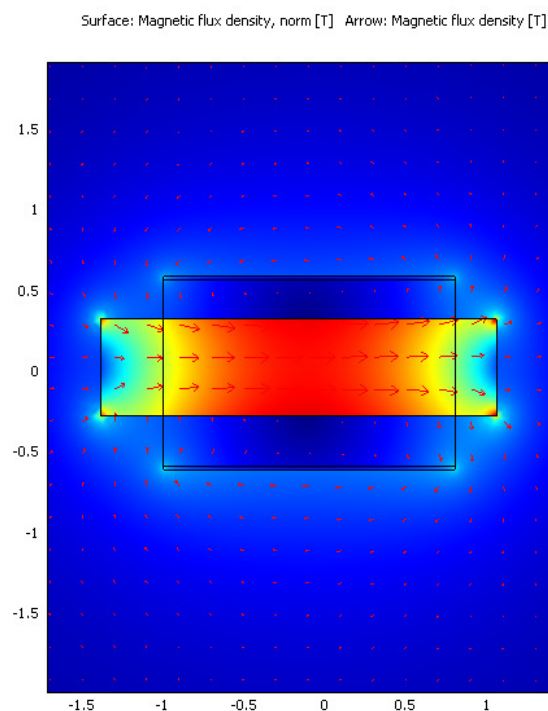
PRIMER: »Lomljenje« polja ob prehodu dveh snovi z različnimi magnetnimi lastnostmi

V zraku je homogeno polje 1,5 mT, ki je usmerjeno pod kotom 30° na normalo na površino feromagnetika z relativno permeabilnostjo 1200. Kolikšna je gostota magnetnega pretoka v feromagnetiku in pod kakšnim kotom je glede na normalo? NARIŠI SLIKO.

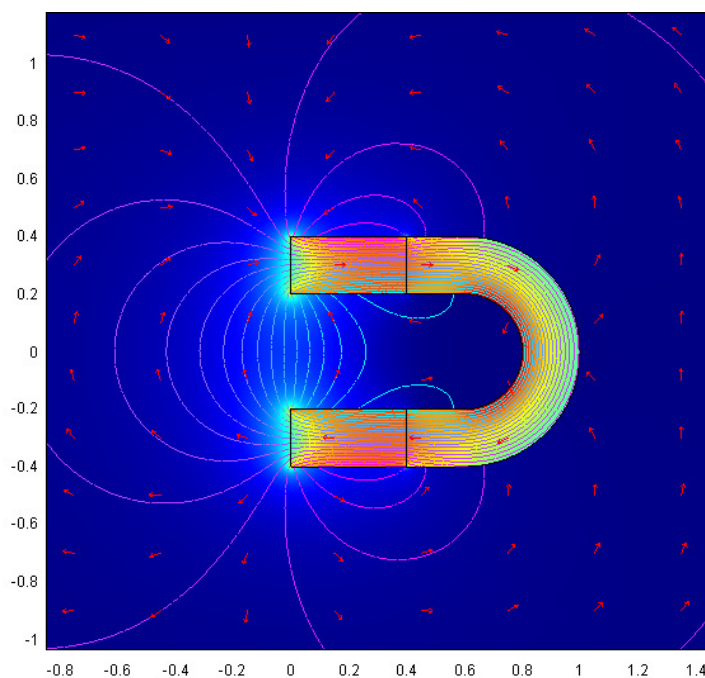
**SLIKA:**

Izračun: Normalna komponenta polja se ohranja in je torej enaka (glej (8.19)) $B_{n2} = B_{n1} = B_1 \cdot \cos(30^\circ) = 1,3 \text{ mT}$. Tangencialna komponenta pa se »ojača« za razmerje permeabilnosti (glej (8.21)): $B_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot B_{t1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot B_1 \cdot \sin(30^\circ) = 0,9 \text{ T}$. V feromagnetiku je torej polje precej »ojačano« glede na zunanost. Normalna komponenta polja ne prispeva skoraj nič k skupnemu polju v notranjosti: $B_2 = \sqrt{B_{n2}^2 + B_{t2}^2} = 0,9 \text{ T}$. Zanimivo je pogledati še smer polja v feromagnetiku. Glede na normalo bo ta kot enak $\alpha = \text{Arc tan} \left(\frac{B_{t2}}{B_{n2}} \right) = 98,9^\circ$,

torej skoraj enak 90° . To je pomemben rezultat, saj kaže, da čim magnetno polje vstopi v feromagnetik, se njegova pot popolnoma spremeni in usmeri praktično vzdolž njegove oblike. To je tudi en od načinov zmanjševanja vpliva magnetnega polja, čemur strokovno rečemo zastiranje ali zaslanjanje. Več: <http://ev.fe.uni-lj.si/1-2-2009/Bulic2.pdf> (strokovni članek kolege Edija Buličav reviji Elektrotehniški Vestnik), <http://www.tipmagazine.com/tip/INPHFA/vol-7/iss-5/p24.pdf> (članek iz revije), <http://www.ferriteabsorber.com/index.php> (prospekt Slovenskega podjetja Kolektor), <http://www.coolmagnetman.com/magshield.htm> (odlična spletna stran iz magnetike) ali



SLIKA: Magnetno polje v okolici tuljave (puščice in barve) z vloženim feromagnetnim materialom. Polje znotraj feromagnetika se izrazito poveča v skladu z mejnimi pogoji. Predvsem se poveča tangencialna komponenta (v razmerju permeabilnosti), kar ima tudi za posledico prevladujočo usmerjenost fluksa v smeri vzdolž feromagnetika. (simulacija s programom Comsol Multiphysics)



SLIKA: Polje podkvastega magneta. Ravna dela imata trajno magnetizacijo, ukrivljen del je iz feromagnetnega materiala. (simulacija s programom Comsol Multiphysics)

POVZETEK:

1. Magnetne lastnosti snovi so posledica rotacije elektronov okoli jedra in spina elektronov. Te rotacije lahko opišemo kot majhne tokovne zanke, te pa z magnetnim dipolnim momentom. Na te deluje magnetna sila oz. navor, ki jih poskuša zavrteti v smer polja.
2. Vpliv velikega števila usmerjenih magnetnih dipolnih momentov na celotno magnetno polje modeliramo z vpeljavo vektorja magnetizacije, ki predstavlja (volumsko) gostoto magnetnih dipolnih momentov.
3. Magnetno polje se poveča, če vanj vnesemo feromagnetni material, kar je posledica usmerjanja magnetnih dipolnih momentov v feromagnetiku v smer polja. To povečanje polja zapis Amperovega zakona v obliki $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$ ne predvidi, ker ne upošteva dodatnih tokov magnetizacije. V ta namen smo modificirali Amperov zakon v obliko $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$, kjer je H magnetna poljska jakost (v A/m). Bolj splošen zapis je $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J}_c \cdot d\vec{A}$, kjer desna stran predstavlja zaobjeti konduktivni (vzbujalni) tok. Prednost tega zapisa Amperovega zakona je v tem, da je H neodvisen od prisotnosti magnetnih materialov.
4. Zveza med B in H je $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$. Med vzbujanjem H in magnetizacijo M vpeljemo zvezo $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, kjer je χ_m magnetna susceptibilnost, ki je snovna lastnost. Sledi zveza $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$, kjer μ_r imenujemo relativna permeabilnost. Za feromagnetike je zveza med B in H nelinearna.
5. Analogno električni napetosti lahko definiramo magnetno napetost, ki pa po zaključeni poti ni enaka nič pač pa zaobjetemu vzbujalnemu toku $\mathcal{O} = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$. Enota je torej A(mpere), včasih zapišemo tudi kot »amperske ovoje« Aov. O magnetnem potencialu lahko govorimo le v primeru nezaključene poti.
6. Na meji dveh magnetnih snovi se ohranja normalna komponenta gostote magnetnega pretoka $B_{n2} = B_{n1}$ in v primeru, da na meji ni površinskega toka tudi tangencialna komponenta magnetne poljske jakosti $H_{t2} = H_{t1}$. V primeru, ko je na površini tok (ki ga opišemo s tokovno oblogo K), je razlika tangencialnih komponent enaka temu toku, ki pa je usmerjen prečno na tangencialno komponento.

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:

Mejni pogoji:

1. kolokvij, 13. april 2006

1. kolokvij 19.04.2001

Izpit, 28. avgust 2006

** DODATNO: MAGNETNI NABOJ¹²

Zgodovinsko gledano je bil za razlago trajnih magnetov, še bolj pa za izračun polja, dolgo v uporabi koncept magnetnega naboja, pač analogno električnemu naboju. Kljub temu, da se zavedamo, da magnetnega naboja v naravi ni, ga lahko definiramo v smislu analogije z električnim nabojem. Obravnavamo ga s površinsko gostoto magnetnega naboja σ_m , ki je lahko pozitiven (na N strani magnetu) ali negativen (na S strani). Celotni magnetni naboj na N površini je tako $Q_m = \sigma_m \cdot A$. Če ta naboj primerjamo z vektorjem magnetizacije, ugotovimo, da velja $\sigma_m = -M_\perp$, kjer je $M_\perp$ komponenta vektorja magnetizacije, ki je pravokotna na površino (normalna komponenta), torej $\sigma_m = \vec{e}_n \cdot \vec{M}$. Magnetni naboj »nastopa« torej le na mestih, kjer je vektor magnetizacije pravokoten na površino. Analogija z elektrostatiko je neposredna: Električna sila na električni naboj je $\vec{F}_e = Q_e \cdot \vec{E}$, magnetna sila na »magnetni naboj« pa je $\vec{F}_m = Q_m \cdot \vec{B}$. Silo med dvema dolgima paličastima magnetoma razmaknjenima za razdaljo r (ki je dosti manjši od dolžine) lahko v tem smislu ocenimo kar kot silo med dvema »točkastima« magnetnima nabojema (če upoštevamo le bližnja

»pola«):
$$F_m = \frac{\mu_0 Q_m^2}{4\pi r^2}.$$

SLIKA: Vpliv magnetizacije lahko upoštevamo z vpeljavo (fiktivnega) magnetnega naboja, na N strani magnetu s pozitivno gostoto magnetnega naboja σ_m , na S strani pa z negativno.

Ker smo uporabili analogijo z električnim nabojem, lahko uporabimo tudi izraze, ki smo jih izpeljali za električno polje v okolici naelektrenih teles za določitev magnetnega polja v okolici magnetiziranih teles. Na primer, magnetno polje tik nad tanko namagnetneno ploščo lahko določimo analogno

električni poljski jakosti naelektrene ravnine $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ kot $B = \mu_0 \frac{\sigma_m}{2}$

¹² Kljub temu, da je koncept magnetnega naboja napačen v smislu njenega neobstoja, se v določenih primerih še vedno uporablja (tako v študijski literaturi (npr. W. Saslow: Electricity, magnetism and light, Thomson Learning 2002), kot v praksi).

PRIMER

Ocenimo magnetno polje tik nad površino trajnega magneta iz Alnica (AlNiCo) dolžine 15 cm, pravokotnega preseka $A = 1 \text{ cm}^2$, z magnetizacijo vzdolž daljše osi $M = 8,5 \cdot 10^5 \text{ A/m}$.

Izračun: Največji prispevek lahko pričakujemo od prispevka magnetnega naboja na površini, kjer računamo polje. Tu lahko zaradi velike površine glede na točko merjenja (tik nad površino) uporabimo enačbo za namagnetneno ploščo, torej $B = \mu_0 \frac{\sigma_m}{2}$, kjer je $\sigma_m = M$ in je torej

$B = \mu_0 \frac{M}{2} \cong 0,53 \text{ T}$. Drugi »pol« je dosti bolj oddaljen in njegov prispevek lahko ocenimo kot prispevek »točkastega magnetnega naboja«. Ta prispevek bo torej velik $B = \frac{\mu_0 Q_m}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 MA}{4\pi r^2} \cong 377 \text{ }\mu\text{T}$. To vrednost je potrebno odšteti od že izračunanega, vidimo pa, da je dosti manjši in ga lahko tudi zanemarimo. Naj ponovno povemo, da magnetnih nabojev NI, lahko pa ta koncept izkoristimo za izračun magnetnega polja v okolici magnetov ali sile na magnetne.

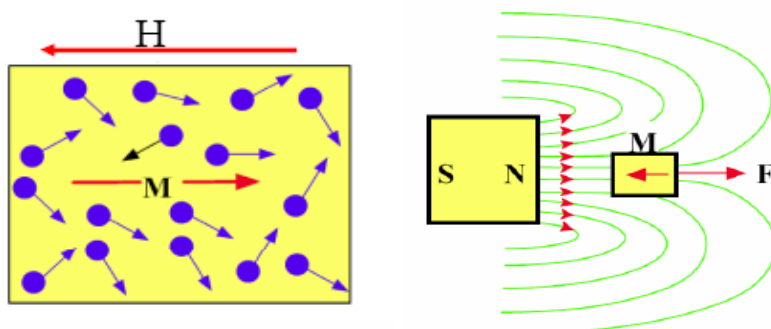
9. MAGNETNI MATERIALI

— Vsebina poglavja:

- magnetni materiali (diamagnetiki, paramagnetiki, antiferimagnetiki, ferimagnetiki, superparamagnetiki, feromagnetiki)
- krivulja magnetenja, histerezna zanka, relativna permeabilnost, trdo in mehkomagnetni materiali, razmagnetenje

DIAMAGNETIKI

izkazujejo izredno šibke magnetne lastnosti. Magnetni dipolni momenti kot posledica kroženja elektronov in njihovega spina se v taki snovi kompenzirajo. Ker je vpliv zunanje polja na spin elektronov nekoliko močnejši kot na orbitalni moment, se pod vplivom zunanje magnetnega polja magnetno polje v notranjosti celo nekoliko zmanjša. Diamagnetiki imajo negativno magnetno susceptibilnost oziroma relativno permeabilnost, ki je malo manjša od 1. Primeri takih snovi so Cu (relativna permeabilnost 0,999983), Au, Ag, Hg, H₂O (0,999991), itd. Če diamagnetik postavimo v bližino močnega trajnega magneta, bo med njima odbojna sila (neodvisno od pola magneta). To je odkril že Michael Faraday leta 1846 na primeru bizmuta (0,99983).

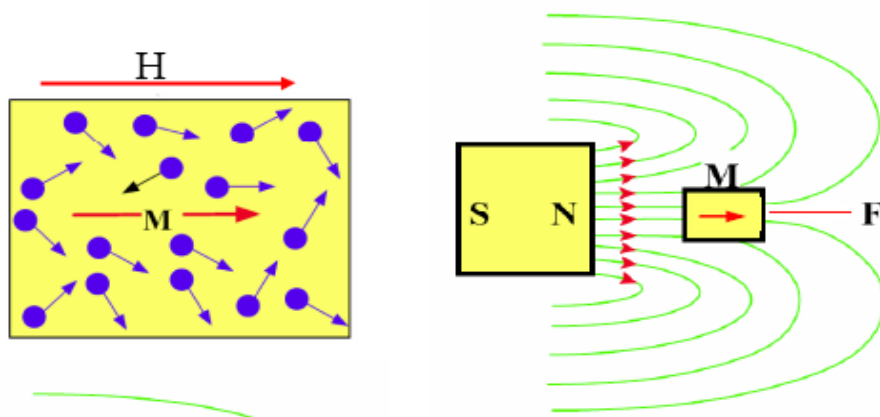


SLIKA: Magnetizacija diamagnetika kaže v nasprotni smeri kot vzbujanje (H). Diamagnetik se odbija od trajnega magneta: sila je v smeri manjše gostote polja.

PARAMAGNETIKI

so materiali, v katerih ni ravnotežja med magnetnimi dipolnimi momenti zaradi kroženja elektronov in spina. Vsak atom izkazuje rezultančni magnetni dipolni moment, ki pa se zaradi neurejenosti strukture kompenzirajo. Se pa s postavitvijo takega materiala v magnetno polje magnetno polje v notranjosti nekoliko poveča. Magnetizacija v paraelektriku je v smeri vzbujačnega polja. Take snovi so npr. aluminij (1,00002), platina, mangan, kisik, zrak (1,0000004).

V smislu upoštevanja magnetnih lastnosti dia- in paramagnetikov bi lahko zaključili, da je njihova susceptibilnost v praksi najpogostelje zanemarljiva.

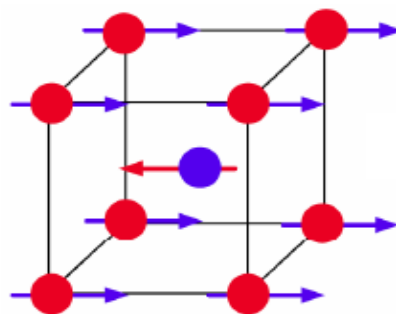


SLIKA: Magnetizacija kaže v smeri vzbujačnega polja. Sila na paramagnetik v polju je v smeri večje gostote polja. Trajni magnet in paramagnetik se (šibko) privlačita.

SLIKA: $B(H)$ magnetilna krivulja za vakuum, diamagnetike in paramagnetike.

ANTIFEROMAGNETIKI

so snovi, v katerih se magnetni momenti sosednjih atomov usmerijo v nasprotni smeri, zato je skupen magnetni moment teh snovi pri vzpostavitvi zunanjega polja enak nič. Pogosto vsebujejo tranzicijske kovine in so običajno v obliki oksidov (NiO). Igrajo pomembno vlogo pri pojavu velike magnetne upornosti (GMR – Giant magnetoResistance),

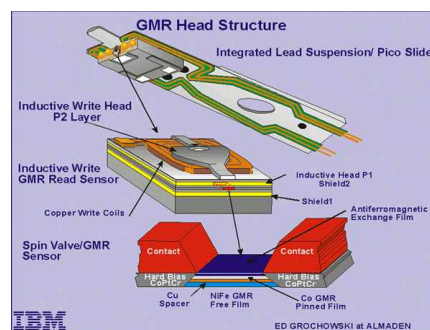


kjer se materialu močno spremeni upornost, če ga izpostavimo magnetnemu polju. Senzorje magnetnega polja, ki izkoriščajo efekt GMR najdemo v bralnih glavah računalniških diskov (glej sliko desno iz strani <http://www.pcguides.com/ref/hdd/op/heads/techGMR-c.html>).

Več

npr.

<http://www.hitachigst.com/hdd/technolo/gmr/gmr.htm> (spletni članek skupine Hitachi).



FERIMAGNETIKI

imajo tudi nasprotno usmerjene magnetne momente, vendar njihova vrednost ni enaka nič. Še vedno pa ni ta efekt tako izrazit kot pri feromagnetikih. So pa določeni ferimagnetiki, ki jih imenujemo **feriti** izredno pomembni v elektrotehniki, saj je v nasprotju z feromagnetiki njihova električna prevodnost zelo majhna, kar s pridom izkoriščamo tam, kjer bi sicer imeli velike izgube zaradi ohmskih tokov (vrtinčni toki) pri višjih frekvencah. Ferimagnetike srečamo tudi v naravi, kot magnetit (železov oksid Fe_3O_4). Pomemben proizvajalec feritnih jeder je Kolektor (nekoč Iskra Feriti). Članek o feritih <http://ctklj.ctlk.uni-lj.si/kovine/izvodi/MIT0312/znidarsic.pdf>.

SUPERPARAMAGNETIKI

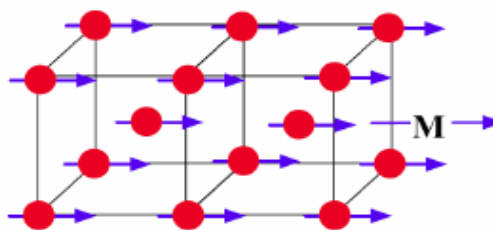
so feromagnetiki, ki so vmešani v dielektričen material. Imajo podobne lastnosti kot paramagnetiki le da še nekoliko bolj izrazite. Značilno za njih je tudi to, da tako kot paramagnetiki nimajo histereznih lastnosti.

Uporabljajo se npr. za audio in video trakove. Zanimiv primer superparamagnetika so tudi **ferofluidi**. To so koloidne raztopine z feromagnetnimi ali ferimagnetnimi delci nanometrskih dimenzij (npr. 10 nm). Majhna velikost delcev je bistvena za značilen specifičen način »obnašanja«, saj so brez prisotnosti polja kot tekočina, ob prisotnosti magnetnega polja pa oblikujejo nenavadne strukture s tipičnimi ježkastimi špicami (glej sliko). Nekaj videov je na strani <http://www.labgrab.com/users/labgrab/blog/ferrofluid-friday>. Več npr. v ŽIT (revija Življenje in tehnika, str. 12, 2009), <http://www.mrsec.wisc.edu/Edetc/background/ferrofluid/index.html> (spletna stran),



FEROMAGNETIKI

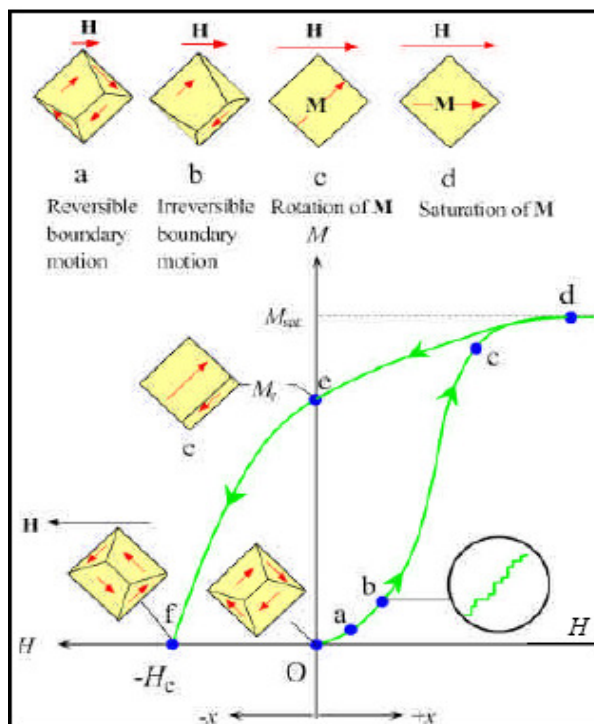
V feromagnetikih ima vsak atom relativno velik magnetni dipolni moment. Le ta je posledica neuravnoteženih magnetnih momentov spinov elektronov, kar se da prikazati z uporabo spoznanj kvantne fizike. Tipični predstavnik feromagnetikov so železo (5000), nikel (600) in kobalt (250), ki so v periodičnem sistemu na mestih 26, 27 in 28. Poleg izraženih magnetnih dipolnih momentov na nivoju atoma, se ti atomi v kristalni strukturi grupirajo v območja, ki jim pravimo *magnetne domene*, znotraj katerih so momenti orientirani, navzven pa so domene neurejene in zato tudi magnetno polje ni izrazito. Lahko pa se pod vplivom zunanjega polja magnetni momenti v domenah usmerijo v smer zunanjega polja. Proces orientiranja se odvija po fazah, tako, da se najprej nekoliko povečajo domene, katerih stene tvorijo majhen kot glede na zunanje polje. Pri taki reorientaciji je polje reverzibilno: če izklopimo zunanje polje, se domene vrnejo v prvoten položaj. Če se zunanje polje še dodatno poveča, se začnejo obračati celotne domene. Če potem izklopimo zunanje polje, se domene ne vrnejo več v začetno stanje, temveč ostanejo delno orientirane. Če pa zunanje polje še povečujemo, prihaja do nasičenja, ko so praktično že vsi magnetni dipolni momenti domen usmerjeni v smer polja. Povečevanje polja s strani feromagnetika ni več mogoče. Gostota magnetnega pretoka sicer še naprej narašča vendar le kot posledica povečevanja vzbujanja. Relativna permeabilnost se ob približevanju nasičenja zmanjšuje in približuje vrednosti 1 (feromagnetik se obnaša kot zrak).



SLIKA: Primer zgradbe feromagnetnega materiala z domenami in magnetnimi dipolnimi momenti. Prikaz usmerjanja magnetnih dipolov pred magnetizacijo in ob nasičenju.

KRIVULJA MAGNETENJA

Zanima nas, kako se magnetizacija spreminja z večanjem vzbujaalne jakosti magnetnega polja (H). Namesto opazovanja $M(B)$, je bolj običajno, da zunanje vzbujanje opišemo z jakostjo magnetnega polja H , rezultat magnetenja pa opazujemo z naraščanjem gostote magnetnega pretoka B (ali pa magnetizacije). Dobimo torej $B(H)$ krivuljo, ki pa pri feromagnetikih ni linearna. Na začetku je naklon manjši, potem največji in pri velikih vzbujanjih zopet manjši (nasičenje). Začetni krivulji magnetenja rečemo *deviška krivulja*, ker se ob izklopu zunanjega vzbujanja gostota pretoka ne vrne na nič, pač pa na neko vrednost, ki je različna od nič.



SLIKA: Magnetilna krivulja s tipičnimi izrazi: deviška krivulja, nasičenje. Meja reverzibilnega in ireverzibilnega procesa. Prikaz zveze $B(H)$ v vakuumu.

RELATIVNE PERMEABILNOST (STATIČNA, DINAMIČNA, INKREMENTALNA)

Z upoštevanjem zveze med B jem in H jem je relativna permeabilnost definirana kot

$$\mu_{r,s} = \frac{B}{\mu_0 H}. \quad (9.1)$$

To permeabilnost imenujemo tudi statična in je primerna za obravnavo v primerih, ko se magnetilni tok ne spreminja ali pa je take oblike, da jo lahko dobro aproksimiramo s premico. Tej permeabilnosti rečemo tudi *statična*, saj ni definiran z naklonom krivulje pač pa z razmerjem med B in H . Zadnji odsek predstavlja nasičenje, kjer relativna permeabilnost postane enaka 1. Pri feromagnetikih so

vrednosti relativne permeabilnosti nekaj tisoč do nekaj sto tisoč. Vrednost statične relativne permeabilnosti je odvisna od točke računanja in bo zaradi nelinearne magnetilne krivulje tudi sama nelinearna. V smislu lažjega računanja jo pogosto poenostavimo tako, da lineariziramo magnetilno krivuljo. Tako postane statična relativna permeabilnost konstanta. V nasičenju pa ima relativna statična permeabilnost vrednost 1.

V določenih primerih (npr. pri vzbujujanju z majhnimi izmeničnimi signali) je bolj primerno upoštevati le del krivulje magnetenja pri čemer je bolj smiselno upoštevati naklon na krivuljo v določeni

(delovni) točki. Tako dobimo *dinamično relativno permeabilnost*, ki je definirana kot $\mu_{r,d} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$.

SLIKA: Prikaz statične relativne permeabilnosti kot razmerje med B in $\mu_0 H$ v točki. Krivulja ima določen maksimum in pade v nasičenju na vrednost 1.

Če imamo opravka z izmeničnim signalom, ki je superponiran na enosmernega, je običajno bolj primerno uporabiti t.i. inkrementalno relativno permeabilnost, ki ni definirana z odvodom krivulje

pač pa z diferencami v lokalni histerezni zanki $\mu_{r,i} = \frac{\Delta B}{\mu_0 \cdot \Delta H}$. Ta je manjša od dinamične permeabilnosti.

HISTEREZNA ZANKA

Do določenega Bja je proces magnetenja še reverzibilen, ko pa je ta vrednost presežena, se pri zmanjševanju vzbujujanja B počasneje zmanjšuje kot pri povečevanju. Dobimo histrezo zanko. Ko je vzbujujanje izklopljeno, ostane v materialu določeno polje, ki ga imenujemo remanenčno in označimo z Br. Če smer vzbujujanja obrnemo, se zmanjšuje polje in pri določeni vrednosti vzbujujanja pade na nič. Tej točki vzbujujanja rečemo koercitivna jakost polja in jo označimo s Hc. Pri še povečanjem vzbujujanju

pridemo do nasičenja v negativni smeri. Vzbujanje zopet zmanjšujemo do nič in nato do nasičenja, kjer se začetna in končna krivulja stakneta.

SLIKA: Histerezna krivulja s prikazom *remanenčne gostote magnetnega pretoka (B_r)*, ki ostane v materialu po izklopu vzbujanja in *koercitivne jakost polja (H_c)*, kjer je gostota pretoka enaka nič.

MEHKOMAGNETNI IN TRDOMAGNETNI MATERIALI

Če želimo material uporabiti kot trajni magnet, je primerno uporabiti material, ki ima veliko vrednost remanenčne gostote polja. Poleg tega je pomembno tudi, da ga ni lahko razmagnetiti, torej mora imeti veliko tudi koercitivno jakost polja. Najboljši materiali za trajni magnet imajo veliko vrednost produkta H_c in B_r . Takim materialom rečemo tudi *trdomagnetni*.

Mehkomagnetni materiali imajo ozko histerezno zanko in veliko permeabilnost. Tipičen mehkomagnetni material je čisto železo. Zelo ozke histerezne zanke imajo tudi feritni materiali.

SLIKA: Primerjava med histerezno zanko mehkomagnetnega materiala in trdomagnetnega materiala.

RAZMAGNETENJE

Običajni način razmagnetjenja je z zmanjševanjem amplitude izmeničnega magnetnega polja (tokovnega vzbujanja), pri čemer pa moramo začeti razmagnetenje z amplitudo, pri kateri je material v nasičenju. Določeni materiali so zelo občutljivi na mehanske udarce (so krhki), ki tudi lahko delno spremenijo magnetne lastnosti. Poleg tega vsak material izgubi magnetne lastnosti pri dovolj visoki temperaturi, ki jo imenujemo *Curiejeva temperatura*. Pri tej temperaturi snov zaradi povečanega termičnega gibanja izgubi magnetne lastnosti. Pri železu je $T_c = 770^\circ \text{C}$.

10. ANALIZA MAGNETNIH STRUKTUR

Vsebina poglavja:

- Diskretizacija Amperovega zakona s predpostavko homogenosti polja po preseku jedra in računanem po sredini jedra (srednja dolžina gostotnice).
- Diskretizacija zakona brezizvornosti magnetnega polja.
- Vpeljava izraza magnetne upornosti.
- Primeri analize magnetnih struktur:
 - Magnetne lastnosti podane s konstantno permeabilnostjo
 - Magnetne lastnosti podane z magnetilno krivuljo ali matematično formula
 - Obravnava trajnih magnetov
 - Analiza magnetnih struktur kot magnetna vezja

Potrebna znanja iz matematike: grafičen izris funkcij, odčitavanje iz grafov, reševanje sistema enačb, metode analize električnih vezij.

Spoznali smo obliko Amperovega zakona izraženo z jakostjo magnetnega polja H : $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Theta$.

Ugotovili smo, da je ta oblika zapisa posebno primerna za obravnavo polja v snoveh z izraženimi magnetnimi lastnostmi (npr. feromagnetiki). Za analizo magnetnih struktur bomo uporabili Amperov zakon, ki pa ga bomo nekoliko poenostavili. Namesto v integralni obliki ga zapišemo kot vsoto posameznih padcev magnetne napetosti. Tako dobimo obliko

$$\sum_{i=1}^N H_i \cdot l_i = \Theta, \quad (10.1)$$

kjer leva stran enačbe predstavlja padce magnetne napetosti na posameznih odsekih po zaključeni magnetni poti, desna stran enačbe pa je magnetna napetost, ki je vsota tokovnih vzburjanj $\Theta = \sum_i \pm N_i I_i$.

Poenostavitev, ki smo jo naredili je, da smo predpostavili homogeno polje po preseku jedra in to, da računamo razdalje l_i po srednji dolžini gostotnice (po sredini jedra).

Poleg zgornjega zapisa, ki spominja na Kirchhoffov zakon o vsoti napetosti po zaključeni poti, potrebujemo še povezavo med gostotami pretoka v sosednjih odsekih poti. To zvezo dobimo iz zakona o brezizvornosti magnetnega polja ($\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$), ki ga zopet zapišemo v diskretni obliki

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i = 0, \quad (10.2)$$

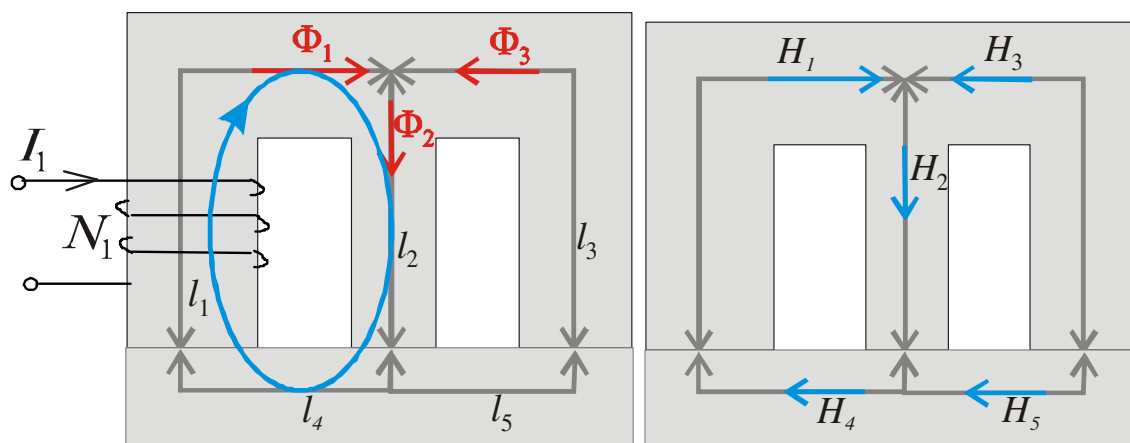
kjer je N število odcepov.

Potrebujemo še povezavo med jakostjo polja in fluksom. Zveza med gostoto magnetnega pretoka in jakostjo polja je $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}$, torej je fluks ob že povedani predpostavljeni homogenosti polja vzdolž gostotnice in po preseku jedra

$$\Phi = BA = \mu HA. \quad (10.3)$$

To so enačbe, ki jih potrebujemo za analizo magnetnih struktur. Najprej si pogledjmo splošen primer analize, nato pa še konkretne primere.

POSTOPEK RAČUNANJA MAGNETNIH STRUKTUR



SLIKA: Prikaz srednjih dolžin gostotnic ter vsote fluksov v jedru E oblike.

1.

Za konkretno jedro na gornji sliki (poznamo srednje dolžine poti l_1 do l_5 , preseke A_1 do A_5 in tokovno vzbujanje $N_1 I_1$) lahko zapišemo na osnovi enačbe (10.1):

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_4 l_4 = N_1 I_1 \quad \text{za (modro)zanko, ki objame prva dva stebra}$$

$$H_2 l_2 - H_5 l_5 + H_3 l_3 = 0 \quad \text{za zanko (ni narisana), ki objame srednji in desni steber}$$

$$\text{Pa tudi } H_1 l_1 - H_3 l_3 + H_5 l_5 + H_4 l_4 = N_1 I_1 \quad \text{za zanko, ki objame prvi in tretji steber.}$$

Nekaj opazk: Kot je razvidno je potrebno paziti na predznak produkta HI , ki je odvisen od smeri integracije (seštevanja magnetnih padcev napetosti) in smeri jakosti polja. Smer jakosti polja si lahko poljubno izmerimo, je pa s tem določena smer B ja in fluksa. Nadalje ugotovimo, da če odštejemo drugo enačbo od prve, dobimo tretjo enačbo. Torej so enačbe med sabo odvisne oziroma sta le dve od treh neodvisne. Enako smo ugotavljali tudi pri enosmernih (uporovnih) vezjih.

2.

Z uporabo enačbe (10.2) lahko zapišemo

$$\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

To enačbo lahko zapišemo kot $B_1 A_1 - B_2 A_2 + B_3 A_3 = 0$ in dalje $\mu_1 H_1 A_1 - \mu_2 H_2 A_2 + \mu_3 H_3 A_3 = 0$.

3. Ker sta fluksa Φ_1 in Φ_4 enaka, velja $\mu_1 H_1 A_1 = \mu_4 H_4 A_4$. Enako velja za fluksa Φ_5 in Φ_3 , le da sta glede na smeri Hjev nasprotnega predznaka. Zato pišemo $\mu_5 H_5 A_5 = \mu_3 H_3 A_3$.

S postopkom, ki bi bil podoben tudi za drugačne strukture, smo dobili sistem petih enačb (v okvirčkih) za pet neznakov (jakosti polj v stebrih).

PRIMERI IZRAČUNOV

PRIMER 1: Navitje na feromagnetnem jedru s konstantno permeabilnostjo brez zračne reže

Na feromagnetnem jedru pravokotnega preseka 1 cm^2 s sredno dolžino gostotnice 24 cm je navitje s tokom $1,2 \text{ A}$ in 150 ovoji. Relativna permeabilnost feromagnetika je 647 . Določite gostoto magnetnega pretoka, fluks v jedru in induktivnost navitja. (SLIKA)

Izračun: je preprost, ker imamo le eno »zanko«, za katero velja:

$$NI = Hl \Rightarrow H = 750 \text{ A/m}$$

$$B = \mu_r \mu_0 H = 0,6 \text{ T}$$

$$\Phi = BA = 6 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

$$L = \frac{N\Phi}{I} = 7,5 \text{ mH}.$$

POZOR: V izračunu izgleda, kot da je L odvisen od fluksa in toka. V resnici temu ni tako, saj velja

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{NBA}{I} = \frac{N\mu_r \mu_0 HA}{I} = \frac{N\mu_r \mu_0 \frac{NI}{l} A}{I} = N^2 \frac{\mu_r \mu_0 A}{l}.$$
 Induktivnost je odvisna od kvadrata ovojev (se splača navijati), relativne permeabilnosti (se splača vstaviti jedro), preseka in dolžine.

PRIMER 2: Navitje na jedru iz feromagnetika s konstantno permeabilnostjo in z zračno režo

Vzemimo enako jedro kot v primeru 1, pri čemer naj ima jedro še 1 mm široko zračno režo. Privzemimo, da v zračni reži ni stresanja polja (enako homogeno kot v jedru). Kolikšno polje dobimo v zračni reži in feromagnetiku pri enakem vzbujujanju ter kolikšna je induktivnost navijta? (SLIKA)

Izračun: Vsota vseh padcev magnetnih napetosti po zaključeni dolžini magnetne poti mora biti

$$\text{enaka magnetnemu vzbujujanju } \sum_{i=1}^N H_i \cdot l_i = \Theta.$$

Imamo dva padca magnetnih napetosti: eno v feromagnetiku in drugo v zračni reži. Predpostavili bomo, da je polje v feromagnetiku (index m) homogeno po prerezu. Računamo vsoto padcev magnetne napetosti po srednji dolžini magnetne poti: $H_m \cdot l_m + H_{zr} \cdot l_{zr} = NI$. Sedaj Hje izrazimo z Bji, pri čemer je potrebno upoštevati različne relativne permeabilnosti (v zraku le μ_0):

$$\frac{B_m}{\mu_m \mu_0} \cdot l_m + \frac{B_{zr}}{\mu_0} \cdot l_{zr} = NI \quad (10.4)$$

Da dobimo zvezo med poljem v feromagnetiku in zračni reži uporabimo enačbo (10.2) iz katere sledi, da mora biti fluks skozi jedro enak fluksu skozi zračno režo:

$\Phi_m = \Phi_{zr}$. Zaradi predpostavljene homogenosti polja je torej $B_m A_m = B_{zr} A_{zr}$. Če zanemarimo stresanje polja v zračni reži ($A_m = A_{zr}$), je gostota polja v feromagnetiku enako velika gostoti polja v zračni reži: $B_m = B_{zr}$. Z upoštevanjem tega v enačbi (10.4) dobimo izraz za izračun polja v feromagnetiku (in zračni reži) $B_m = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l_m}{\mu_m} + l_{zr}}$. Vidimo, da se je polje znotraj feromagnetika

zmanjšalo glede na prejšnji primer (0,9 T) in sedaj znaša 0,16 T. Prav tako se zmanjša tudi lastna induktivnost, ki je sedaj 2 mH.

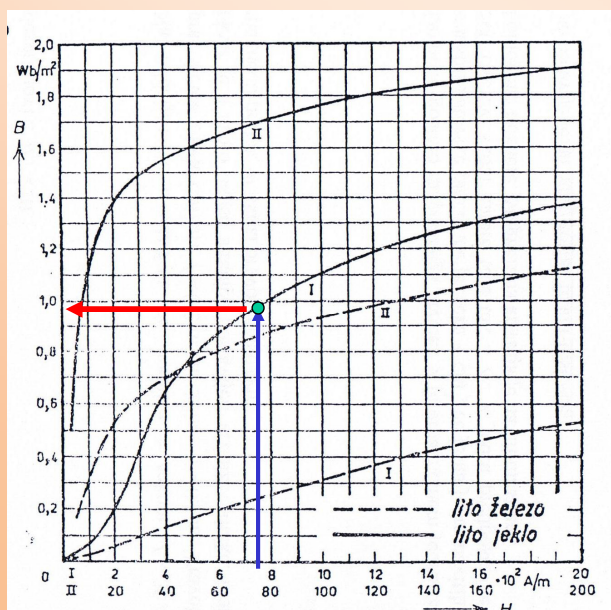
Vprašanje: Zakaj potem sploh uporabiti zračno režo, če pa tako močno zmanjša polje?

Ponavadi je zračno režo potrebno uporabiti zato, da se zmanjšajo nelinearnosti, ki so posledica nelinearne zveze med Bjem in Hjem, ki se odraža v nelinearni relativni permeabilnosti. Zračna reža deluje kot magnetni upor, ki je popolnoma linearen in zmanjša končen vpliv nelinearnosti feromagnetika. Potrebno je najti ravno pravi kompromis, ki daje dovolj velik odziv, nelinearnosti pa morajo biti znotraj določenih okvirov (meja).

PRIMER 3: Navitje na feromagnetnem jedru brez zračne reže. Upoštevamo magnetilno krivulja feromagnetika

Vzemimo feromagnetno jedro iz litega jekla pravokotne preseka 1 cm^2 . Na jedru je navitje s 150 ovoji, srednjo dolžino gostotnice 24 cm in tokom 1,2 A. Določimo gostoto magnetnega pretoka, fluks v jedru in induktivnost navitja.

Izračun: Zapišemo $H_m \cdot l_m = NI$ od koder sledi $H_m = 750 \text{ A/m}$. B_m določimo iz magnetilne krivulje, kot prikazuje slika. Dobimo $B_m = 0,95 \text{ T}$. Fluks bo torej $= 95 \text{ } \mu\text{Wb}$ in induktivnost $L=11,8 \text{ mH}$. Ta induktivnost ni več linearna, temveč je odvisna od toka vzbujanja, medtem ko je bila pri jedru s konstantno permeabilnostjo konstantna.



SLIKA: Primer določitve gostote pretoka iz znane jakosti polja.

PRIMER 4: Navitje na jedru z zračno režo. Upoštevamo magnetilno krivuljo feromagnetika. Podan je NI , iščemo fluks ali gostoto pretoka

Vzemimo jedro iz primeru 3, ki pa mu dodamo 1 mm široko zračno režo.

Zopet lahko pišemo $H_m \cdot l_m + H_{zr} \cdot l_{zr} = NI$. Jakost polja v zračni reži izrazimo z gostoto pretoka v zračni reži, ki je ob zanemaritvi stresa polja enaka kot v jedru. Torej velja

$H_m \cdot (l_m - l_{zr}) + \frac{B_m}{\mu_0} \cdot l_{zr} = NI$. To je enačba z dvema neznankama. Druga zveza med B in H je podana z magnetilno krivuljo. Primer lahko rešimo s preizkušanjem ali pa grafično:

Izračun s preizkušanjem: enačbo napišemo z vstavljenimi vrednostmi (enostavneje kar brez enot) $H_m \cdot 0,24 + B_m \cdot 796 = 180$. Pri pravilno izbranem B_m in H_m mora biti leva stran enačbe enaka 180. Izberemo si določen B in na magnetilni krivulji poiščemo ustrezen H. Preverimo če rezultat ustreza in se s preizkušanjem bližamo rešitvi.

$B_m = 1 \text{ T}, H_m = 800 \text{ A/m}, H_m \cdot 0,24 + B_m \cdot 796 = 988$; mnogo preveč

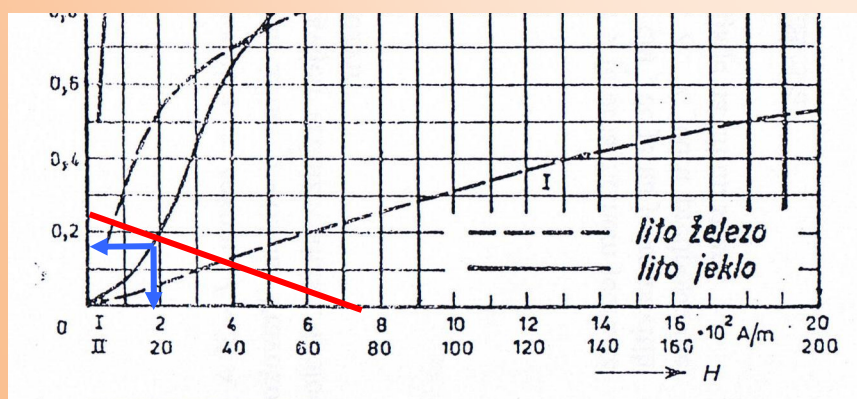
$B_m = 0,5 \text{ T}, H_m = 320 \text{ A/m}, H_m \cdot 0,24 + B_m \cdot 796 = 475$; mnogo preveč

$B_m = 0,2 \text{ T}, H_m = 200 \text{ A/m}, H_m \cdot 0,24 + B_m \cdot 796 = 207$; blizu rešitve

$B_m = 0,15 \text{ T}, H_m = 150 \text{ A/m}, H_m \cdot 0,24 + B_m \cdot 796 = 155,4$; premalo

Zaključimo, da mora biti B_m med 0,2 in 0,15 T.

Izračun z grafičnim postopkom: Gornja enačba predstavlja enačbo premice, ki v presečišču z magnetilno krivuljo določa delovno točko. Potrebujemo dve točki na premici. Najbolj enostavno kar $B_m(H_m=0) = 0,226 \text{ T}$ in $H_m(B_m=0) = 750 \text{ A/m}$. Skozi ti dve točki potegnemo premico in odčitamo delovno točko.



SLIKA: Primer grafičnega določanja delovne točke in posledično magnetne napetosti.

PRIMER 5: Jedro z zračno režo. Podan fluks ali gostota toka, iščemo NI

Enako kot primer 3 in 4, le da v tem primeru iščemo magnetno napetost pri želeni gostoti pretoka v zračni reži. Na primer pri $B = 0,5 \text{ T}$.

Izračun: Enačba potrebna za izračun magnetne napetosti NI je enaka kot v prejšnjem primeru, postopek pa je direkten. Ker zanemarimo stresanje polja v zračni reži, je gostota pretoka v jedru enaka kot v zračni reži. Iz magnetilne krivulje odčitamo H pri $B = 0,5 \text{ T}$, ki je 320 A/m in vstavimo v enačbo. Dobimo 475 A .

PRIMER 6: Izračun trajnega magneta

Poiščimo velikost magnetizacije trajnega magneta z zračno režo dolžine 5 mm, pri čemer je magnet oblike toroida okroglega preseka z notranjim polmerom 2,5 cm in zunanjim polmerom 3,5 cm. V zračni reži smo izmerili polje 50 mT.

Izračun: Najprej določimo srednjo dolžino gostotnice $l_m = 2\pi \frac{3,5 \text{ cm} + 2,5 \text{ cm}}{2} = 6\pi \text{ cm}$. Ker ni

(zunanjskega) vzbujača, velja $H_m \cdot l_m + H_{zr} \cdot l_{zr} = 0$, od koder je $H_m = -\frac{H_{zr} \cdot l_{zr}}{l_m}$. Vidimo, da je

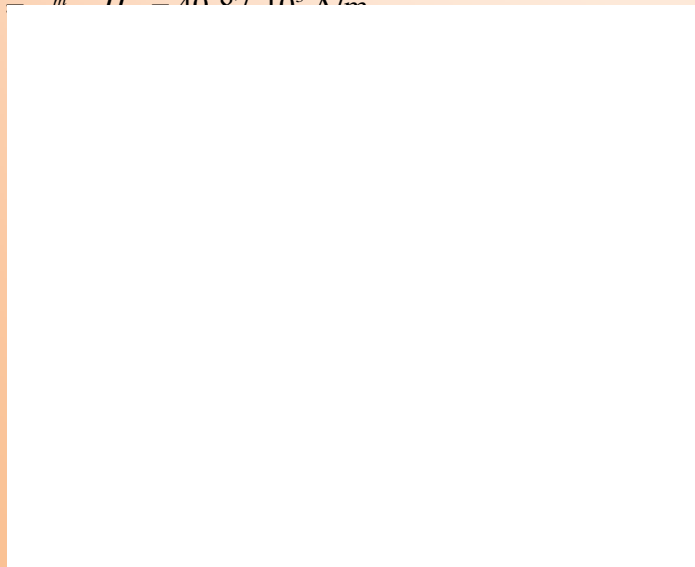
smer jakosti polja v magnetu različna kot v zračni reži. In ker je smer gostote pretoka v zračni reži enaka smeri jakosti polja ($B = \mu_0 H$), lahko zaključimo, da je smer B-ja v magnetu različna od smeri H-ja (to smo ugotovili tudi že v prejšnjem poglavju). Ker zvezo med B in H v zraku vedno

poznamo, lahko določimo H v železu $H_m = -\frac{B_{zr} l_m}{\mu_0} = -1,84 \text{ kA/m}$. Ker sta fluksa v zračni reži in

magnetu enako velika, sta tudi gostoti pretoka ob enakem preseku enaki (če ne upoštevamo stresanja polja) je polje v magnetu enako veliko kot polje v zračni reži, 0,05 T.

Z upoštevanjem stresanja polja ob zračni reži bi morali upoštevati efektivno zmanjšanje zračne reže za (Carterjev) faktor, ki je za konkretno razmerje širine zračne reže in dolžine preseka približno 0,7. Magnetizacijo dobimo iz izraza $B_m = \mu_0 H_m + \mu_0 M$, od koder je

$$M = \frac{B_m}{\mu_0} - H_m = 10,87 \cdot 10^3 \text{ A/m}$$



SLIKA: Jakost polja in gostota pretoka ter magnetizacija v magnetu in zračni reži.

DELOVNA TOČKA (TRAJNEGA) MAGNETA

Tudi pri analizi trajnega magnetna mora veljati Amperov zakon in zakon o brezizvornosti magnetnega polja. V skladu s tem smo že v poglavju 8 ugotovili, da mora biti H v trajnem magnetu usmerjen v nasprotno smer kot v zunanosti magnetna, saj mora veljati $H_m l_m + H_{zr} l_{zr} = 0$. Od tod sledi

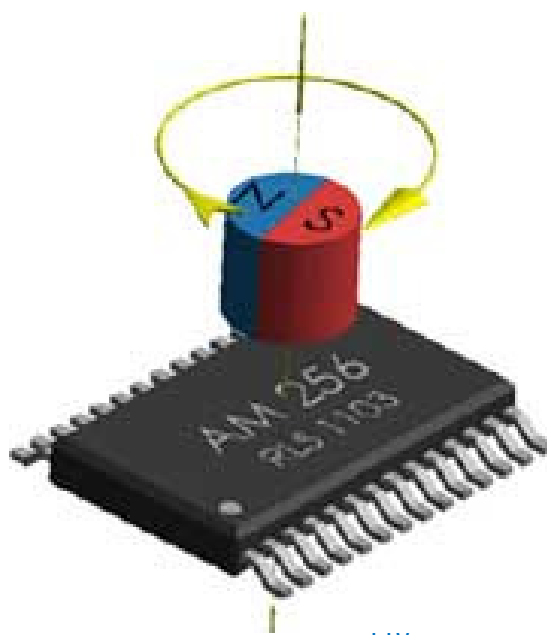
$$H_m = -\frac{H_{zr} l_{zr}}{l_m} = -\frac{H_{zr} / \mu_0 l_{zr}}{l_m}. \text{ Če je zračna reža majhna lahko stresanje polja zanemarimo in}$$

predpostavimo $B_{zr} = B_m$. Potem je $H_m = -\frac{B_m l_{zr}}{\mu_0 l_m}$, kar predstavlja karakteristiko magnetna (enačba

premice v drugem kvadrantu BH diagram). V preseku te premice in magnetilne krivulje dobimo delovno točko trajnega magnetna. Temu delu histerezne zanke rečemo tudi **krivulja demagnetizacije ali razmagnetilna krivulja**. Enačba predstavlja naklon premice in v presečišču s krivuljo magnetenja določa delovno točko. Za trajni magnet si večinoma želimo, da ima čim večji produkt B-ja in H-ja. Optimalna delovna točka je tam, kjer je produkt Bja in Hja največji. Kot bomo videli, določa produkt B-ja in H-ja gostoto magnetne energije v jedru. Desno od grafa B(-H) običajno narišemo še graf B(BH), kjer lahko identificiramo točko z največjim produktom BH.

SLIKA: Delovna točka trajnega magnetna.

SLIKA: Primer uporabe prečno magnetiziranega trajnega magnetna NeFeB za aplikacijo dajalnika kota, ki se ga določa z odčitavanjem magnetnega polja. Pod senzorjem se nahaja čip z množico Hallovih elementov in elementi za obdelavo signalov. Čip je bil razvit na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani, celotni produkt pa trži slovensko podjetje RLS: www.rls.si.



MAGNETNA VEZJA

Pri obravnavi magnetnih struktur se lahko poslužimo analogije z električnimi vezji. Enačba

$$\sum_{i=1}^N H_i \cdot l_i = \Theta \text{ je sorodna 2. Kirchoffovemu zakonu, } \sum_{i=1}^N \Phi_i = 0 \text{ pa prvemu.}$$

Poleg tega upoštevamo še zvezo med gostoto magnetnega pretoka in jakostjo polja

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (10.5)$$

Da bi bile enačbe še bolj podobne enačbam za analizo električnih vezij, spremenimo Amperov zakon v diskretni obliki tako, da jakost magnetnega polja izrazimo z magnetnim fluksom. Če predpostavimo homogenost polja v preseku jedra, lahko fluks zapišemo kot

$$\Phi = BA = \mu HA. \quad (10.6)$$

Sedaj H v enačbi $\sum_{i=1}^N H_i \cdot l_i = \Theta$ nadomestimo s fluksom in dobimo

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i \frac{l_i}{\mu_i A_i} = \Theta \quad (10.7)$$

V enačbi (10.7) prepoznamo podobnost električni upornosti ravnega vodnika, ki smo jo zapisali v obliki $R_e = \frac{l}{\gamma A}$, kjer je γ specifična električna prevodnost snovi. Očitno lahko analogno izrazimo magnetno upornost kot

$$R_m = \frac{l}{\mu A}, \quad (10.8)$$

kjer je μ permeabilnost, lahko bi rekli tudi specifična magnetna prevodnost.

Enačba (10.7) bo torej z upoštevanjem magnetne upornosti enaka

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i R_{m_i} = \Theta$$

Pri tem se je potrebno zavedati, da gre predvsem za analogijo. Enota magnetne upornosti seveda ni Ohm,

$$\text{pač pa } \left[\frac{\text{m}}{\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \text{m}^2} \right] = \left[\frac{\text{A}}{\text{Vs}} \right] = \left[\frac{1}{\Omega \text{s}} \right].$$

ANALOGIJA ELEKTRIČNIH IN
MAGNETNIH VEZIJ

ELEKTRIČNA MAGNETNA

$$U \rightarrow \Theta$$

$$I \rightarrow \Phi$$

$$R_{el} \rightarrow R_{mag}$$

$$\gamma \rightarrow \mu$$

Primerjalno z Ohmovim zakonom in Kirchofovimi zakoni za električno vezje, lahko tvorimo t.i. magnetna vezja, kjer fluks zamenja vlogo toka, vlogo virov prevzame magnetna napetost z amperskimi ovoji, namesto električne pa nastopa magnetna upornost. Tako lahko obravnavamo poljubno magnetno vezje, kjer pa je potrebno upoštevati, da mora biti relativna permeabilnost konstantna. Omejeni smo torej na tiste primere, kjer je magnetilna krivulja podana v obliki premice.

PRIMER: Določimo polje v jedru magneta iz primera 2 še z uporabo magnetne upornosti.

Izračun: Ker je fluks skozi jedro in zračno režo le en, magnetna upora pa sta dva, pišemo:

$$\Phi \cdot R_m + \Phi \cdot R_\delta = NI$$

$$\Phi \cdot (R_m + R_\delta) = NI$$

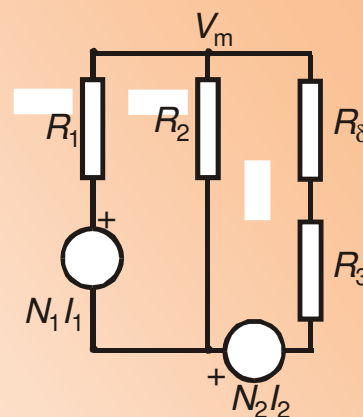
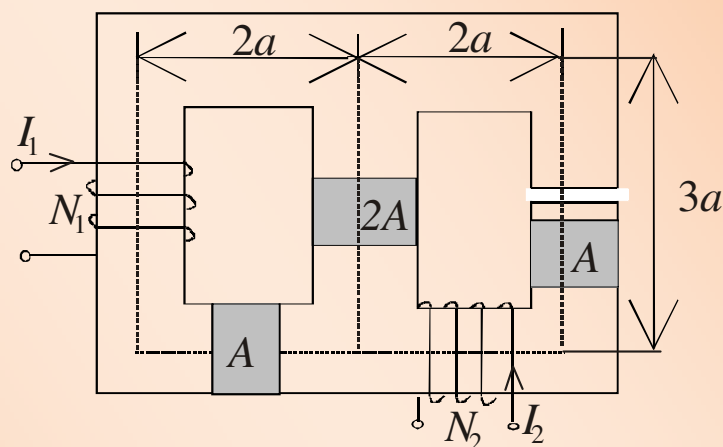
$$\Phi = \frac{NI}{R_m + R_\delta} = \frac{NI}{\frac{l_m}{\mu_{rm}\mu_0 A} + \frac{l_\delta}{\mu_0 A}} = \frac{\mu_0 NIA}{\frac{l_m}{\mu_{rm}} + l_\delta}$$

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l_m}{\mu_{rm}} + l_\delta}$$

Dobimo seveda enak izraz, kot smo ga dobili že pri obravnavi Primera 2.

Za analizo magnetnih vezij lahko uporabimo vse metode za analizo električnih vezij, ki smo jih spoznali pri predmetu Osnove elektrotehnike I, kot npr. zračno metodo, metodo superpozicije, metodo spojiščnih potencialov pa tudi Theveninov in Nortonov teorem. Na ta način lahko brez težav analiziramo tudi bolj kompleksno magnetno vezje.

PRIMER: Določite fluks v zračni reži dolžine 1 mm, če so: $I_1 = 1 \text{ A}$, $N_1 = 100$, $I_2 = 0,5 \text{ A}$, $N_2 = 400$, $a = 2 \text{ cm}$, $A = 1 \text{ cm}^2$, $\mu_{rz} = 100$?



Izračun: Najprej narišemo magnetno vezje z magnetnimi upornostmi in viri magnetne napetosti. V našem primeru imamo tri stebre, kar v vezju predstavimo s tremi vejami vezja. Leva in srednja veja imata po eno magnetno upornost, v desni veji imamo dve magnetni upornosti, eno zaradi magnetne upornosti feromagnetika, drugo pa zaradi magnetne upornosti zračne reže. Vire moramo pravilno označiti. Potrebno je preveriti, kako je jedro navito in v katero smer teče tok. Smer toka, ki jo na viru določa znak "+" mora ustrezati smeri fluksa v jedru, ki ga usmerja vir.

Način reševanja je lahko poljuben. V konkretnem primeru bomo uporabili metodo spojiščnih potencialov, saj je v tem primeru potrebno zapisati le eno enačbo. (Ponovi metode reševanja vezij). Vsota vseh fluksov v zgornje spojišče mora biti enak nič: $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$. Flukse izrazimo z magnetnim potencialom (spodnje spojišče ozemljimo, potencial zgornjega označimo z V_m) in

$$\text{dobimo: } \frac{V_m - N_1 I_1}{R_1} + \frac{V_m}{R_2} + \frac{V_m + N_2 I_2}{R_\delta + R_3} = 0$$

$$\text{Magnetne upornosti so: } R_1 = \frac{7a}{100\mu_0 A}, R_2 = \frac{3a}{100\mu_0 2A}, R_3 = \frac{7a - \delta}{100\mu_0 A}, R_\delta = \frac{\delta}{\mu_0 A}.$$

Po ustavitvi v zgornjo enačbo in preurejanju dobimo

$$\frac{V_m - N_1 I_1}{7a} + \frac{V_m}{3a/2} + \frac{V_m + N_2 I_2}{7a + 100\delta} = 0.$$

$$\text{Sedaj vstavimo vrednosti in dobimo } \frac{V_m - 100 \text{ A}}{14 \text{ cm}} + \frac{V_m}{3 \text{ cm}} + \frac{V_m + 200 \text{ A}}{24 \text{ cm}} = 0. \text{ Rešitev je}$$

$V_m = -1,24 \text{ A}$. Očitno se vpliv virov med sabo odšteva, rezultat je ta, da fluks v desnem stebri povzroča skoraj izključno magnetna napetost navitja na tem stebri. Fluks skozi zračno režo bo

$$\Phi_3 = \frac{V_m + N_2 I_2}{R_\delta + R_3} = 10,5 \mu \text{ Wb}.$$

Primeri kolokvijev in izpitov:

Magnetizacija, trajni magnet:

kolokvij, 9. maj 2005

izpit, 20. junij 2006

izpit, 19. januar 2006

izpit, 8. aprila 2002

izpit, 24. junij 2004

Feromagnetik podan z magnetilno krivuljo:

kolokvij, 13. april 2006

kolokvij, 3. maj 2004

kolokvij, 15. april 2004

kolokvij, 07. maja 2002

Feromagnetik z ali brez zračne reže, konstantna permeabilnost:

kolokvij, 4. maj 2006

izpit 23. junija 2006

Magnetna vezja:

izpit, 23. januar 2007

1. kolokvij, 17.4.2002

izpit, 14. junij 2006

Izpit, 10. marec 2006

UPORABA FEROMAGNETIKOV IN FERIMAGNETIKOV V PRAKSI

EFEKTIVNA PERMEABILNOST IN FAKTOR INDUKTIVNOSTI

Enačbo, ki smo jo izpeljali za polje v feromagnetiku z zračno režo, se v praksi pogosto zasledi v katalogih proizvajalcev feromagnetnih in feritnih jeder zapisano v smislu efektivne relativne permeabilnosti. Z dodatkom zračne reže v jedro se namreč polje zmanjša skladno z enačbo

$$B_m = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l_m}{\mu_{rm}} + l_{zr}} = \frac{\mu_{rm} \mu_0 NI}{l_m + \mu_{rm} l_{zr}} = \frac{\mu_{rm} \mu_0 NI}{l_m \left(1 + \mu_{rm} \frac{l_{zr}}{l_m} \right)} = \frac{\mu_{r,ef} \mu_0 NI}{l_m},$$

kjer je efektivna relativna permeabilnost določena kot $\mu_{r,ef} = \frac{\mu_{rm}}{1 + \mu_{rm} \frac{l_{zr}}{l_m}}$. l_m je srednja pot gostotnice

po jedru, l_{zr} pa širina zračne reže. Zapis z efektivno relativno permeabilnostjo je posebno pogost pri zapisu induktivnosti feromagnetnega jedra z zračno režo, kjer je induktivnost enaka

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_{r,ef} \mu_0 N^2 A}{l_m}. \text{ Osnovne prednosti uporabe zračne reže so omogočanje večje}$$

linearnosti BH karakteristike, ki se odraža v zmanjšanju problema nasičenja jedra, zmanjšajo se tudi izgube jedra (višji Q faktor), zmanjšana je temperaturna odvisnost. Pomankljivosti pa so, da potrebujemo več ovojov za enako induktivnost brez zračne reže, zvečajo se izgube zaradi upornosti navitja, zveča se tudi stresanje polja oz. vpliv na druga (zunanja) polja.

RM cores
(Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4)

	Dimensions			d2 mm	d3 mm	2h1 mm	2h2 mm	2h3 mm	A _L [nH]			Fig
	a mm	c mm							15G +30/-20%	45G +30/-20%	35G +30/-20%	
RM 4 P	10,4-11,0	9,4-9,8	7,95-8,35	3,7-3,9	10,3-10,5	7,0-7,4	8,75-9,25	1000	1100	1100	2	
RM 5 P	14,0-14,6	11,8-12,3	10,2-10,6	4,7-4,9	10,3-10,5	6,3-6,7	8,75-9,25	1800	2000	2000	2	

Slika 1: Izsek prospekta podjetja Iskra FERITI (skupina Kolektor), ki kaže primere uporabe feritnih jeder, ki jih izdeluje podjetje. Prospekti so na voljo na spletnih straneh podjetja, žal le v angleškem jeziku: www.iskra-feriti.si. Na sliki je prikazan primer RM jedra z izmerami in pomembnim podatkom A_L , iz katerega določimo potrebno induktivnost z množenjem s kvadratom ovojov.

Pogosto je za jedra podan t.i. *faktor induktivnosti* A_L , ki je določen kot $A_L = \frac{L}{N^2}$. To popolnoma poenostavi izračun potrebne induktivnosti, saj jo dobimo kar z množenjem faktorja induktivnosti s kvadratom števila obojev. Slika 1 prikazuje primer RM jedra proizvajalca Iskra Feriti (sedaj Kolektor), kjer poleg dimenzij nastopa faktor induktivnosti A_L . Izbira ustreznega jedra je seveda odvisna od aplikacije. Slika 2 prikazuje nekaj primerov aplikacij in predlagana izbira jeder. Iz tabele vidimo, da je za vsako aplikacijo potrebno biti posebno pozoren na določene parametre. Poleg visokih relativnih permeabilnosti se v določenih primerih zahteva majhne izgube (veliko kvaliteto Q), veliko temperaturno stabilnost, delovanje tudi pri visokih frekvencah, itd.

Application survey			
APPLICATION	PROPERTIES	MATERIALS	AVAILABLE SHAPES
Common mode chokes	Very high μ , low losses	19G, 22G, 22GN 12G, 32G, 45G	toroids, U, E
Filter inductors	High Q, high temperature & time stability	10G, 16G, 26G	RM, pot
Power inductors	low power losses, high saturation	15G, 25G, 35G 45G, 55G, 75G	toroids, E, ETD, ER, U, RM, RMLPL, PQ, Eplanar
Power transformers	low power losses, high saturation	15G, 25G, 35G 45G, 55G, 75G	E, ETD, EFD, ER, RM, RMLP, pot, PQ, toroids, Eplanar
xDGL transformers	Very high μ , low THD	12G	EP, EPX, RM, ER, pot
Wideband transformers	Very high μ	19G, 22G, 12G, 32G	RM, pot, E, EFD, ETD, EP, toroids
Proximity switches	High Q and high temperature stability	10G, 16G, 19G	pot, custom design shapes
Radio frequency transformers	low losses, high frequency range	2E, 1F, 2C	toroids, double aperture cores
Inductors in resonant circuit and open filters	low losses, high frequency range	1F, 2C, 10G	rods, tubes, screws, custom design shapes

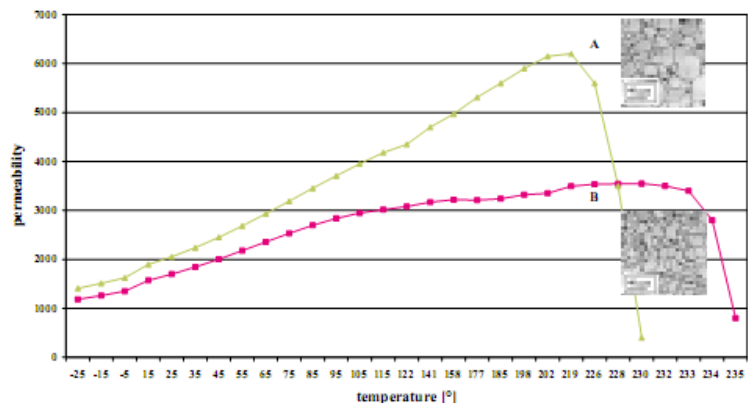
Slika 2: Aplikacije in primeri jeder, ki so predlagani za te aplikacije. Vir: Iskra Feriti.

Induktivnosti, ki je vezana na linearno magnetilno krivuljo, imenujemo tudi **totalna induktivnost**. Poznamo pa tudi **dinamično induktivnost**, ki je odvisna od delovne točke na magnetilni krivulji in je določena z odvodom $L = \frac{d\psi}{dI}$. Uporaba le te je posebno primerna v primeru manjšega izmeničnega signala, ki je (lahko) prištet (superponiran) emosmerni komponenti.

UPOŠTEVANJE TEMPERATURNE IN FREKVENČNE KARAKTERISTIKE

V določenih pogojih (npr. v avtomobilski industriji) je potrebno pri uporabi feromagnetnih materialov paziti tudi na temperaturne lastnosti materialov, ki se s temperaturo spreminjajo. Slika prikazuje spreminjanje začetne permeabilnosti feritnega materiala s temperaturo. Boljše visokotemperaturne lastnosti in zmanjšanje izgub je omogočil tehnološki postopek realizacije materiala z manjšo velikostjo zrn, ki so tudi med seboj boljše elektirčno izolirana.

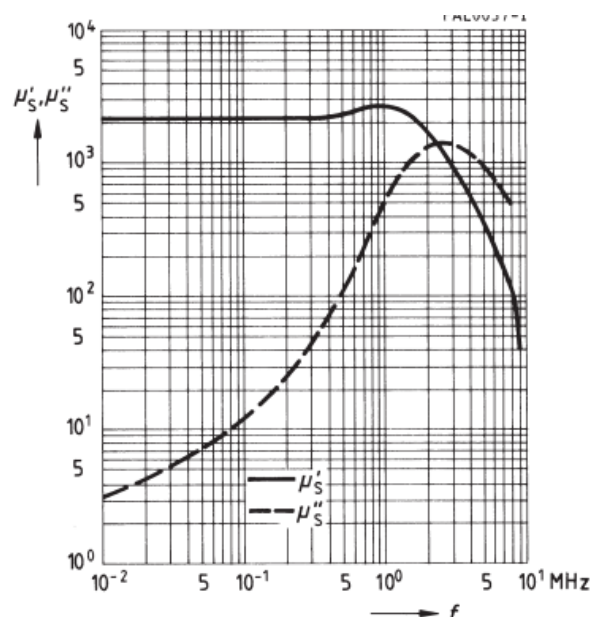
Slika 3: Spreminjanje začetne permeabilnosti feritnega materiala (MnZn) s temperature je odvisno od tehnološkega postopka. Slika kaže, da so izboljšave možne. Material B ima sicer manjšo permeabilnost pri nižji temperaturi, je pa ta bolj kostantna in seže tudi do višjih temperatur. Vir: <http://ctklj.ctlk.uni-lj.si/kovine/izvodi/MIT0312/znidarsic.pdf>



Za analizo frekvenčnih lastnosti fero(i)magnetnih materialov sta običajno na enem diagramu narisani dve permeabilnosti, v konkretnem primeru na sliki μ'_s in μ''_s . Te dve permeabilnosti predstavljata realni in imaginarni del permeabilnosti. Bolj natančno se bomo s kompleksno obravnavo seznanili v nadaljevanju, ko bomo obravnavali odziv električnih elementov na izmenične signale. Če realno induktivnost predstavimo kot zaporedno vezavo idealne tuljave z induktivnostjo L in upora z upornostjo R , potem dobimo v skladu z že obravnavanim primerom na realni tuljavi dva padca napetosti, ki sta fazno zamaknjena za četrtno periode. To lahko obravnavamo tudi s konceptom impedance, kompleksne upornosti pri izmeničnih signalih, ki je $\underline{Z} = R_s + j\omega L_s$, kar lahko zapišemo tudi v obliki $\underline{Z} = j\omega L_o(\mu'_s - j\mu''_s)$. μ'_s je očitno povezan z induktivnostjo jedra, μ''_s pa z upornostjo (izgubami). Pogosto definiramo tudi t.i. tangens delta oz. izgubni kot, ki je določen kot kvocient med imaginarno in realno komponento: $\tan \delta = \frac{\mu''_s}{\mu'_s}$. Manjši kot je izgubni kot, boljše je jedro. Podobno

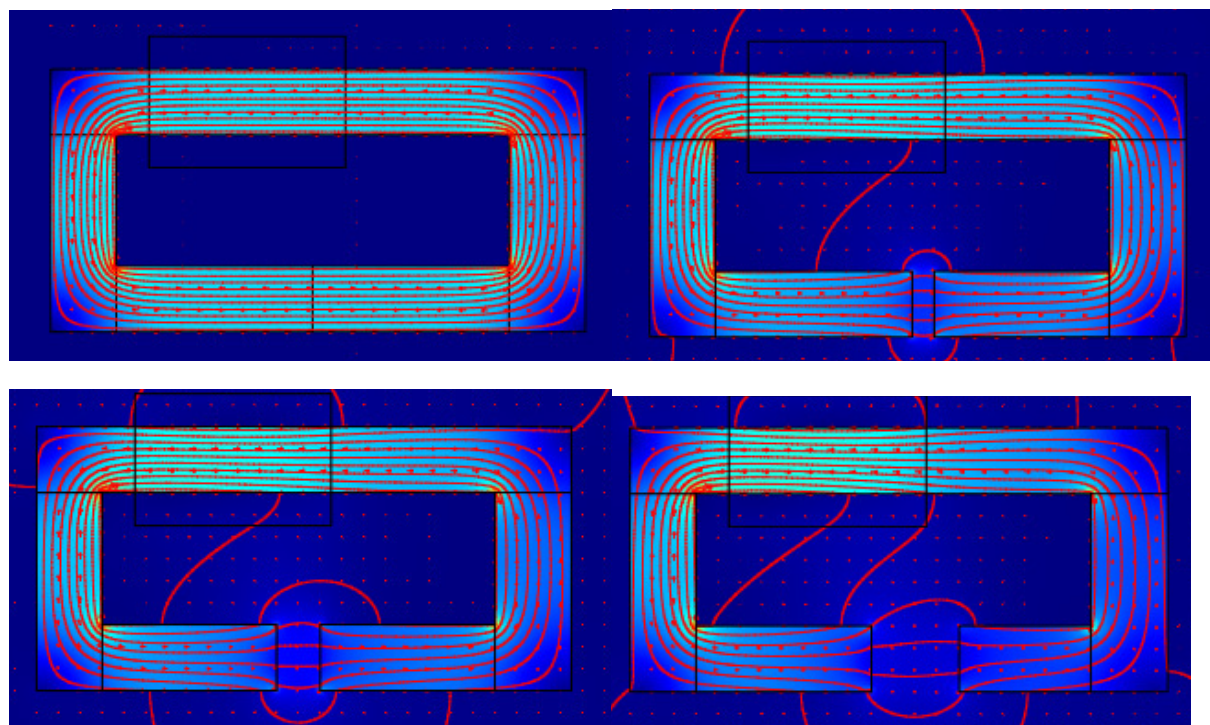
oziroma ravno recipročno je definirana kvaliteta jedra $Q = \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{1}{\tan \delta}$. Višja kvaliteta pomeni načeloma boljše jedro.

Slika 4: Spreminjanje permeabilnosti feromagnetnega materiala s frekvenco. Diagram kaže realni (μ'_s) in imaginarni (μ''_s) del
http://www.epcos.com/inf/80/db/fer_01/01070123.pdf



UPORABA PROGRAMOV ZA NUMERIČNO SIMULACIJO MAGNETNIH STRUKTUR

Pri dimenzioniranju magnetnih jeder si pogosto pomagamo tudi z numerično simulacijo. Ta je zelo primerna tudi za lažje razumevanje porazdelitve polja v feromagnetih, omogoča pa tudi izračune jeder bolj kompleksnih oblik, stresanje polja, oblike navitja, itd. En od programov, ki je brezplačen za uporabo je Maxwell SV (Student version). Naložite si ga iz interneta in ga preiskusite.



SLIKA: Jedro z navitjem: Prikaz gostote magnetnega pretoka (v barvah, bolj »vroča barva« predstavlja večjo gostoto polja), puščice kažejo smer in velikost polja, rdeče črte kažejo gostotnice. Od leve zgoraj do desne spodaj spreminjamo širino zračne reže. Ugotovimo, da je polje znotraj jedra dokaj homogeno (enaka barva in razdalje med gostotnicami), da pa ni homogeno na zaokrožitvah jedra in v okolici zračne reže. Z večanjem širine zračne reže se zmanjšuje velikost polja v jedru (kar se na slikah ne vidi, ker so vrednosti normirane na maksimalne), vidimo pa stresanje polja v okolici zračne reže, ki je večje pri večji zračni reži.

UPOŠTEVANJE STRESANJA FLUKSA V ZRAČNI REŽI

V dosedanjih primerih smo predpostavili, da je polje homogeno tudi v zračni reži. To je dober približek le v primeru, ko je zračna reža ozka v primerjavi z dolžino preseka jedra. Če to ne velja, je potrebno upoštevati, da se gostotna cevka v zračni reži razširi, oziroma, da je polje stresano v okolici zračne reže. To lahko upoštevamo kot povečano (efektivno) površino preseka zračne reže ali pa kot efektivno

d/δ	3 - 6	10 - 20	30 - 100
C	0,67 – 0,76	0,80 – 0,87	0,90 – 0,96

podaljšano širino zračne reže. To podaljšanje upoštevamo s t.i. *Carterjevim faktorjem*, ki je odvisen od širine zračne reže in dolžina preseka jedra d: $\delta_c = C \cdot \delta$

TRAJNI MAGNETI

V poglavju 9 smo že ugotovili, da je delovna točka trajnih magnetov v drugem kvadrantu. Za te (trdomagnetne) materiale so torej ponavadi prikazuje le ta del histerezne zanke, ki ga imenujemo tudi demagnetilna ali razmagnetilna karakteristika. Za te materiale se podaja predvsem koercitivna jakost polja H_c in remanenčna gostota pretoka B_r , pogosto pa tudi maksimalni produkt B_j in H_j , ki predstavlja največjo možno gostoto energije magnetu.

Spodnja slika kaže tipične razmagnetilne krivulje za materiale Neodij-železo-bor (NeFeB), Samarij-kobalt (SmCo), Aluminij-nikelj-kobalt (AlNiCo). Tipično je tudi, da pogosto proizvajalci vztrajajo pri uporabi starih enot (Oerstead za jakost polja (namesto A/m) in Gauss za gostoto magnetnega pretoka (namesto T)), kar je pač potrebno vedeti in upoštevati pretvorbo.

V Sloveniji je med večjimi proizvajalci predvsem podjetje Magneti Ljubljana d.d. (nekoč Iskra Magneti), med prodajalci magnetov in aplikacij pa tudi podjetje Magsis.



Mission Milestones Products Certifications Location Contact

PRODUCTS

< Back You are here: :: Home / Products / Cast AlNiCo Magnets / Limag 190

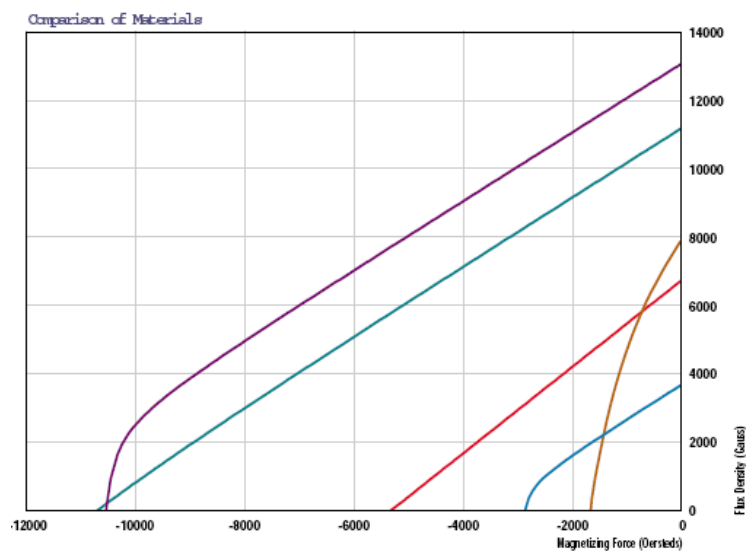
Materials characteristics

Alnico - Limag (DIN 18/9 type)
Type: Limag 190

Magnetic properties:

Characteristic	Designation	Unit	Typical	Minimum
Remanence	B_r	T	0,800	0,700
Coercivity	H_{cb}	kA/m	64	56

Material	Maximum Operating Temperature	Maximum Magnetic Energy	Relative Cost	Resistance to Demagnetization
■ NdFeB	150°C	48 MGOe	High	High
■ SmCo	300°C	32 MGOe	Very High	Very High
■ Neofom™ Bonded NdFeB	150°C	10 MGOe	High	High
■ Alnico	550°C	7.5 MGOe	Moderate	Low
■ Ceramic Ferrite	300°C	4 MGOe	Very Low	Moderate



SLIKA: Primer grafa iz prospekta podjetja Dexter, ki prikazuje demagnetizacijske krivulje najpogostejše uporabljenih materialov za trajne magnete. Opazimo lahko tudi vztrajanje proizvajalcev pri starih (nedovoljenih) enotah za gostoto magnetnega pretoka in magnetno poljsko jakost, kar pa običajno podajo v dodatni preglednici, glej naslednjo sliko. Pogosto odločitev o uporabi določenega materiala za trajni magnet ne temelji na kakovosti magneta pač pa na ceni: izberemo tak material, ki še zadovoljuje naše potrebe in je cenen.

	CGS unit	SI unit	Conversion Factors
Permeability of Free Space	Unity	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{WbA}^{-1}\text{m}^{-1}$	
Induction in Free Space (Field)	B gauss (G)	B_0 Tesla (T)	$1\text{G} = 10^{-4}\text{T}$
Magnetic Field Strength	H Oersted (Oe)	H (Am ⁻¹)	$1\text{Oe} = 79.58\text{Am}^{-1}$
Induction in Free Space	$B = H$	$B_0 = \mu_0 H$	$1\text{G} = 10^{-4}\text{T}$
Induction in Medium	$B = H + 4\pi M$	$B = B_0 + \mu_0 M = \mu_0 (H + M)$	$1\text{G} = 10^{-4}\text{T}$
Magnetization per Unit Volume	M (erg Oe ⁻¹ cm ³) (emu cm ³)	M (kJT ⁻¹ m ⁻³)	$1\text{emu cm}^{-3} = 1\text{kJT}^{-1}\text{m}^{-3}$
Maximum Energy Product	$(BH)_{\text{max}}$ (MGOe)	$(BH)_{\text{max}}$ (kJm ⁻³)	$1\text{MGOe} = 7.958\text{kJm}^{-3}$

SLIKA: Preglednica, ki se uporablja za pretvorbo med starimi (žal še vedno v praksi uporabljanimi) CGS enotami in mednarodno sprejetim sistemom SI enot (iz kataloga podjetja Dexter: www.dextermag.com).

KAKO IZRAČUNATI IN IZBRATI USTREZNO TULJAVO?

Ker na induktivnost vpliva precej faktorjev je potrebno imeti za optimalno izbiro kar nekaj prakse. Dobri napotki za ozračun in izbiro potrebne tuljave so na spletni strani

www.ee.surrey.ac.uk/Workshop/advice/coils/index.html

Jedra v obliki obroča so običajno iz feritnega materiala. Ker so brez zračne reže, jih je težko naviti, njihova prednost pa je praktično idealna zaključitev magnetnega polja, brez stresanja. Običajno se jih uporablja v frekvenčnem območju nad 100 kHz.

RM jedra so popularna, posebno do frekvenc 1 MHz in tokov do 1 A. Enostavno jih je naviti in pritrditi na PCB. Razlikujemo RM jedra z zračno režo in brez nje. Glej sliko zgoraj.

E jedra se pogosto uporablja v močnostnih aplikacijah, za DC-DC pretvornike, itd.

Jedra iz železa, se vedno bolj poredko uporabljajo. Njihova dobra lastnost so visoka gostota nasičenja in velika relativna permeabilnost (7000). Žal pa ima kar nekaj slabosti, kot relativno veliki B_r in H_c , kar predstavlja velike histreznе izgube pri izmeničnih signalih. Poleg tega železo dobro prevaja električni tok, kar ima za posledico dodatne izgube zaradi vrtničnih tokov. Te izgube se da zmanjšati z laminacijo (sestavljanjem jedra z med seboj izoliranimi lističi). Železo v E I jedrih se uporablja do največ 1,0 do 1,1 T, navita C jedra izdelana z navijanjem usmerjenе trafo pločevine imajo to vrednost okoli 2,0 do 2,2 T.

Zračna tuljava je primerna za visoke frekvence in aplikacije, kjer je posebno zaželeno, da tuljava ne povzroči popačitve signala. Neugodna stran je ta, da potrebujemo mnogo ovojev za enako induktivnost v primerjavi s tuljavo na feromagnetnem materialu.

Literatura iz skriptarne na FE/UL:

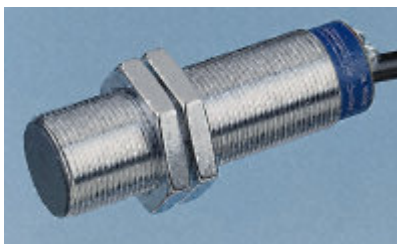
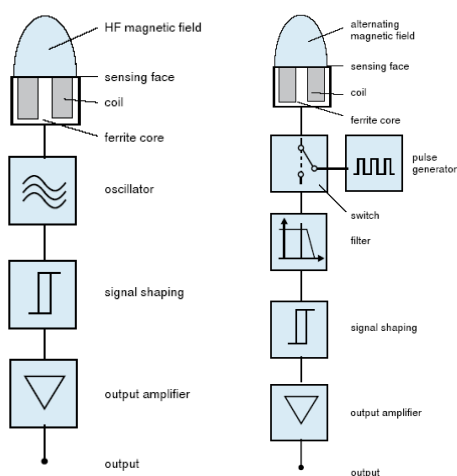
S. Amon : Elektronske komponente in naloge z rešitvami

A. Levstek, M. Pirc : Zbirka nalog iz elektronskih komponent.

NEKAJ APLIKACIJ (NEDOKONČANO)

INDUKTIVNI SENZORJI BLIŽINE

Se pogosto uporabljajo v praksi za natančno določanje razdalj do velikosti nekaj centimetrov. Osnovni princip temelji na spremembi magnetnega polja tuljave, ki je vzbujana kot zelo občutljivo oscilacijsko vezje. Če se v bližini tuljave nahaja feromagnetni material ali prevodni material, se v tem materialu inducirajo vrtnični toki (ang. eddy current), kar ima za posledico, da se del energije porabi v materialu, kar se zazna kot sprememba (zmanjšanje) amplitude signala. Druga možnost je uporaba pulznega signala, ki ob pulzu v bližnjem prevodniku vzbudi vrtnične toke, ki v isti tuljavi, ki je prej delovala kot vzbujalna, v času mirovanja vzbudijo v tuljavi inducirano napetost, ki jo zazna občutljivo vezje. Obstaja vrsta tipov senzorjev, izbira je odvisna od uporabe: senzorji z usmerjenim delovanjem imajo vgrajeno feromagnetno jedro, ki usmeri polje v določeno smer. »Neusmerjeni« so brez feromagnetnega jedra. Poleg tega se razlikujejo glede na obliko (cilindrični, kockasti), na velikost in specialne zahteve (visoke temperature, korozija, itd). Upoštevati je tudi potrebno, da nekatere prevodne ali feromagnetne materiale zaznava senzor bolje oz. slabše. Več: *G. Suffu: Inductive Proximity Sensors: Design, Selection, Specification and Implementation, Omron Electronics LLC.*



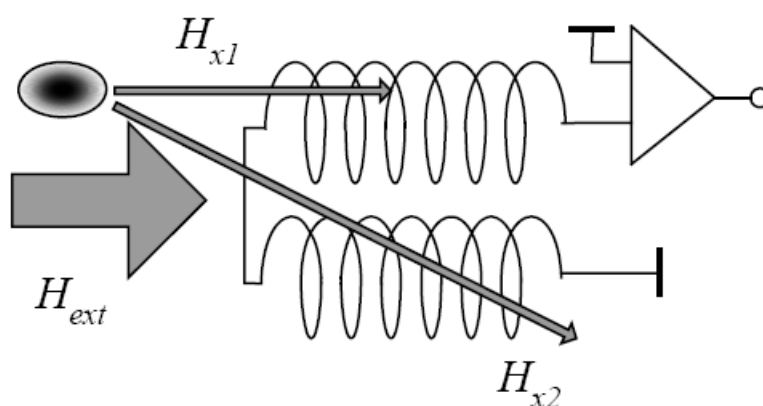
SLIKA: Primer zaznavanja feromagnetnega in/ali prevodnega materiala. Princip zaznavanja na levi deluje kot na spremembe občutljivo oscilatorno vezje, na desni pa vzbujalna tuljava deluje hkrati kot sprejemna in zazna inducirano napetost kot posledico vrtničnih tokov. Vir: www.contrinex.com

GRADIOMETRIČNI SENZOR POLJA

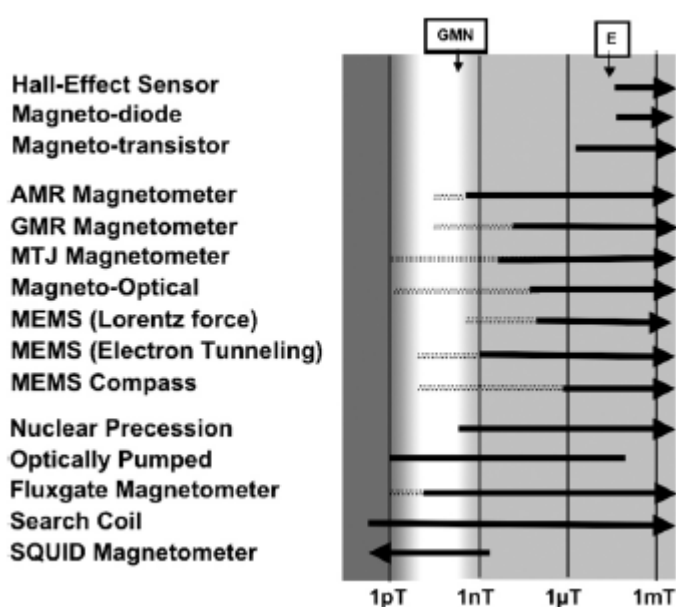
Problem merjenja šibkega magnetnega polja le z eno tuljavo je polje okolice (magnetno polje zemlje in drugih virov). Te vplive bistveno zmanjšamo z uporabo gradiometričnega (gradientnega) principa merjenja: Dve tuljavi sta povezani diferencialno. Daljno polje je približno enako v obeh tuljavah in se vpliva odštejeta, bližnje polje pa je bistveno različno med tuljavama.

Obstajajo različni tipi tuljav in vezav.

SLIKA: princip gradiometričnega merjenja z merjenjem razlike signalov induciranih zaradi bližnjega in daljnega polja. J. Lenz and A.S. Edelstein, Magnetic Sensors and Their Applications, IEEE SENSORS JOURNAL, VOL. 6, NO. 3, JUNE 2006.



Načinov merjenja (spremembe) magnetnega polja je očitno mnogo. Spodnja slika kaže izbiro trenutne tehnologije. Ugotovimo lahko, da smo na kratko spoznali le Hallov senzor in delno merjenje s pomočjo spremembe fluksa (fluxgate magnetometers) in da je na voljo še vrsta načinov merjenja, ki temeljijo na osnovnih fizikalnih principih. Več in vir: J. Lenz and A.S. Edelstein, Magnetic Sensors and Their Applications, IEEE SENSORS JOURNAL, VOL. 6, NO. 3, JUNE 2006.



SLIKA: Senzorji za merjenje magnetnega polja.

EKSPERIMENTI (NEDOKONČANO)

S pomočjo magnetov si je mogoče zamisliti mnogo najrazličnejših eksperimentov. Poglejte si spletno stran <http://www.coolmagnetman.com/magindex.htm>. Npr: lebdeči vlak ali izstrelitvena ploščad. Na isti strani so opisani tudi eksperimenti z elektromagneti in pa eksperimenti, ki razlagajo oz. uporabljajo princip elektromagnetne indukcije. Privoščite si kakšnega!



Poleg omenjene strani, lahko raziščete bogato morje drugih spletnih naslovov, ki opisujejo to področje in so zbrani na strani <http://www.coolmagnetman.com/maglinks.htm>

Poleg te bi veljalo pregledati še povezave na strani

<http://www.magnet.fsu.edu/education/tutorials/webresources.html>

11. INDUCIRANA NAPETOST

Vsebina poglavja: Inducirana napetost kot posledica časovne spremembe magnetnega pretoka (sklepa) skozi zanko (tuljavo), inducirana napetost izražena z lastno ali medsebojno induktivnostjo, padec napetosti na tuljavi, realna tuljava, induktivna upornost pri izmeničnih signalih, dogovor zapisa o podpiranju fluksov med dvema tuljavama, faktor sklopa, gibalna in rezalna inducirana napetost, 2. Maxwellova enačba.

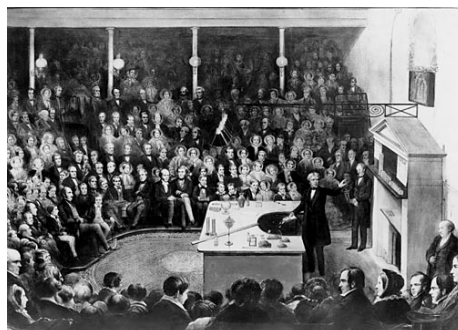
Potrebna znanja iz matematike: infinitezimalni račun (odvodi), obravnava hamoničnih signalov!

V tem poglavju bomo nadgradili spoznanja o magnetnih pojavih v stacionarnih razmerah (pri konstantnem toku) z analizo razmer pri časovno spremenljivih signalih. Ugotovili bomo, da pri časovno spremenljivih signalih pride do pojavov, ki jih v enosmernih razmerah nismo mogli opaziti. Najpomembnejša ugotovitev bo, da pri časovni spremembi fluksa skozi tuljavo na priključkih tuljave zaznamo (izmerimo) napetost, ki jo bomo poimenovali inducirana napetost. Še bolj splošno pa bomo ugotovili, da časovno spreminjajoče magnetno polje povzroča časovno spreminjajoče električno polje. Ker pa tudi že vemo, da časovno spreminjajoče električno polje povzroča magnetno polje, pridemo do pojava, ki ga opišemo kot elektromagnetno valovanje (polje).



Michael Faraday (1791-1867): en največjih znanstvenikov in izumiteljev: elektromagnetna indukcija, dinamo, elektroliza, odkril vrsto kemijskih substanc, vpeljal pojme anoda, katoda, elektroda, ion, ...

[http://en.wikipedia.org/wiki/Michael Faraday](http://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday)



ČASOVNA SPREMEMBA FLUKSA SKOZI TULJAVO

Michael Faraday je prvi ugotovil, da je posledica časovne spremembe fluksa skozi tuljavo napetost na sponkah tuljave, ki je enaka tej časovni spremembi fluksa, pomnoženim s številom ovojev tuljave.

matematično torej $N \frac{d\Phi}{dt}$.

Napetosti, ki se ob časovni spremembi fluksa skozi tuljavo pojavi na priključnih sponkah imenujemo **inducirana napetost**. Je takega predznaka, da bi v primeru kratko sklenjene zanke v zanki pognala

tok, katerega fluks bi nasprotoval prvotnemu fluksu skozi zanko. Temu »pravilu« rečemo tudi **Lentzovo pravilo**, ki ga matematično upoštevamo s predznakom minus:

$$u_i = -N \frac{d\Phi}{dt} . \quad (11.1)$$

V primeru, da ne gre skozi vseh N ovojev celoten fluks, je potrebno upoštevati že obravnavan pojem magnetnega sklepa, kjer za eno zanko z $N_1, N_2 \dots$ ovoji in pripadajočimi fluksi skozi ovoje velja

$$\Psi = \pm N_1 I_1 \pm N_2 I_2 \pm N_3 I_3 \dots = \sum_i \pm N_i \Phi_i , \quad (11.2)$$

ali v primeru, da gre celoten fluks skozi N ovojev zanke $\Psi = N\Phi$. Z upoštevanjem koncepta magnetnega sklepa je inducirana napetost enaka

$$u_i = - \frac{d\Psi}{dt} . \quad (11.3)$$

SLIKA: Eksperimenti z inducirano napetostjo: a) premikanje trajnega magneta v tuljavi, b) premikanje tuljave pri mirujočem magnetu, c) s spreminjanjem fluksa skozi tuljavo ustvarimo inducirano napetost, ki požene tok skozi žarnico.

SLIKA: Razlaga indukcije električne poljske jakosti v zanki in Lentzovega pravila: Zanka znotraj katere fluks s časom narašča v določeni smeri. V vodniku, ki objema fluks se ob časovni spremembi fluksa inducira električno polje, ki v sklenjenem vodniku povzroči (induciran) tok, ki s svojim fluksom nasprotuje povzročnemu.

INDUCIRANA NAPETOST V ZANKI PRI ZNANI SPREMEMBI MAGNETNEGA

PRETOKA SKOZI ZANKO

Oglejmo si primer, ko se v tuljavi časovno spreminja gostota magnetnega pretoka zaradi zunanje spremembe polja.

PRIMER

Tuljavica z $N=100$ ovoji površine $A = 2 \text{ cm}^2$ je postavljena pravokotno na smer polja, ki se spreminja harmonično po enačbi $B(t) = B_0 \sin(10^3 \text{ s}^{-1} t)$, kjer je $B_0 = 50 \text{ mT}$. Določimo inducirano napetost na sponkah tuljave.

Izračun: Gre za krajevno homogeno polje, zato je fluks skozi tuljavico enak kar $\Phi(t) = B(t)A = B_0 A \sin(10^3 \text{ s}^{-1} t) = 10 \sin(10^3 \text{ s}^{-1} t) \mu\text{Vs}$. Inducirana napetost je

$$u_i = -N \frac{d\Phi(t)}{dt} = -100 \cdot \frac{d}{dt} (10 \sin(10^3 \text{ s}^{-1} t) \mu\text{Vs}) = -10 \cdot 100 \cdot 10^3 \cos(10^3 \text{ s}^{-1} t) \mu\text{V} = \underline{\underline{-1 \cos(10^3 \text{ s}^{-1} t) \text{ V}}}$$

SLIKA: Tuljavica v homogenem časovno spreminjajočem se polju.

Ugotovili smo, da se v tuljavi inducira napetost, če se znotraj tuljave časovno spreminja magnetno polje. V izračunanem primeru je bil fluks skozi ovoje tuljave posledica spreminjanja magnetnega polja, ki ni bil posledica toka skozi ovoje tuljave. Ali se na sponkah tuljave pojavi napetost tudi v primeru, da je povzročitelj spremembe fluksa v tuljavi lasten tok v tuljavi? Odgovor najdemo v naslednjem poglavju.

INDUCIRANA NAPETOSTI NA TULJAVI PRI ZNANEM TOKU SKOZI OVOJE TULJAVE IN PADEC NAPETOSTI NA TULJAVI

Pri računanju fluksa skozi tuljavo smo ugotavljali, da je le ta odvisen od toka v ovojih tuljave. V primeru, da ni posredi feromagnetnih materialov, velja linearna zveza med magnetnim sklepom in tokom skozi tuljavo $\Psi = N\Phi = LI$, od koder je lastni induktivnost tuljave $L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I}$. Ta povzroči na sponkah tuljave inducirano napetost¹³

$$u_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}. \quad (11.4)$$

Pri tem pa je potrebno opozoriti na pravilno razumevanje predznaka inducirane napetosti. Ta predznak je uveden zato, da se pravilno interpretira učinek spreminjanja fluksa pri nastanku inducirane napetosti, ki je tak, da se v zanki generira taka notranja (generatorska) napetost, ki z lastnim induciranim tokom nasprotuje spremembam fluksa v zanki. V konkretnem primeru pa gledamo na tuljavo s stališča bremena, saj tok skozi tuljavo povzroča na njej padec napetosti, ki je v smeri toka skozi tuljavo. Gledano na tuljavo s stališča bremena (ki ga v smislu koncentriranega elementa shematično predstavimo z nekaj narisanimi ovoji), je padec (bremenske) napetosti ravno nasproten (generatorski) inducirani napetosti

$$u_L = -u_{iL} = L\frac{di}{dt}. \quad (11.5)$$

V prvem primeru opazujemo pojav inducirane napetosti z vidika vira napetosti, v drugem pa z vidika bremena.

SLIKA: Tuljava z induktivnostjo kot koncentriran element. Smer padca (zunanje) napetosti je nasprotna smeri inducirane (notranje) napetosti in je v smeri vzbujalnega toka.

¹³ Če se tok s časom spreminja, ga običajno označujemo z manjshno pisano črko i , kot npr. $\Psi(t) = Li(t)$.

PADEC NAPETOSTI NA TULJAVI PRI VZBUJANJU TULJAVE S HARMONIČNIM (SINUSNIM) TOKOM

Najprej rešimo konkreten primer in iz rezultatov potegnimo določene zaključke. Za izračun uporabimo enačbo (11.5).

PRIMER

Tok skozi tuljavo z induktivnostjo $L = 2 \text{ mH}$ se spreminja harmonično, z amplitudo $I_0 = 0,5 \text{ A}$ in periodo $T = 5 \text{ ms}$. Določimo padec napetosti na tuljavi.

Izračun: Najprej moramo tokovni signal zapisati v matematični obliki. Zagotoviti moramo ponovitev signala na vsakih 5 ms , zato tok zapišemo v obliki $i(t) = 0,5 \sin(\omega t) \text{ A} = I_0 \sin(\omega t)$,

kjer je **frekvenca signala** enaka $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5 \text{ ms}} = 200 \text{ s}^{-1} = 200 \text{ Hz}$, **krožna frekvenca** ω pa je

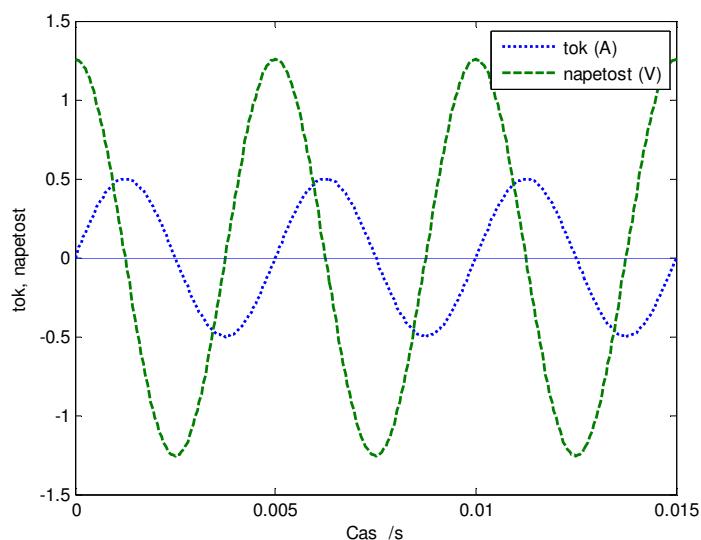
$\omega = 2\pi f = 2\pi 200 \text{ Hz} \approx 1,26 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$. Odvajamo tok: $\frac{di}{dt} = I_0 \omega \cos(\omega t)$ in ga pomnožimo z induktivnostjo in dobimo $u_L = L \frac{di}{dt} = LI_0 \omega \cos(\omega t) = U_m \cos(\omega t) \approx 1,26 \cos(1,26 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} t) \text{ V}$.

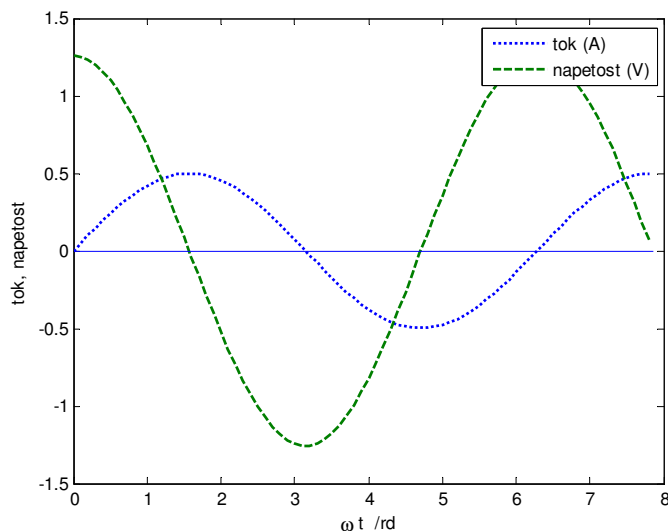
Rezultat lahko zapišemo tudi kot $1,26 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$.

Iz rezultata ugotovimo, da se napetost na tuljavi spreminja z enako frekvenco kot tok, vendar je napetostni signal časovno zamaknjen glede na tokovnega za četrtno periode signala oziroma za fazni kot 90° : $\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. To običajno opišemo kot **prehitevanje napetosti pred tokom za**

kot $\pi/2$. Enakovredno lahko rečemo tudi, da tok v tuljavi zaostaja za napetostjo za kot $\pi/2$.

Kako si razložimo ta zamik? Če si zamislimo harmonično spreminjajoč se tok skozi tuljavo, ugotovimo, da bo časovna sprememba toka največja tedaj, ko tok zamenja predznak, tedaj pa bo tudi padec napetosti na tuljavi zaradi največje spremembe fluksa največji. Ko bo tok okoli ničle, bo napetost na tuljavi maksimalna, kar opišemo s sinusnim potekom toka in s kosinusnim potekom napetosti.





SLIKA: Pogosto namesto časovne osi na abscisi uporabimo fazo, torej produkt časa in krožne hitrosti ωt . V tem primeru lahko nesporedno ugotovljamo fazni zamik med signaloma v radianih. Napetost na tuljavi (črtkano) prehiteva tok (pikčasto) za četrtno periode signala $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Perioda signalov je pri $\omega t = 2\pi \approx 6,28$.

Kako se spreminja amplituda napetosti glede na frekvenco signala? V rešenem primeru smo dobili zvezo $U_m = LI_o\omega$ iz katere je razvidno, da se amplituda napetosti linearno večja s frekvenco signala.

REALNA TULJAVA – OHMSKA IN INDUKTIVNA UPORNOST

Nobena tuljava ni idealna (razen, če jo ohladimo blizu absolutne ničle, ko pade ohmska upornost ovojev na nič), pač pa ima tudi neko ohmsko upornost¹⁴. Ta je v osnovi odvisna od specifične prevodnosti materiala (pri navitjih običajno kar baker), preseka in dolžine: $R = \frac{l}{\gamma A}$. V realni tuljavi

tako lahko ločimo dva padca napetosti: zaradi padca napetosti na ohmski upornosti (Ohmov zakon) in padca napetosti na t.i. induktivni upornosti¹⁵. Matematično bi za napetost na tuljavi zapisali

$$u = u_R + u_L = iR + L \frac{di}{dt}. \quad (11.6)$$

Slika: Padec napetosti na realni tuljavi kot vsota dveh padcev napetosti: na ohmski in induktivni upornosti

¹⁴ Če pa smo še bolj natančni, moramo upoštevati tudi kapacitivno komponento, ki postane pomembna predvsem pri višjih napetostih.

¹⁵ V resnici dveh padcev napetosti na tuljavi ne moremo »fizično« ločiti, saj nastopata hkrati in na zunanjih sponkah opazujemo skupen učinek. Lahko pa ju ločeno obravnavamo v matematičnem smislu.

PRIMER

Vzemimo, da upoštevamo poleg induktivnosti tuljave iz drugega primera (Tok skozi tuljavo z induktivnostjo $L = 2 \text{ mH}$ se spreminja harmonično, z amplitudo $I_0 = 0,5 \text{ A}$ in periodo $T = 5 \text{ ms}$.) še njeno upornost, ki naj bo 1Ω . Kolikšna bo sedaj napetost na tuljavi?

Izračun: V skladu z enačbo (11.6) bo napetost na tuljavi enaka

$$u = RI_0 \sin(\omega t) + L \frac{d}{dt}(I_0 \sin(\omega t)) = RI_0 \sin(\omega t) + LI_0 \omega \cos(\omega t).$$

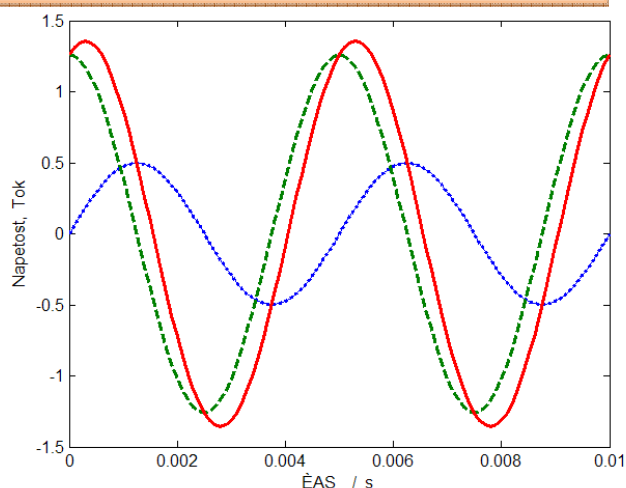
Amplituda padca napetosti zaradi induktivnosti bo $1,26 \text{ V}$ (kot smo že izračunali), zaradi ohmske upornosti pa $0,5 \text{ A} \cdot 1 \Omega = 0,5 \text{ V}$. Ali bo skupna napetost $1,26 \text{ V} + 0,5 \text{ V}$? Ne. Napetost na tuljavi je vsota

dveh napetosti, ki pa sta časovno zamaknjeni za četrtno periode signala. Zato amplitude ne moremo preprosto sešteti. Lahko pa ugotovimo, da je dobljeni napetosti signal zopet sinusne oblike in da je amplituda in faza signala v skladu z matematično zvezo

$a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi)$. A je amplituda signala in je v konkretnem primeru enaka $A = I_0 \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 1,36 \text{ V}$, φ pa je **fazni kot** in označuje prehitevanje ali zaostajanje signala za prvotnim signalom. Določimo ga kot $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = 68,36^\circ$. V našem primeru bo rezultat

$u(t) \cong 1,36 \cdot \sin(1,26 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} t + 68,36^\circ) \text{ V}$. Predznak plus v oklepaju predstavlja prehitevanje

SLIKA: Tokovno vzbujanje (modra pikčasta črta). Napetost na induktivnosti tuljave (črčkano, zelena), napetost na ohmski upornosti tuljave (pikčasto, po obliki in vrednosti enako tokovnemu signalu) in skupna napetost na tuljavi (polna rdeča črta). Napetost na realni tuljavi prehiteva tok tuljave za kot $90^\circ < \varphi < 0^\circ$.



KAZALCI, OHMSKA IN INDUKTIVNA UPORNOST

Pogosto si pri izračunu zvez med tokom in napetostjo olajšamo delo z grafičnim prikazom le teh s t.i. kazalci. Vsak kazalec predstavlja eno od veličin, ki se vrta okoli izhodišča glede na kotno hitrost, pri čemer upoštevamo še fazo signala. Zveza med tokom in napetostjo na ohmski upornosti tuljave je preprosta, saj se »vrtita« skladno, v isti legi. Rečemo tudi, da sta tok in napetost v *fazi*. Kazalec napetosti idealne tuljave pa je premaknjen glede na tokovnega za kot 90° . Skupen padec napetosti bo vsota obeh kazalcev, ki ju grafično seštejemo. Dobimo amplitudo napetosti kot vsoto kvadratov in določimo še zamik med kazalcema napetosti in toka – *fazni kot*. Tangens tega kota je enak razmerju velikosti kazalcev ali pa kar razmerju induktivne in ohmske upornosti.¹⁶

SLIKA: Prikaz kazalčnega diagrama toka in napetosti na idealni in realni tuljavi.

Kot smo ugotovili, je amplituda padca napetosti na tuljavi pri vzburjanju s harmoničnim signalom sorazmerna produktu amplitude toka in produkta ωL . Slednji predstavlja upornost tuljave pri izmeničnih signalih in jo imenujemo induktivna upornost ali **reaktanca** in uporabimo simbol $X_L = \omega L$. Ponovno lahko ugotovimo, da se induktivna upornost linearno veča z večanjem frekvence vzbujačnega signala.

SLIKA: Večanje induktivne upornosti – reaktance s frekvenco vzburjanja.

¹⁶ Tak način obravnave je bil običajen v srednješolskem izobraževanju. V nadaljevanju bomo spoznali, da je mnogo bolj učinkovit, pa tudi korekten, zapis kazalcev v t.i. kompleksni ravnini.

INDUCIRANA NAPETOST V TULJAVI ZARADI SPREMEMBE FLUKSA V DRUGI

TULJAVI

Doslej smo obravnavali primere, ko je bila inducirana napetost posledica spremembe fluksa zaradi toka v lastni tuljavi. Hkrati smo imeli tudi že primer, ko nas ni zanimalo, kaj je vir spreminjanja fluksa, pa se je v tuljavi prav tako inducirala napetost. Sedaj nas zanima obravnava povezave med dvema tuljavama, ki lahko s svojima fluksoma vplivata druga na drugo. Najprej si oglejmo primer obravnave dveh tuljav.

SLIKA: Sprememba toka v večji tuljavi povzroča inducirano napetost v manjši tuljavi. Inducirana napetost je odvisna od hitrosti spreminjanja toka v večji tuljavi oziroma od spreminjanja hitrosti magnetnega pretoka skozi manjšo tuljavo.

PRIMER

Tuljava dolžine 15 cm premera 3,2 cm ima 30 ovojev na centimeter. V njeno sredino postavimo manjšo tuljavo dolžine 2 cm premera 2,1 cm s 60 ovoji. Tok v večji tuljavi se od časa $t = 0$ s linearno manjša od 1,5 A in doseže -0,5 A v času 25 ms. Nato ostane konstanten. Kolikšna je inducirana napetost v manjši tuljavi? Predpostavimo homogeno polje v večji tuljavi, ki ga izračunamo z aproksimativno formulo.

Izračun: Inducirano napetost bomo dobili z uporabo enačbe (11.1), torej moramo izračunati fluks, ki gre skozi manjšo tuljavico v času spremembe toka v večji. Izračun razdelimo na dve fazi. V prvi se tok linearno manjša, v drugi pa ostane konstanten. Označimo z indeksom 1 večjo tuljavo, z 2 pa manjšo tuljavo. Ker gre za linearne spremembe, lahko namesto odvajanja uporabimo difference

(rezultat bo enak):
$$u_{i2} = -N_2 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Big|_2 = -N_2 \frac{\Delta \Phi_{21}}{\Delta t} = -N_2 \left(\frac{\Phi_{končna} - \Phi_{začetna}}{t_{končna} - t_{začetna}} \right). \quad (11.7)$$

Začetni fluks izračunamo iz začetne gostote pretoka v tuljavi, končnega pa iz končnega pretoka.

Polje znotraj tuljave določimo iz poenostavljene formule $B = \frac{\mu_0 N i}{l}$. Dobimo

$$B_{začetni} = \frac{\mu_0 N i_{začetni}}{l} = \mu_0 \frac{N}{l} i_{začetni} = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 30 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1} \cdot 1,5 \text{ A} \cong 5,7 \text{ mT}.$$

Pri izračunu fluksa skozi tuljavico moramo upoštevati površino manjše tuljavice in ne večje:

$$\Phi_{začetni} = B_{začetni} \cdot A_2 = B_{začetni} \cdot \pi \left(\frac{2,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2} \right)^2 \cong 1,96 \mu\text{Wb}.$$

Na enak način bi dobili z upoštevanjem toka -0,5 A končni pretok $\Phi_{končni} = -0,653 \mu\text{Wb}$. Inducirana napetost v času od $t = 0$ s do $t = 25$ ms je torej

$$u_i = -60 \frac{-0,653 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} - 1,96 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}{25 \cdot 10^{-3} \text{ s}} \cong 6,27 \text{ mV}.$$

To napetost bi lahko izmerili, če bi na zunanje sponke tuljave priključili sondo osciloskopa. (Zaradi poenostavitve s homogenostjo polja bi meritev pokazala seveda nekoliko različno vrednost.). Ta napetost je konstantna ves čas spreminjanja toka v veliki tuljavi. V drugi fazi, ko bo tok skozi večjo tuljavo konstanten, v manjši tuljavi ne bo spremembe magnetnega pretoka in s tem bo inducirana napetost enaka 0.

SLIKA: Graf spremembe toka v mali tuljavi, spodaj graf inducirane napetosti v večji tuljavi.

MEDSEBOJNA INDUKTIVNOST

Ob obravnavi primera dveh tuljav smo ugotovili, da moramo v takem primeru upoštevati fluks v eni tuljavi, ki je posledica toka skozi drugo tuljavo. Na podoben način kot smo definirali lastno induktivnost (kot kvocient magnetnega sklepa skozi lastno tuljavo zaradi toka v lastni tuljavi, kar bi lahko zapisali kot $L_1 = \frac{\Psi_{11}}{I_1}$), lahko definiramo medsebojno induktivnost kot kvocient magnetnega sklepa ene tuljave in toka druge tuljave

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}, \quad (11.8)$$

kjer je Φ_{21} fluks skozi drugo tuljavo zaradi toka I_1 v prvi tuljavo.

Na enak način lahko definiramo M_{12} kot $M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}$. Poglejmo si razmere na sliki.

SLIKA: Medsebojna induktivnost določa zvezo med tokom v drugem navitju in fluksom, ki ga ta tok povzroča v lastnem navitju.

Če imamo opravka z linearnimi magnetnimi materiali (če je μ_r konstanten), sta M_{21} in M_{12} kar enaka, torej $M = M_{21} = M_{12}$.

INDUCIRANA NAPETOST IZRAŽENA Z MEDSEBOJNO INDUKTIVNOSTJO

V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da lahko zvezo med fluksom skozi eno tuljavo in tokom v drugi tuljavi opišemo z medsebojno induktivnostjo $\Psi_{21} = M_{21}I_1 = MI_1$. Torej lahko inducirano napetost v drugi tuljavi zaradi toka v prvi tuljavi določimo s pomočjo enačbe

$$u_{iM_{21}} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d(MI_1)}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \quad (11.9)$$

Ponovno lahko ugotovimo, da je predznak le posledica upoštevanja Lentzovega pravila. Če pa upoštevamo, da je padec napetosti na tuljavi ravno nasproten inducirani, bomo zopet pisali

$$u_{M_{21}} = -u_{iM_{21}} = M \frac{di_1}{dt}. \quad (11.10)$$

V vsakem primeru pa bomo za določitev predznaka inducirane napetosti kot posledico vpliva dveh navitij potrebovali določen dogovor, ki ga bomo v nadaljevanju prikazali s sistemom označevanja s »pikami«.

Ponovimo primer, ki smo ga rešili na začetku z določitvijo medsebojne induktivnosti in nato inducirane napetosti.

PRIMER

Določimo inducirano napetost v manjši tuljavi iz prejšnjega primera s pomočjo medsebojne induktivnosti.

Izračun: Za določitev medsebojne induktivnosti moramo poiskati fluks skozi drugo tuljavo ki ga povzroča tok skozi prvo tuljavo. Fluks je

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 A_2 = N_2 \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1} A_2$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l_1} A_2 \cong 78,35 \mu\text{H}$$

kjer smo z indeksom 1 označili veliko tuljavo, z 2 pa manjšo tuljavo. Sprememba toka v času 25 ms

bo $-\frac{2\text{ A}}{25\text{ ms}} = -80\text{ A/s}$, inducirana napetost pa

$u_{M_{21}} = M \frac{di_1}{dt} = 78,35\text{ mH} \cdot (-80\text{ A/s}) = 6,3\text{ mV}$. Razlika v končnem rezultatu glede na prejšnji primer je izključno posledica različnega zaokroževanja v prvem in v tem primeru. Natančnejši rezultat je slednji. Preverite še sami.

FAKTOR SKLOPA

Če je magnetna povezava med dvema tuljavama (1 in 2) linearna, ima smisel določiti faktor sklopa. Faktor sklopa določa, kolikšen del fluksa (magnetnega sklepa), ki gre skozi lastno tuljavo, gre tudi skozi drugo:

$$\begin{aligned}\Psi_{21} &= k\Psi_{11} \\ \Psi_{12} &= k\Psi_{22}\end{aligned}$$

kjer sta Ψ_{11} in Ψ_{22} fluksa skozi lastno tuljavo pomnožena s številom ovojev lastne tuljave, velja

$$M_{21} \cdot M_{12} = M^2 = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \cdot \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{k \cdot \Psi_{11}}{I_1} \cdot \frac{k \cdot \Psi_{22}}{I_2} = k^2 L_1 L_2$$

in iz tega

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad (11.11)$$

ali faktor sklopa

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Popolen magnetni sklop imamo tedaj, ko gre celoten fluks, ki gre skozi lastno tuljavo tudi skozi drugo tuljavo. Tedaj je $k = 1$.

Namesto medsebojne induktivnosti imamo pogosto podam faktor sklopa in seveda lastne induktivnosti in moramo iz teh podatkov določiti medsebojno induktivnost. Pač, s pomočjo enačbe (11.11).

OZNAČITEV MEDSEBOJNE INDUKTIVNOSTI KOT KONCENTRIRAN ELEMENT

Kako označimo medsebojno induktivnost kot koncentriran element? V osnovi enako kot dve navadni tuljavi z lastno induktivnostjo, ki pa ju povežemo z linijo in puščicama, s čimer prikažemo, da je med njima magnetni sklep. Pri tem pa je zopet potrebno paziti na predznak padca napetosti zaradi medsebojne induktivnosti, saj je predznak odvisen od lege posameznih tuljav. Predznak je tako lahko pozitiven ali pa negativen, kar mora biti v sami električni shemi razvidno. To označujemo s pikami na začetku ali konce vsake tuljave (glede na smer toka) odvisno od tega, če se magnetna pretoka tuljav med seboj podpirata ali ne. **Dogovor je tak, da postavimo piki na začetek (ali na konec) obeh tuljav glede na smer toka, če se magnetna pretoka obeh tuljav podpirata. To pomeni, da se fluks v lastni tuljavi poveča zaradi fluksa, ki ga druga tuljava povzroča v prvi. V nasprotnem primeru se fluksa ne podpirata.**

SLIKA: Dve tuljavi z medsebojno induktivnostjo. Podpiranje fluksov označimo s piko na tisti strani tuljave, kjer vstopa ali izstopa tok.

SPLOŠEN ZAPIS ZVEZE MED DVEMA TULJAVAMA Z DIFERENCIALNO ENAČBO

Če imamo dve sklopljeni navitji, potem tok skozi eno navitje povzroča padec napetosti v lastnem, pa tudi v drugem navitju. Slednji je proporcionalen spremembi toka in medsebojni induktivnosti. Vpliv pa je v obe smeri. Torej, če spreminjajoči fluks v drugi tuljavi povzroča tok v drugem navitju, pride do vzajemnega učinka. Napetost na prvi tuljavi je¹⁷

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}, \quad (11.12)$$

na drugi pa

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \quad (11.13)$$

Padec napetosti zaradi medsebojne induktivnosti lahko ponazorimo z novim simbolom v obliki romba, ki predstavlja t.i. tokovno krmiljen napetostni element. Podobne elemente se pogosto uporablja v modelih polprevodniških elementov.

SLIKA: Vezje z dvema tuljavama z medsebojnim sklopom in prikaz padca napetosti zaradi medsebojne induktivnosti s tokovno krmiljenim napetostnim virom.

¹⁷ Dobimo sistem dveh (linearnih) diferencialnih enačb, ki ga je potrebno reševati s primerno metodo. Ugotovili bomo, da nam za obravnavo izmeničnih signalov lahko analizo bistveno olajša uporaba kompleksnega računa.

TRANSFORMATORSKA IN GIBALNA (REZALNA) INDUCIRANA NAPETOST

V tem poglavju bomo še nekoliko razdelali dva različna načina induciranja napetosti. Prvega kot posledico spreminjanja fluksa skozi zanko in drugega kot posledico gibanja prevodnika skozi magnetno polje.

Ugotovili smo že, da je inducirana napetost v zanki določena s časovno spremembo fluksa skozi zanko, kar smo v matematični obliki zapisali kot $u_i = -\frac{d\Psi}{dt}$, kjer je predznak minus posledica upoštevanja Lentzovega pravila. Ta določa, da je predznak inducirane napetosti v zanki tak, da induciran tok v zanki povzroča fluks, ki nasprotuje spremembi fluksa skozi zanko. Nadalje smo ugotovili, da gre pri inducirani napetosti v osnovi za notranjo, generatorsko napetost, ki je porazdeljena po zanki. V tem smislu moramo torej govoriti o induciranju električne poljske jakosti, saj ta opisuje (krajevno) hitrost spreminjanja potenciala.

Če se spomnimo definicije električne napetosti kot integrala električne poljske jakosti, lahko tudi sedaj pogledamo, kaj dobimo z integracijo inducirane električne poljske jakosti po poti zanke. Zanima nas torej $\int_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$. V elektrostatiki smo ugotovili, da je ta integral po zaključeni poti enak nič (dobimo kot razliko dveh elektrostatičnih potencialov v isti točki), iz česar je tudi sledila definicija električne poljske jakosti kot gradienta potenciala. Pri izmeničnih signalih ta integral očitno ni enak nič, pač pa je enak inducirani napetosti

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = u_i \quad (11.14)$$

Celotna električna poljska jakost je vsota elektrostatične in inducirane jakosti $\vec{E} = \vec{E}_{es} + \vec{E}_i$, kar pa enačbo (11.14) spremeni le v toliko, da velja še bolj splošno

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = u_i. \quad (11.15)$$

Če upoštevamo v enačbi (11.15) še enačbo $u_i = -\frac{d\Psi}{dt}$ in to, da lahko fluks zapišemo kot integral Bja

po preseku zanke $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$, dobimo splošen zapis

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (11.16)$$

To je pomembna enačba, ki jo v elektrotehniki poznamo kot **2. Maxwelllova enačba**. V osnovi gre za Faradayevo enačbo, ki pa jo je Maxwell pravilno uvrstil v sistem osnovnih enačb za opis elektromagnetnega polja.

V osnovi lahko ločimo dva različna tipa induciranja napetosti: v prvem primeru, ki smo ga že spoznali, se inducirana napetost v zanki pojavi kot posledica časovne spremembe fluksa v zanki. Tej napetosti pogosto rečemo **transformatorska inducirana napetost**. Drugi tip induciranja pa nastopi kot posledica gibanja prevodnika v časovno konstantnem ali spremenljivem magnetnem polju. Tej inducirani napetosti rečemo tudi **gibalna ali rezalna inducirana napetost**.

GIBALNA (REZALNA) INDUCIRANA NAPETOST

Poglejmo si primer prevodne palice, ki se premika s hitrostjo $\vec{v}$ v prečnem polju gostote B . V prevodniku je zelo veliko prostih nosilcev naboja (elektronov) na katere deluje magnetna sila $\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B}$. V magnetnem polju na naboje deluje magnetna sila, oziroma (inducirana) električna poljska jakost E_{ind} , ki je

$$\vec{E}_{ind} = \frac{\vec{F}}{Q} = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (11.17)$$

Integral jakosti polja vzdolž palice pa dá napetost – gibalno inducirano napetost:

$$u_i = \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (11.18)$$

SKUPNA TRANSFORMATORSKA IN GIBALNA INDUCIRANA NAPETOST

Kakšna pa je zveza med tem zapisom inducirane napetosti in tistim s časovno spremenljivim fluksom? Na tem primeru lahko pokažemo, da bi z uporabo osnovnega zapisa dobili enak rezultat. Le zamisliti bi si morali virtualno zanko, katere fluks se večja ali zmanjšuje s časom.

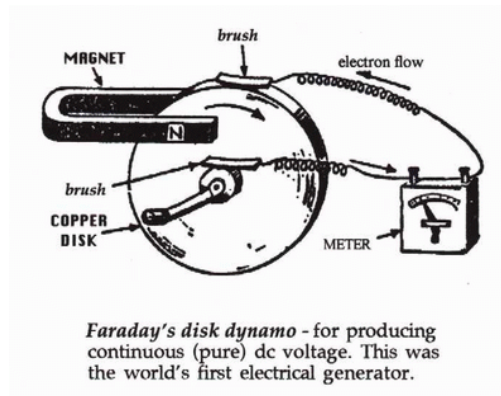
Z drugačnim zapisom enačbe (11.16) lahko upoštevamo tako inducirano napetost, ki je posledica časovne spremembe gostote pretoka v mirujoči zanki in inducirano napetost, ki je posledica gibanja v časovno konstantnem polju:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{A} + \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (11.19)$$

Prvi člen predstavlja transformatorsko, drugi pa gibalno (rezalno) inducirano napetost. Odvisno od primera, ki ga obravnavamo, moramo upoštevati prvo, drugo ali pa kar obe hkrati.

FARADAYEV HOMOPOLARNI GENERATOR¹⁸

Je naprava, ki proizvaja enosmerno napetost pri vrtenju prevodnega diska v magnetnem polju. Prvi jo je opisal že leta 1831 Michael Faraday. Deluje tudi v obratnem režimu, kot motor in se smatra kot prvi enosmerni električni motor.



SLIKA: Vrteči prevodni disk v prečnem magnetnem polju. Med osjo in obodom priključimo kontaktorje in na sponkah se pojavi napetost – inducirana napetost.
<http://www.zamandayolculuk.com/cetinbal/faradaydisk.htm>

Za izračun generatorske (inducirane) napetosti: med kontaktoma si zamislimo prevodno progo med osjo in točko na robu diska. Na naboje v disku, ki se vrtijo s hitrostjo $v = \omega r$ deluje magnetna sila $\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B}$, ki premakne (pozitivne) naboje v smeri vektorskega produkta. Pojavi se torej inducirana električna poljska jakosti $\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$, ki je v smeri radija od osi proti zunanjemu kontaktu.

Med kontaktoma se inducira napetost $u_i = \int_0^R \vec{E}_i d\vec{l} = \int_0^R \omega r B dr = \omega \frac{R^2}{2} B$.

PRIMER

Prevodni disk polmera $R = 10$ cm se vrti s hitrostjo 1000 obr/min v prečnem homogenem magnetnem polju 200 mT. Določimo inducirano napetost med osjo in obodom diska.

Izračun: $u_i = \int_0^R \vec{E}_i d\vec{l} = \int_0^R \omega r B dr = \omega \frac{R^2}{2} B = 2\pi \frac{1000}{60 \text{ s}} \frac{(0,1 \text{ m})^2}{2} 0,2 \text{ T} = 104,8 \text{ mV}.$

¹⁸ Ta tip generatorja je pogosto »tarča« najrazličnejših raziskovanj, tudi takih, ki iščejo nenavadnosti v delovanju elektromagnetnega polja. Prepričajte se sami z »deskanjem« po spletnih straneh. Zanimivo je, da deluje tudi v primeru, ko »zunanje« magnetno polje ustvarja trajni magnet, ki je prilepljen na vrteči se disk.

Napetost ni velika, je pa zato lahko zelo velik tok, ki steče v zanki, saj je ohmska upornost izredno majhna. Zato dejansko lahko pričakujemo izredno velike toke. Problem se pojavi v kontaktih, kjer se pojavi velika kontaktna upornost, ki je moteča še posebno pri zelo velikih tokih

SLIKA: Homopolarni generator.

GENERATOR IZMENIČNE NAPETOSTI Z VRTENJEM TULJAVE V MAGNETNEM POLJU

Tuljavo postavimo v enosmerno homogeno magnetno polje in jo vrtimo s kotno hitrostjo ω . Pojav inducirane napetosti v zanki lahko razložimo na oba načina: kot posledico časovne spremembe fluksa skozi zanko (transformatorska napetost) ali pa kot posledico sile na gibajoče naboje (rezalna napetost). V prvem primeru opazujemo časovno spreminjanje fluksa skozi zanko, ki bo enako $\Phi = B \cdot A(t) = B \cdot b \cdot a \cos(\omega t)$, inducirana napetost pa bo

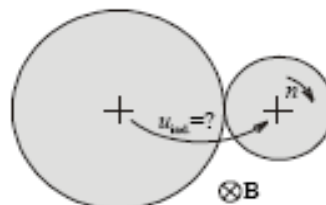
$$u_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -NBab \frac{d\cos(\omega t)}{dt} = NBab\omega \sin(\omega t) = U_m \sin(\omega t).$$

Amplituda inducirane napetosti je odvisna od površine zanke (ne od oblike, ki je lahko tudi trikotna), velikosti magnetnega polja in kotne frekvence: $U_m = NBab\omega$. Izhodna (inducirana) napetost je sinusne oblike.

SLIKA: a) Vrtenje pravokotne tuljave v homogenem magnetnem polju. b) Izhodna napetost je sinusne oblike.

PRIMER izpitne naloge: Vrtenje zanke v magnetnem polju: **izpit, 5. septembra 2002**

Desni kolut ženemo z n obrati na minuto, levi pa se brez drsenja vrti ob njem v obratni smeri. Polmer desnega je $a/2$ polmer levega pa a . Izrazite inducirano napetost med osema kolutov, če se vrtita v homogenem magnetnem polju gostote B , ki vpada pravokotno nanju!



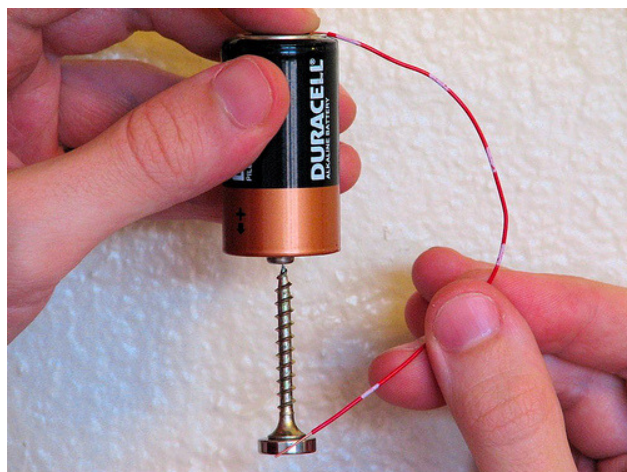
3. Inducirano napetost u_{ind} med osema kolutov določimo kot vsoto inducirane napetosti u_{ind1} med osjo in obodom levega koluta ter napetosti u_{ind2} med obodom in osjo desnega koluta:

$$u_{ind} = u_{ind1} + u_{ind2} = -\pi a^2 B f_1 - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 B f_2, \text{ kjer sta } f_1 = \frac{n/2}{60} \text{ in } f_2 = \frac{n}{60} \text{ frekvenci vrtenja levega ter desnega koluta (zaradi dvakrat večjega obsega je frekvenca levega dvakrat manjša od frekvence desnega). Inducirana napetost med osema bo torej: } u_{ind} = -\pi a^2 B \frac{n/2}{60} - \pi \frac{a^2}{4} B \frac{n}{60} =$$

$$= -\frac{1}{80} \pi a^2 B n.$$

MALO ZA ZABAVO MALO ZARES:

Izdelajte in raziščite delovanje homopolarnega motorja sestavljenega iz baterije, vijaka, žičke in trajnega magneta. <http://www.evilmadscientist.com/article.php/HomopolarMotor>



Primeri kolokvijev in izpitov:

kolokvij, 3. maj 2004

2. kolokvij, 11. 6. 2003

izpit, 16. april 2002

izpit, 8. april 2002

izpit, 4. 12. 2001

Izpit, 03. 09. 2003

izpit, 5. septembra 2002

PRIMERI UPOŠTEVANJA MATEMATIČNE MAGNETILNE KRIVULJE PRI IZRAČUNU INDUCIRANE NAPETOSTI

V primeru, da predpostavimo linearizirano magnetilno krivuljo, je induktivnost jedra neodvisna od vzbujačnega toka, torej konstantna. Inducirana napetost pa bo enaka kar produktu induktivnosti in časovnem odvoda toka v ovojih $u_i = -L \frac{di}{dt}$. V primeru vzbujačnega s sinusnim signalom, bo potek inducirane napetosti kosinusna funkcija.

Če pa upoštevamo nelinearnost uvedeno z magnetilno krivuljo, je potrebno izračunati fluks skozi jedro in ga odvajati po času. Inducirana napetost bo popačena, velikost popačenja pa je odvisna od velikosti vzbujačnega signala.

PRIMERI:

Vzemimo primer jedra z nelinearno in linearizirano magnetilno krivuljo, na katerem imamo navitje s 1000 ovojih. Jedro ima presek 1 cm^2 in srednjo dolžino $0,24 \text{ m}$. Navitje vzbuja s sinusnim tokovnim signalom $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$. Magnetna

poljsko jakost v jedru je enake oblike kot tokovni signal $H(t) = \frac{Ni(t)}{l_{sr}}$, gostota

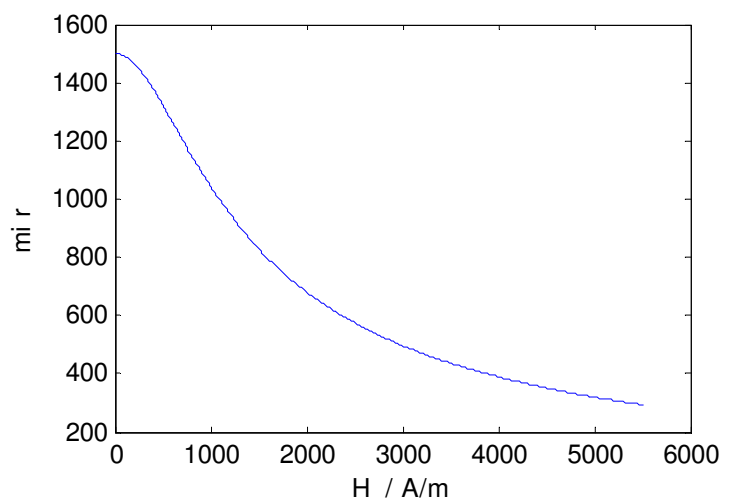
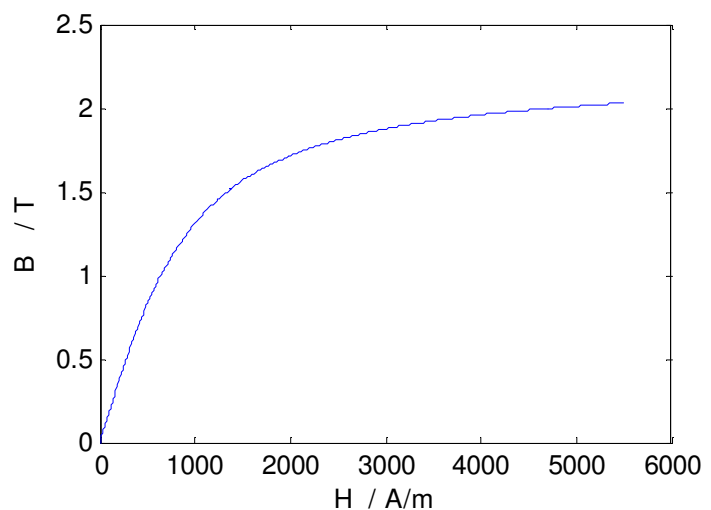
magnetnega pretoka pa je odvisna od oblike magnetilne krivulje. V analiziranem primeru bomo magnetilno krivuljo podali v obliki funkcije arkus tangens. V primerih ni upoštevana histerezna $B(H)$ karakteristika.

Slika na desni prikazuje predpostavljeno magnetilno krivuljo zapisano v obliki matematične funkcije arkus tangens.

$$B = \sqrt{2} * \tan(H/750);$$

1. MAGNETILNA KRIVULJA PODANA V MATEMATIČNI OBLIKI

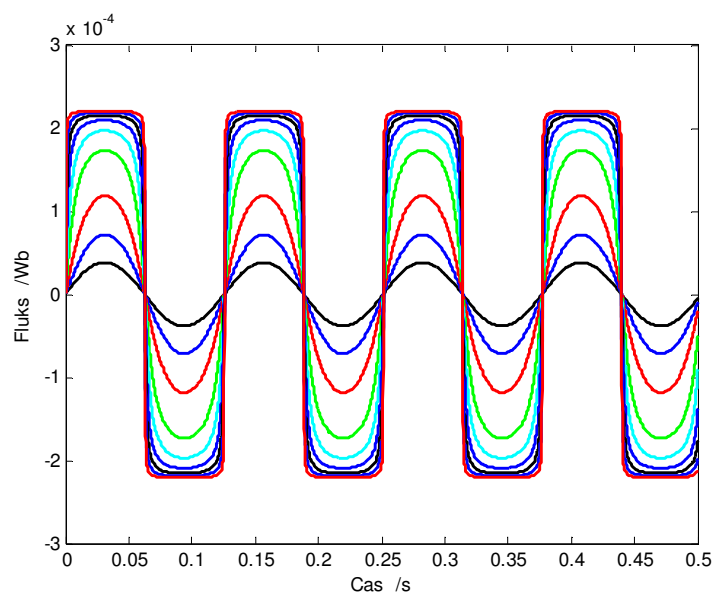
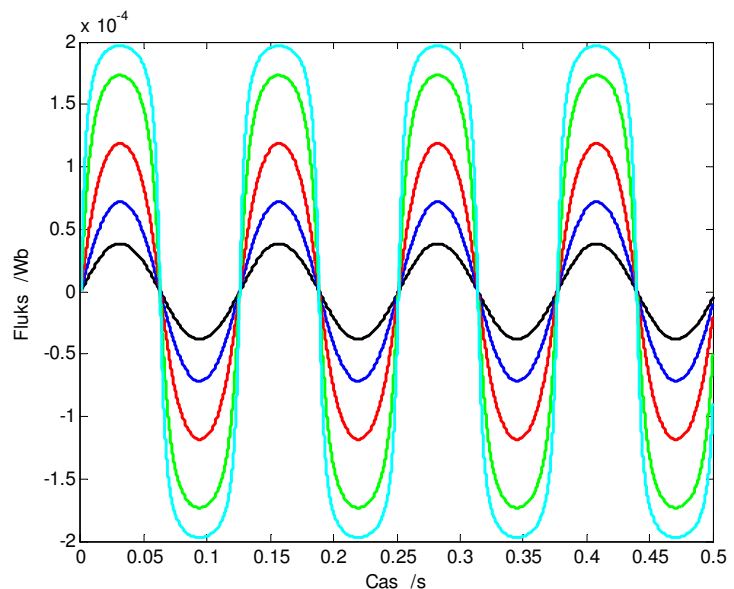
V skladu z enačbo $\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$ je relativna permeabilnost (μ_r) iz zgornje magnetilne krivulje prikazana na sliki na desni.



MAGNETNI PRETOK – FLUKS

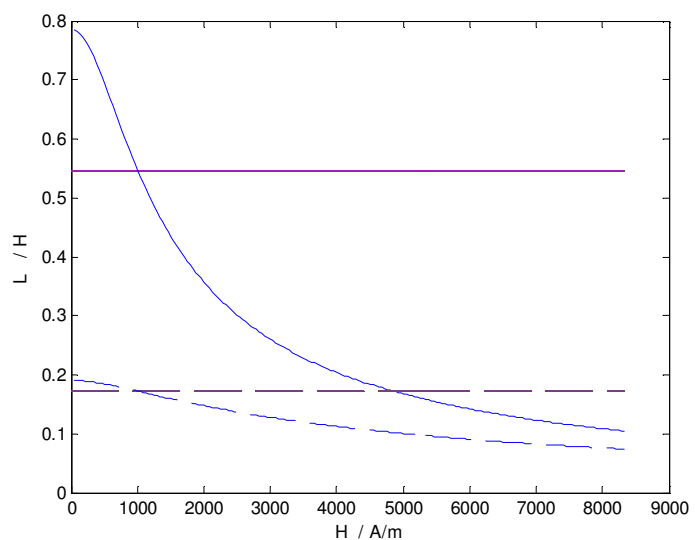
Ker predpostavimo homogenost gostote magnetnega pretoka v jedru, je fluks enak produktu magnetnega pretoka in preseka, torej je časovno spreminjanje fluksa v jedru enako časovnemu spreminjanju gostote magnetnega pretoka v jedru. Pri majhnih amplitudah toka je signal fluksa enak signalu vzbujalnega toka (sinusne oblike), pri večjih pa postaja bolj popačene oblike, ki gre v smeri pravokotnega signala, kot kažjo slike.

V nasičenju je oblika fluksa v jedru skoraj pravokotne oblike.



INDUKTIVNOST

Vzemimo primer jedra brez zračne reže in z zračno režo 0,5 mm. Primerjamo induktivnost določeno z linearizacijo magnetilne krivulje pri $H = 1000 \text{ A/m}$ in induktivnost, določeno iz $L = \frac{N\Phi}{I}$. V prvem primeru bo induktivnost konstantna (zgornja črta na sliki desno), v drugem pa nelinearna (polna črta). Z vstavitvijo zračne reže se zmanjša B in induktivnost. Zračna reža zmanjša nelinearnost induktivnosti.



INDUCIRANA NAPETOST

Kakšna pa bo inducirana napetost, če predpostavimo, da se bo signal "gibal" po izrisani magnetilni krivulji (brez histereze)? V tem primer je potrebno izračunati odvod fluksa po času.:

Vzbujalni tok je sinusne oblike.

$$i = I_{\max} \sin(\omega t);$$

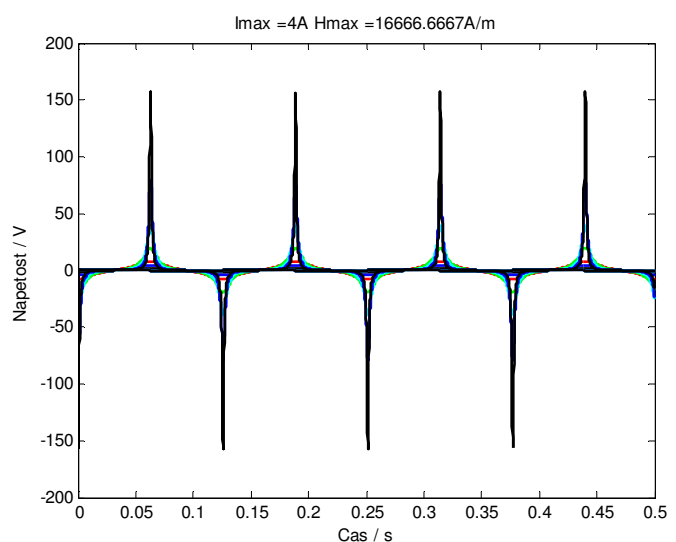
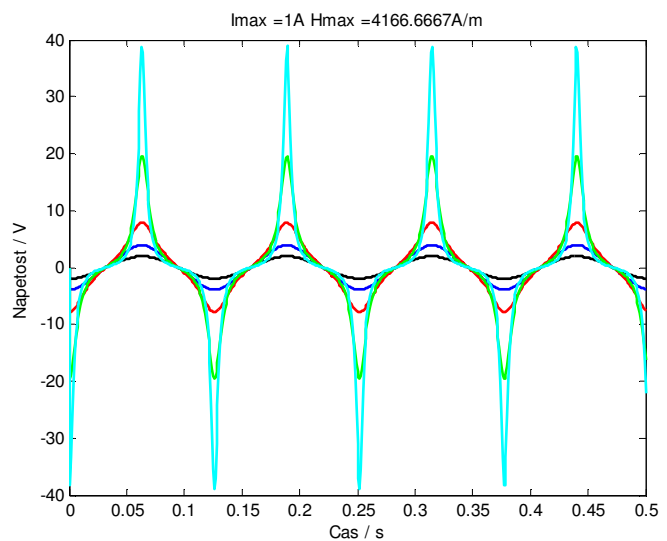
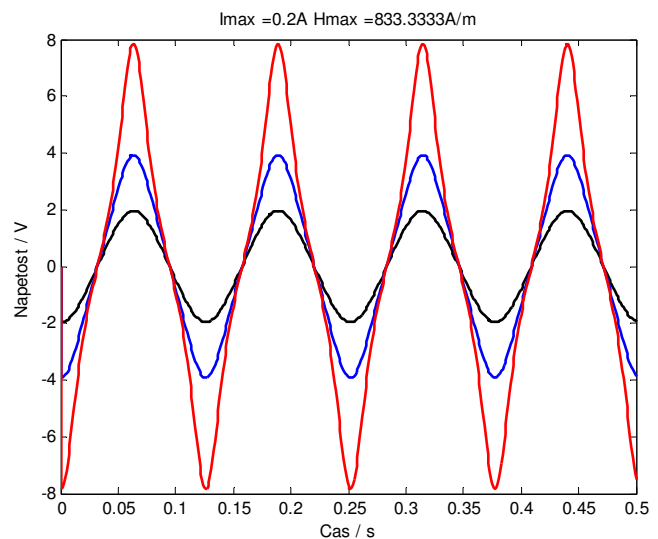
$$B = B_1 (N i / l);$$

$$\Phi = B A;$$

$$u = -N \frac{d\Phi}{dt};$$

Popačenje napetostnega signala je odvisno od amplitude toka. Za majhne amplitude je napetostni signal še dokaj nepopačen (kosinusne oblike), z večanjem amplitude pa se veča tudi popačenje. Slika desno zgoraj kaže tri oblike inducirane napetosti, pri sinusnem tokovnem vzbujanju z amplitudami toka 0,05, 0,1 in 0,2 A. Ugotovimo večanje popačenja signala z večanjem amplitude toka.

Popačenje se z večanjem amplitude toka še povečuje (sliki desno na sredini in spodaj). Inducirana napetost postaja pri zelo velikih vrednosti polja izrazito nelinearna. Dobimo napetostne špice, tam, kjer tokovni signal prehaja iz pozitivne v negativno vrednost, saj se okoli te točke fluks najhitreje spreminja.



2. DRUGA OBLIKA NELINEARNE MAGNETILNE KRIVULJE

Vzemimo magnetilno krivuljo, aproksimirano s zamaknjeno Arctan funkcijo v obliki Matlab formule:

```
function [B]= BB(H)

Hmax=10000;

s=abs(H)*(4*pi)/Hmax-pi;

B=(atan(s)-atan(-pi)).*sign(H)
```

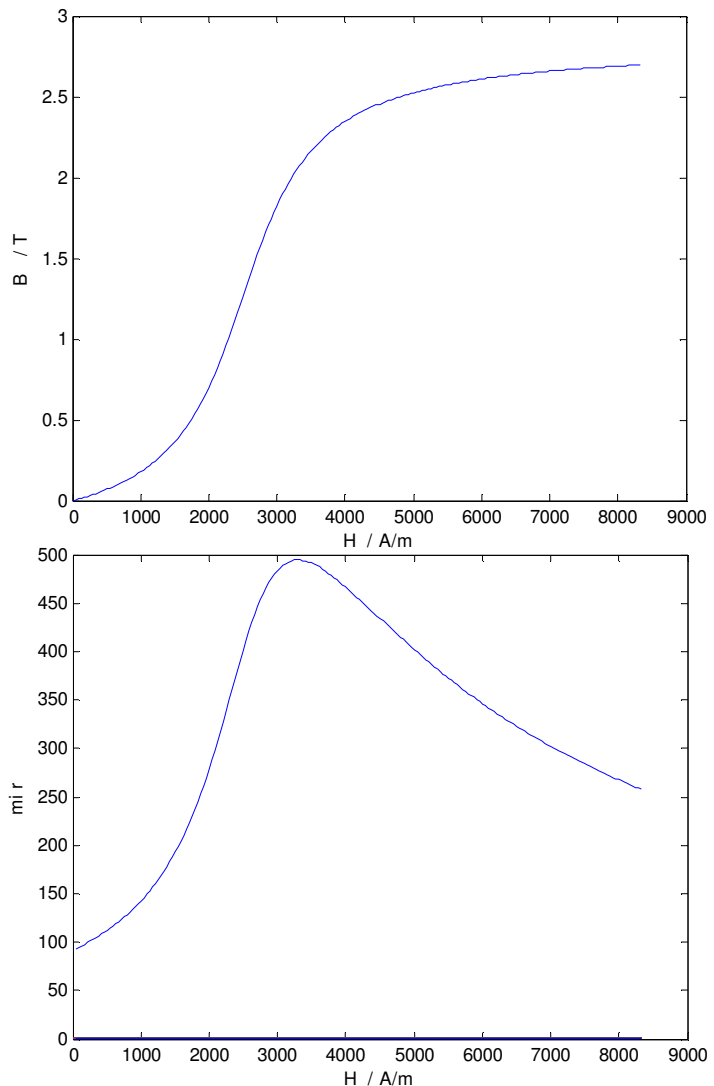
Funkcijo prikazuje slika desno.

STATIČNA RELATIVNA PERMEABILNOST

Dobimo jo iz kvocienta gostote in jakosti magnetnega polja. Enake oblike kot je (statična) relativna permeabilnost, je tudi induktivnost, izračunana iz kvocienta fluksa in toka v jedru.

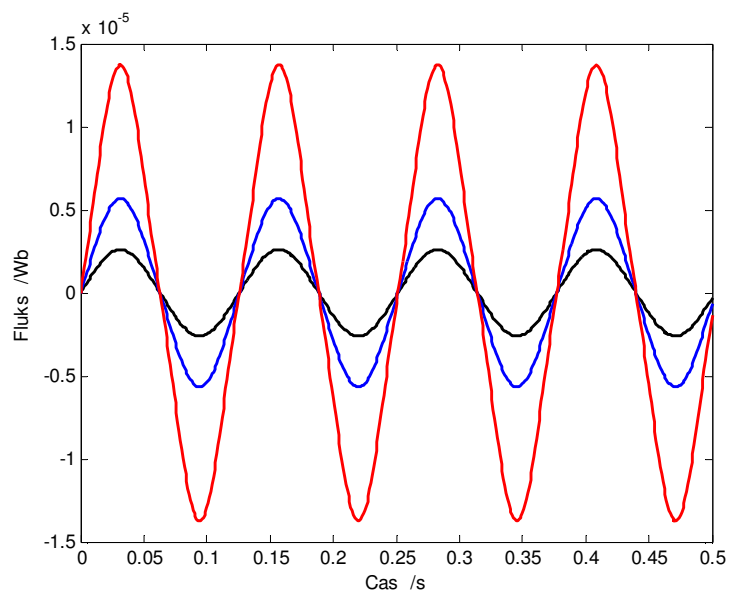
```
plot(H, BB(H)./(mi0*H));
```

Pri velikih vrednosti jakosti polja bi morala iti relativna permeabilnost proti vrednosti 1 (narisana gre proti 2,8).



MAGNETNI PRETOK – FLUKS

Ob predpostavki homogenega polja v jedru je fluks enak produktu gostote pretoka in preseka. Če upoštevamo nelinearno magnetilno krivuljo, je fluks odvisen od nelinearnosti $B(H)$ karakteristike. Na sliki desno je prikazan časovni potek fluksa skozi jedro za amplitude vzbujačnega toka 0,05, 0,1 in 0,2 A. Oblika toka je sinusna (ni narisana), oblika fluksa pa se od sinusne oblike razlikuje, saj se z



večanjem toka (jakosti polja) polje izraziteje večja (v skladu z relativno permeabilnostjo na prejšnji strani).

Če se amplituda toka še povečuje, prehaja jedro v del magnetilne krivulje, kjer se B spreminja počasneje s H -jem (bližanje nasičenju jedra). V tem delu postaja potek fluksa bolj "pravokotne" oblike. To se še izraziteje pojavlja v primeru, ko je vzbujanje tako veliko, da je jedro v nasičenju. V takem primeru bo fluks v jedru praktično pravokotne oblike, kot prikazuje spodnja slika.

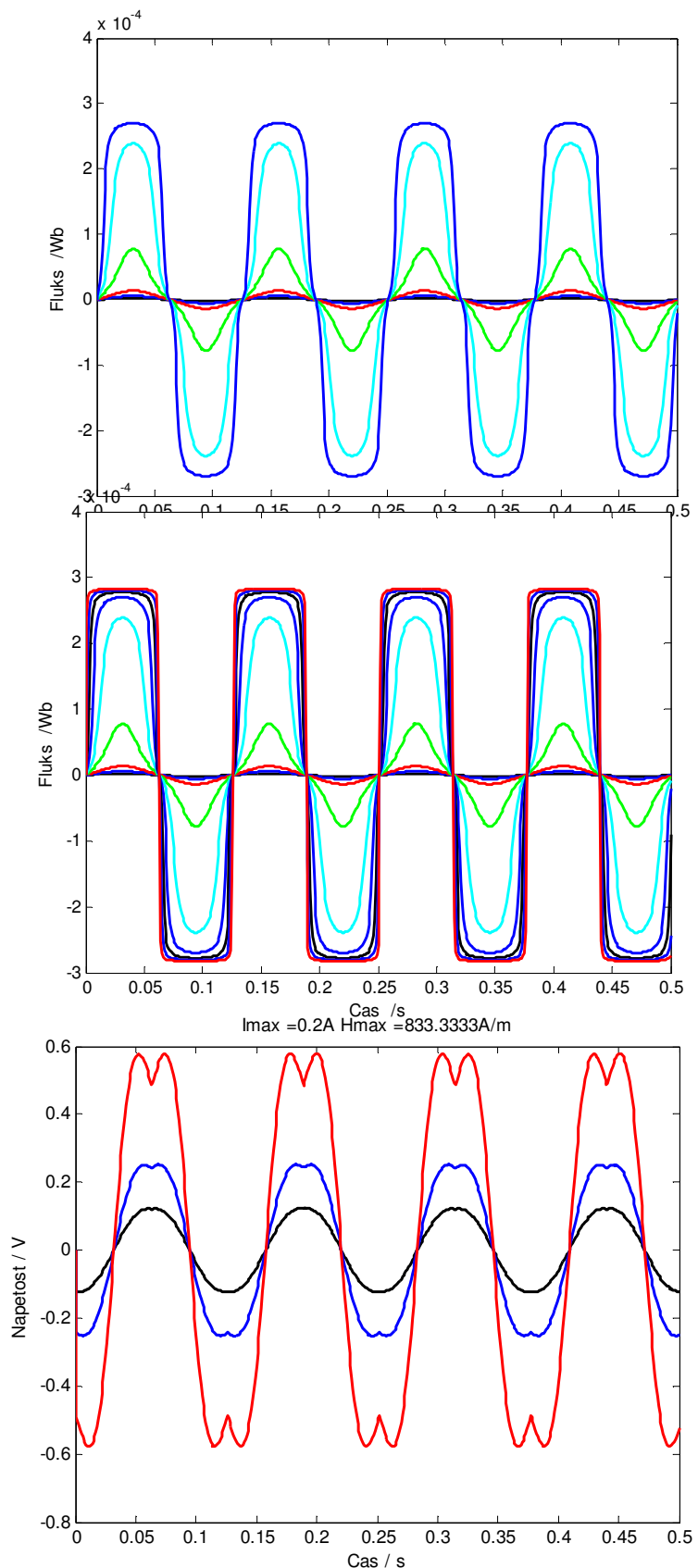
INDUKTIVNOST

Induktivnost izračunamo iz razmerja magnetnega sklepa in toka. V primeru linearne $B(H)$ karakteristike je induktivnost konstantna, sicer je odvisna od toka (H ja).

Nelinearnost lahko zmanjšamo z zračno režo v jedru, kar prikazuje slika. Dve ravni črti prikazujeta linearizirano induktivnost za $H = 1000 \text{ A/m}$ z in brez zračne reže in hkrati induktivnost z upoštevanjem nelinearnosti magnetilne krivulje. Z vključitvijo zračne reže se induktivnost zmanjša, hkrati pa je bolj konstanta.

INDUCIRANA NAPETOST

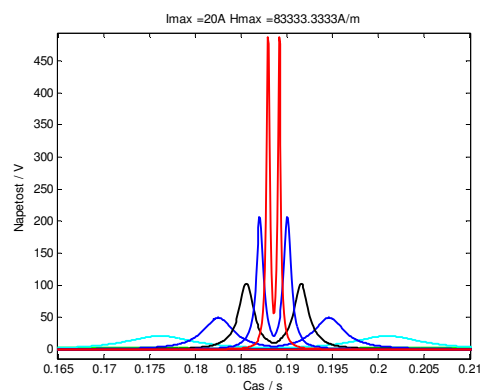
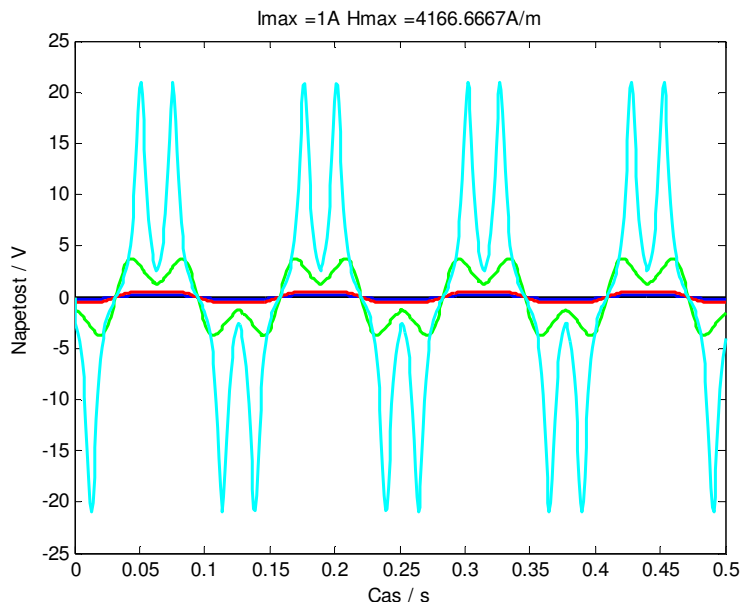
Inducirano napetost dobimo z odvajanjem fluksa po času in množenjem s številom ovojev. Pri majhnih tokih (jakostih polja) je napetostni signal še dokaj nepopačen (kosinusna funkcija), pri velikih pa je vedno bolj popačen. Zgoraj je prikazana inducirana napetost pri vzbujanju s sinusnim signalom amplitude toka 0,05, 0,1 in 0,2 A, spodaj pa dodana še napetostna signala pri vzbujanju s sinusnim tokom amplitude 0,5 A in 1 A.



Dodatno

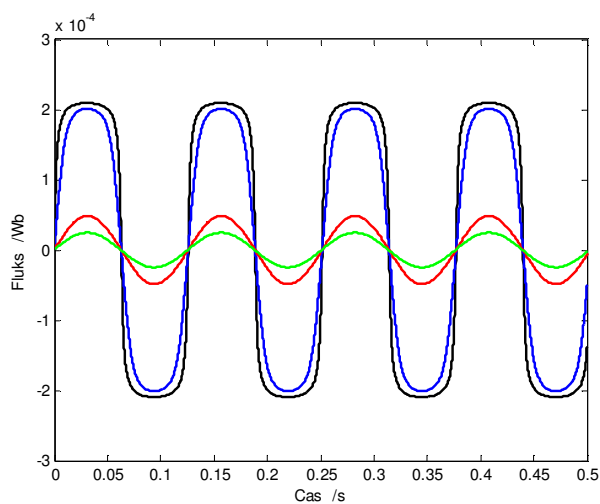
Pri nadaljnjem povečevanju amplitude toka je jedro vedno dlje časa v nasičenju. Tedaj se fluks časovno le malo spreminja, odvod fluksa (inducirana napetost) po času pa majhen. Dobimo izrazite špice inducirane napetosti, ki sta posledica prehoda jedra v nasičenje in iz nasičenja. Na sliki je prikazan detajl odzivov (inducirane

napetosti) za polovico periode.



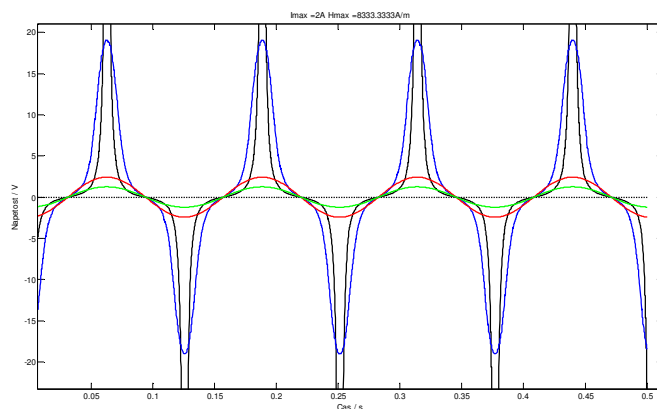
SPREMINJANJE DEBELINE ZRAČNE REŽE PRI ENAKI MAGNETILNI KRIVULJI KOT V PREJŠNJEM PRIMERU

V prejšnjem primeru smo uporabili jedro brez zračne reže. V primeru, da uporabimo jedro z zračno režo, se zveča magnetna upornost celotnega jedra, kar se odraža v manjši gostoti magnetnega pretoka v jedru in posledično manjšemu fluksu v jedru. To prikazuje slika za tok sinusne oblike amplitude 2 A in debeline zračnih rež (z zanemaritvijo stresanja polja) 0 mm (veliko popačenje in velik fluks), 0,5 mm, 5 mm in 10 mm (majhno popačenje in majhen fluks). (Izračun v Matlabu opravimo tako, da najprej določimo zvezo med B in H, nato določimo za poljuben H določen tok, potem pa izračunamo obratno, za točke na sinusni obliki toka določimo Bje).



```
H1=-12000:100:12000;
```

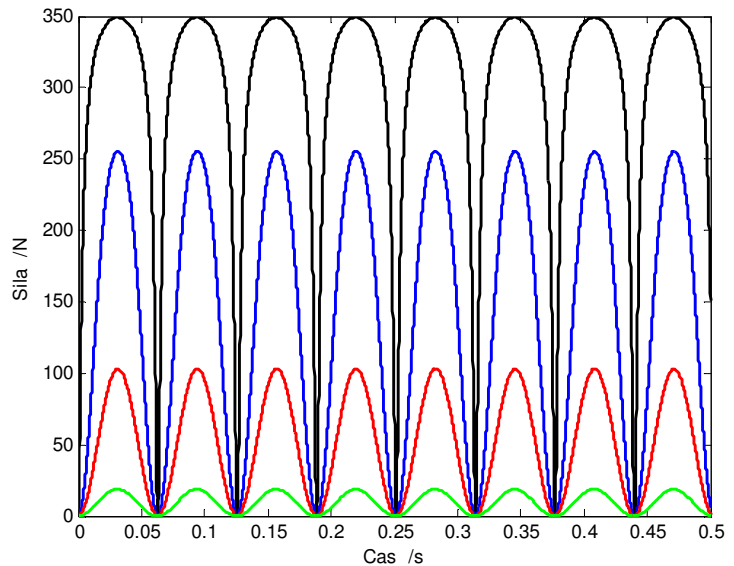
```
B1=BB1(H1)
```



Dodatno

```
Imax=2;  
  
for lz=[0,0.5e-3,5e-3,1e-2]  
  
i=Imax*sin(omega*t);  
  
II=H1*l/N+B1*lz/mi0/N;  
  
Bi= interp1(II,B1,i)  
  
Fluks1=Bi*A;
```

Napetostni signal dobimo z odvajanjem fluksa (in množenjem s številom ovojev). Pri majhnih zračnih režah je inducirana napetost velika vendar popačene oblike glede na tokovni signal, pri velikih zračnih režah pa je amplituda inducirane napetosti manjša, je pa zato signal manj popačen (kosinusne oblike).



Med poloma zračne reže deluje sila, ki je sorazmerna kvadratu gostote polja v zračni reži

$$F = \frac{B^2}{2\mu_0} A.$$
 Sila niha z dvojno frekvenco vzbujačnega signala in je v primeru nepopačenja tudi sinusne oblike.

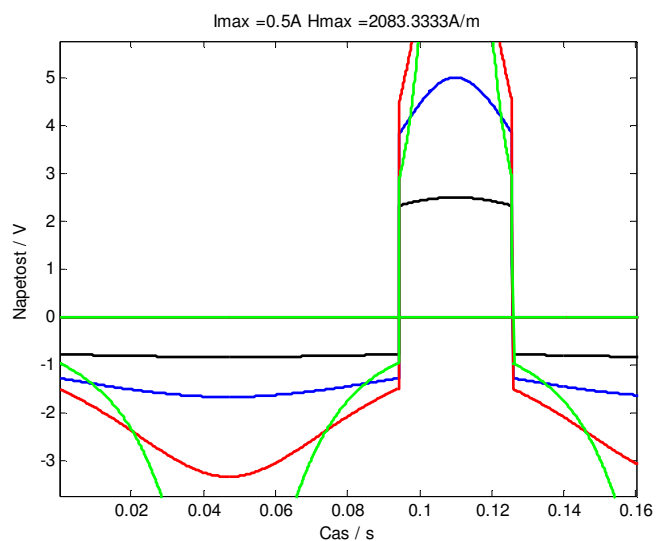
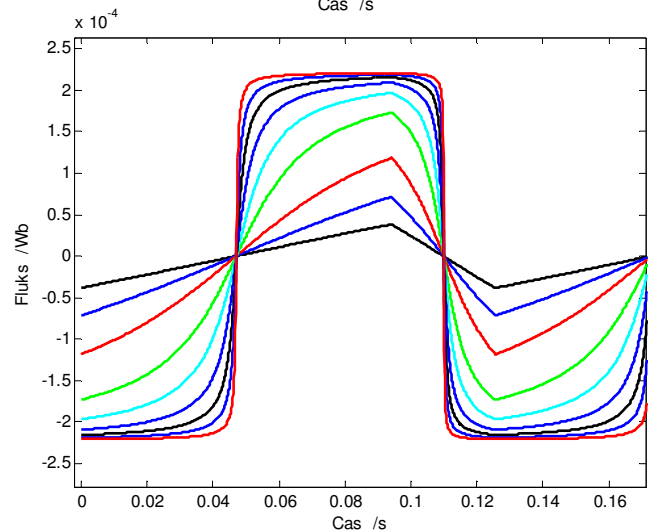
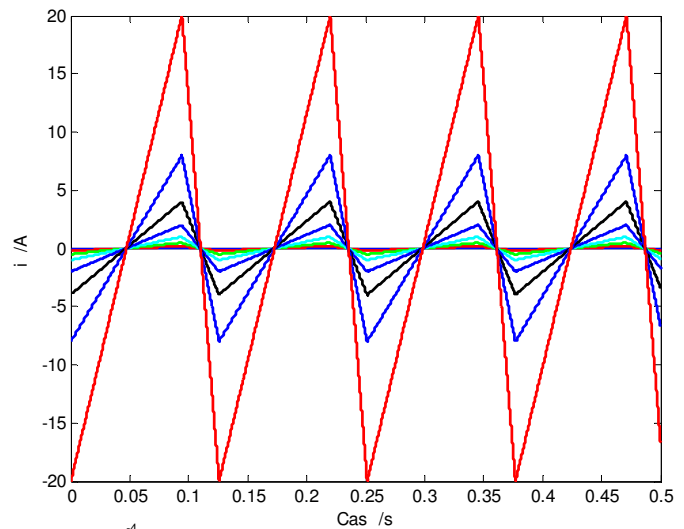
PRIMER TRIKOTNE OBLIKE TOKOVNEGA SIGNALA

Vzemimo tokovni signal na sliki desno, pri katerem dve tretjini periode signal narašča in eno tretjino pada.

Za tokovni signal na sliki dobimo fluks, ki je tudi trikotne oblike, dokler popačenje ni tako veliko. Pri večjih vrednostih vzbujanja se oblika fluksa približuje pravokotni obliki (v nasičenju).

Pri majhnih vzbujalnih signalih trikotne oblike je inducirana napetost pravokotne oblike različnih amplitud zaradi različnih naklonov tokovnega signala. Večji naklon, večja je inducirana napetost.

Pri večanju amplitude tokovnega signala se jedro nahaja vedno večji del časa v nasičenju, zato bo špica napetostnega signala v bližini točke, ko prehaja tok iz pozitivne v negativno vrednost.



Program za izračune:

Celoten program za izračune (v enem primeru je potrebno uporabiti funkcijo BB, v drugem pa BB1). Za vmesne prikaze je potrebno dodati funkcijo break.

```

mi0=4*pi*1e-7;
A=1e-4;
l=0.24;
N=1000;
Imax=2;
I=0:0.01:Imax;

Fluks=B*A;
II=H*l/N;
L=N*Fluks./II
plot(H,L); xlabel('H / A/m'); ylabel('L / H')

% Z zracno rezo
lz=0.5e-3;
Bz1000=mir1000*mi0*1000;
Fluks=Bz1000*A
I1000=(1000*l+Bz1000/mi0*lz)/N;
L=N*Fluks/I1000
plot(H,ones(length(H))*L,'--')

plot(H,BB(H)); xlabel('H / A/m'); ylabel('B / T')

figure; plot(H,BB(H)./(mi0*H)); xlabel('H / A/m'); ylabel('mi r')

% lineariziram pri H=1000
B1000=BB(1000);
mir1000=B1000/(mi0*1000)
Fluks=B1000*A
I1000=1000*l/N;
L=N*Fluks/I1000

plot(H,ones(length(H))*L)
hold on
% racunam z magnetilno krivuljo
B=BB(H);

H1=0:100:5000;
B1=BB(H1)
plot(H1,B1)
figure;

```



```

% INDUCIRANA NAPETOST

% Racunam inducirano napetost (BREZ
UPOSTEVANJA ZRACNE REZE)

hold off

j=0; barva=['k','b','r','g','c','b']

for Imax=[0.05,0.1,0.2,0.5,1]

dt=0.001;

t=0:dt:0.5;

omega=50;

i=Imax*sin(omega*t);

Hmax=N*Imax/l;

B=BB(N*i/l);

Fluks=B*A;

%plot(t,i)

u=-N*[0 diff(Fluks)]/dt;

j=j+1;

plot(t,u,'Color',barva(j),'LineWidth',2)

xlabel('Cas / s'); ylabel('Napetost / V');

title(strcat('Imax = ',num2str(Imax), 'A', ' Hmax = ',num2str(Hmax), 'A/m'))

hold on

k = waitforbuttonpress

end

```

```

function [B]= BB(H)

B=sqrt(2)*atan(H/750);

```

```

function [B]= BB(H)

Hmax=10000;

s=abs(H)*(4*pi)/Hmax-pi;

B=(atan(s)-atan(-pi)).*sign(H)

```

12. ENERGIJA MAGNETNEGA POLJA

Vsebina poglavja: moč in energija, energija sistema tuljav, nadomestna induktivnost, energija v nelinearnih magnetnih strukturah, gostota energije, izračun induktivnosti iz magnetne energije, energija histerezne zanke, izgube v jedru, produkt BH, magnetna sila.

ENERGIJA SHRANJENA V POLJU TULJAVE

Izhajamo iz moči na tuljavi, ki je enaka produktu toka in napetosti na tuljavi $p = u_L i_L$. To so sedaj časovno spreminjajoče veličine, lahko bi torej pisali tudi $p(t) = u_L(t) i_L(t)$. Zanima nas izraz za izračun moči ob upoštevanju izraza za padec napetosti na tuljavi $u_L = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$. Dobimo

$p(t) = L \frac{di(t)}{dt} \cdot i(t)$. Integracija moči po času pa je energija $\int_{t_0}^t dW(t) = \int_{t_0}^t p(t) dt$. Integracijo po času

lahko nadomestimo z integracijo po toku $W(t) - W(t_0) = \int_{t_0}^t p(t) dt = \int_{t_0}^t L \frac{di}{dt} i dt = \int_{i(t_0)}^{i(t)} L i di$ in dobimo

$W(t) - W(t_0) = \frac{1}{2} L (i^2(t) - i^2(t_0))$. Ker je $W(t_0) = \frac{1}{2} L i^2(t_0)$, je trenutna energija (ob času t) enaka

$$W(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad (12.1)$$

To je energija, ki je shranjena v magnetnem polju tuljave v časovnem trenutku t .

Z upoštevanjem zveze med magnetnim sklepom in tokom skozi tuljavo $\Psi(t) = Li(t)$, lahko energijo izrazimo tudi s trenutno vrednostjo magnetnega sklepa

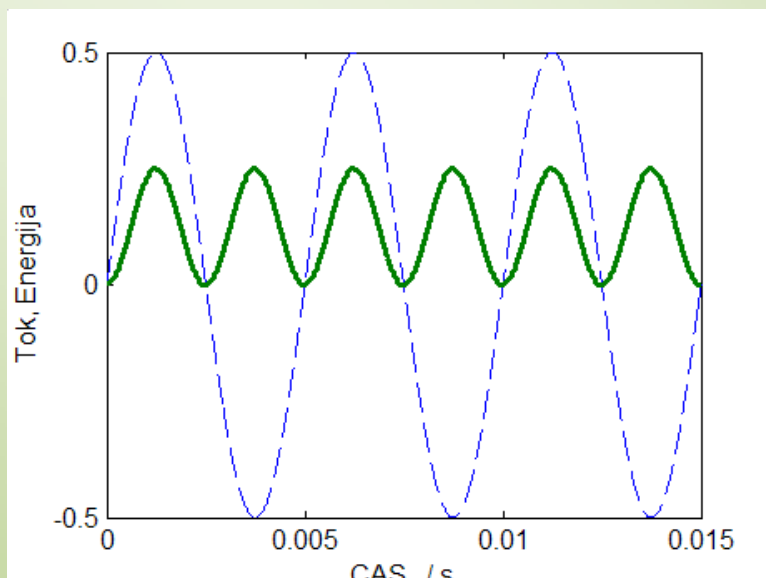
$$W(t) = \frac{\Psi^2(t)}{2L} \quad (12.2)$$

PRIMER

Izračunajmo in skicirajmo časovni potek energije v tuljavi z induktivnostjo 2 mH, če skozi ovoje teče tok $0,5 \sin(\omega t)$ A. Perioda signala je $T = 5$ ms. Določimo tudi maksimalno vrednosti te energije.

Izračun: Časovna potek energije v tuljavi je $W(t) = 0,5 L I_0^2 \sin^2(\omega t)$. Maksimalna energija nastopi pri četrtini periode tokovnega vzbujanja (pri $\omega t = \pi/2$). Tedaj je $W_{max} = \underline{\underline{0,25 \text{ mJ}}}$.

Napotek: Funkcijo $\sin^2(\omega t)$ enostavno izrišemo, če upoštevamo zvezo $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))$. Gre torej za harmonični signal dvojne frekvence osnovnega, ki ima dodatno enosmerno komponento, ki je ravno enaka polovici amplitude.



SLIKA: Časovni potek toka (črtkano, v [A]) in magnetne energije (polno, v [mJ]) v polju tuljave. Energija je sorazmerna kvadratu toka in v primeru harmoničnega vzbujanja doseže maksimum v četrtini periode signala. Takrat je enaka $0,5LI_0^2$, kjer je I_0 amplituda toka. **Matlab:** `t=0:1e-6:15e-3; om=2*pi/5e-3; i=0.5*sin(om.*t); W=0.25*sin(om.*t).^2; plot(t,i,t,W)`

ENERGIJA SISTEMA VEČ TULJAV

Kakšne pa so energijske razmere, če imamo sistem sklopljenih tuljav več? V tem primeru je potrebno upoštevati še magnetno energijo zaradi skupnega tvorjenja magnetnega polja v sistemu več tuljav. Magnetna energija v sistemu dveh tuljav je

$$W = \int_{t_0}^t \left((u_{L_1} \pm u_{M_{12}}) i_1 + (u_{L_2} \pm u_{M_{21}}) i_2 \right) dt = \int_{t_0}^t \left[\left(L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2}{dt} \right) i_1 + \left(L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1}{dt} \right) i_2 \right] dt$$

ak je v obeh primerih enak: pozitiven, če se fluksa tuljav »podpirata« in negativen, če se »ne podpirata«. Skupna energija je ob upoštevanju zveze $M = M_{12} = M_{21}$ enaka¹⁹

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2. \quad (12.3)$$

Poglejmo še poseben primer, ko gre skozi obe tuljavi isti tok. Tedaj lahko pišemo

$$W = \frac{1}{2} L_1 i^2 + \frac{1}{2} L_2 i^2 \pm M i^2. \text{ Izpostavimo } i^2/2 \text{ in dobimo}$$

$$W = \frac{1}{2} (L_1 + L_2 \pm 2M) i^2. \quad (12.4)$$

Izraz v oklepaju lahko »razumemo« kot skupno (nadomestno) induktivnost, ki bo torej

$$L_{\text{nad}} = L_1 + L_2 \pm 2M, \quad (12.5)$$

tako, da je energija sistema dveh sklopljenih tuljav s skupnim tokom enaka

$$W = \frac{1}{2} L_{\text{nad}} i^2. \quad (12.6)$$

Splošna formula za sistem N sklopljenih tuljav je²⁰

$$W(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N L_{jk} \cdot i_j(t) \cdot i_k(t) \quad (12.7)$$

¹⁹ Rešujemo enačbo

$$W = \int_{t_0}^t \left((u_{L_1} \pm u_{M_{12}}) i_1 + (u_{L_2} \pm u_{M_{21}}) i_2 \right) dt = \int_{t_0}^t (L_1 i_1 di_1 \pm M_{12} i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 \pm M_{21} i_2 di_1) \quad \text{pri čemer}$$

smatramo, da velja $M = M_{12} = M_{21}$. Z upoštevanjem integracije »per partes«: $d(i_1 i_2) = i_1 di_2 + i_2 di_1$ velja

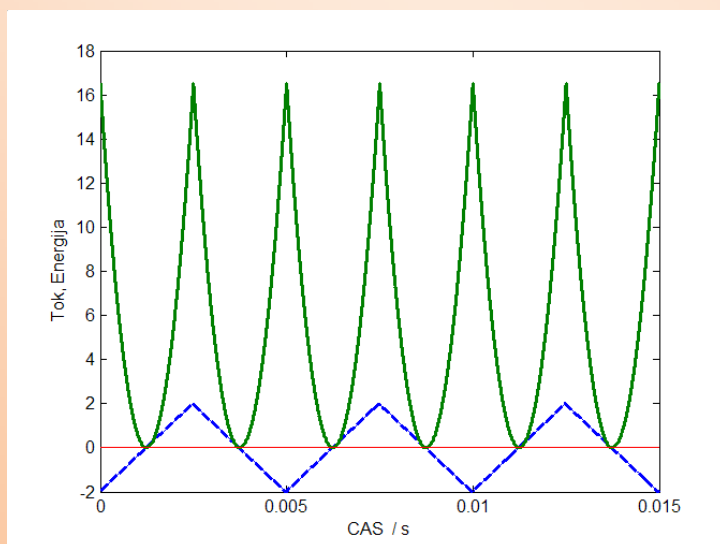
$$\pm (M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1) = \pm M d(i_1 i_2) \text{ dobimo } \int_{t_0}^t (L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 \pm M d(i_1 i_2)) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2.$$

²⁰ Za izpeljavo glej npr. A.R.Sinigoj, Osnove elektromagnetiko, 367- 370.

Primer: Tuljavi z induktivnostima 2 mH in 4 mH sta vezani zaporedno. Njuna fluksa se podpirata s faktorjem sklopa 0,8. Tok skozi tuljavi je simetrične žagaste oblike s periodo 5 ms in amplitudo 2 A. Skicirajmo potek skupne energije tuljav in izračunajmo velikost energije v času $t = 2,5$ ms.



SLIKA: Sistem dveh sklopljenih tuljav z istim tokom in nadomestno vezje.



SLIKA: Tok (modra črtkana, v [A]) in skupna energija sistema dveh tuljav (polna črta, v [mJ]).

MATLAB: `Lnad=8.26e-3; t=0:1e-6:15e-3; om=2*pi/5e-3; i=2*sawtooth(om.*t,0.5); W=1e3*0.5*Lnad*i.^2; plot(t,i,t,W,t,zeros(1,length(t)))`

Izračun: Medsebojno induktivnost določimo iz zveze $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,8\sqrt{2 \cdot 4} \text{ mH} \cong 2,26 \text{ mH}$. Ker se fluksa vzajemno podpirata je nadomestna induktivnost enaka

$L_{nad} = L_1 + L_2 + 2M = (2 + 4 + 2 \cdot 2,26) \text{ mH} = 10,52 \text{ mH}$. Časovni potek energije je parabolično naraščanje in upadanje z dvojno periodo tokovnega vzbujanja. V času 2,5 ms je tok enak 2A in energija je tedaj

$$W = \frac{1}{2} i^2 L_{nad} = 0,5 \cdot (2\text{A})^2 \cdot 10,52 \text{ mH} = 21,04 \text{ mJ}.$$

IZPELJAVA IZRAZA ZA GOSTOTO MAGNETNE ENERGIJE

Pri doslej izpeljanih izrazih za energijo v magnetnem polju magnetnih struktur (tuljav) smo predpostavili linearno zvezo med fluksom in tokom: $\Phi = Li$. Ta predpostavka je pogosto upravičena, vsekakor tedaj, ko nimamo opravka z magnetnimi materiali ali pa tedaj, ko je upravičena linearizacija magnetilne krivulje. V teh primerih je relativna permeabilnost konstantna.

Sedaj pa bomo obdelali še primer, ko linearizacija magnetilne krivulje ni upravičena (prevelika napaka). Zanima nas torej energija magnetnega polja v nelinearnih strukturah, v feromagnetnih jedrih, kjer je zveza med B-jem in H-jem oziroma magnetnim sklepom in vzbujalnim tokom nelinearna. Še več, običajno imamo opravka s histerezno zvezo med B in H.

Izhajamo iz osnovne zveze $p = iu$ in $u = \frac{d\Psi}{dt}$, od koder je $dW = p dt = i d\Psi$. Energija, potrebna za

magnetenje od časa 0 do t je enaka $W_{mag}(t) = \int_0^t i d\Psi$. Vzemimo feromagnetno jedro, tesno ovito z N

ovoji. Ob upoštevanju Amperovega zakona $Ni = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$ in zveze $d\Psi = Nd\Phi = N(\vec{B} \cdot d\vec{A})$, pa

tudi tega, da bo potrebno paziti na časovno spremembo Bja, dobimo

$W_{mag}(t) = \int_0^t \oint_L \int_A \left(\frac{1}{N} \vec{H} \cdot d\vec{l} \right) (Nd\vec{B} \cdot d\vec{A})$. Enačbo preuredimo tako, da združimo integracijo po površini in dolžini v integracijo po volumnu²¹:

$$W_{mag}(t) = \int_V \left(\int_0^t \vec{H} \cdot d\vec{B} \right) dV = \int_V w_{mag}(t) dV \quad (12.8)$$

V oklepaju v enačbi (12.8) lahko razpoznamo **gostoto magnetne energije**, ki jo lahko zapišemo kot

$$w_{mag}(t) = \int_{B(t)} \vec{H} \cdot d\vec{B}, \quad (12.9)$$

pri čemer je potrebno integrirati jakost polja po gostoti pretoka. Če magnetimo material od $B = 0$ T

do nekega B_0 , bo $w(B_0) = \int_0^{B_0} \vec{H} \cdot d\vec{B}$.

²¹ To lahko naredimo, ker so trije od štirih vektorjev v integralu kolinearni (enako usmerjeni). To so $d\vec{B}$, $d\vec{A}$, $d\vec{l}$. Zato lahko združimo $(\vec{H} \cdot d\vec{B})$ in $(d\vec{l} \cdot d\vec{A})$.

ENERGIJA V LINEARNIH MAGNETNIH STRUKTURAH

V primeru, da imamo opravka z materialom, ki ga lahko opišemo z linearno magnetilno krivuljo, lahko uporabimo zvezo $B = \mu H$, kar vstavimo v gornjo enačbo in dobimo za gostoto energije izraz

$$w = \frac{B^2}{2\mu} \quad (12.10)$$

Celotno energijo magnetenja dobimo z integracijo gostote energije po volumnu

$$W = \int_V \frac{B^2}{2\mu} dV \quad (12.11)$$

Če predpostavimo homogeno polje v volumnu V (kar smo naredili pri obravnavi magnetnih struktur na feromagnetnih jedrih), pa je energija kar

$$W = \frac{B^2}{2\mu} V \quad (12.12)$$

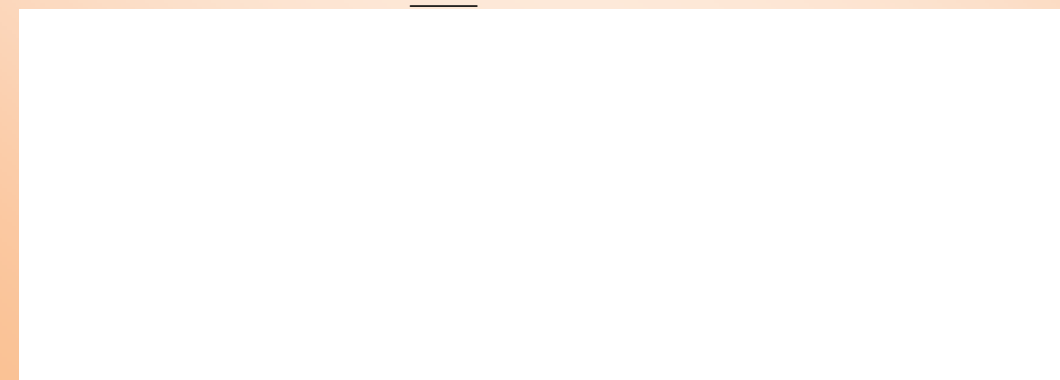
To enačbo lahko zapišemo tudi s H-jem kot $W = \frac{\mu H^2}{2} V$.

Primer: Imamo jedro iz feromagnetnega materiala (brez zračne reže) z $\mu_r = 850$ ima 350 ovojev. Presek jedra ima površino 3 cm^2 , srednja dolžina gostotnice pa je 60 cm . Določimo magnetno energijo v jedru pri enosmernem toku skozi ovoje 2 A .

Izračun: $H = \frac{NI}{l} = \frac{350 \cdot 2 \text{ A}}{0,6 \text{ m}} = 1166,7 \text{ A/m}$

$$w = \frac{\mu_r \mu_0 H^2}{2} = \frac{850 \cdot 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} (1166,7 \frac{\text{A}}{\text{m}})^2}{2} = 727 \text{ J/m}^3$$

$$W = wV = 727 \cdot 0,6 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ J} = \underline{0,13 \text{ J}}$$



SLIKA: Primer jedra z linearno magnetilno krivuljo s prikazom gostote energije v jedru kot površine med magnetilno krivuljo in B osjo.

ENERGIJA V NELINEARNIH MAGNETNIH STRUKTURAH

V primeru, da je magnetilna krivulja nelinearna, je potrebno energijo računati neposredno iz enačbe (12.9). Lahko tudi zapišemo *diferencial gostote magnetne energije*, ki bo

$$dw = \vec{H} \cdot d\vec{B}. \quad (12.13)$$

Gostoto energije dobimo torej z integracijo površine med magnetilno krivuljo in osjo B:

$$w = \int_{B_{začetna}}^{B_{končna}} \vec{H} \cdot d\vec{B}. \quad (12.14)$$

Če upoštevamo celotno histerezno zanko, ugotovimo, da bo gostota energije v tem materialu enaka površini histerezne zanke:

$$w = A_{\text{BH zanke}}. \quad (12.15)$$

SLIKA: Primer jedra z nelinearno magnetilno krivuljo s prikazom gostote energije v jedru kot površine med magnetilno krivuljo in H osjo.

Primer: Vzemimo primer linearizirane magnetilne krivulje, ki jo opišemo s prelomnima točkama $B_1 = 1\text{ T}$, $H_1 = 1200\text{ A/m}$ in $B_2 = 1,2\text{ T}$, $H_2 = 2400\text{ A/m}$. Določimo gostoto magnetne energije v jedru feromagnetika s podano magnetilno krivuljo, če ga magnetimo od 0 T do gostote 1,1 T.

Izračun: Izračunati je potrebno integral po enačbi (12.14), ki pa ga v primeru linearizirane krivulje lahko določimo preprosto iz delnih površin krivulje:

$$w = \frac{1200\text{ A/m} \cdot 1\text{ T}}{2} + 1200\text{ A/m} \cdot 0,1\text{ T} + \frac{600\text{ A/m} \cdot 0,1\text{ T}}{2} = 750\text{ J/m}^3$$

SLIKA: Odsekoma zvezna magnetilna krivulja in gostota energije kot površina med histerezno krivuljo in B osjo.

PRODUKT B IN H (POMEMBEN PRI TRAJNIH MAGNETIH)

V poglavju 9 smo že govorili o trdomagnetnih in mehkomagnetnih materialih in omenili, da je lastnost trdomagnetnih materialov velika remanenčna gostota polja (B_r), pa tudi velika koercitivna jakost polja (H_c). Ugotovitev tega poglavja je, da je gostota magnetne energije sorazmerna produktu H ja in B ja. V tem smislu lahko delimo materialne na trdomagnetne in mehkomagnetne po maksimalni gostoti energije, ki jo dosežejo ti materiali. Ta produkt določimo kot pravokotnik z največjo površino v drugem kvadrantu magnetilne $B(H)$ krivulje. S pojmom gostote energije se v praksi predvsem označuje trdomagnetne materiale, ki se jih glede na ta kriterij lahko deli še nadalje: v t.i. konvencionalne trdomagnetne materiale s produktom $(BH)_{\max}$ med 2 in 80 kJ/m³ (npr. AlNiCo: aluminij-nikelj-kobalt) in visokoenergijske trdomagnetne materiali (npr. SmCo: samarij-kobalt in NeFeB: neodij-železo-bor) s produktom $(BH)_{\max}$ nad 80 kJ/m³. Tipične vrednosti prikazujeta sledeči tabeli (ponovno ugotovimo vzrajnost pojavljanja enot kot so Oe: Oerstead in G: Gauss):

Material	Composition (wt %)	Remanence B_r [tesla (gauss)]	Coercivity H_c [amp-turn/m (Oe)]	$(BH)_{\max}$ [kJ/m ³ (MGOe)]	Curie Temperature T_c [°C (°F)]	Resistivity ρ (Ω -m)
Tungsten steel	92.8 Fe, 6 W, 0.5 Cr, 0.7 C	0.95 (9500)	5900 (74)	2.6 (0.33)	760 (1400)	3.0×10^{-7}
Cunife	20 Fe, 20 Ni, 60 Cu	0.54 (5400)	44,000 (550)	12 (1.5)	410 (770)	1.8×10^{-7}
Sintered alnico 8	34 Fe, 7 Al, 15 Ni, 35 Co, 4 Cu, 5 Ti	0.76 (7600)	125,000 (1550)	36 (4.5)	860 (1580)	—
Sintered ferrite 3	BaO-6Fe ₂ O ₃	0.32 (3200)	240,000 (3000)	20 (2.5)	450 (840)	$\sim 10^4$
Cobalt rare earth 1	SmCo ₅	0.92 (9200)	720,000 (9,000)	170 (21)	725 (1340)	5.0×10^{-7}
Sintered neodymium-iron-boron	Nd ₂ Fe ₁₄ B	1.16 (11,600)	848,000 (10,600)	255 (32)	310 (590)	1.6×10^{-6}

SLIKA: Trdomagnetni materiali: kompozicija, B_r , H_c , $(BH)_{\max}$, Curiejeva temperatura in specifična upornost. Vir: Povzeto po ASM Handbook, Vol.2, ASM International, 1990.

Material	Composition (wt %)	Initial Relative Permeability μ_i	Saturation Flux Density B_s [tesla (gauss)]	Hysteresis Loss/Cycle [J/m ³ (erg/cm ³)]	Resistivity ρ (Ω -m)
Commercial iron ingot	99.95Fe	150	2.14 (21,400)	270 (2700)	1.0×10^{-7}
Silicon-iron (oriented)	97Fe, 3Si	1400	2.01 (20,100)	40 (400)	4.7×10^{-7}
45 Permalloy	55Fe, 45Ni	2500	1.60 (16,000)	120 (1200)	4.5×10^{-7}
Supermalloy	79Ni, 15Fe, 5Mo, 0.5Mn	75,000	0.80 (8000)	—	6.0×10^{-7}

SLIKA: Mehkomagnetni materiali: kompozicija, začetna permeabilnost, maksimalna (saturacijska) gostota polja, histerezne izgube (gostota energije), specifična upornost. Vir: Povzeto po ASM Handbook, Vol.2, ASM International, 1990.

HISTEREZNE IZGUBE

Energija, vložena v grajenje magnetnega polja v nelinearni magnetni strukturi je nepovratna. Uporabi se za magnetenje materiala, za obračanje t.i. Weissovih obsegov, pri čemer pride do (mehanskega) trenja. Če je tok v ovojih na jedru izmeničen in »obhodi« histerezo krivuljo f krat na sekundo (frekvenca signala), bo gostota izgubne moči enaka (iz $w = pT \Rightarrow p = w/T = fw$):

$$p_{hist} = f A_{BH \text{ zanke}}$$

(12.16)

celotna histerezna izgubna moč pa bo enaka gostoti moči pomnoženi z volumnom materiala²²

$$P_{hist} = p_{hist} V. \quad (12.17)$$

Opozorilo: $A_{BH \text{ zanke}}$ predstavlja gostoto energije, enota je $\left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \text{T} = \frac{\text{A}}{\text{m}} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$, V predstavlja volumen [m^3].

Primer: Določimo histerezo izgubno moč jedra prostornine 120 cm^3 , katerega magnetilna krivulja je na sliki. (Je v obliki kvadrata z $B_r = 1,5 \text{ T}$ in $H_c = 2000 \text{ A/m}$). Vzbujačni signal ima frekvenco 50 Hz .



SLIKA: Histezna zanka določena z B_r in H_c .

Izračun: Površina histerezne zanke je $4 \cdot 1,5 \text{ T} \cdot 2000 \text{ A/m} = 12000 \text{ J/m}^3$. To je gostota magnetne energije, ki je potrebna za magnetenje jedra. Gostota izgubne moči je po enačbi (12.15): $50 \text{ s}^{-1} \cdot 12000 \text{ J/m}^3 = 6 \cdot 10^5 \text{ J/(s m}^3\text{)}$, celotna moč histereznih izgub pa $120 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot 6 \cdot 10^5 \text{ J/(s m}^3\text{)} = 72 \text{ W}$.

²² V praksi se običajno histerezne izgube računa po formuli $k_h f B^2 [\text{W/kg}]$, kjer je k_h konstanta. Za več informacij o načrtovanju transformatorjev in dušilk priporočam priročnik F. Mlakar, I. Kloar: Mali transformatorji in dušilke, Elektrotehniški vestnik, 1970. (na razpolago v knjižnici FE). V praktičnih formulah pogosto namesto kvadrata B ja lahko nastopa tudi različen faktor, tako recimo Steinmetzova formula vzame za eksponent vrednost 1,6, konstanta k_h pa npr. 0,0002 za mehko železo in 0,003 za jeklo. (M.A. Plonus: Applied Electromagnetics). Poleg histereznih izgub lahko nastopajo še izgube zaradi vrtničnih tokov. Te so za prevodne feromagnetike običajno sorazmerne kvadratu gostote pretoka in kvadratu frekvence ($f^2 B^2$).

DOLOČITEV INDUKTIVNOSTI IZ MAGNETNE ENERGIJE

Enačba za izračun energije v magnetnem polju je primerna tudi za določevanje lastne induktivnosti. Pri enosmernem toku skozi vodnik je magnetna energija v prostoru enaka

$$W = \frac{LI^2}{2} \quad (12.18)$$

Če je induktivnost neznana, magnetno energijo, ki jo v prostoru povzroča tok v vodniku pa znamo določiti na drug način, lahko induktivnost iz energije določimo iz

$$L = \frac{2W}{I^2}. \quad (12.19)$$

Kako pa izračunamo magnetno energijo na drugačen način kot s pomočjo induktivnosti? Iz poznavanja gostote magnetnega pretoka v prostoru. Določimo gostoto energije po enačbi $w = \frac{B^2}{2\mu}$

in jo integriramo po volumnu:

$$W = \int_V w dV \quad (12.20)$$

Ta zapis je posebno primeren tedaj, ko je težko določiti fluks skozi ploskev. Tak primer so polni vodniki, ki imajo magnetno polje tudi v notranjosti vodnika in ne le v zunanosti. Torej je tudi v notranjosti vodnika določena magnetna energija, ki prispeva k celotni induktivnosti vodnika.

Primer: Določimo induktivnost na enoto dolžine za notranjost (okroglega) vodnika polmera 1,5 cm. Vodnik je iz neferomagnetnega materiala.

Slika: Okrogel vodnik polmera R.

Izračun: Najprej z uporabo Amperovega zakona določimo gostoto pretoka v notranjosti in dobimo

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r$ (glej poglavje o Amperovem zakonu). Nato zapišemo gostoto energije znotraj vodnika

v skladu z enačbo: $w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r \right)^2 / \frac{1}{2\mu_0}$. Gostoto energije je potrebno integrirati po

celotnem volumnu vodnika $W = \int_V w dV = \int_0^{r_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r \right)^2 \frac{1}{2\mu_0} (2\pi r dr \cdot l) = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$, kjer je l dolžina

vodnika. Induktivnost znotraj vodnika je enaka $L = \frac{2W}{I^2} \Rightarrow L/l = \frac{\mu_0}{8\pi}$. Dobimo zanimiv rezultat, da induktivnost notranjosti vodnika ni odvisna od polmera vodnika. Na enoto dolžine je

enaka $L/l = \frac{4\pi 10^{-7} \text{ H/m}}{8\pi} = \underline{\underline{50 \text{ nH/m}}}$.

INDUKTIVNOST PREMEGA VODNIKA IN INDUKTIVNOST DVOVODA

V prejšnjem primeru smo že določili induktivnost v notranjosti vodnika. V primeru premega vodnika moramo določiti še del energije izven vodnika, v primeru dvovoda pa moramo induktivnost notranjosti podvojiti (zaradi dveh vodnikov) in dodati še preostali del zaradi energije, shranjene v magnetnem polju v okolici dvovodov.

Premi vodnik: Gostota polja izven vodnika je $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, gostota energije je torej

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2, \text{ celotna energija pa } W = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 l 2\pi r dr = k \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} = \infty. \text{ Dobimo}$$

rezultat, s katerim prav gotovo ni nekaj v redu, saj energija ne more biti neskončna. Pa vendar, rezultat je smiseln, če je smiseln tudi neskončen vodnik. Neskončen vodnik pa je le koncept, ki nam poenostavi razumevanje polja, saj zelo dolg vodnik v svoji okolici povzroča polje, ki ni dosti drugačno, kot bi ga povzročal neskončen vodnik. Se pa zaplete pri določenih izračunih, kjer postane neskončnost problematična, kot je na primer računanje fluksa ali energije v neskončni okolici vodnika. Rešitev je v upoštevanju realnih primerov, kjer mora biti vodnik zaključen, da lahko v njem teče tok.

Dvovod: Tak je primer dvovoda, ki smo ga že obravnavali v poglavju o magnetnem pretoku, kjer smo izračunali induktivnost med dvovodoma. Lahko pa induktivnost takega dvovoda obravnavamo tudi iz izraza za energijo, kjer je potrebno namesto integracijo do neskončnosti integrirati od polmera

$$\text{vodnika do sredine drugega vodnika. Dobimo } W = \int_{r_0}^d \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 l 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_{r_0}^d \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{d}{r_0}$$

$$\text{in } L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{d}{r_0}. \text{ S tem smo upoštevali šele energijo, ki jo prispeva en vodnik. Za celotno}$$

induktivnost dvovoda moramo upoštevati fluksa obeh vodnikov, skupni rezultat še z induktivnostjo v

$$\text{notranjosti vodnika bo } L_{\text{dvovoda}} = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{r_0} \right).^{23}$$

²³ Rezultat je pravilen, čeprav je bil izračun induktivnosti izven notranjosti vodnika nekoliko poenostavljen. Bolj poglobljena analiza upošteva razdelitev vodnika na splošne zanke in izračun povprečnega pretoka med dvovodoma. (Glej na npr. A.R: Sinigoj: Osnove elektromagnetike) Končni rezultat pa je enak, kot ta, ki smo ga navedli.

MAGNETNA SILA

Ko nas zanima sila med poloma magneta, v zračni reži magneta ali pa med dvema vodnikoma s tokom, moramo ločiti dva primera:

- 1) ko ni virov, ki bi dovajali energijo v sistem. Tedaj bo X komponenta sile enaka

$$F_x = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial x} \right|_{\Phi = \text{konst}} \quad (12.21)$$

ali v splošnem

$$\vec{F} = - \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}, \frac{\partial W_m}{\partial y}, \frac{\partial W_m}{\partial z} \right) \bigg|_{\Phi = \text{konst}} \quad (12.22)$$

kjer je ∂W sprememba energije shranjene v magnetnem polju. Mehansko delo bo v tem primeru zmanjšalo magnetno energijo. Tipičen primer je trajni magnet.

- 2) Ko je vir priključen in konstanten bo X komponenta sile enaka

$$F_x = \left. \frac{\partial W_m}{\partial x} \right|_{I = \text{konst}}. \quad (12.23)$$

V tem primeru pa bo opravljeno mehansko delo rezultiralo v povečanju magnetne energije, ki bo "prišla" iz vira(ov). Tipičen primer je elektromagnet.

Vzemimo trajni magnet z režo razdalje x in preseka A v smeri osi X . Magnetna energija v zračni reži je

$$W_\delta = \frac{B_\delta^2 A x}{2\mu_0}. \quad \text{Pri tem smo predpostavili, da v zračni reži ni stresanja polja. Silo dobimo z odvajanjem}$$

energije po x -u:

$$F_x = \frac{\partial W_\delta}{\partial x} = \frac{B_\delta^2 A}{2\mu_0}. \quad (12.24)$$

Pozitivni predznak pomeni predvsem to, da bo energija sistema po opravljenem mehanskem delu večja kot pred tem.

Sila med poloma je vedno taka, da ju vleče skupaj, kar velja tudi za sistem magnet –feromagnetik. V tem primeru pride do analognega procesa kot pri električni indukciji. Na strani feromagnetika, ki je bližje severnemu polu magneta, se inducira južni pol (usmerijo se magnetni dipolni momenti), kar

pomeni, da se trajni magnet in feromagnetik privlačita. Poseben primer so diamagnetiki, ki bi se odbijajo od magnetov²⁴.

Primer: Magnetno jedro E oblike na skici ($a = 5 \text{ cm}$, $A = 1 \text{ cm}^2$) z $\mu_r = 1000$ ima magnetilno tuljavo na srednjem stebru. Določimo težo pločevine, ki jo še lahko drži elektromagnet, če je v $N = 200$ ovojih tok $1,2 \text{ A}$. Magnetno upornost pločevine zanemarimo, zaradi hrapavosti površine pa upoštevamo $50 \text{ }\mu\text{m}$ širine zračne reže.



Slika: Magnetno jedro E oblike.

Izračun: Narišemo magnetno vezje in določimo fluks v srednjem stebru. Dobimo

$$\Phi_2 \left(R_{m2} + R_\delta + \frac{R_{m1} + R_\delta}{2} \right) = NI$$

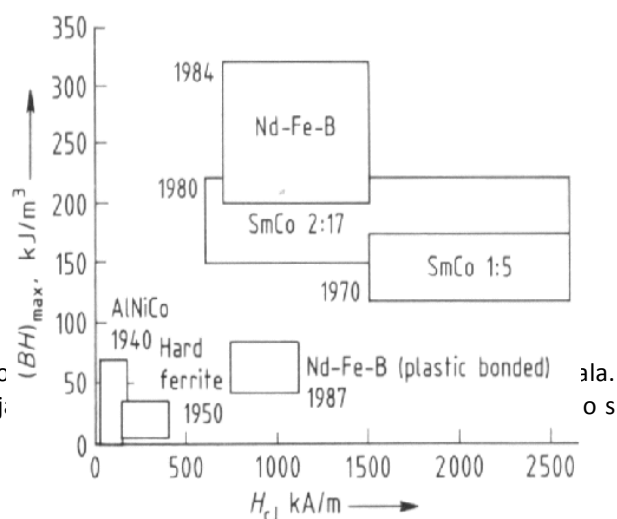
$$\Phi_2 = \frac{NI}{\frac{a}{\mu_r \mu_0 A} + \frac{\delta}{\mu_0 A} + \frac{2a}{2\mu_r \mu_0 A} + \frac{\delta}{2\mu_0 A}} = \frac{\mu_0 ANI}{\frac{2a}{\mu_r} + \frac{3\delta}{2}} \cong 172,34 \text{ }\mu\text{Wb}$$

Upoštevati moramo silo v vseh treh zračnih režah, formulo za silo v zračni reži pa zapišemo s fluksom $F = \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 A}$. Upoštevamo še, da je v stranskih stebrih fluks 2x manjši od tistega v

srednjem stebru in dobimo $F = \frac{1}{2\mu_0 A} (2\Phi_1^2 + \Phi_2^2) = \frac{3/2 \Phi_2^2}{2\mu_0 A} \cong 177,3 \text{ N}$. To silo izenačimo s silo

teže in dobimo $m \cong \frac{177,3 \text{ N}}{9,8 \text{ m/s}^2} \cong \underline{\underline{18,1 \text{ kg}}}$.

SLIKA: Gostota energije je pomemben podatek za izbiro trajnih magnetov. Največjo energijsko vrednost imata materiala Nd-Fe-B in Sm-Co. V končni fazi je seveda izbira materiala odvisna od razmerja med ceno in učinkom.



²⁴ Odboj je neodvisen od postavitve diamagnetika in c Ker pa so ti efekti zelo šibki, so za opazovanje lebdenj superprevodnimi magneti.

POVZETEK:

- 1) V primeru linearne zveze med fluksom in tokom v magnetni strukturi ($\Phi = Li$), lahko energijo sistema (tuljave) izrazimo z lastno induktivnostjo kot $W(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$. Ta energija je shranjena v magnetnem polju tuljave.
- 2) V primer dveh sklopljenih tujav (linearnih sistemov) velja zveza $W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$, ki je v primeru istega toka skozi oba elementa $W = \frac{1}{2} (L_1 + L_2 \pm 2M) i^2$ ali tudi $W = \frac{1}{2} L_{\text{nad}} i^2$, kjer je $L_{\text{nad}} = L_1 + L_2 \pm 2M$. Predznak je odvisen od tega ali se fluksa obeh tujav podpirata (+) ali nasprotujeta (-).
- 3) Če je zveza med fluksom in tokom nelinearna, je potrebno magnetno energijo določiti iz gostote energije, ki je enaka $w_{\text{mag}}(t) = \int_{B(t)} \vec{H} \cdot d\vec{B}$. Gre za integracijo magnetilne krivulje vzdolž B osi.
- 4) V primeru linearne ali linearizirane magnetilne krivulje, je gostota energije določena z $w(B) = \frac{B^2}{2\mu}$, celotna energija v jedru (ob predpostavki homogenosti polja v jedru) pa $W = \frac{B^2}{2\mu} Al$. V je ocenjen volumen jedra ($V = Al$), kjer je l srednja dolžina gostotnice.
- 5) Površina histrezne zanke je sorazmerna histereznim izgubam. Zato so za uporabo pri velikih izmeničnih signalih (npr. transformatorjih) bolj primerna mehkomagnetna jedra z ozko histerežno zanko. Moč histereznih izgub je $p_{\text{hist}} = f \cdot A_{\text{BH zanke}}$, kjer je f frekvenca vzbujalnega signala, $A_{\text{BH zanke}}$ pa površina histerezne zanke (v osnovi gostota energije w).
- 6) Z upoštevanjem izraza za energijo tuljave $W = \frac{LI^2}{2}$, lahko ob poznavanju energije določimo lastno induktivnost kot $L = \frac{2W}{I^2}$.
- 7) Silo v magnetnem polju dobimo s parcialnim odvajanjem magnetne energije in je $\vec{F} = \pm \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}, \frac{\partial W_m}{\partial y}, \frac{\partial W_m}{\partial z} \right)$. Predznak je odvisen od tega, ali je v sistem vključen vir (pozitivni predznak) ali ni vira (negativen predznak). Sila v zračni reži je $F = -\frac{B_\delta^2 A}{2\mu_0}$. Negativni predznak nastopa v smislu zmanjšanja energije sistema.

Primer kolokvijskih in izpitnih nalog :

Magnetna sila:

izpit, 23. januar 2007

izpit, 4. februar 2005

Energija:

Drugi kolokvij OE II , 29.05 2002

13. LASTNA IN MEDSEBOJNA INDUKTIVNOST

(povzetki in dodatne ugotovitve) O lastni in medsebojni induktivnosti smo že kar nekaj povedali. Induktivnost predstavlja neposredno zvezo med fluksom v navitju in tokom (virom), predvsem pa je pojem induktivnosti neposredno povezan z energijo magnetnega polja in inducirano napetostjo. V tem poglavju bomo ponovili nekaj ugotovitev predhodnih poglavij in dodali še nekaj novih.

LASTNA INDUKTIVNOST

Ugotovili smo, da je za določitev lastne induktivnosti potrebno določiti fluks skozi (lastne) ovoje, ki jih povzroča tok v lastnem navitju. Upoštevati je potrebno magnetni sklep, torej fluks skozi ovoje pomnožiti s številom obojev, kar da

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I}. \quad (13.1)$$

V primeru, da je navitje porazdeljeno tako, da ne gre celotni fluks skozi vse ovoje, induktivnost določimo kot $L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Psi_1 + \Psi_2 + \dots}{I}$.

Podobno kot za kapacitivnost lahko tudi za induktivnost ugotovimo, da je odvisna od snovno

geometrijskih lastnosti. Za preprosto ravno tuljavo dobimo izraz $L = \frac{N^2 \mu_0 A}{l}$. Značilno je, da je lastna

induktivnost odvisna od kvadrata števila obojev. Če so ovoji oviti okoli jedra, lahko lastno

induktivnost določimo iz $L = \frac{N^2 \mu A}{l} = N^2 / R_m$, kjer je R_m magnetna upornost jedra. Ta lahko vključuje tudi zračno režo itd.

INDUKTIVNOST KOT ZVEZA MED TOKOM IN FLUKSOM

Induktivnost nam predstavlja zvezo med tokom v navitju in fluksom oziroma magnetnim sklepom skozi navitje: $\Psi = LI$. To velja tudi pri izmeničnih signalih, ko pišemo enačbo $\Psi = Li$.

INDUKTIVNOST KOT MERA ZA SPOSOBNOST SHRANJEVANJA MAGNETNE ENERGIJE

Magnetna energija v polju tuljave je sorazmerna produktu induktivnosti in kvadrata toka:

$W = \frac{1}{2} Li^2$. Induktivnost je torej mera zmožnosti tuljave za shranjevanje magnetne energije²⁵.

IZRAČUN LASTNE INDUKTIVNOSTI IZ ENERGIJE MAGNETNEGA POLJA

Lastno induktivnost lahko izračunamo iz energije magnetnega polja, iz enačbe $W = \frac{LI^2}{2}$, če le poznamo energijo, ki jo povzroča tok I . To pa lahko dobimo iz gostote magnetnega polja oz.

integracijo gostote energije $w_{mag}(t) = \int_{B(t)} \vec{H} \cdot d\vec{B}$ in $W = \int_V w_{mag} dV$.

INDUKTIVNOST KOT MERA ZA VELIKOST INDUCIRANE NAPETOSTI

Poleg tega je pojem induktivnosti neposredno povezan z inducirano napetostjo: $u_i = -L \frac{di}{dt}$.

IZRAČUN SILE IZ IZRAZA ZA ENERGIJO TULJAVE

Tudi magnetno silo lahko izrazimo s pomočjo spremembe induktivnosti in/ali toka. Kot primer vzemimo možnost premikanja tuljave v smeri osi X:

$$F_x = \pm \frac{\partial W}{\partial x} = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (Li^2) = \pm \frac{1}{2} \left(L \frac{\partial i^2}{\partial x} + i^2 \frac{\partial L}{\partial x} \right).$$

Predznak je odvisen od tega, ali pride energija potrebna za premik iz vira (+) ali pa se porabi za premik energija shranjena v polju (-).

MEDSEBOJNA INDUKTIVNOST

Če nas zanima fluks v navitju, ki je posledica vzbujaanja v drugem (ne lastnem) navitju, govorimo o medsebojni induktivnosti. Definiramo jo kot

$$M_{21} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{21}}{I_1}, \quad (13.2)$$

²⁵ Spomnimo se lahko na poglavje o energiji polja v elektrostatičnem polju (OE1), kjer smo ugotovili, da je

kapacitivnost mera za shranjevanje energije v elektrostatičnem polju kondenzatorja: $W_e = \frac{CU^2}{2}$

kjer je Φ_{21} fluks skozi drugo tuljavo zaradi toka skozi prvo tuljavo. Analogno lahko definiramo M_{12} kot $M_{12} = \frac{N_1 \cdot \Phi_{12}}{I_2}$. Značilno je, da je medsebojna induktivnost sorazmerna produktu števila obojih tuljav. Če sta obe navitji na istem jedru s permeabilnostjo μ , presekom A in srednjo dolžino l , je medsebojna induktivnost enaka $M = \frac{N_1 N_2 \mu A}{l}$.

Če imamo opravka z linearnimi magnetnimi materiali (če je μ_r konstanten), sta M_{21} in M_{12} kar enaka, torej $M = M_{21} = M_{12}$.

POZOR: Pri računanju medsebojne induktivnosti moramo enega od virov »odklopiti«. Če računamo M_{21} , skozi navitje 1 »spustimo« tok I_1 in določimo fluks, ki gre skozi tuljavo 2. Vir $I_2 N_2$ je tedaj odklopljen.

FAKTOR SKLOPA

Če je magnetna povezava med tuljavama 1 in 2 linearna, velja med lastnima induktivnostima in medsebojno induktivnostjo tuljave zveza

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}, \quad (13.3)$$

kjer je k faktor sklopa. $k = 0$ če med tuljavama ni magnetnega sklopa in $k = 1$, če je med tuljavama popoln magnetni sklep (celoten fluks ene tuljave gre skozi drugo).

INDUKTIVNOST PRI NELINEARNIH MAGNETNIH STRUKTURAH

V primeru uporabe feromagnetnih materialov je zveza med B in H nelinearna, v tem smislu postane nelinearna tudi permeabilnost in induktivnost. Upoštevanje nelinearnosti je odvisno od uporabe (oblika vzbujačnega signala) in želene natančnosti izračuna. Natančnejša analiza presega obseg tega predmeta.

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:

prvi kolokvij, 11. april 2005

1. kolokvij, 3. maj 2004

prvi kolokvij, 15. april 2004

Prvi kolokvij, 22. april 2003

23.04 2002

Izpit, 28. avgust 2006

izpit, 4. februar 2005,

Izpit, 29.03.2004

Izpit, 30. 1. 2004

izpit, 6. februar 2003

Izpit 26. 6. 2002

izpit, 4. 12. 2001

2. kolokvij, 12. 6. 2003

14. RAZŠIRJEN AMPEROV ZAKON

Vsebina poglavja: Dosedanji zapis Amperovega zakona ne upošteva toka v kondenzatorju, razširjen Amperov zakon predstavlja 1. Maxwellovo enačbo, upoštevanje premikalnega (poljskega tok), uporaba premikalnega in konduktivnega toka, difuzija ravninskega polja.

Problem uporabe Amperovega zakona v obliki $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$, kjer smo za gostoto toka

upoštevali konduktivni tok ($\vec{J} = \gamma \vec{E}$) se pokaže, ko želimo ta zapis uporabiti tudi zvezo med magnetnim poljem in tokom v kondenzatorju. Za kondenzator vemo, da v njem (v idealnem primeru) ni konduktivnega toka, saj je specifična prevodnost med ploščama tako majhna, da jo običajno lahko kar zanemarimo.

Vzemimo, da se tok v vodniku s priključenim kondenzatorjem časovno spreminja. Tedaj lahko izmerimo tudi tok skozi kondenzator, ki pa ni konduktivne narave. Dokler smo zunaj kondenzatorja in zaobjamemo žico z zanko L1 bo veljalo

$$\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{\text{kond}}. \quad (14.1)$$

Če pa postavimo zanko L2 znotraj kondenzatorja dobimo z dosedanjim zapisom Amperovega zakona $\oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$, saj nismo zajeli konduktivnega toka. Očitno zakonu manjka še komponenta toka, ki bi opisovala tudi tok, ki omogoča prevajanje skozi kondenzator.

Poglejmo, kako ga določimo: če se bo tok v prevodniku spreminjal časovno, se bo na ploščah kondenzatorja časovno spreminjala velikost naboja, skladno z enačbo $i = i_c = \frac{dQ}{dt}$. Naboj na ploščah pa lahko izrazimo z gostoto površinskega naboja σ , tega pa z gostoto električnega pretoka D :

$$i_c = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(\sigma A)}{dt} = \frac{d(DA)}{dt} = \frac{dD}{dt} A \quad (14.2)$$

Očitno moramo v Amperovem zakonu v primeru izmeničnih signalov upoštevati poleg konduktivnega toka tudi obliko toka skozi kondenzator. Temu toku, ki sicer ni vezan na kondenzatorje pač pa na vse dielektrične snovi, imenujemo **premikalni tok**, pogosto pa tudi **poljski tok**²⁶.

²⁶ Ta tok je prvi vpeljal J.C. Maxwell leta 1860 (objavil leta 1864) in ga poimenoval premikalni (ang. displacement current). To je tok, ki ni posledica potovanja naboja v smislu konduktivnega ali konvektivnega toka pač pa le manjšega premika proti ali stran od elektrod ter posledica rotacije dipolov v dielektriku. Pri nas se ta tok pogosto imenuje tudi poljski tok, saj je posledica časovne spremembe električnega polja. Maxwell je tudi ugotovil, da enačbe nakazujejo na enačbo valovanja in da se to elektromagnetno valovanje premika s svetlobno hitrostjo. Dokaze pravilnosti te trditve je eksperimentalno dokazal šele Heinrich Hertz leta 1887, ki je uporabil zanko z majhno zračno režo. Ob dovolj visoki napetosti je v zračni reži prišlo to preboja, ki pa je »hkrati« nastala tudi sosednji (nevzbujani) v zanki z zračno režo.

Če je ta tok nehomogen po preseku, ga zapišemo z integralom kot

$$i_c = \int_A \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{A} \quad (14.3)$$

Če sedaj dodamo še to obliko toka k zapisu enačbe (14.1), dobimo

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = i_{kond} + i_c = \int_A \left(\bar{J}_{kond} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{A} \quad (14.4)$$

To obliko imenujemo tudi **razširjen Amperov zakon ali pa tudi 1. Maxwellova enačba**. Prispevek Maxwella je bil izredno pomemben, saj je pravilno predvidel, da mora magnetno polje povzročati ne le konduktivni tok, pač pa tudi spreminjanje električnega polja med ploščama kondenzatorja. V splošnem bi morali v poštev vzeti vse toke, ki prispevajo k nastanku magnetnega polja, torej tudi konvektivni tok.²⁷

PREMIKALNI (POLJSKI) TOK

Kot sledi iz enačbe (14.4), lahko za **gostoto premikalnega toka** pišemo tudi

$$\bar{J}_c = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}. \quad (14.5)$$

Iz elektrostatike vemo, da lahko gostoto električnega pretoka izrazimo z električno poljsko jakostjo in vektorjem električne polarizacije $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$. Če to upoštevamo v zgornji enačbi dobimo dva člena gostote premikalnega toka

$$\bar{J}_c = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \quad (14.6)$$

Prvi člen predstavlja časovno spremembo prostega naboja na ploščama kondenzatorja oz. časovno spremembo polja v vakuumu, drugi pa še dodatni prispevek zaradi časovne spremembe polarizacije snovi (obračanje dipolov).

²⁷ Tok zaradi magnetizacije pa je upoštevan že v samem zapisu Amperovega zakona z vektorjem H. Če pa bi pisali Amperov zakon z vektorjem B, bi pa morali upoštevati tudi tok zaradi magnetizacije na desni strani enačbe.

KDAJ BI BIL ZA ANALIZO BOLJ POMEMBEN KONDUKTIVNI IN KDAJ PREMIKALNI TOK?

Do odgovora na to vprašanje najlažje pridemo tako, da predpostavimo harmonično vzbujanje, pri čemer bo električno polje enako $E = E_0 \sin(\omega t)$. V primeru linearne snovi lahko upoštevamo zvezi $J = \gamma E$ in $D = \epsilon E$, s čimer bo konduktivni tok enak $J_{\text{kond}} = \gamma E_0 \sin(\omega t)$, premikalni pa $J_c = \omega \epsilon E_0 \cos(\omega t)$. Kateri tok bo prevladal, je odvisno od amplitud tokov, torej od razmerja $\frac{\gamma}{\omega \epsilon}$. Pri visokih frekvencah in majhnih prevodnostih bo očitno prevladoval premikalni (poljski) tok, v nasprotnem pa konduktivni.

PRIMER

Ocenimo, pri katerih frekvencah bo prevladoval konduktivni in pri katerih premikalni tok? Za dober prevodnik vzemimo $\gamma = 10^7 \text{ S/m}$, za dober izolator pa $\gamma = 10^{-10} \text{ S/m}$, dielektričnost zaokrožimo na $\epsilon = 10^{-11} \text{ F/m}$. Razmerje tokov naj bo najmanj 1000.

Konduktivni tok v prevodnik bo prevladoval, ko bo veljalo $\frac{\gamma}{\omega \epsilon} \geq 1000$, oziroma

$\omega \leq \frac{\gamma}{1000 \cdot \epsilon} = \frac{10^7}{10^3 \cdot 10^{-11}} = 10^{15} \text{ s}^{-1}$. Ugotovimo, da bo konduktivni tok v dobrem prevodniku prevladoval nad premikalnim do zelo visokih frekvenc.

Premikalni tok v izolatorju bo prevladoval, ko bo veljalo $\frac{\gamma}{\omega \epsilon} \leq 1000$, oziroma

$\omega \geq \frac{\gamma}{1000 \cdot \epsilon} = \frac{10^{-10}}{10^3 \cdot 10^{-11}} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$. Ugotovimo, da bo premikalni tok v dobrem izolatorju (recimo kar zraku) prevladoval nad konduktivnim od zelo nizkih frekvenc dalje.

DIFUZIJA RAVNINSKEGA POLJA V PREVODNIKU (DODATNO, KOT INFORMACIJA)

Vzemimo primer, ko upoštevamo le konduktivni tok²⁸. Zanima nas časovno in krajevno spreminjanje H ja in E ja v prevodniku, pri čemer bomo zaradi siceršnje kompleksnosti reševanja poenostavili problem v toliko, da bomo predpostavili, da ima polje H le Y komponento, polje E pa le X komponento. Obe polji pa se gibljeta v Z smeri.

²⁸ V nasprotnem primeru, če bi upoštevali le premikalni tok, bi nas rešitev privedla do valovne enačbe. Ta problematika posega v področje, ki ga pri tem predmetu ne obravnavamo. Za osnovne informacije se poslužite učbenika A.R. Sinigoj: Osnove elektromagnetike, sicer pa iz omenjenega področja študijske literature ne primanjkuje.

Postopek je tak, da moramo najprej diskretizirati Amperov in Faradayev zakon, zapisati ustrezno diferencialno enačbo in jo rešiti.

Vzemimo dve zanki ki sta pravokotni druga na drugo (glej sliko). Za zanko L1, ki leži v XZ ravnini zapišemo diskretiziran Amperov zakon v obliki

$$(H_y(z, t) - H_y(z + \Delta z)) \cdot l \cong \gamma E_x(z + \frac{\Delta z}{2}) \cdot \Delta z \cdot l$$

Enačbo delimo z delta z in limitiramo, pri čemer difference postanejo parcialni odvodi

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x$$

(14.7)

Poleg te enačbe diskretiziramo še Faradayev zakon indukcije, ki ga zapišemo po zanki L2, ki leži v XY ravnini in dobimo

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

(14.8)

Sedaj moramo enačbo (14.7) odvajati po Zju in jo uvrstiti v enačbo (14.8). Dobimo

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu \gamma \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

(14.9)

To pa je tip diferencialne enačbe, katere rešitev je v obliki sinusne funkcije z dodanim eksponentnim naraščanjem ali padanjem

$$H_y(z, t) = H_{y0} e^{px} \sin(\omega t + qz)$$

(14.10)

Konstanti p in q bi dobili z odvajanjem rešitve in uvrstitvijo v izpeljane zveze. Dobili bi

$$p = q = \pm \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} = \pm \frac{1}{\delta}$$

(14.11)

Delta bo torej $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}}$ in jo imenujemo **vdorna globina** ali tudi **globina prodiranja**. Pri tej globini bo polje padlo za faktor 1/e.

Rešitev bo torej oblike

$$H_y(z, t) = H_{y0} e^{\pm \frac{z}{\delta}} \sin(\omega t \pm \frac{z}{\delta})$$

Doličimo globine prodiranja polja v bakren vodnik za signale s frekvencami 100 MHz, 1 MHz, 1 kHz in 50 Hz. $\gamma_{Cu} = 6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$.

Izračun: Iz enačbe $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}}$ določimo $\delta = 6,5 \text{ } \mu\text{m}$ pri 100 MHz, $65 \text{ } \mu\text{m}$ pri 1 MHz, 2 mm pri 1 kHz in $9,2 \text{ mm}$ pri 50 Hz.

(14.12)

Kako do polja E_x ? S pomočjo enačbe (14.7), torej tako, da odvajamo rešitev za polje H in delimo s specifično prevodnostjo. Dobimo

$$E_x(z, t) = \pm \frac{1}{\gamma \delta} H_{y0} e^{\pm z/\delta} (\sin(\omega t \pm z/\delta) + \cos(\omega t \pm z/\delta)) \quad (14.13)$$

S preureditvijo dobimo

$$E_x(z, t) = \pm \sqrt{\frac{\omega \mu}{\gamma}} H_{y0} e^{\pm z/\delta} \left(\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} \pm z/\delta\right) \right) \quad (14.14)$$

Zanimivosti:

- Električno in magnetno polje sta fazno premaknjena za $\pi/4$
- Obe polji padata (usihata) eksponentno
- Razmerje amplitud je $\sqrt{\frac{\omega \mu}{\gamma}}$, ki ima enoto upornosti in je za zrak $150 \text{ } \mu\Omega$.

15. POVZETEK ENAČB ELEKTROMAGNETNEGA POLJA

(zapisi označeni z (*) so neobvezni)

S študijem električnih in magnetnih pojavov smo prišli do osnovnih zvez, ki opisujejo lastnosti elektromagnetnega polja. Električno polje smo razložili in v matematični obliki popisali z električno poljsko jakostjo E , magnetno polje pa z gostoto magnetnega pretoka B .

V osnovi ob poznavanju teh dveh veličin določimo silo na nalkren delec kot

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}. \text{ Ta enačba je znana kot Lorentzova sila.}$$

Ker sta ti dve količini primerni za obravnavo le v vakuumu (v snovi nista narobe, pač pa je naboj preveč, da bi računali vpliv vsakega z vsakim), smo vpeljali še dve veličini, gostoto električnega pretoka D in jakost magnetnega polja H , ki omogočata obravnavo elektromagnetnih pojavov tako v vakuumu kot v snoveh. Zgodovinsko gledano so se zapisi enačb dopolnjevali in spreminjali, v obliki, v kakršni jih danes poznamo, pa jih je združil J.C. Maxwell (Pravzaprav njegovi nasledniki, predvsem Heaviside. Maxwell jih je zapisal nekoliko manj pregledno). Osnovne zveze predstavljajo štiri t.i. Maxwellove enačbe:

1. MAXWELLOVA ENAČBA = RAZŠIRJEN AMPEROV ZAKON

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{kond} + i_c = \int_A \left(\vec{J}_{kond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}$$

Integral H -ja po zaključeni poti je enak oklenjenemu toku, ta pa je enak vsoti konduktivnega in poljskega (premikalnega) toka. Ta dva pa lahko izrazimo z gostoto konduktivnega toka in z odvodom gostote električnega pretoka po času. To je zapis v t.i. integralni obliki, pogosto ga zasledimo tudi v

t.i. diferencialni obliki: $\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_{kond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Rot je oznaka za operator, ki ga imenujemo rotor.

Znanja o teh zapisih presegajo domet predmeta, podajamo jih le zato, da bi pri morebitni kasnejši zasleditvi izraza lažje našli povezavo z že slišanim.

2. MAXWELLOVA ENAČBA = FARADAYEV ZAKON INDUKCIJE

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Integral E -ja po zaključeni poti je enak inducirani napetosti oziroma negativni časovni spremembi fluksa skozi zanko L . V primeru gibanja zanke, je potrebno členu na desni dodati

še t.i. gibalno napetost, člen $\oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$. V diferencialni obliki je enačba oblike: $\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

(*)

3. MAXWELLOVAN ENAČBA = GAUSSOV ZAKON ZA MAGNETNI POLJE

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Integral B-ja po zaključeni površini je enak nič, oziroma magnetni pretok skozi zaključeno površino je enak nič. Rečemo tudi, da magnetno polje ni izvirno, oz., da je rotacijsko. V diferencialni obliki: $\text{div} \vec{B} = 0$ (*).

4. MAXWELLOVA ENAČBA = GAUSSOV ZAKON ZA ELEKTRIČNO POLJE

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int \rho dV$$

Integral D-ja po zaključeni površini je enak zaobjetemu prostemu naboju. V diferencialni obliki je zapis oblike $\text{div} \vec{D} = \rho$ (*) in če upoštevamo, da je $\vec{E} = \epsilon \vec{D}$ in $\vec{E} = -\text{grad} V$ dobimo enačbo, ki je znana kot **Poissonova enačba** $\text{div} \epsilon \text{grad} V = -\rho$ (*). V primeru, da v snovi ni prostih nabojev, pogosto to enačbo zapišemo kot $\text{div} \epsilon \text{grad} V = 0$ (*) in je znana kot **Laplaceova enačba**.

Štiri osnovne enačbe opisujejo zvezo med električnim in magnetnim poljem. Vidimo, da sta ta dva med seboj povezana, da časovna sprememba električnega polja povzroči nastanek magnetnega polja (1 enačba), in da časovna sprememba magnetnega polja rezultira v nastanku magnetnega polja.

Poleg teh štirih enačb moramo še upoštevati **zakon o ohranitvi naboja**, ki ga zapišemo v obliki t.i. **kontinuitetne enačbe**:

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Snovne lastnosti upoštevamo z zvezo med E-jem in D-jem v obliki

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

in med B-jem in H-jem

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \text{ ter med J-jem in E-jem}$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}.$$

V primeru bolj kompleksnih materialov (izotropnih) je lahko permeabilnost ali dielektričnost različna v različnih smereh in jo je potrebno zapisati v obliki tenzorja. Poleg tega so zveze lahko nelinearne, recimo v primeru feromagnetnih materialov. (Poznamo tudi feroelektrične materiale, za katere je značilno, da imajo tudi histerezno povezavo med E in D.)

INDEKS

- 1. Maxwellova enačba, 169, 173
- 2. Maxwellova enačba, 173
- 3. Maxwellova enačba, 174
- 4. Maxwellova enačba, 174
- Amperov zakon, 77
- AMPEROV ZAKON, 33, 78
- Amperov zakon v diskretizirani obliki, 99
- Antiferomagnetiki, 92
- BIOT-SAVARTOV ZAKON, 18
- Brezizvornost magnetnega polja, 42
- Carterjev faktor, 116
- ciklotron, 69
- DELO MAGNETNIH SIL, 49
- Delovna točka, 107
- Diamagnetiki, 91
- Efektivna permeabilnost, 112
- Energija magnetnega polja, 150
- Energija sistema več tuljav, 152
- faktor induktivnosti, 112
- Faktor sklopa, 133
- Ferimagnetiki, 93
- Feromagnetiki, 94
- Gaussov zakon za magnetiko**, 42
- gibalna inducirana napetost, 135
- GIBANJE NABOJEV, 61
- gilbert, 7
- gostota magnetne energije**, 154
- gostotnice, 44
- hallov pojav, 67
- Histerezna zanka, 96
- Histerezne izgube, 158
- homopolarni generator, 137
- Inducirana napetost, 122
- induktivnost, 45
- induktivnost dvovoda, 160
- Induktivnost iz energije, 159
- Induktivnost, lastna, 164
- Induktivnost, medsebojna, 164
- KATODNA CEV, 65
- Kazalci, 129
- koercitivna jakost polja, 96
- kontinuitetna enačba, 174
- krivulja demagnetizacije**, 107
- Krivulja magnetenja, 95
- Kvantni Hallov efekt, 73
- Laplaceova enačba**, 174
- Lastna induktivnost solenoida in toroida, 46
- Lentzovo pravilo**, 122
- Lorentzova sila**, 63
- magnetizacija, 75

Indeks

- Magnetna napetost, 82
- Magnetna poljska jakost, 77
- Magnetna sila, 161
- Magnetna susceptibilnost, 80
- magnetna upornost, 108
- MAGNETNA VEZJA, 108
- Magnetni dipol, 57
- magnetni dipolni moment, 57
- MAGNETNI MATERIALI, 91
- Magnetni naboj, 89
- Magnetni potencial, 83
- MAGNETNI PRETOK, 40
- magnetni sklep, 123
- Magnetni sklep, 45
- Magnetno polje zemlje, 29
- MASNI SPEKTROGRAF, 71
- Medsebojna induktivnost, 131
- Mehkomagnetni materiali, 97
- Mejni pogoji, 83
- Millikan**, 66
- NAVOR, 54
- numerična simulacija, 115
- Odklanjanje delcev, 64
- OERSTED, 8
- Paramagnetiki, 91
- permeabilnost vakuumu, 10
- Permeabilnost vakuumu, 11
- Poissonova enačba**, 174
- Polje dolge tuljave - solenoida**, 36
- Polje izven osi tokovne zanke, 24
- Polje polnega vodnika**, 35
- Polje tokovne obloge**, 37
- Polje toroida**, 36
- POLJE V OSI RAVNE TULJAVE - SOLENOIDA, 26
- Polje v osi tokovne zanke, 23
- poljski tok***, 168
- površinski tok, 76
- premikalni tok***, 168
- Produkt B in H, 157
- Radij rotacije, 62
- Razmagnetenje, 98
- Razširjen Amperov zakon, 168
- Realna tuljava, 127
- relativna permeabilnost, 80
- Relativne permeabilnost, 95
- remanenčna gostota polja, 96
- stresanje polja, 115
- Superparamagnetiki, 93
- TOKOVNA DALJICA, 21
- TOKOVNA PREMICA, 19
- TOKOVNA ZANKA (OBROČ), 22
- Tokovni element, 12
- trajni magnet, 107
- Trajni magneti, 116

Indeks

transformatorska inducirana napetost, 135

trdomagnetni materiali, 97

Vektor magnetizacije, 75