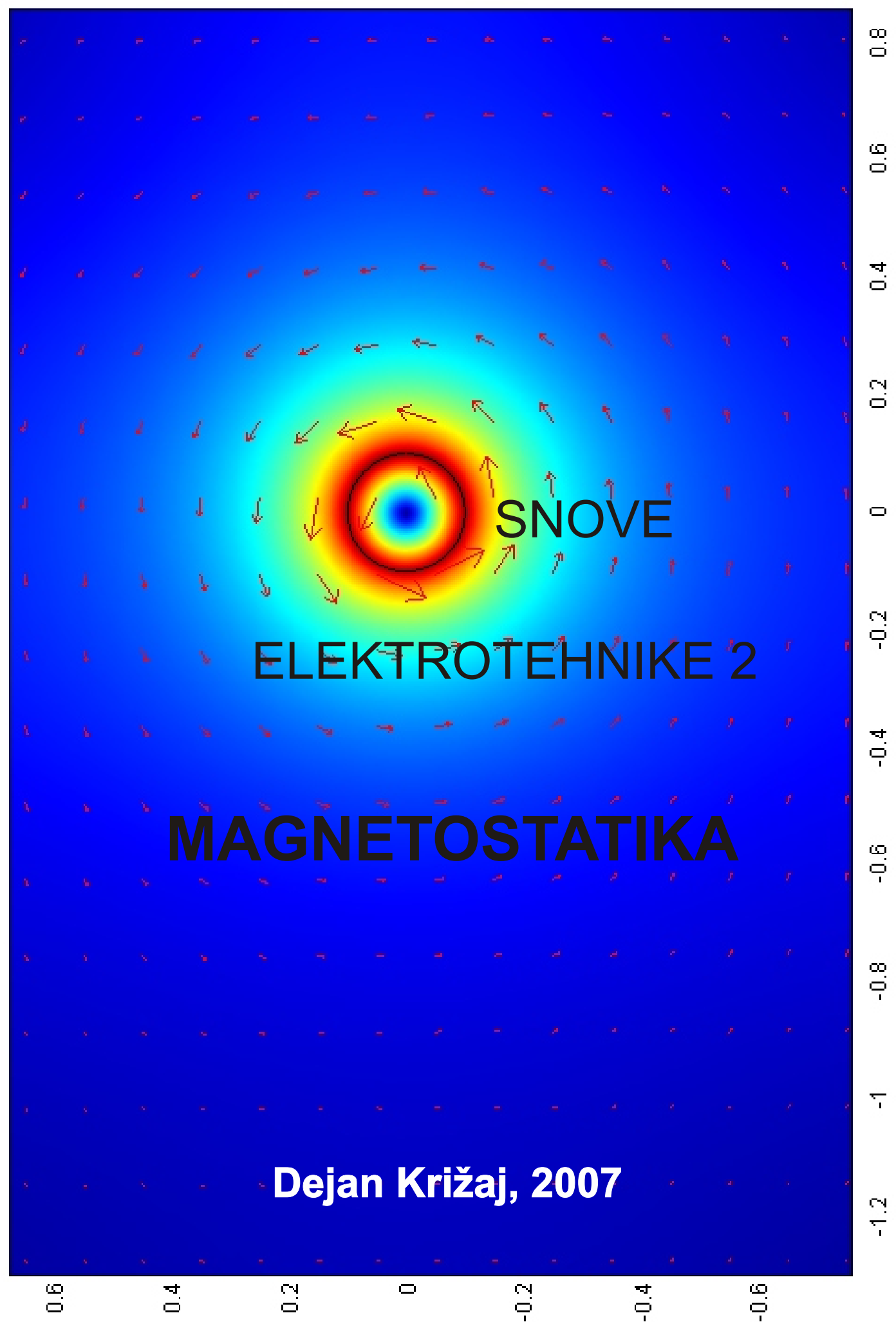


Surface: Magnetic flux density, norm Arrow: Magnetic field

Max: 6
x10



MAGNETOSTATIKA

ELEKTROTEHNIKE 2

SNOVE

Dejan Križaj, 2007

ZGODOVINA MAGNETIKE

Imena za naravni magnet:

FR: aimant (ljubeč)

KIT: tzhū shīh (ljubezenski kamen)

GB: lodestone (leading, guiding stone)

PPT PREZENTACIJA ZGODOVINE

KITAJSKA - KOMPAS. Kitajci poznajo magnetni učinek. Kos magnetita z močno magnetizacijo tvori železov magnet, ki na plavajoči podlagi vedno kaže v isto smer. Iz tega spoznanja Kitajci izumijo kompas. Prvi dokumentiran zapis o kompasu izvira iz leta 1297, verjetno pa je bil znan že več stoletij pred tem datumom. Ta pomembni izum, ki omogoča ladjam navigacijo tudi daleč od kopnega, se hitro razširi v Arabijo in v Evropo.

GRKI – MAGNETIT. Grki poznajo magnet, saj izvira ime magnet iz pokrajine Magnesia (sedaj v Turčiji), kjer so našli primerke kamnov (magnetita) z magnetnimi lastnostmi. Že Thales iz Mileta trdi, da ima magnet dušo. Lucretius je predstavnik atomistov in v delu *De Rerum Natura* opisuje, da magnet privlači železo tako, da odganja atome v njegovi okolici. V resnici povzema učenje Epicurijusa (342 – 270 BC), ki je naslednik učenja Demokrita. Po njihovem učenju naj bi bila vsa snov sestavljena iz atomov, ki pa so ob smrti razpadli (ni bilo življenja po smrti). Iz tistega časa izvira tudi prepričanje, da česen zmanjša moč magneta. To prepričanje se je vleklo vse do leta 1600, še posebno so se česna izogibali morjeplovci.

GILBERT – PRVI ZNANSTVEN PRISTOP. Prve resnejše in obsežne poskuse iz magnetike opravi W. Gilbert in jih objavi v knjigi »De Magnete« leta 1600. Znan je bil kot osebni doktor kraljice Elizabete. Gilbert je bil trden zagovornik Kopernika, kar je bilo v drugih bolj dogmatičnih državah živlensko nevarno. Istega leta, kot je izšla njegova knjiga, so Giordano Bruna v Italiji zakurili na grmadi. Gilbert je delal mnogo poskusov iz elektrike, pri čemer je uporabljal elektroskop. Naredil je obsežen seznam materialov, ki se bolj ali manj naelektrijo – dandanes to imenujemo triboelektrična lestvica.



Knjiga W. Gilberta De Magnete.

Ugotovil je tudi, da je električna sila različna od magnetne, da naelektren objekt nima polov, kot jih ima magnet in da je mogoče električno silo zmanjšati s kosom papirja, magnetno pa ni mogoče. (Ena pomembnejših stvari, ki se jih lahko naučimo od Gilberta, je spoznanje, kako je pomembno proučiti in preverjati dejstva in ne le povzemati pisanje drugih. Še posebno, če ne temelji na znanstvenem delu. To vodilo bi lahko bilo v veljavi še danes. Čeprav je vrsta pojavov že zelo natančno pojasnjena, je za pravo razumevanje najboljše lastno preverjanje. Če je le mogoče, naj to velja za vse, ki se učijo.)

Gilbert je proučeval tako naravne magnete iz magnetita (loadstone), kot tudi umetno namagnetene materiale – železo. V popolnosti je tudi razumel inducirano magnetno polje, kjer nenamagnetni vendar (fero)magnetni material prevzame magnetne lastnosti ob stiku.

Ugotovil je, da ne le, da kaže magnetna igla (kompas) proti severu, pač pa tudi pod določenim kotom na površino zemlje. Predlagal je uporabo naprave, s katero bi lahko določali ne le smer severa, pač pa tudi geografsko višino iz tega kota. Gilbert je naredil model zemlje, ki ga je poimenoval terella (majhna zemlja) v katerega je vgradil trajni magnet. S tem modelom prikazuje delovanje kompasa na zemlji in ugotavlja, da je sama zemlja en velik magnet. Kdor raziskuje se lahko tudi moti: Gilbert v zadnjem delu knjige predvideva (pod vplivom Kopernikove teorije), da je magnetno polje tisto, ki prispeva k gibanju teles v vesolju.

Po Gilbertovih dognanjih se je dve desetletji na področju raziskav magnetike dogajalo bolj malo.

1700 – 1800. Do leta 1800 velja omeniti nekaj pomembnejših dognanj pri razumevanju elektrike. Otto von Guericke (1672) izumi naelektritveno sfero in prvo vakumsko steklenico. Sledi odkritje t.i. Leidenske flaše oziroma prvega kondenzatorja, ki omogoča začasno hranjenje večje količine električnega naboja oziroma doseganje višjih napetosti. Benjamin Franklin predlaga koncept le enega naboja, pozitivnega ali negativnega. Luigi Galvani eksperimentira z živalsko elektriko, kar nadaljuje Alessandro Volta, ki je med drugim zaslužen za izum elektroskopa in baterije. Ta omogoča bolj konstanten in trajnejši tok kot elektrostatični generatorji. Charles Coulomb v Franciji s pomočjo magnetne igle, ki ji visela na tanki nitki zazna šibke odklone pri bližanju drugega magneta. Coulomb je ugotovil, da sila pada s kvadratom razdalje, kot pri električni ali gravitacijski sili. Instrument, kot ga je zasnoval Coulomb, je bil osnova magnetnih detektorjev za nadaljnjih 170 let. Silo odboja uporabi Jonathan Swift v Guliverjevih potovanjih, kjer otok lebdi v prostoru zaradi »anti-gravitacije«. Kljub vsem raziskavam, v tem času še ni bila znana povezava med elektriko in magnetiko. Coulomb celo trdi, da te povezave ni.

OERSTEAD – eksperiment s tokom in kompasom . Leta 1820 profesor Hans Christian Oersted v Kopenhagenu (Danska) pripravlja eksperiment iz segrevanja prevodnika in tudi iz magnetike. Presenečeno ugotovi, da se igla kompasa premakne vsakič, ko sklene tokokrog. Ugotovi, da se kompas ne usmeri v smeri električnega toka pač pa prečno na smer toka in da



Oersteadov eksperiment in kompas, na katerem je opazil premik ob toku v vodniku.

magnetno polje obkroža tok. Svoje delo objavi julija 1820 in s tem naredi pomemben korak pri razumevanju elektrike in magnetike. Da sta elektrika in magnetika pravzaprav povezana, saj električni tok povzroča magnetno polje.

SILA NA (TOKO)VODNIK V MAGNETNEM POLJU (1)

Andre-Marie Ampere v Franciji takoj preveri ugotovitve Oersteda in jih tudi razdela. Pravilno predvideva, da če električni tok povzroča magnetno polje in s tem odklon magnetne igle, mora obstajati tudi sila med dvema vodnikoma s tokom. Pokaže, da obstaja tudi sila med tokovodnikoma, ki je proporcionalna produktu toka v obeh vodnikih in njune dolžine in nasprotno proporcionalna razdalji med vodnikoma. To bi matematično zapisali kot

$$F = k \cdot \frac{I_1 I_2 l}{r}. \quad (1.1)$$

Ugotovi tudi, da je sila privlačna, če toka tečeta v isto smer in odbojna, če toka tečeta v nasprotno smer.

SLIKA: Vzporedno ležeča vodnika s tokom v isto smer se privlačita, s tokom v nasprotno smer pa se odbijata.

Konstanta k je enaka $\frac{\mu_0}{2\pi}$, kjer je μ_0 permeabilnost vakuumu in ima vrednost $4\pi 10^{-7}$. Torej je enačba za silo med dvema ravnima vzporednima vodnikoma iz (1.1) enaka:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}. \quad (1.2)$$

Permeabilnost vakuumu. Poglejmo, kakšno enoto mora imeti μ_0 , da bo ustrezalo enačbi

(1.1): $[N] = [\mu_0] \frac{[A] \cdot [A] \cdot [m]}{[m]}$ oziroma $[\mu_0] = \frac{[N]}{[A^2]}$. Kasneje bomo ugotovili, da lahko

zapišemo z osnovnimi ali izpeljanimi električnimi enotami (H je enota za induktivnost):

$$[\mu_0] = \left[\frac{N}{A^2} \right] = \left[\frac{V \cdot s}{A \cdot m} \right] = \left[\frac{H}{m} \right].$$

Primer 1: Določimo velikost sile med dvema ravnima vzporednima (neskončno dolgima) vodnikoma s tokom 1 A na dolžini enega metra, ki sta med sabo razmaknjena za 1 m.

Izračun: Ta sila je enaka $F = \frac{4\pi 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 1\text{A} \cdot 1\text{A} \cdot 1\text{m}}{2\pi \cdot 1\text{m}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$, kar je tudi osnova za enoto

amper [A], ki si jo je Ampere prislužil za svoja pomembna odkritja na področju raziskovanja električnih pojavov. To je tudi edina električna enota, ki jo potrebujemo za povezavo med elektriko in mehaniko.

Enota za električni tok. Ampere je enota za električni tok, ki pri prehodu skozi dva neskončna ravna vodnika zanemarljivega prereza na razdalji med vodnikoma 1 m v vakuumu povzroči silo $2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$.

Osnovne SI enote: Katere so torej osnovne enote po mednarodnem sistemu SI (Système International – SI po konvenciji iz leta 1875)? Meter (m), kilogram (kg), sekunda (s), Ampere (A), Kelvin (K), mol (mol) in kandela (cd). Izpeljane enote pa so na primer newton, joule, watt, coulomb, volt, ...)

Ampere je konstruiral več t.i. tokovnih tehtnic, s pomočjo katerih je ugotavljal sile med tokovodniki. Da bi povečal sile med vodniki je večkrat navil vodnike okoli iste osi in tako dobil prve primere tuljav....

Tokovni element. Enačba (1.1) za silo med vodnikoma velja le za dva vzporedna vodnika. Za izračun sile na (toko)vodnik poljubne oblike, je Ampere vpeljal koncept tokovnega elementa $I \cdot d\vec{l}$. Tokovni element imenujemo produkt toka v vodniku z vektorjem majhne (diferencialne) razdalje v smeri vodnika.

SLIKA: Tokovni element je predstavljen kot (diferencialen) del dolžine vodnika pomnožen s tokom v vodniku: $I \cdot d\vec{l}$.

Ampere določi silo med tokovnimi elementoma. Silo na tokovni element $I_1 d\vec{l}_1$ lahko zapišemo kot

$dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \cdot I_2 d\vec{l}_2 \cdot \sin \theta}{r_{12}^2}$, kjer je $\vec{r}_{12}$ vektor od tokovnega elementa 2 do tokovnega elementa 1 in θ kot med tem vektorjem in smerjo tokovnega elementa 2.

SLIKA: Dva tokovna elementa in sila med njima.

Magnetna sila na tokovni element izražena z gostoto magnetnega pretoka. Da bi določili celotno silo na tokovni element 1, moramo sešteti vse prispevke tokovnih elementov na tem mestu. Če to upoštevamo, lahko enačbo zapišemo tudi kot

$$dF_{12} = I_1 d\vec{l}_1 \cdot \vec{B},$$

kjer imenujemo $\vec{B}$ magnetno polje¹ oziroma bolj natančno **gostota magnetnega pretoka** na mestu tokovnega elementa $I_1 d\vec{l}_1$. Pomembna je tudi smer gostote pretoka. Sila na tokovni element je pravokotna tako na tokovni element, kot na magnetno polje. Sila je največja, ko je polje pravokotno na tok(ovni element). To lahko zapišemo z vektorskim produktom $d\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}$, ki jo v končni obliki lahko pišemo brez indeksov:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (1.3)$$

Poenostavljene enačbe:

Če na ravni vodnik deluje homogeno polje $\vec{B}$, ki je pravokotno na vodnik, je sila nanj enaka

$$F = I l B, \quad (1.4)$$

¹ Pogosto za (vektor) gostote magnetnega pretoka uporabljamo bolj poljuden izraz magnetno polje ali kar kratko polje.

kar je znana enačba iz srednje šole (BIL). Če pa med smerjo vodnika in poljem ni pravi kot, potrebno upoštevati vektorski produkt $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{e}_n A \cdot B \cdot \sin(\theta)$. Torej bo velikost sile

$F = IlB \sin(\theta)$, smer sile pa bo pravokotna na ravnino, ki jo določata smer vodnika in polja.

Gostota magnetnega pretoka je posledica delovanja električnega toka (tokov). Obstajajo pa tudi snovi, ki povzročajo v svoji okolici magnetno polje brez dodatnega tokovnega vzbujanja. To so trajni magneti, ki pa jih bomo podrobneje obravnavali kasneje.

SLIKA: Magnetna sila na tokovni element deluje v smeri, ki je pravokotna tako na tokovni element kot na vektor gostote pretoka. Theta je kót med $d\vec{l}$ in $\vec{B}$.

Definicija gostote magnetnega pretoka. Iz enačbe (1.4) tudi izhaja definicija za gostoto magnetnega pretoka, ki jo lahko zapišemo kot silo na tokovni element:

$$B = \frac{F}{Il}.$$

Poišči analogijo z definicijo električne poljske jakosti: sila na enoto naboja.

Poglejmo si najprej nekaj primerov računanja sile po enačbi (1.3):

Primer: V ravnem bakrenem vodniku je tok 28 A. Kolikšna mora biti velikost in smer gostote magnetnega pretoka, da bo sila na vodnik dolžine 1 m enako velika a nasprotne smeri kot sila gravitacije? Žica ima linearno gostoto snovi 46,6 g/m.

Izračun:

$$IlB = mg$$

$$B = \frac{(m/l)g}{I} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ T.}$$

Preveri še smer (tok v vodniku v tablo, smer Bja na desno)

ENOTA ZA B: Tesla, $1\text{T} = 10^4 \text{ Gauss}$ ali iz enačbe (1.2) $[\text{T}] = \frac{[\text{N}]}{[\text{Am}]}$.

EKSPERIMENT: Funkcijski generator priključimo na malo tuljavico, znotraj katere damo trajni magnet. Skupaj jih prilepimo z lepilnim trakom. Pri priključitvi izmeničnega signala tuljavica ustvarja izmenično magnetno polje, ki s silo deluje na trajni magnet (in obratno). Lepilni trak deluje kot opna: vibrira in povzroča zvok.

- tuljavica iz firme Iskra Feriti
- trajni magnet, prečno namagnetan, firme RLS doo
- RAZNO: zvočnik deluje podobno, le da se giblje tuljavica v fiksnem magnetu, nariši

TIPIČNE VELIKOSTI POLJA. Red velikosti od 10^8 do 10^{-14} :

- V magnetno zaščiteni sobi 10^{-14} T
- V medgalaktičnem prostoru 10^{-10} T
- Na površini zemlje 10^{-4} T
- Na površini majhnega trajnega magneta 10^{-2} T
- V bližini velikega elektromagneta 1,5 T
- Na površini nevtronske zvezde 10^8 T

Običajno so torej v elektromagnetiki vrednosti Bja od militesla do 1 tesla.

Pokazali smo že dva primera izračuna sile na ravne (toko)vodnike. Kolikšna pa je sila, če vodnik ni raven? Tedaj je potrebno vodnik razdeliti na manjše dele in določiti silo na vsak tak del.

Primer: Kolikšna je sila na del vodnika v obliki polkroga s polmerom $R = 4$ cm in s tokom 6 A, ki je v homogenem polju 0,5 T pravokotno na vodnik?

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$dF = IR d\varphi \cdot B$$

$$dF_z = F \sin \varphi$$

$$F_z = \int_0^\pi IRB \sin \varphi d\varphi = 2IRB = 240 \text{ mN}$$

SLIKA:

Primer: Kolikšna je sila na vodnik s tokom 6 A, ki je postavljen vzdolž X osi, na razdalji od $x = 0$ m do $x = 4$ m in nanj deluje nehomogeno magnetno polje $\vec{B} = (2 \text{ T/m} \cdot x, 2 \text{ T}, 0)$. x je v metrih.

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = I dx \vec{e}_x \times \vec{B} = I dx (1, 0, 0) \times (2 \frac{\text{T}}{\text{m}} x, 2 \text{ T}, 0)$$

$$d\vec{F} = I dx \vec{e}_x \times \vec{B} = I dx 2 \frac{\text{T}}{\text{m}} (0, 0, 1)$$

$$\vec{F} = I 2 \frac{\text{T}}{\text{m}} (0, 0, 1) \int_0^{4 \text{ m}} dx = \vec{e}_z 48 \text{ N}$$

Dodatno: Kaj če je y komponenta polja enaka x komponenti?

POVZETEK:

1. Kratka zgodovina magnetike (Kitajci (kompas), Grki (magnet privlači), 1600 Gilbert (zemlja je velik magnet, znanstven pristop, poli), 1820 Oersted (zveza med električnim tokom in magnetom), 1820 Ampere (sila med vodniki)).
2. Velikost magnetne sile med dvema ravnima vodnikoma je $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}$.
3. Sila je privlačna, če je smer toka v vzporednih ravni vodnikih enaka.
4. Definicija enote 1 A: sila med dvema vzporednima vodnikoma s tokom 1 A oddaljena za 1 m je $2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$.
5. Sila na tokovni element je $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$, kjer B imenujemo gostota magnetnega pretoka.
6. Smer sile je v smeri, ki je pravokotna tako na vektor $d\vec{l}$ kot na vektor $\vec{B}$.
7. Tokovni element $I d\vec{l}$ je definiran kot produkt toka v vodniku in diferenciala dolžine vodnika.
8. Definicija za gostoto magnetnega pretoka iz $B = \frac{F}{Il}$ je, da je B sila na tokovni element.

Naloge:

izpit, 16. aprila 2002

izpit, 28. junij 2006

19.04.2001

Prvi kolokvij OE II 23.04

2002

BIOT-SAVARTOV ZAKON (2)

Polje, ki ga v okolici povzroča neskončen raven vodnik smo že zapisali, ko smo obravnavali silo med dvema ravnima vodnikoma. To polje je $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. To enačbo in druge, za poljubno obliko vodnika s tokom lahko izračunamo z uporabo Biot-Savartovega zakona.

Polje, ki ga tokovni element $I \cdot d\vec{l}$ povzroča v točki T je:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin(\theta)}{r^2} \quad (2.1)$$

kjer je r razdalja od tokovnega elementa do točke T , θ pa je kot med vektorjema $d\vec{l}$ in $\vec{r}$.

Ta enačba dá le velikost polja, ne pa tudi smeri. Smer polja je pravokotna na ravnino, ki jo določata vektorja $d\vec{l}$ in $\vec{r}$, kar lahko zapišemo z vektorskim produktom

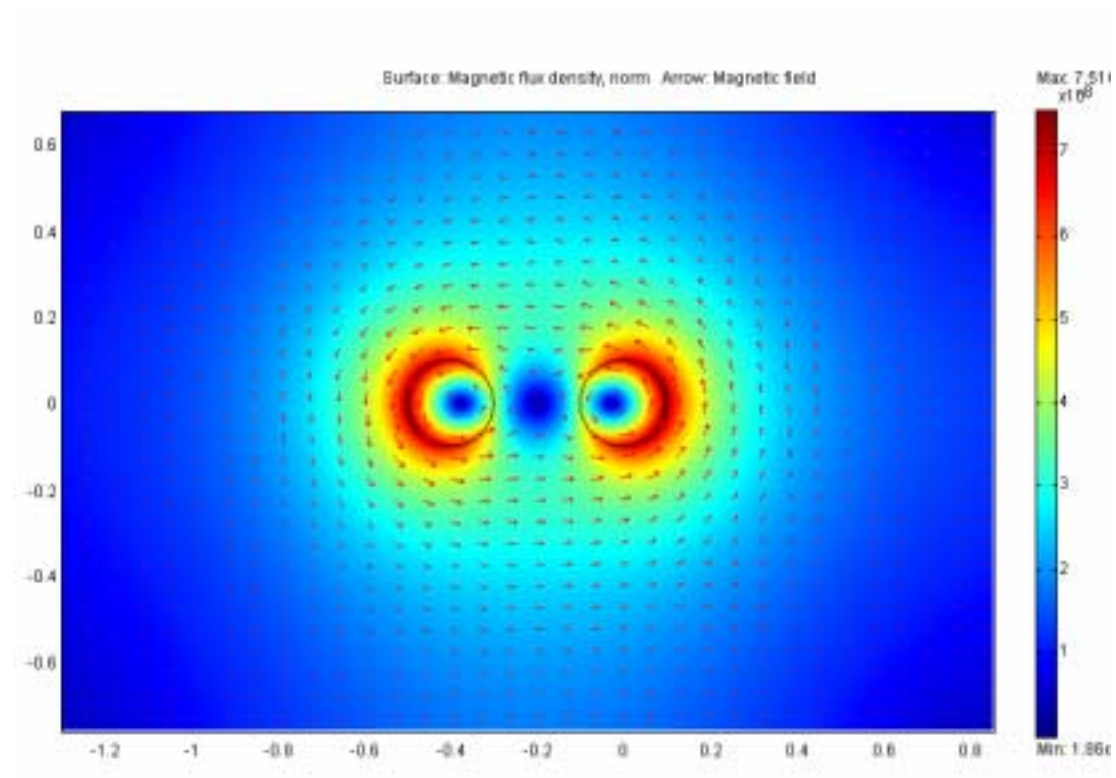
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (2.2)$$

SLIKA: Tokovni element oddaljen od točke T za razdaljo r povzroča v točki T gostoto magnetnega pretoka, določeno z Biot-Savartovim zakonom.

Da bi določili polje v točki T za celotni tokovodnik, je potrebno sešteti (integrirati) prispevke vseh tokovnih elementov:

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2.3)$$

To je Biot-Savartov zakon za izračun polja v okolici tokovodnika.



SLIKA: Polje v okolici dveh polnih vodnikov s tokom enake velikosti.

Vprašanja:

- V katero smer teče tok v levem in desnem vodniku?
- Kolikšno je polje v sredini med vodnikoma?
- Kje je polje največje?
- Določite smer polja na simetrali med vodnikoma?
- Skiciraj polje na simetrali in vzdolž premice, ki gre skozi središči vodnikov.
- Kakšna bi bila oblika polja pri spremenjeni smeri toka v enem vodniku?

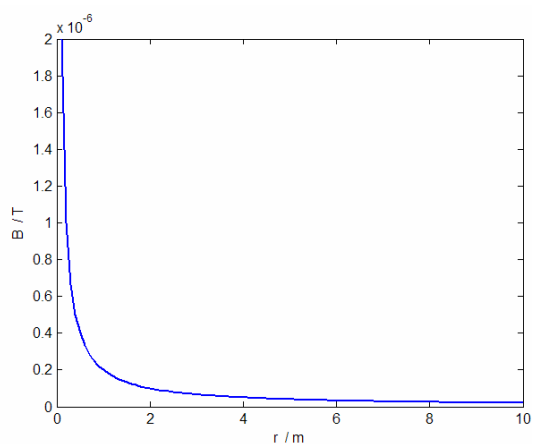
PRIMERI IZRAČUNOV POLJA Z UPORABO BIOT-SAVARTOVEGA ZAKONA

Primer 1: Izpeljimo izraz za polje v okolici tokovne premice.

SLIKA IN IZPELJAVA. Rezultat je $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

RAZLOŽI SMER POLJA Z VEKTORSKIM PRODUKTOM IN Z UPORABO DESNE ROKE, KJER PALEC USMERIMO V SMER TOKA, PRSTI KAŽEJO SMER POLJA OKOLI VODNIKA.

Primer uporabe programa Matlab za izračun polja v okolici tokovne premice s tokom 1 A.

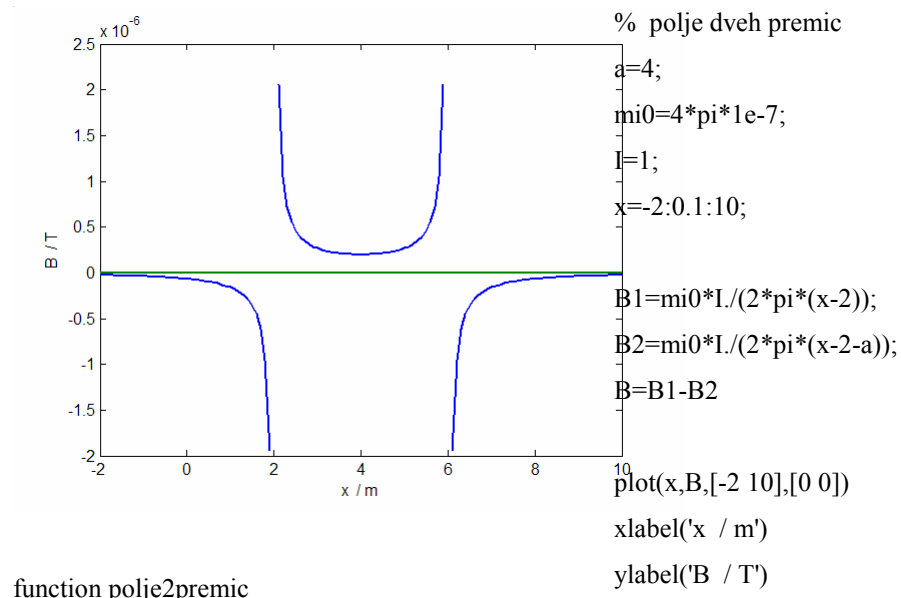


```
function poljepremice
% polje tokovne premice
mi0=4*pi*1e-7
I=1
r=0:0.1:10
B=mi0*I./(2*pi*r);
plot(r,B)
xlabel('r / m')
ylabel('B / T')
```

Primer 2: Izpeljimo izraz za polje tokovne daljice.

Rezultat je $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$. SLIKA.

Primer 3: Narišimo polje v oddaljenosti od dveh premih vodnikov s programom MATLAB. Iz slike določite smer, pozicijo in velikost tokov!



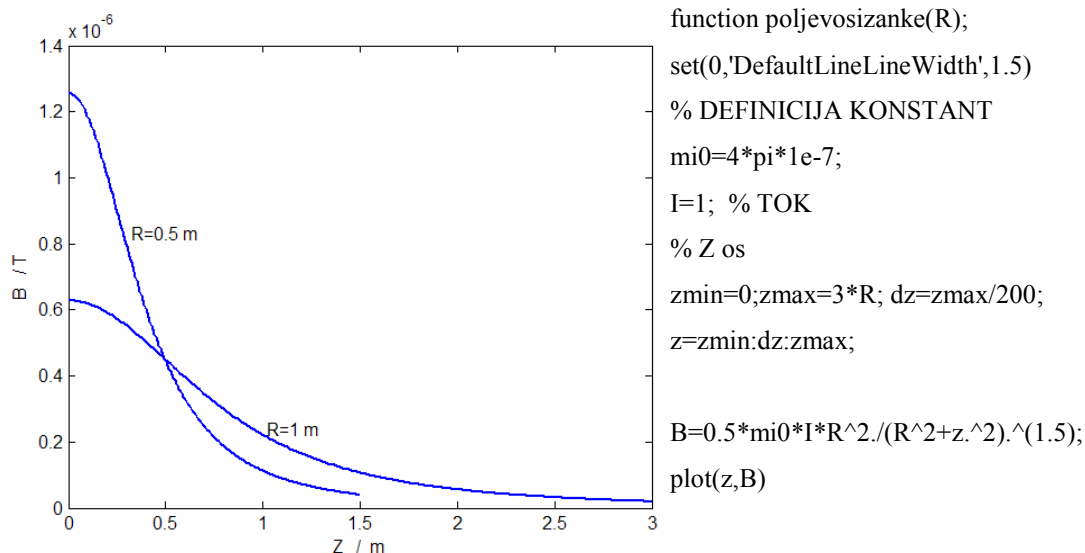
Primer 4: Izpeljimo izraz za B v središču tokovne zanke:

SLIKA IN IZPELJAVA. Rezultat je $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2a}$.

Primer 5: Izpeljimo polje v osi tokovne zanke.

SLIKA IN IZPELJAVA. Rezultat je $\bar{B} = \bar{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}.$

Primer uporabe programa Matlab za izračun polja v osi zanke. Funkcija je uporabljena 2x, z radijem 1 m in 0,5 m. Vmes smo uporabili ukaz hold on (poljevosizanke(1); hold on; poljevosizanke(0.5))

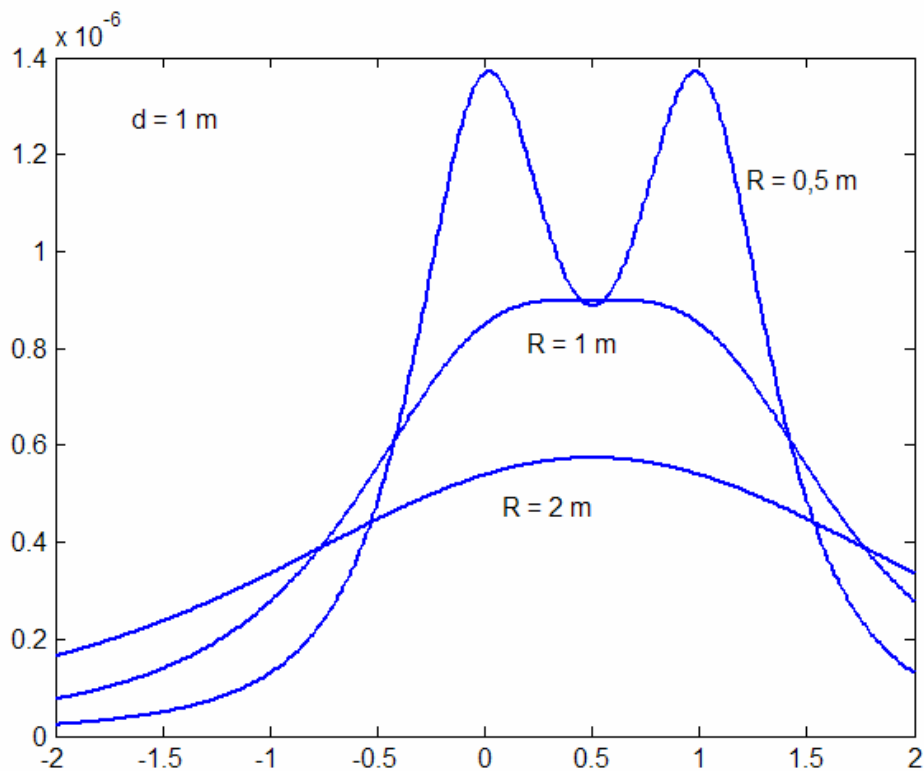


Polje izven osi tokovne zanke

Polje izven osi tokovne zanke ni enostavno izpeljati in tudi rezultat ni preprost. Je pa pomemben, zato ga vseeno zapišimo vsaj v poenostavljeni obliki, ki velja za večje razdalje od zanke (recimo za razdalje dosti večje od polmera zanke) in je v sferičnih koordinatah:

$$\bar{B} = \bar{e}_r \cdot B_r + \bar{e}_\theta \cdot B_\theta = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3} (\bar{e}_r \cdot 2 \cos(\theta) + \bar{e}_\theta \cdot \sin(\theta)). \quad (2.4)$$

Dobimo tako komponento v smeri radija kot kota. Pomembno je, da polje pada z razdaljo s tretjo potenco, tako kot električno polje v oddaljenosti od električnega sdipola.



Slika: Primer izračuna polja para v osi vzporednih tokovnih zank oddaljenih za 1 m. Polmeri zank so 2m, 1 m in 0,5 m. Tok je 1 A. Dokaj homogeno polje se utvari v sredini tuljave.

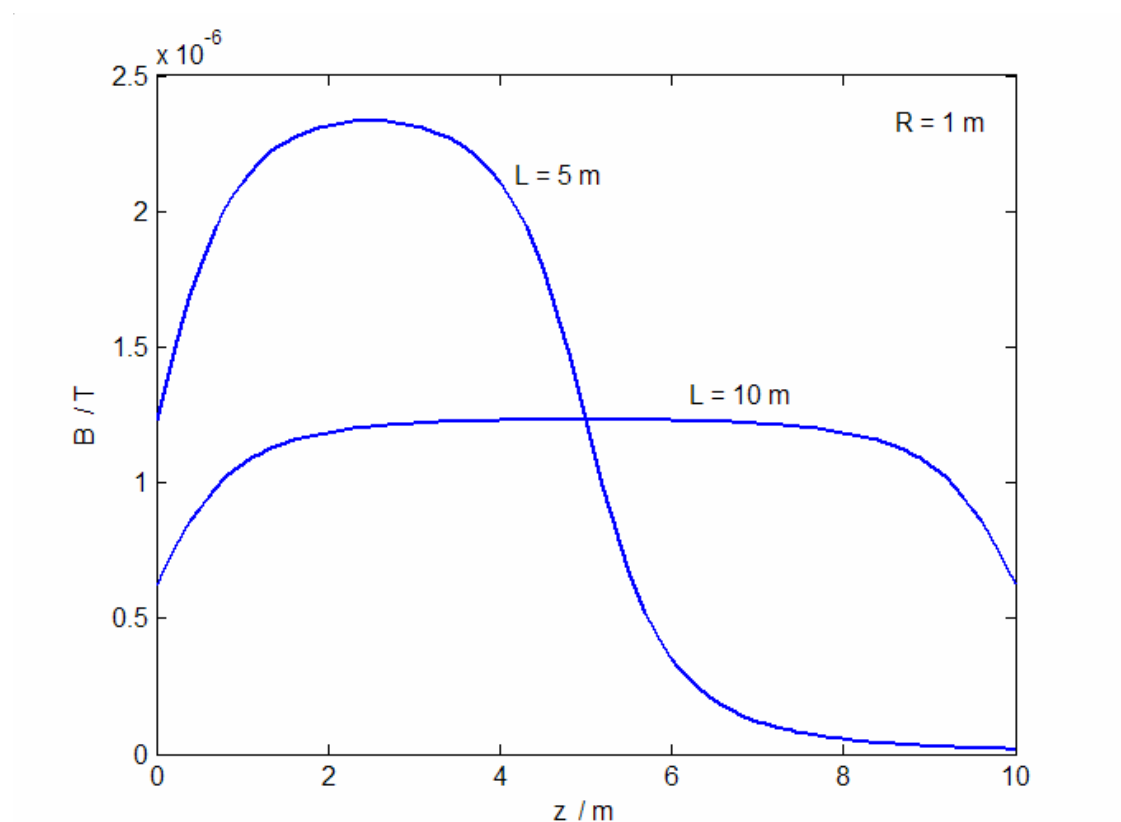
```
function poljedvehzank;
I=1; R=2; d=1;
set(0,'DefaultLineLineWidth',1.5)
% DEFINICIJA KONSTANT
mi0=4*pi*1e-7;
xmin=-2*d;xmax=2*d; dx=xmax/200;
x=xmin:dx:xmax;
B1=0.5*mi0*I*R^2./(R^2+x.^2).^(1.5);
B2=0.5*mi0*I*R^2./(R^2+(x-d).^2).^(1.5);
B=B1+B2
plot(x,B)
```

Primer 6: Izpeljimo izraz za polje ravne tuljave – solenoida.

SLIKA in IZPELJAVA. Rezultat je $\boxed{\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 NI}{2l} (\cos(\beta_1) + \cos(\beta_2))}$.

Primer 6b: Določimo polje v sredini solenoida polmera 0,5 cm s tokom 0,1 A in 200 ovoji.

SLIKA IN IZPELJAVA. POENOSTAVITVE ZA POLJE V SREDINI ALI NA ROBU TULJAVE



Slika: Polje v osi solenoida s tokom $NI = 10$ A, polmera ovojcev 1 m in dolžine 5 m in 10 m. Začetek tuljave je pri $z = 0$ m.

Primer 7: Iz enačbe za solenoid zapišimo še enačbo za toroid.

POVZETEK:

1. Iz enačbe za silo med dvema tokovnima elementoma ugotovimo, da nastopa člen $\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin(\theta)}{r^2}$, ki ga poimenujemo gostota magnetnega pretoka. Popolni izraz za gostoto magnetnega pretoka predstavlja Biot-Savartovega zakon in vsebuje vektorski produkt tokovnega elementa in vektorja r in integracijo po tokovnih elementih: $\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$. (Vprašanja: Kam kaže vektorski produkt? Kako ga izračunamo? Kaj pomeni integracija po tokovnih elementih?)
2. Polje v okolici tokovne premice je $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Polje v okolici tokovne premice je rotacijsko, smer polja določimo iz vektorskega produkta $d\vec{l} \times \vec{r}$ ali z ovijanjem prstov desne roke, če tok kaže v smeri palca.
3. Polje tokovne daljice je $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$. (Razloži r in kot theta. Skica.)
4. Polje v središču tokovne zanke je $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2a}$. (Kaj je a in kam kaže polje glede na smer toka v zanki in izbiro koordinatnega sistema?)
5. Polje v osi tokovne zanke je $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$. (Kje je največje? V katero smer kaže? Skiciraj potek.)
6. Polje v osi ravne tuljave – solenoida je $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 NI}{2l} (\cos(\beta_1) + \cos(\beta_2))$. (Kaj je l , kako določimo kote, poenostavitev enačbe v primeru zelo dolgega solenoida.)

Naloge:

izpit, 17. septembra 2002

izpit, 16. aprila 2002

izpit, 4. 12. 2001

izpit, 20. september 2006

izpit, 31. avgust 2006

izpit, 19. september 2005

izpit, 3. 12. 2001

izpit, 30. avgust 2005

Izpit 26. 6. 2002

Izpit 4. 9. 2003

1. kolokvij, 17.4.2002

1. kolokvij, 9. maj 2005

izpit, 20. september 2004

Izpit, 17. 01. 2002

Prvi kolokvij, 9. maj 2002

Dodatno: Primer numeričnega izračuna polja izven osi zanke.

```

function [B]=polje(R, rc)
% funkcija izracuna polje krozne zanke
% polmera rc pri radiju R

if (R==rc)
    error('Pri polmeru zanke B ni definiran')
end
if (rc==0)
    error('Polmer zanke ne more biti enak 0')
end

mi0=4*pi*1e-7
I=10
k=mi0*I/(4*pi)

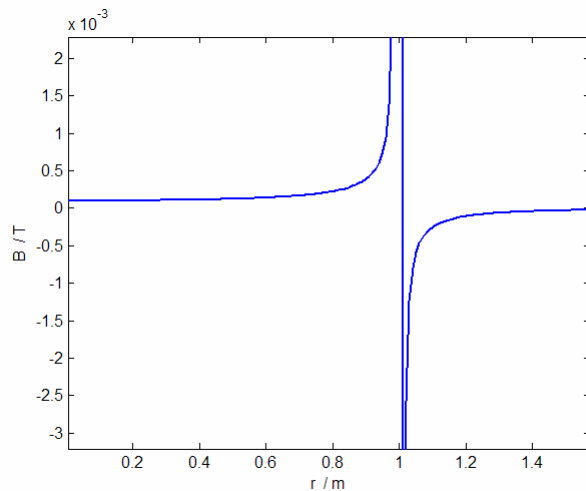
%R=0.1
function risipoljezanke(a)
% Narise polje tokovne zanke kot funkcijo radija od 0 do 2x polmera zanke
dr=1.01*a/100
r=0:dr:2*a;
BB=poljezanke(r,a);
plot(r,BB)

fi=0; N=100; B=0;
dfi=2*pi/N;
dBB=0;
for i=1:N
    fi=fi+dfi;
    r2=rc^2+R.^2-2*rc.*R*cos(fi);
    r=sqrt(r2);
    theta1=acos((rc^2+r2-R.^2)./(2*rc.*r));
    theta=pi/2+theta1;
    dB=k*sin(theta)./r2;
    % dBB=[dBB dB]
    B=B+dB;
end

%plot(dBB(2:N))
B0=mi0*I/(2*rc);

```

```
xmin=0; xmax=max(r); ymin=-100*BB(1); ymax=-ymin;  
axis([xmin xmax ymin ymax])
```

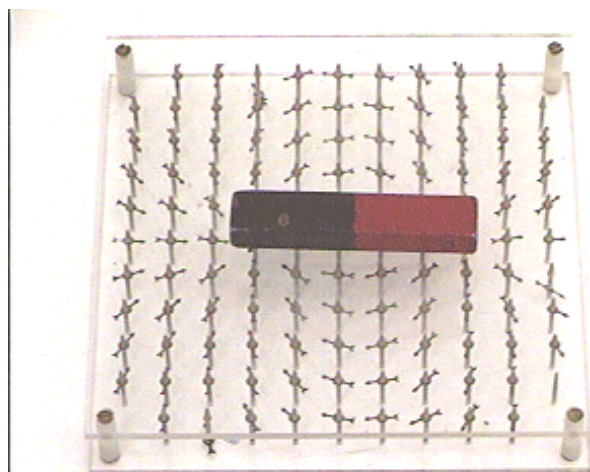
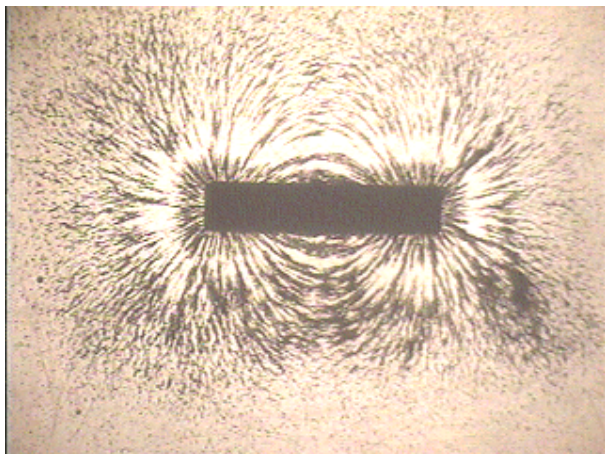


Slika: Polje izven osi zanke v ravnini zanke. Polmer zanke je 1 m.

VIZUALIZACIJA MAGNETNEGA POLJA

Za dobro predstavo o magnetnem polju je zelo pomembna dobra vizualizacija polja v okolici virov (tokovodnikov ali trajnih magnetov). Poslužimo se lahko vrste postopkov:

- 1) smer opilkov
- 2) smer kompasa ali vrste kompasov
- 3) smer majhnih magnetkov
- 4) skeniranje z merilnikom magnetnega polja (Hallov sensor)
- 5) Numerično izračunavanja prispevkov toka in izris na zaslonu
 - a. Z vektorji, ki prikazujejo smer in velikost polja v določenih točkah
 - b. Z barvami in ekvipoljskimi črtami
 - c. 3D vizualizacija
 - d. Z gostotnicami
- 6) Numerično računanje z diskretnimi elementi (končne difference, končni elementi, mejni elementi)



SLIKA: Feromagnetni opilki se v bližini trajnega magneta usmerijo v smeri gostote magnetnega pretoka. (Zakaj?) Desno: Trajni magnetki se kot mali kompasi usmerijo v smer magnetnega polja. (Ali je tudi medsebojni vpliv med magnetki?)

AMPEROV ZAKON (3)

Naslednje pomembno odkritje Ampera je t.i. Amperov zakon, ki ga zapišemo na sledeči način:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (3.1)$$

oziroma z besedami: integral gostote magnetnega pretoka po ZAKLJUČENI POTI (zanki) je sorazmeren toku, ki ga oklepa zanka. Integrirati je potrebno le tisto komponento polja, ki je v smeri poti integracije – to nam pove skalarni produkt. Včasih ta zakon imenujemo tudi zakon vrtničnosti polja, saj je vrednost takega integrala različna od nič le, če je polje vrtnično.

(Koliko je bil v elektrostatiki $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$? Kaj to pomeni v primerjavi z Amperovim zakonom?)

SLIKA: Zanka v magnetnem polju. Integral komponente magnetnega polja v smeri zanke je sorazmeren toku, ki ga zanka oklepa.

Amperov zakon je en osnovnih zakonov elektromagnetike. V nekoliko preoblikovani (bolj splošni obliki) je znan tudi kot ena od štirih Maxwellovih enačb. Te v celoti popisujejo elektromagnetno polje.

Primer: Poglejmo, če zakon velja premi tokovodnik, ki ga obkrožimo z zanko v obliki krožnice. (SKICA) Polje po poti krožnice je konstantno in kaže v isti smeri kot $d\vec{l}$, torej velja

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \int_0^{2\pi} dl = B \cdot 2\pi R = \mu_0 I. \text{ Iz enačbe sledi } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Dobimo enak rezultat za polje v okolici tokovne premice kot z uporabo Biot-Savartovega zakona.

SLIKA: Integracija polja po krožnici v sredini katere je premi tokovodnik.

Kaj pa, če vzamemo drugačno obliko zanke? Dobimo zopet enak rezultat, saj če B ni v smeri dl -a, B vedno kaže v smeri kota (SKICA) in se manjša z razdaljo od premice, dl pa lahko razstavimo na komponento v smeri B ja (kota) in pravokotno. Dobimo

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot d\vec{l} &= \vec{e}_\varphi B(r) \cdot dl (\vec{e}_\varphi \cos(\theta) + \vec{e}_r \sin(\theta)) = \\ &= B(r) \cdot dl \cdot \cos(\theta) = B(r) \cdot r \cdot d\varphi\end{aligned}$$

Z integracijo pridemo do enakega rezultata kot zgoraj. Kar pomeni, da je neodvisno od oblike zanke po kateri izvajamo integracijo rezultat integracije B ja v smeri zanke vedno enak:

Oklenjen tok pomnožen s permeabilnostjo vakuumu.

SLIKA: Integracija polja po krožnici znotraj katere je premi tokovodnik.

Primer 2 in 3: Določite $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ za določene konfiguracije vodnikov in zank ...

SLIKA: Zanka in vodniki.

Amperov zakon, kot smo ga zapisali, ne velja popolnoma splošno, saj obstajajo materiali (magnetni), kjer nimamo vzbujačnih tokov, pa vendar je B različen od nič in je vrtinčen. Zakon, kot smo ga spoznali danes bomo v nadaljevanju nekoliko dopolnili, da bo veljala tudi za take primere.

Za analitičen izračun polja v poljubnih strukturah je uporaba Amperovega zakona pogosto neprimerna, saj iščemo neznano veličino znotraj integrala. Uporaba tega zakona za izračun polja je posebno primerna le tedaj, ko imamo neko simetrično porazdelitev toka: tipični primeri so:

- Zunanost in notranost ravnega vodnika
- Dolga ravna tuljava – solenoid
- Toriod pravokotnega preseka – eksaktno (auditorne vaje)
- Toroid okroglega preseka – približno
- Tokovna obloga

Primer 3: Pokaži uporabo Amperovega zakona za določitev gostote magnetnega pretoka polnega vodnika.

Izračun: Z upoštevanjem Amperovega zakona dobimo $B \cdot 2\pi r = \mu_0 J A(r)$, sledi

$$B \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \pi r^2 \quad \text{in} \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r}.$$

Polje narašča linearno z oddaljevanjem od središča vodnika. Izven vodnika upada kot

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Pomembna razlika med elektrostatičnim električnim poljem in magnetostatičnim

magnetnim poljem je že ta, da pri elektrostatici električnega polja znotraj prevodnika ni, magnetno polje v tokovodniku pa je.

SLIKA: Polni vodnik.

Primer 4: Določimo gostoto magnetnega pretoka v solenoidu in toroidu.

Izračun: Zapišemo $B \cdot l + 0 + 0 + 0 = \mu_0 K \cdot l$.

$$B = \mu_0 K$$

Rezultat za polje solenoida je $\boxed{B = \frac{\mu_0 NI}{l}}.$

Rezultat za polje toroida je enak, le da je l obseg: $\boxed{B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}}$

SLIKA: Solenoid in toroid.

Primer 5: Določimo gostoto magnetnega pretoka tokovne obloge. Tokovna obloga je tok

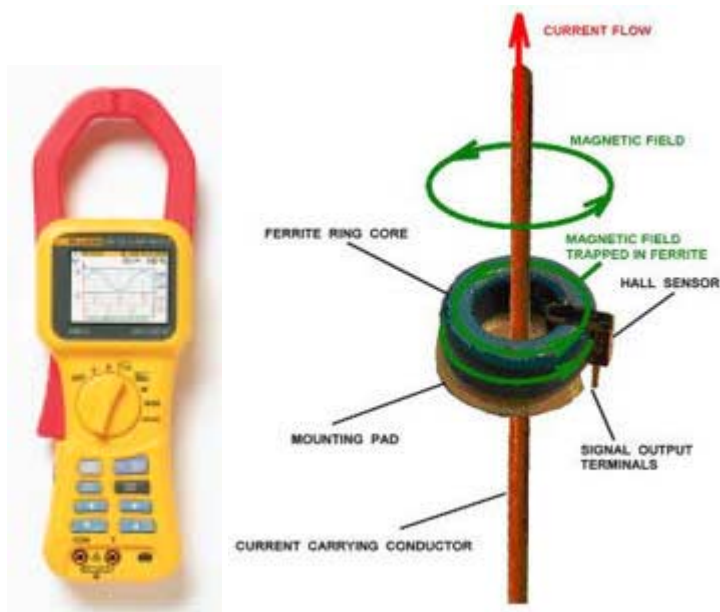
vzdolž tankega vodnika na enoto prečne dolžine: $K = \frac{I}{l}$. Enota je A/m.

Izračun: Zapišemo: $B \cdot l + 0 + B \cdot l + 0 = \mu_0 K \cdot l$. Rezultat je $\boxed{B = \frac{\mu_0 K}{2}}$. Smer je vzdolž tokovne

obloge, smer polja določimo tako, kot da bi imeli opravka s tokovno premico nad točko.

SLIKA: Polje v okolici tokovne obloge je konstantno. Smer je vzporedna s površino.

APLIKACIJA: TOKOVNE KLEŠČE



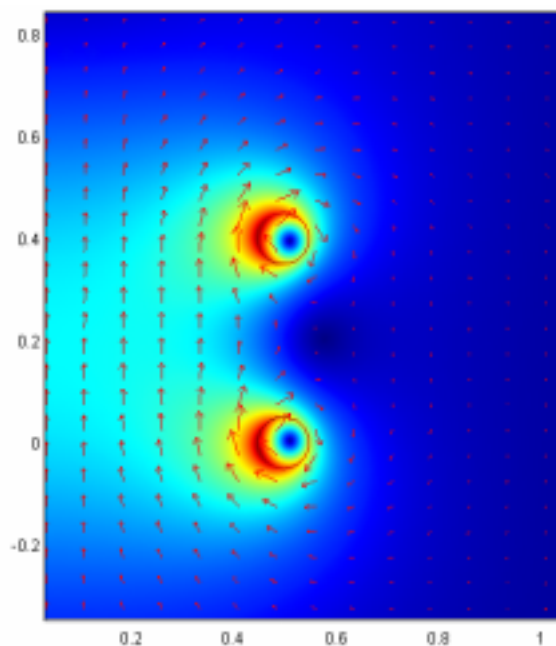
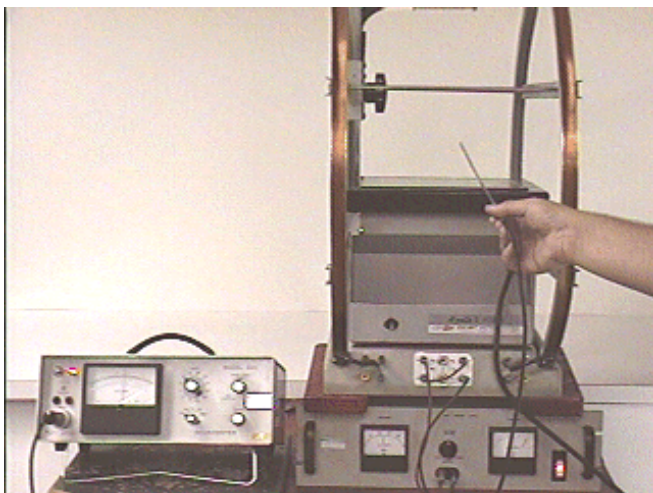
SLIKA: Inštrumenti za merjenje toka uporabljajo princip Ameprovega zakona za merjenje toka s pomočjo merjenja magnetnega polja. Levo: Nekoliko bolj »napreden« inštrument s tokovnimi kleščami uporablja za merjenje Hallov element (Fluke 345) .

Desno: Hallov element integriran v feritni obroček za merjenje toka.

(<http://www.ayainstruments.com/applications3.html>, http://www.kew-ltd.co.jp/en/support/mame_02.html, http://en.wikipedia.org/wiki/Hall_effect)

POVZETEK:

- 1) Integral gostote magnetnega pretoka v smeri poljubno izbrane zaključene poti (zanke) je sorazmeren toku, ki ga zanka oklepa ali z enačbo: $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$. Ta zapis imenujemo Amperov zakon.
- 2) Predznak zaobjetega toka je odvisen od smeri integracije v zanki in smeri toka v vodniku, ki ga zanka obkroža. Predznak je pozitiven, če predpostavimo, da smer zanke predstavlja smer toka v zanki in je polje te zanke na mestu vodnika s tokom enaka kot smer toka v vodniku. (SKICA)
- 3) S pomočjo Amperovega zakona smo določili približne izraze za polje v sredini solenoida in toroida. Rezultat je $B = \frac{\mu_0 NI}{l}$, kjer je l dolžina tuljave, oziroma dolžina srednje poti v toroidu.
- 4) S pomočjo Amperovega zakona smo zapisali polje tokovne obloge, kjer tok opišemo s površinsko gostoto toka K [A/m]. Dobimo $B = \frac{\mu_0 K}{2}$. Polje je prečno na smer toka, smer določimo enako kot smer Bja okoli vodnika.
- 5) V elektrostatiki smo imeli $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ in smo rekli, da je tako polje potencialno. Posledica tega namreč je, da lahko E zapišemo kot gradient potenciala. Kot vidimo, je magnetno polje drugačno, lahko rečemo daje polje rotacijsko ali vrtilno.
- 6) Kasneje bomo obravnavali še razširjeno obliko Amperovega zakona, ki predstavlja eno od Maxwellovih enačb. Za osnovo ima zapisano obliko, ki pa je spremenjena v toliko, da upošteva tudi toke zaradi magnetizacije snovi ter toke časovno spreminjajočega se električnega polja.



SLIKA: Na desni je primer prikaza polja v okolici dveh zank (Helmholtzov par), kjer je prikazano le polje za polovico zanke. Celotno polje bi dobili z rotacijo okoli leve stranice. Opazimo lahko precejšnjo homogenost polja v osi tuljav. Na levi je primer merjenja polja v sredini Helmholtzovega para.

Primeri izpitnih in kolokvijskih nalog:

1. kolokvij , 17.4.2002
1. kolokvij, 3. maj 2004
izpit, 20. junij 2001
Prvi kolokvij OE II 23.04 2002

MAGNETNI PRETOK – FLUKS (7)

Če govorimo o gostoti magnetnega pretoka, kaj pa je magnetni pretok? Velja si predstavljati analogijo z gostoto električnega toka J in celotnim tokom I . Pri tokovnem polju smo uporabili zapis $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$, ki predstavlja tok, ki gre skozi neko (nezaključeno !) ploskev. V magnetiki

zapišemo na podoben način

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (4.1)$$

kjer je Φ imenujemo magnetni pretok, pogosto pa tudi magnetni fluks ali kar samo fluks. Enota je $T m^2$, ali pa Wb (Weber), ali pa tudi V s. V kratkem bomo namreč ugotovili, da je koncept magnetnega pretoka osnova za izračun inducirane napetost, induktivnosti in magnetne energije.

SLIKA: Magnetni pretok je integral vektorja gostote pretoka skozi določeno površino.

Predstavljamo si ga z analogijo med gostoto (električnega) toka in gostoto magnetnega pretoka (J in B) ter tokom in fluksom (I in Φ).

Izračun fluksa. Za izračun magnetnega pretoka moramo torej poznati vektor gostote magnetnega pretoka povsod po površini, skozi katero nas zanima pretok. Tega lahko izračunamo s pomočjo BS ali Amperovega zakona (ali na kak tretji način: z meritvijo, numerično simulacijo, ...). Pri izračunu je potrebno upoštevati le tisto komponento gostote pretoka, ki je pravokotna na površino, kar v enačbi izrazimo z uporabo skalarnega produkta. Rezultat te operacije je skalar. Če je polje homogeno povsod po površini, lahko (4.1) zapišemo v preprostejši obliki:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{B} \cdot \vec{e}_n dA = B \cdot A \cdot \cos(\alpha) \quad (4.2)$$

kjer je alfa kot med smerjo B in normalo na površino (SKICA). In če je polje pravokotno na površino, je fluks največji in enak kar

$$\Phi = B \cdot A.$$

Brezizvornost magnetnega polja. Koliko pa je ta fluks po zaključeni površini? Ker je polje vrtinčno, enak del pretoka ki v določen prostor vstopa tudi izstopa. Integral fluksa po zaključeni površini bo torej enak nič ali z enačbo

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (4.3)$$

To je pomemben rezultat, saj govori o brezizvornosti magnetnega polja. Da torej ne obstaja magnetni izvor in ponor v podobnem smislu kot to poznamo pri električnem naboju. Temu zapisu lahko rečemo tudi **Gaussov zakon za magnetiko**, in predstavlja eno od Maxwellovih enačb (3.) – zopet le v integralni obliki.

Poglejmo še analogijo z elektrostatičnim poljem. Tam je bil integral E ja po zaključeni površini sorazmeren zajetemu naboju. Električnemu polju smo rekli, da je izvorno (izvira na pozitivni nabojih in ponira na negativnih). Analogno električnim nabojem ne moremo najti magnetnega naboja. Torej **magnetno polje ni izvorno**. Včasih rečemo tudi, da je solenoidno. Vsak trajni magnet je tako izvor kot ponor magnetnega polja. Se pa v smislu analogije in lažjega računanja polj trajnih magnetov včasih uporablja tudi pojem magnetnega naboja, oziroma bolj natančno magnetnega površinskega naboja.

Upodobitev magnetnega polja. Gostoto pretoka smo lahko prikazali z množico vektorjev v prostoru ali pa z gostotnicami, ki povezujejo točke z enako veliko gostoto pretoka. Prostor med gostotnicami si lahko zamislimo kot cevke z določeno velikostjo pretoka. Pretok torej lahko vizualiziramo (predstavljamo) z *gostotnimi cevkami*. Ker običajno rišemo polje v dveh dimenzijah, gostotne cevke zapolnjujejo prostor med dvema gostotnicama. Običajno jih rišemo tako, da je fluks med sosednjimi gostotnicami konstanten $\Phi_i = konst$. Gostotne cevke ravnega vodnika ponazorimo s koncentričnimi krogi s polmeri, ki se gostijo v smeri manjšanja razdalje od vodnika. Da bo fluks med dvema vodnikoma konstanten, mora veljati

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} = konst, \text{ oziroma } \frac{r_{i+1}}{r_i} = e^{k \cdot \Phi}.$$

Na podoben način smo risali tudi ekvipotencialne ploskve pri elektrostatici.

SLIKA: Upodobitev magnetnega polja z gostotnimi cevkami.

Primer: Določite magnetni pretok skozi pravokotno zanko, ki je v ravnini ravnega vodnika s tokom 36 A in od vodnika oddaljena 5 cm. Dolžina zanke je 10 cm, širina pa 4 cm.

Izračun: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$

$$\Phi = \frac{4\pi 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} 36 \text{ A}}{2\pi} 0,1 \text{ m} \cdot \ln \frac{9 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 423 \text{ nV} \cdot \text{s} = 423 \text{ nWb}$$

SLIKA: Pravokotna zanka in vzporedno ležeči vodnik.

Primer: Določite fluks med ravnima vodnikoma (dvovodom) s polmeroma $R = 0,5 \text{ cm}$ in medosne razdalje $d = 2 \text{ m}$ na dolžini 100m. Tok v vodnikih je 150 A.

Izračun: $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$, $\Phi = 2 \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \cdot \ln \frac{d-R}{R} \cong 35,9 \text{ mWb}$.

SLIKA: Ravna vodnika (dvovod).

Naloge:

izpit, 17. septembra 2002

izpit, 3. septembra 2002

izpit, 17. 4. 2003

izpit, 5. septembra 2002

izpit, 31. avgust, 2004

Izpit 4. 9. 2003

1. kolokvij, 22. april 2003

Prvi kolokvij, 9. maj 2002

INDUKTIVNOST (prvič)

Kot vidimo v izrazih za fluks, je le ta linearno odvisen od toka skozi strukturo. Zato definiramo **induktivnost** kot fluks skozi strukturo, pomnožen s številom ovojev, skozi katere gre fluks in deljen s tokom tuljave:

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I}, \quad (4.4)$$

Enota za induktivnost je V s/A ali H (Henry).

Lastna induktivnost. Običajno nas zanima induktivnost določene strukture, pogosto kar tuljave. Iz znane induktivnosti tuljave lahko določimo fluks v tuljavi pri določenem toku skozi tuljavo. Kot bomo v kratkem spoznali, pa je še pomembnejše to, da predstavlja neposredno zvezo med tokom in napetostjo na tuljavi. Tej induktivnosti rečemo tudi **lastna induktivnost**, saj fluks povzroča lastni tok za razliko od medsebojne induktivnosti, kjer fluks povzroča tok neke druge strukture (tuljave). Produktu fluksa in števila ovojev rečemo **magnetni sklep** ($\Psi = N \cdot \Phi$), torej velja

$$L = \frac{\Psi}{I}, \quad (4.5)$$

Induktivnost je osnovni podatek za vsako tuljavo. Ponavadi imamo zahtevo po določeni induktivnosti tuljave, kar dosežemo z ustrezno obliko in primernim številom ovojev tuljave. Če ni posredi feromagnetnih snovi, je induktivnost geometrijsko pogojena, podobno kot je veljalo za kapacitivnost.

Primer: Določimo induktivnost dvovoda iz primera 2, če upoštevamo le fluks med žicama (ne tudi v žicah).

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R} \cong 240 \mu\text{H}.$$

Če bi želeli pravilno določiti induktivnost dvovoda, bi morali upoštevati tudi tisti del fluksa, ki gre skozi vodnika. Izpeljana enačba $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}$ torej ni eksaktna za induktivnost

dvovoda. Ker pa ta fluks ne zajame celotnega toka vodnika, je izpeljava končnega izraza nekoliko bolj zapletena (AR Sinigoj: Osnove elektrotehnike, str. **). Če bi upoštevali še to, bi

kljub vsej zahtevnosti izračuna dobili preprost izraz : $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{R} \right)$. Če bi vstavili

vrednosti iz primera 2, bi dobili rezultat približno 250 μH .

Očitno je, da je osnovni izraz dovolj natančen, če je le razdalja med vodnikoma mnogo večja od polmera vodnikov.

Primer: Zapišimo poenostavljen izraz za lastno induktivnost dolgega solenoida in jo izračunamo za primer: polmer tuljave 1 cm, dolžina 5 cm, 100 ovojev. (Poenostavimo izraz za polje v dolgem solenoidu in to, da je homogeno porazdeljen znotraj preseka)

Izračun: $B \cong \frac{\mu_0 N I}{l}$, $\Phi \cong \frac{\mu_0 N I}{l} A$, $\Psi \cong \frac{\mu_0 N^2 I}{l} A$, $L \cong \frac{\mu_0 N^2}{l} A \cong 79 \mu\text{H}$

SLIKA: Dolga ravna tuljava = solenoid.

Primer: Zapišimo poenostavljen izraz za lastno induktivnost toroida krožnega preseka z notranjim polmerom 4 cm in zunanjam 5 cm. Toroid ima 200 ovojev. (Računamo s srednjim polmerom in homogenim poljem znotraj preseka toroida)

Izračun: $B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_{sr}}$, $\Phi \cong \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_{sr}} A$, $\Psi \cong \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi r_{sr}} \pi r_A^2$, $L \cong \frac{\mu_0 N^2}{2r_{sr}} r_A^2 \cong 55,85 \mu\text{H}$

SLIKA: Toroid krožnega preseka.

DODATNO: ZRAČNE TULJAVE V PRAKSI

Že ime samo pove, da so to navitja (tuljave), ki ne vsebujejo feromagnetnih snovi. Le te običajno bistveno povečajo induktivnost (pri enakem navitju), kar je ugodno, po drugi strani pa imajo tudi mnogo pomanjkljivosti, ki so lahko v določenih primerih pomembne. Predvsem je lahko problem nelinearnost, saj pridejo jedra lahko v nasičenje in zmanjšajo induktivnost tuljave. Nelinearnost tuljave pa pomeni, da bo signal preko tuljave popačen, kar pa običajno ni zaželeno. Problem so lahko tudi izgube v jedru, ki se segreva.

Zračne tuljave so torej pomembne predvsem tam, kjer si ne smemo privoščiti popačitve signalov, kot na primer v audio tehniki, radio oddajnikih, itd. Zračne tuljave brez težav uporabljamo do 1 GHz, feromagnetne pa imajo običajno težave (povzročajo nelinearnosti) že pri frekvencah nad 100 MHz. Problem v zračnih tuljavah je lahko predvsem večje število ovojev, kar obenem pomeni večjo ohmsko upornost tuljave.

Odločitev za obliko tuljave narekuje aplikacija. Vase zaključene tuljave (toroidi) so primerne tam, kjer je potrebno čim bolj zmanjšati vpliv tuljave na okolico.

Včasih namesto izpeljanih enačb najdemo tudi bolj empirične enačbe¹, kot na primer za solenoid:

$$L = 0.001 N^2 r^2 / (228 r + 254 l)$$

Ali pa

$$L = 4 \times 10^{-7} \pi a N^2 ((0.5 + S_1/12) \ln(8/S_1) - 0.84834 + 0.2041 S_1),$$

kjer je $S_1 = (c/2a)^2$

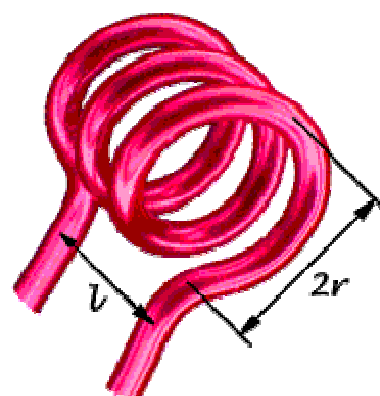
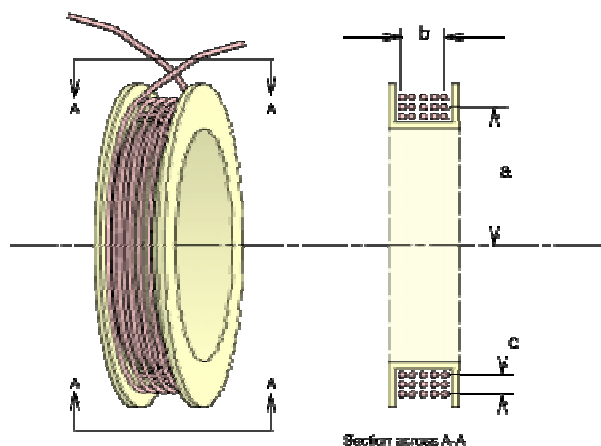


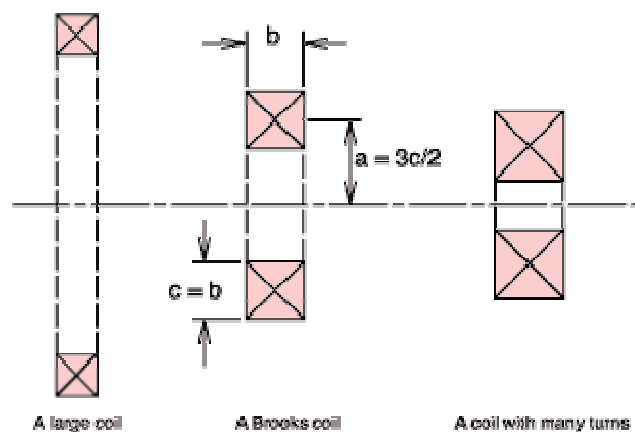
Fig. 1 Dimensions of a multi-layer coil of rectangular cross section



¹ (www.ee.surrey.ac.uk/Workshop/advice/coils/air_coils.html)

Pogosto se postavlja vprašanje, katera oblika tuljave je bolj idealna, torej, pri katera ima večjo induktivnost. Tuljava z velikim radijem ima sicer večjo površino in torej večji fluks, ima pa manjše število ovojev. Tuljava z majhnim radijem pa ima veliko število ovojev vendar majhno površino v preseku. Optimum je dosežen takrat, ko je srednji polmer približno $3c/2$.

Fig. 2 The optimum shape for a multi layer coil



POVZETEK:

- 1) Magnetni pretok ali fluks skozi poljubno površino smo definirali na enak način kot pri tokovnem polju kot $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$. V preprostem primeru, ko je polje homogeno, se izraz poenostavi v $\Phi = B \cdot A \cdot \cos(\alpha)$, kjer je alfa kot med normalo na površino in smerjo Bja. Pretok je največji, ko je polje pravokotno na površino. Magnetni pretok skozi zaključeno površino je enak nič, kar matematično zapišemo kot $\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$. To je Gaussov zakon za magnetno polje ali tudi zakon o brezizvornosti magnetnega polja.

- 3) Lastno induktivnost smo zapisali kot $L = \frac{N\Phi}{I}$, enota Henry, in prikazali dva primera.

V prvem približen in točen izraz za induktivnost dvovoda, v drugem približen in empiričen izraz za induktivnost ravne tuljave.

- 4) Izračuni:

a. fluks v pravokotni zanki ob vodniku: $\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$

- b. Aproximativni izrazi za induktivnosti:

i. ravna tuljava: $L \cong \frac{\mu_0 N^2}{l} A$

ii. toroid: $L \cong \frac{\mu_0 N^2}{2r_{sr}} r_A^2$

iii. dvovod (brez izpeljave): $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{R} \right)$

DELO MAGNETNIH SIL

Spoznali smo že enačbo za izračun sile na vodnik v magnetnem polju

$$\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (4.1)$$

Sedaj nas zanima, kolikšno delo opravimo pri premiku vodnika iz začetne lege, ki jo bomo označili s T_1 , v končno lego T_2 . To dobimo z integracijo sile po poti

$$A = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (4.2)$$

kjer smo z ds označili diferencial poti v smeri premika in z S celotno pot. Z vstavitvijo enačbe (4.1)

v (4.2) dobimo $A = \int_S I (\vec{dl} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = I \int_{T_1}^{T_2} (\vec{ds} \times \vec{dl}) \cdot \vec{B}$. Sedaj moramo pogledati, kaj predstavlja

$\vec{ds} \times \vec{dl}$ oziroma celotna integracija tega produkta na poti od lege T_1 do T_2 . Vrednost vektorskega produkta je površina, ki jo določata vektorja glede na definicijo vektorskega produkta, smer pa je pravokotna na to površino (v smeri normale). Če to površino skalarno pomnožimo z vektorjem gostote pretoka dobimo diferencial fluksa $(\vec{ds} \times \vec{dl}) \cdot \vec{B} = d\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot d\vec{A} = d\Phi$ in delo je $A = I \int_{T_1}^{T_2} d\Phi$.

Rezultat integracije je celoten fluks, ki gre skoti »plašč«, ki ga opiše vodnik na poti. $A = I \cdot \Phi_{\text{plašča}}$.

Ker pa je, kot smo že spoznali, magnetno polje brezizvorno ($\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$), mora biti celoten fluks

skozi navidezno telo, ki ga opiše premikajoči vodnik, enak nič. To pa tudi pomeni, da mora biti fluks skozi plašč enak razliki fluksa skozi površino, ki jo opisuje vodnik v končnem položaju in fluksu začetnem v položaju. Če želimo pri tem fluks skozi zanko, ki jo opisuje vodnik računati v

isti smeri tako na začetku kot na koncu, velja $\Phi_{\text{plašča}} = \Phi_{\text{končna}} - \Phi_{\text{začetna}}$. Smer teh fluksov

računamo v t.i. pozitivni smeri, ki jo določa tok v gibajoči zanki (smer polja v zanki, ki jo

povzroča tok I).

$$A = I (\Phi_{\text{končna}} - \Phi_{\text{začetna}}) \quad (4.3)$$

SLIKA: Primer premikanja tokovne zanke iz lege T_1 v lego T_2 v polju B .

Kdaj bo rezultat (delo magnetnih sil) pozitiven? Tedaj, ko bo fluks skozi zanko v končni legi večji kot v začetni. Če ima torej tokovna zanka možnost prostega gibanja, se bo zanka postavila tako, da bo fluks skozi zanko največji (Enako ugotovitev bomo postavili tudi v naslednjem poglavju, ko se bomo srečali z navorom na tokovno zanko.) Če je rezultat pozitiven, pomeni, da so delo opravile magnetne sile magnetnega polja, če pa je negativen pa to, da je delo za premik zanke v magnetnem polju moral vložiti nek zunanji vir (recimo kar mi sami): $A_{mag} + A_{zun} = 0$.

Primer: Vzporedno z ravnim vodnikom s tokom $I_1 = 10$ A, na oddaljenosti $d = 2$ cm, leži pravokotna zanka dolžine $a = 5$ cm in širine $b = 3$ cm s tokom $I_2 = 0,2$ A. Koliko dela opravi magnetno polje za translatorsni premik zanke stran od vodnika za razdaljo $d = 2$ cm? Primer reši tako z integracijo magnetnih sil kot z razliko fluksov. (SLIKA

Izračun: Sila deluje na dva vodnika zanke, ki sta vzporedna z vodnikom. Delo magnetnih sil potrebno za premik bo torej:

$$A = A' + A'' = \int_d^{d+2 \text{ cm}} \vec{F}' \cdot d\vec{l} + \int_{d+a}^{d+a+2 \text{ cm}} \vec{F}'' \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = \vec{e}_x dx$$

$$\vec{F}' = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\vec{e}_x)$$

$$\vec{F}'' = \vec{e}_x I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

$$A' = -I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{d+2 \text{ cm}}{d}$$

$$A'' = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{d+a+2 \text{ cm}}{d+a}$$

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \left(\frac{d}{d+2 \text{ cm}} \frac{d+a+2 \text{ cm}}{d+a} \right) \cong -5,3 \text{ nJ}$$

Drugi način:

$$A = I_2 (\Phi_{končni} - \Phi_{začetni})$$

$$\Phi_{končni} = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_{d+a}^{d+a+2 \text{ cm}} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{d+a+2 \text{ cm}}{d+a}$$

$$\Phi_{začetni} = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_d^{d+2 \text{ cm}} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{d+2 \text{ cm}}{d}$$

$$A = I_2 \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \left(\frac{d}{d+2 \text{ cm}} \frac{d+a+2 \text{ cm}}{d+a} \right) \cong -5,3 \text{ nJ}$$

Vprašanje: Zakaj je končni rezultat negativen? **Odgovor:** Če računamo delo z integracijo sile po poti vidimo, da je sila na bližjo stranico zanke usmerjena v smeri vodnika (privlačna), sila na daljno pa je odbojna. Torej mora delo opraviti zunanji vir.

Primer: Koliko dela opravi magnetno polje, da se zanka iz primera 1 zavrti okoli sredinske osi za kot 90° ? (SLIKA)

Izračun: Delo najlažje izračunamo iz spremembe fluksa skozi zanko. Pred vrtenjem je bil fluks

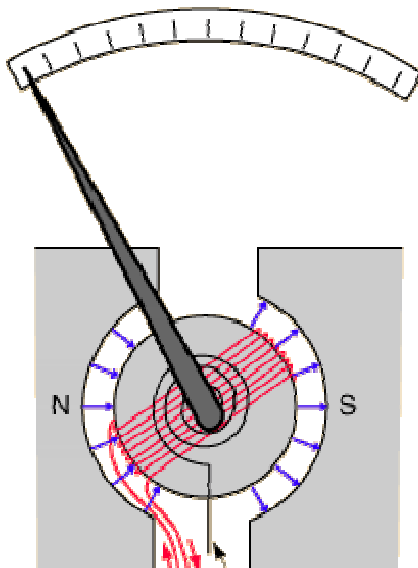
skozi zanko maksimalen, enak $\Phi_{\text{začetni}} = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_d^{d+2 \text{ cm}} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{d+2 \text{ cm}}{d}$, po vrtenju pa je

fluks skozi zanko enak nič (enako veliko fluksa, kot v zanko vstopa, tudi iz zanke izstopa). Zato je

delo enako $A = I_2 (0 - \Phi_{\text{začetni}}) = -I_2 \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{d+2 \text{ cm}}{d} = -8,3 \text{ nJ}$.

Vprašanja:

1. Zakaj je rezultat negativen? Ker mora zunanji vir opraviti delo. Zanko moramo zavrteti v nasprotni smeri, kot bi se zavrtela pod vplivom magnetne sile.
2. Zakaj je fluks skozi zanko enak nič, ko je zanka postavljena prečno na osnovno lego? Ker gre skozi en del zanke fluks skozi zanko v pozitivni smeri, skozi drugi (enako velik) del pa enako velik fluks v negativni smeri.
3. Kateri je stabilen položaj zanke? Zanka se želi postaviti tako, da je fluks skozi zanko največji. Torej tedaj, ko leži ravni vodnik v ravnini zanke. Ta lega je stabilna, če so sile usmerjene stran od zanke in labilna, le so sile na vodnika v smeri osi zanke.
4. Kolikšen bi bil rezultat, če bi zanko zavrteli za 180° ? Fluks skozi zanko je v končni legi enako velik kot v začetni legi, le nasprotnega predznaka je. Torej bo rezultat $A = 2I_2 \Phi_{T2}$. Kaj pa, če zanko zavrtimo tako, da zopet pride v začetno lego (obrat za 360°)? Takrat je fluks skozi zanko enako velik, kot na začetku, vendar če je v prvi polovici zasukča (za 180°) delo negativno, bo v drugem delu zasuka delo pozitivno (delo opravi magnetno polje), skupno delo pa bo enako nič. (*V prejšnji veziji napaka*). Lahko pa s pomočjo preklopa smeri toka v zanki ob polovici obrata zagotovimo pogoje (komutator), v katerih bo sila na zanko vedno v smeri rotacije, kar je osnovni princip delovanja raznovrstnih motorjev.



SLIKA: Levo: Princip:delovanja inštrumenta z vrtljivo tuljavico in trajnim magnetom. Desno: D'Arsonvalov milivoltmeter s permanentnim magnetom in spiralno vzmetjo več:
<http://physics.unl.edu/outreach/histinstr/electric.html>).

Dodatni internetni viri:

<http://www.educypedia.be/electronics/multimeter.htm>

http://physics.kenyon.edu/EarlyApparatus/Electrical_Measurements/DArsonval_Galvanometer/DArsonval_Galvanometer.html

<http://ieeexplore.ieee.org/iel5/51/16850/00775499.pdf?arnumber=775499>

<http://profiles.incredible-people.com/jacques-arsene-darsonval/>

POVZETEK:

- 1) Delo magnetnih sil lahko izračunamo iz osnovne zveze $A = \int_{T_1}^{T_2} \vec{F}_m \cdot d\vec{l}$, ali pa kar iz razlike fluksov skozi zanko v končni in začetni legi $A = I \cdot (\Phi_{končni} - \Phi_{začetna})$. Fluks je potrebno računati v pozitivni smeri (kot bi kazal $\vec{B}$ v notranjost premikajoče zanke, ki ga povzroča tok v zanki). Negativen rezultat pomeni, da je delo za premik morala opraviti zunanja sila, pozitiven pa, da je delo opravilo magnetno polje – da se je zanka gibala v smeri rezultirajočih magnetnih sil na zanko.
- 2) Naredili smo primer iz translatornega premika in pokazali, da dobimo enak rezultat po

prvem načinu in drugem. V primeru vrtenja zanke je lažje računati le z razliko fluksov, pri čemer je potrebno upoštevati število rotacij.

3) S pomočjo komutacije toka v zanki omogočimo vrtenje zanke v magnetnem polju.

Naloge:

izpit, 24. junij 2003

izpit, 31. avgust, 2004

izpit, 20. september 2004

NAVOR NA (TOKO)VODNIK V MAGNETNEM POLJU (6)

Če na tokovodnik v magnetnem polju deluje sila, potem v primeru vpetja z ročico dolžine r deluje na vodnik navor

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.1)$$

Velikost navora je torej $T = r \cdot F \cdot \sin(\theta)$, kjer je θ kot med smerjo ročice in sile. Smer vrtenja je pravokotna na ravnino, ki jo določata vektorja ročice in sile.

SLIKA: Na tokovodnik v magnetnem polju deluje sila. Navor deluje v smeri vektorskega produkta med silo in ročico.

Primer 1. Vodnik v obliki zanke (tokovna zanka) s tokom 10 A dolžine 10 cm in stranice 5 cm vpet na zgornjem vodniku kot kaže slika. Prečno na zanko, pod kotom 30° na normalo na zanko je homogeno polje 0,1 T. Kolikšen je navor na zanko?

POKAŽI Z VEKTORSKIM IN POENOSTAVLJENIM ZAPISOM.

Primer 2: Kolikšen tok bi moral teči skozi tokovno zanko na sliki, če želimo, da se zanka postavi pod kotom 45° na osnovno lego, ko zanka visi vpeta na zgornjo stranico. $L=10$ cm, $R=4$ cm, $B=50$ mT. Pri izračunu poenostavimo navor na zanko zaradi sile gravitacije tako, da upoštevamo le silo na spodnjo stranico z maso 10 g.

Navor na zanko je osnovni princip delovanja vseh vrtljivih delov pri izkoriščanju pojava magnetnega polja kot npr. prikazovalniki z vrtljivimi tuljavicami ali motorji.

MAGNETNI DIPOLNI MOMENT, NAVOR NA

Običajno nas zanima navor na zanko v magnetnem polju. Vzemimo pravokotno zanko dolžine l in širine d , ki v sredini vpeta na os, kot kaže slika. Navor na tako zanko v homogenem polju, ki je za kot θ zamaknjeno od normale na površino zanke dobimo z upoštevanjem sile na stranico dolžine l : $F = BIl$ in ročice $r = \frac{d}{2} \sin(\theta)$. Ker delujeta vzajemno dve sili (na obe strnici), je navor $T = 2 \cdot F \cdot r = IldB \sin(\theta)$. Običajno namesto $l \cdot d$ pišemo površino zanke $A = l \cdot d$, saj se izkaže, da je v homogenem polju navor odvisen le od površine zanke in ne njene oblike. Dobimo

$$T = 2 \cdot F \cdot r = IAB \sin(\theta). \quad (6.2)$$

SLIKA: Navor na pravokotno zanko v homogenem magnetnem polju. Prikaz sil na stranice zanke, smer polja in kota med vektorjem ročice in sile.

Ker je tokovna zanka osnovni element v magnetiki, tako kot je električni dipol osnovni element v elektrostatiki, jo definiramo kot **magnetni moment** $m = IA$, ki je vektor, s smerjo pravokotno na površino zanke (normala na površino):

$$\vec{m} = \vec{e}_n \cdot IA, \quad (6.3)$$

pri čemer smer normale določa smer toka in kaže v smeri polja znotraj zanke.

Z upoštevanjem definicije za magnetni moment lahko enačbo (6.1) za navor na zanko zapišemo tudi z magnetnim momentom kot:

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (6.4)$$

SLIKA: Magnetni dipolni moment si predstavljamo v obliki zankice s tokom I . Njegova velikost je površina zanke pomnožena s tokom zanke. Smer pa je pravokotna na površino zanke.

Navor deluje na tokovno zanko v polju tako, da jo zasuka pravokotno na smer polja, oziroma tako, da bo smer magnetnega momenta enaka smeri polja. Ko bomo spoznali pojem magnetnega pretoka, bomo lahko dodali, da se tokovna zanka obrne tako, da je pretok skozi zanko največji.

Magnetni dipolni moment je pomemben element magnetike, saj z njim na primer razložimo magnetno polje v snovi, kar bomo tudi v naslednjih poglavjih pokazali.

Primer 3: Določite torzijsko konstanto polžaste vzmeti galvanometra z vrtljivo tuljavico in trajnim magnetom tako, da bo odklon kazalca pri toku $100 \mu\text{A}$ enak 28° . Tuljavica z 250 ovoji je dolga 2,1 cm in široka 2,1 cm in se nahaja v homogenem polju 0,23 T.

$$k \cdot \varphi = NIAB, \quad k = 5,2 \cdot 10^{-8} \text{ Nm/st.}$$

Pokaži izdelek tovarne Magneti, ki izdeluje jedro za navitje za merilni kazalec. Pokaži še kazalec za avtomobil s trajnim magnetom s prečno magnetizacijo in dvema navitjema.

EKSPERIMENT: Sila med trajnim magnetom in tuljavico deluje kot zvočnik.

Potrebujem malo tuljavico, trajni magnet, ki gre v tuljavico in selotejp, ki drži skupaj magnet in tuljavico ter obenem deluje kot membrana. Na tuljavico priključimo vir izmeničnega toka.

Ta ustvarja magnetno polje, ki deluje privlačno ali odbojno na magnetno polje trajnega magneta odvisno od polaritete signala. Nariši shemo.

V tem eksperimentu se premika trajni magnet, v zvočnikih se običajno premika tuljavica, ki je povezana z membrano. Nariši shemo.

GIBANJE NABOJEV V ELEKTRIČNEM IN MAGNETNEM POLJU (7)

Gibanje nabojev v električnem polju smo že spoznali. Pozitivno naelektren delec se giblje v smeri električnega polja, sila na naboj Q je $\vec{F}_e = Q\vec{E}$. Dinamiko gibanja opišemo z enačbo $\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \frac{Q\vec{E}}{m}$. Ker deluje pospešek v smeri električnega polja, se mu s potjo povečuje tudi hitrost in s tem kinetična energija. Zmanjšuje pa se mu potencialna energija, saj se giblje v smeri zmanjšanja potenciala.

Kako pa na gibanje naboja vpliva magnetno polje? Poznamo izraz za silo na vodnik v magnetnem polju: $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$. Tok zapišemo v obliki $\frac{dQ}{dt}$ in dobimo $d\vec{F} = \frac{dQ}{dt} d\vec{l} \times \vec{B} = dQ \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}$, pri čemer je $\frac{d\vec{l}}{dt}$ hitrost gibanja naboja dQ . Dobimo $d\vec{F} = dQ \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ oziroma ¹

$$\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.1)$$

Sila na naboje v magnetnem polju ne deluje v smeri magnetnega polja temveč pravokotno na to smer. Poleg tega deluje ta sila le v primeru, če se naboj giblje (v električnem polju pa deluje električna sila tudi na mirujoč naboj). Sila je v skladu z enačbo (7.1) pravokotna na smer vektorja hitrosti in magnetnega polja.

SLIKA: Smer vektorja magnetnega polja, hitrosti in sile. V homogenem polju bo delec rotiral po krožnici. Smer je odvisna od predzanaka naboja.

¹ Velja poudariti, da je v formuli potrebno hitrost delca upoštevati kot hitrost relativno na opazovalca.

V primeru, da bo naelektrjen delec priletel v homogeno polje, ki je pravokotno na smer leta, bo rotiral okoli centra s pospeškom $\vec{a} = \frac{Q}{m} \vec{v} \times \vec{B}$. Radij rotacije dobimo z izenačenjem magnetne in

centrifugalne sile $\frac{mv^2}{R} = QvB$:

$$R = \frac{mv}{QB} \quad (7.2)$$

Ker deluje sila na delec pravokotno na vektor hitrosti delca, se delcu **ne** spreminja kinetična energija².

Primer: Proton prileti s kinetično energijo 5 MeV v prostor homogenega magnetnega polja velikosti 1,5 mT, ki je pravokotno na smer priletelega delca. S kolikšno silo deluje nanj magnetno polje, kolikšen je radialni pospešek delca in kolikšen radij bi opisal v homogenem polju?

Izračun: Kinetična energija delca je $W_k = \frac{mv^2}{2}$ in se jo v fiziki delcev pogosto obravnava z enoto eV (elektron-volt), ki ustreza energiji $1,6 \cdot 10^{-19}$ J. Ker je masa protona (približno) enaka $1,6 \cdot 10^{-27}$ kg, bo hitrost delca enaka $v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}} \cong 31,6 \cdot 10^6$ m/s. Sila bo enaka $F_m = QvB \cong 7,6 \cdot 10^{-15}$ N. To je majhna sila vendar deluje na majhno maso, zato je kljub temu vpliv pomemben: radialni pospešek je enak: $a = \frac{F_m}{m} \approx 4,7 \cdot 10^{-12}$ m/s². Radij kroženja je $R = \frac{mv}{QB} \cong 210$ m.

Lorentzova sila. Če na naboj deluje tako električno kot magnetno polje, je potrebno zapisati silo kot vsoto električne in magnetne sile:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (7.3)$$

Temu zapisu rečemo tudi *Lorentzova sila*, ki bi v principu zadoščala za obravnavo električnih in magnetnih pojavov. Poznati bi morali porazdelitev nabojev, nato pa bi računali njihovo gibanje v prostoru, preprosto z reševanjem diferencialne enačbe $m\vec{a} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$. V praksi je problem bolj kompleksen, saj je gibanje delcev v snovi zelo zapleteno. Je pa omenjen zapis primeren za obravnavo gibanja nabojev v vakuumu (zraku).

² Zopet drugače kot v električnem polju, kjer delec pospešuje v smeri polja in se mu povečuje hitrost in s tem kinetična energija.

Kako se giblje delec, če sta tako električno kot magnetno polje usmerjena v isto smer? Naboj pospešuje v smeri polja in rotira okoli Bja. Gibanje je torej helično.

SLIKA: Gibanje delca v homogenem električnem in magnetnem polju: a) E v isti smeri kot B , $v = 0$; b) E v smeri v , B pravokotno; c) E in B v isti smeri vendar pravokotno na v .

Primer heličnega gibanja je tudi gibanje nabojev v zemeljskem magnetnem polju, še posebno v pasovih povečanega magnetnega polja, ki je znan kot **Van Allenov radiacijski pas**. kjer se ionizirani delci iz vesolja ujamejo v magnetno polje zemlje. Ker se to polje zgoščuje v smeri proti poloma, se delci gibljejo helično z vedno večjo frekvenco proti polu vendar obenem opravljajo vedno manjšo pot. Na nekem delu se ustavijo in začnejo in začnejo krožiti v obratni smeri. Temu principu rečemo magnetno zrcalo. Delec je ujet v magnetno polje, čemur rečemo tudi magnetna steklenica. Ob povečani sončevi aktivnosti dodatno injicirani močno energetizirani elektroni in protoni v Van Allenovem radiacijskem pasu povzročijo spremembo električnega polja v področju odboja delcev, ki se namesto odboja usmerijo proti zemeljski površini. Pri tem trkajo v atome in molekule zraka, ki ob trkih sevajo svetlobo. Ta svetloba ustvarja sij, ki ga poznamo kot severni sij (aurora borealis). Poznamo tudi južni sij (aurora australis).

SLIKA: Gibanje delcev v Van Allenovem radiacijskem pasu.

Pomembnejši primeri odklanjanja delcev:

- Katodna cev.
- Ciklotron
- Masni spektrograf
- Fuzijski reaktor

- Odklanjanje delcev v magnetnem polju zemlje

APLIKACIJA: KATODNA CEV

Katodna cev je steklena cev z zmanjšanim tlakom v notranjosti. V njen je katoda, ki je izpostavljena močnemu električnemu polju in je primerno segreta, da iz nje z lahkoto izhajajo elektroni. Ti potujejo v smeri električnega polja, ki ga ustvarimo z virom visoke napetosti (več kV). V sredini anode je luknjica, ki prepušča elektrone in jih v bistvu fokusira. Elektroni nadaljujejo pot proti fluorescentnemu zaslonu, med potjo pa preletijo prečno električno in magnetno polje, ki ga ustvarjajo kondenzatorji in tuljave. Ti s svojim poljem omogočajo usmerjanje (curka) elektronov in s tem risanje slike po zaslonu.

Primer: V polju z napetostjo med anodo in katodo 2 kV pospešimo elektron do končne hitrosti. Nato prileti v sredino med ravni plošči, kjer je v prečni smeri homogeno električno polje 10 kV/m. Dolžina elektrod je $L=10$ cm. Kolikšen je odklon elektrona na dolžini elektrod? Nariši še potrebno smer polja?

Odklanjajo jih s pospeškom $a_y = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m}$, torej bo hitrost $v_y = a \cdot t$ in pot v smeri polja

$y = \frac{1}{2} a \cdot t^2$, v smeri zaslona pa $L = v_x \cdot t$. Odklon je torej enak $y = \frac{QEL^2}{2mv_x^2}$. Če hitrost v smeri x-a

določimo iz izenačenja kinetične in potencialne energije $\frac{mv_x^2}{2} = QU \Rightarrow v_x^2 = \frac{2QU}{m}$ in dobimo

$$y = \frac{EL^2}{4U} \cdot y = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ V/m} \cdot (0,1\text{m})^2}{4 \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ V}} = 2,5 \text{ mm}.$$

POMEMBNI ODKRITJI: OBSTOJ ELEKTRONA IN DOLOČITEV NABOJA ELEKTRONA

S podobnim eksperimentom je leta 1897 **J. J. Thomson** na univerzi v Cambridge(u) dokazal obstoj elektronov. Če upoštevamo še silo, ki jo ustvarjamo z magnetnim poljem, dosežemo ravnotežje sil,

ko velja $QE = QvB$, od koder je $v = \frac{E}{B}$. Iz razmerja sil (električne poljske jakosti in gostote magnetnega pretoka) lahko določimo hitrost delca, kar pa lahko določimo tudi iz odklona. Torej lahko iz odklona delca in znanega električnega in magnetnega polja določimo razmerje med maso in nabojem, kar je naredil JJ Thomson:

$\frac{m}{Q} = \frac{B^2 L^2}{2yE}$. S tem je uspel dognati osnovne značilnosti elektrona, osnovnega naboja, zato se ta

eksperiment obravnava kot odkritje elektrona. Ker ni natančno poznal mase elektrona, iz poskusa ni mogel določiti velikosti osnovnega naboja. Prvo natančnejšo vrednost za velikost osnovnega naboja je postavil **Robert A. Millikan** leta 1910-1913 s svojim znamenitim poskusom s kapljicami olja v električnem polju (Nobelova nagrada 1923).

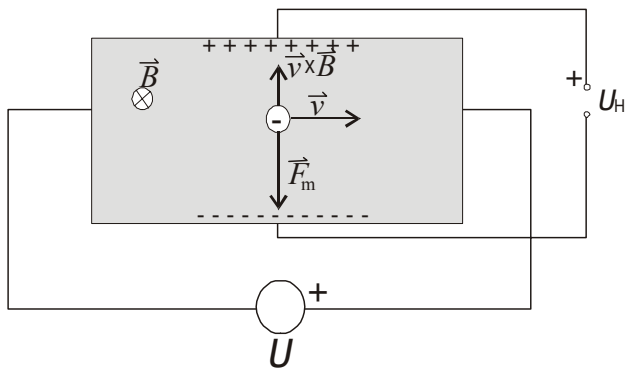
POMEMBNO ODKRITJE: HALLOV POJAV

Keywords: Hall effect

http://en.wikipedia.org/wiki/Hall_effect

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/hall.html>

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw2_ge/kap_2/backbone/r2_1_3.html



Ali se odklonijo tudi naboji v prevodniku, če je le ta izpostavljen magnetnemu polju. Odgovor je pozitiven in prvi ga je dokazal **Edvin H Hall** leta 1879, takrat še 24 letni absolvent univerze Johns Hopkins. Elektroni v prevodniku potujejo s hitrostjo drifta, ki jo poznamo iz tokovnega polja, kjer je gostota toka $J = \rho v_d$. ρ je

volumska gostota naboja. Na te naboj v prečnem magnetnem polju deluje sila $F_m = QvB$ in povzroči rotiranje in kopičenje elektronov proti eni strani prevodne ploščice. Na drugi strani hkrati nastane pomanjkanje elektronov oziroma kopičenje pozitivnega naboja. Prečno na tok v vodniku se torej vzpostavi električno polje in s tem napetost, ki je sicer običajno majhna pa še vedno merljiva (velikosti μV). Ker mora nastopiti ravnovesje med električno in magnetno silo velja $QE = QvB$, od

koder je *Hallova napetost* $U_H = Ew = vBw = \frac{J}{\rho} Bw = \frac{I}{wd} Bw = \frac{IB}{\rho d}$, kjer je w širina traku, d pa

debelina. Iz Hallove napetosti lahko določimo hitrost drifta nabojev ali gostoto nabojev, najpogosteje pa se Hallova napetost uporablja za merjenje gostote magnetnega pretoka. Pri tem se

običajno uporablja kar formula $U_H = R_H \cdot \frac{IB}{d}$, kjer se R_H imenuje *Hallov koeficient*. Iz izraza

vidimo, da je Hallova napetost inverzno proporcionalna koncentraciji prostega naboja. Zato so za realizacijo Hallovega senzorja bolj primerni polprevodniški materiali. Običajno so nosilci naboja elektroni, tedaj dobimo polariteto Hallove napetosti kot je prikazano na skici. Če pa je polprevodnik tipa p, v njem prevajajo vrzeli (pomanjkanje elektronov), kar se odraža v spremembi predznaka Hallove napetosti. Hallov senzor je realiziran s polprevodniško tehnologijo, ki omogoča miniaturizacijo in natančno določitev dopiranja (dodajanja primesi) polprevodnika, točk zajema napetosti, v modernejši izvedbi pa tudi realizacijo z vgrajenim tokovnim virom in ojačevalcem Hallove napetosti.

SLIKA: Eksperiment s Hallovim efektom.**APLIKACIJA: MERJENJE MAGNETNEGA POLJA S HALLOVIM EFEKTOM**

Ena najpogostejših uporab Hallovega efekta je merjenje gostote magnetnega pretoka. Pri realizaciji je pomembno zagotoviti čim bolj natančen tokovni vir, kar dandanes omogoča integracija Hallovega elementa z ostalimi elektronskimi elementi v čipu.

Večina tokovnih klešč vsebuje Hallov senzor, najdemo ga v elektronskih kompasih, za merjenje pomikov, rotacije, itd.

SLIKA: Čip senzorja s teslametrom.

Primer: Določite Hallovo napetost, če je prečno na $d = 0,5$ mm debel bakreni trak s tokom 50 A magnetno polje gostote 2 T. Koncentracija nosilcev naboja je $n = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

Izračun: Velja $\rho = Q_e \cdot n = 13,44 \cdot 10^9 \text{ C/m}^3$ in zato

$$U_H = E_w = vBw = \frac{J}{\rho} Bw = \frac{I/(wd)}{\rho} Bw = \frac{IB}{\rho d} \cong 15 \mu\text{V}.$$

* **DODATNO:** merjenje Hallove napetosti na isti strani lističa.

Ni nujno, da merimo napetost med nasprotnima točkama traku. Upoštevati moramo, da naboji ne potujejo le pod vplivom magnetne sile, pač pa tudi zaradi vzdolžne električne sile. Vzdolžno polje

je $E_{\text{vzdolž}} = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{\sigma d t}$. Izraz za prečno silo smo že zapisali in je enak $E_{\text{prečno}} = \frac{IB}{\rho d t}$, torej bo razmerje

med prečnim in vzdolžnim poljem $\frac{E_{prečno}}{E_{vzdolžno}} = \frac{\sigma}{\rho} B$. V primeru bakra ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$) dobimo razmerje enako $8,5 \cdot 10^{-3}$ oziroma kot $0,5$ stopinj. Enako Hallovo napetost bi izmerili, če bi bili merilni točki na isti strani vendar zamaknjeni za ta kot.

Obstajajo tudi bolj občutljivi merilniki magnetnega polja. Na primer taki, ki delujejo na principu spreminjanja upornosti pri vzpostavitvi magnetnega polja. Senzorji takega tipa se na primer uporabljajo kot tipala v diskih.

ODKRITJE IN APLIKACIJA: CIKLOTRON

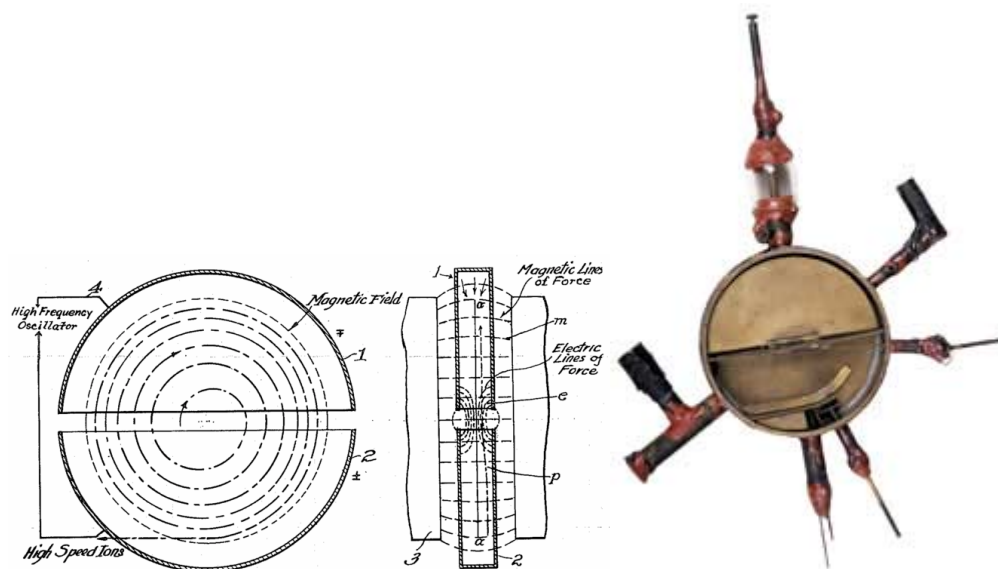
Je naprava za pospeševanje nabitih delcev s pomočjo magnetnega polja. No, samo magnetno polje ne more biti dovolj, saj delec v magnetnem polju ne pospešuje (razen tega, da ima radialni a konstanten pospešek). Dodaten efekt pospeševanja dosežemo tako, da znotraj rotacije delec preleti kratko razdaljo v električnem polju, ki delcu doda hitrost in s tem kinetično energijo. Delcu se nekoliko poveča tudi radij kroženja $R = \frac{mv}{QB}$. Tako se delcu ob vsaki rotaciji nekoliko poveča hitrost, energija in radij kroženja do dokončnega izstopa iz polja. Pomembno je, da se pri kroženju ne spreminja frekvenca kroženja, saj je $v = \omega R$ in zato $\omega = \frac{QB}{m}$. S to frekvenco deluje tudi vzbujevalno električno polje.

Za večje energije delcev (več kot 50 MeV) ciklotron ni več primeren, saj je potrebno upoštevati, da se hitrost delca približuje hitrosti svetlobe in se ne povečuje več linearno. V namene pospeševanja do večjih energij je potrebno uporabiti npr. sinhrotrone, ki so bistveno večji (radij kilometer ali več) in sproti korigirajo smer delcev z električnim in magnetnim poljem.





SLIKA: Levo: Zgradba ciklotrona iz dveh D-jev (nasproti obrnjenih črk D). Desno: največji ciklotron na svetu: TRIUMPH (University of British Columbia, Kanada) pospeši H- ione do energije 520 MeV. Je premera 18 m, težek 18 ton, znotraj je polje 0,46 T, delce pa pospešuje napetostni vir 186 kV pri frekvenci 23 MHz (Wikipedia).



SLIKA: Levo: slika delovanja ciklotrona iz patenta US1948384, avtor Ernest O. Lawrence. Desno: prvi delujoči ciklotron iz University of California.

Internet: <http://www.lbl.gov/Science-Articles/Archive/early-years.html>
<http://bancroft.berkeley.edu/Exhibits/physics/bigscience02.html>
http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/articles/kullander/index.html
<http://en.wikipedia.org/wiki/Cyclotron>

APLIKACIJA: MASNI SPEKTROGRAF

Je naprava, ki s pridom uporablja efekt odklanjanja nabitih delcev v magnetnem polju. Delce z znano hitrostjo usmerimo v področje s homogenim poljem, kjer začnejo krožiti. Na izhodu iz področja s poljem je fotografski film ali detektor, ki zazna prilet naboja. Iz znane začetne hitrosti in polmera poti delca lahko določimo maso delca in s tem sam delec.

Primer: Ion z nabojem $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ in maso $5,2 \cdot 10^{-20} \text{ kg}$ pospešimo v električnem polju s potencialno razliko 1 kV, nakar vstopi v področje homogenega magnetnega polja 80 mT, ki je prečno na smer leta iona. Na kolikšni razdalji od vhodne točke v polje delec prileti v zaslon, če je zaslon od vstopne točke oddaljen za 25 cm?

Izračun: Hitrost delca pri vstopu v polje določimo iz izenačenja kinetične in potencialne energije

$$\frac{mv^2}{2} = QU, \text{ od koder je hitrost delca ob vstopu v polje enaka } v = \sqrt{\frac{2QU}{m}} \cong 78,44 \text{ m/s, radij kroženja}$$

$$\text{pa } R = \frac{mv}{QB} \cong 319 \text{ m. Ker velja } l = R \cdot \sin \theta \Rightarrow \theta = 44,9 \cdot 10^{-3}^\circ \text{ in } y = R - R \cos(\theta) \cong 98 \mu\text{m}$$

SLIKA: Odklanjanje v polju.**NARAVNI POJAV: Odklanjanje delcev v magnetnem polju zemlje**

Ta pojav je izredno zanimiv, saj ima za posledico enega od najlepših naravnih pojavov – severni sij. Predstavljajmo si magnetno polje zemlje kot polje tokovne zanke- magnetne dipolnega momenta. To polje ni homogeno in se zgoščuje proti poloma. (Geografski in geomagnetni pol nista na istem mestu, os je zamaknjena za kot 11°). Ko delec prileti v tako polje pod določenim kotom začne rotirati. Hitrost delca lahko razdelimo v tisto, ki je vzporedna s poljem in tisto, ki je pravokotna na polje. Radij rotacije je odvisen le od pravokotne komponente hitrosti vendar se manjša zaradi večanja polja, večja pa se mu frekvenca rotacije. Obenem se mu manjša razdalja na eno rotacijo. Ta razdalja se lahko zmanjša na nič in delec se obrne in začne potovati v nasprotni smeri. Ta efekt imenujemo efekt zrcaljenja (magnetno zrcalo). Delci torej potujejo od enega pola do drugega, kot bi bili ujeti v steklenico. Temu tudi rečemo magnetna steklenica. Znan je t.i. Van Allenov pas, kjer poteka omenjeni proces. Potrebno je še povedati, da je magnetno polje zemlje spremenjeno zaradi vpliva t.i. sončnega vetra, ki je v bistvu tok naelektrenih delcev. Ko pride do

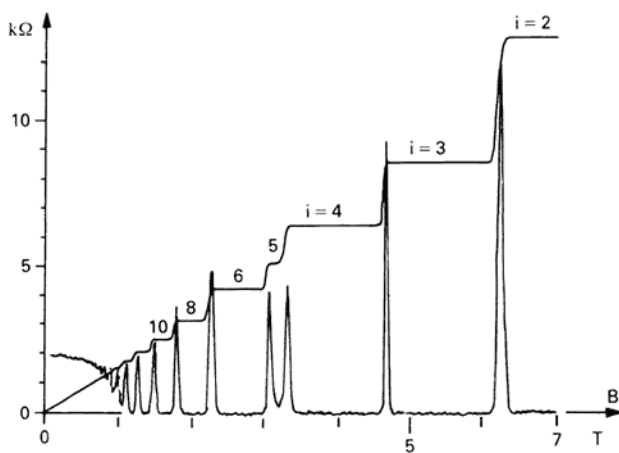
posebno močnih erupcij na soncu, posebno močan fluks visoko energijskih delcev vstopi v področje severnega in južnega pola in povzroča sevanje, ko ti delci trčijo v kisikove in dušikove atome. Princip magnetne steklenice se uporablja tudi pri nuklearni fuziji, kjer se želi visoko energijske delce obdržati stran od stene, ki bi jo sicer zaradi visoke temperature stalili.

* DODATNO: RELATIVISTIČEN POGLED NA GIBANJE DELCEV

Spoznali smo, da lahko gibanje nabojev opišemo z Lorentzovo silo $\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$. Problem razumevanja te sile lahko nastane, če na ta zapis gledamo iz različnih prostorov – koordinatnih sistemov. Lorentz se je s temi vprašanji ubadal in prišel zelo blizu teoriji, ki je dandanes poznana kot teorija relativnosti. Einstein pa jo je opisal v svojem znamenitem delu iz leta 1905 z naslovom »O elektrodinamiki telesa v gibanju«. Govori o tem, da mora veljati relativistična invariantnost vsake teorije. Tudi elektromagnetne. Torej morajo veljati enaki zakoni v kakršnem koli koordinatnem sistemu. S klasičnim razumevanjem Lorentzove sile tako lahko pridemo v težave v primeru, ko se tudi koordinatni sistem premika z enako hitrostjo kot naboj. Običajno je lažje razmišljati na način, da se opazovalec (mi) giblje obenem z nabojem. Glede na opazovalca naboj miruje in nanj ne more delovati magnetna sila, saj je zanj potrebno, da se delec giblje. Za zunanjšega opazovalca, recimo mu O2, ki pa se ne giblje in vidi gibanje naboja in prvega opazovalca (O1), pa na naboj deluje sila. Ker ne more biti, da v enem primeru na naboj deluje sila, v drugem pa ne (zahteva po invariantnosti) je rešitev v t.i. Lorentzovi transformaciji, ki upošteva gibanje različnih koordinatnih sistemov. V konkretnem primeru lahko zaplet rešimo tako, da premikajoči opazovalec tudi opazi silo na naboj, ki pa ne bo magnetna temveč električna. Enaka bo vB , kjer je v (skupna) hitrost gibanja. Iz tega vidimo, da sta električno in magnetno polje neposredno povezana. Kaj pa, če se koordinatni sistem giblje z drugo hitrostjo, recimo u , delec pa s hitrostjo v . Tedaj lahko pišemo $\vec{F}'' = Q\vec{E}'' + Q(\vec{v} - \vec{u}) \times \vec{B}''$. Z enakim razmislekom kot prej dobimo $F'' = QuB + Q(v-u)(B) = QvB$. Zopet enak rezultat in potrditev invariantnosti. Torej opazovalec, ki se giblje z različno hitrostjo kot delec »vidi« dve polji, tako električno kot magnetno, ki pa se delno med sabo izničita in rezultirata v enaki obliki kot prej. (povzeto po I Galili, D. Kaplan: »Changing approach to teaching electromagnetism in a conceptually oriented introductory physics course«, Am.J.Phys 65 (7), July 1997.)

ODKRITJE: Kvantni Hallov efekt.

Leta 1980 je nemški fizik Klaus von Klitzing odkril (Nobelova nagrada za leto 1985), da se Hallova upornost ne spreminja zvezno s spremembo magnetnega polja pač pa skokovito in da ti skoki nastopajo pri upornostih, ki niso odvisne od lastnosti materialov pač pa od določene kombinacije osnovnih fizikalnih konstant deljenih s celim številom. Ugotovil je torej, da je tudi upornost kvantizirana. Pri teh upornostih »običajna« Ohmska upornost izostane in material postane superprevoden. Hallova prevodnost je s kvantnim Hallovim efektom določena z enačbo $\sigma = n \frac{Q_e^2}{h}$, kjer je n celo število, Q_e naboj elektrona in h Plankova konstanta ($6,626 \cdot 10^{-34}$ J s) in je izredno natančno določena, tako, da je tudi sprejeta kot merilo za upornost ($\frac{h}{Q_e^2}$ je približno 25 812,8 ohmov, http://en.wikipedia.org/wiki/Fractional_quantum_Hall_effect).



SLIKA: Skokovito spreminjanje upornosti z magnetnim poljem.

(http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1998/press.html, K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. 45, 494, 1980).

PPT PRIKAZ: CIKLOTRONI, SIHHROTRONI IN MASNI SPEKTROGRAFI

PPT PRIKAZ: HALLOV EFEKT IN UPORABA TER DRUGI EFEKTI (GMR, ...)

POVZETEK:

- 1) Sila na naboj v električnem polju je $\vec{F}_e = Q\vec{E}$. Gibanje delca določa enačba $m\vec{a} = Q\vec{E}$. Gibanje je v pospešeno, v smeri polja, delcu se povečuje kinetična, zmanjšuje pa potencialna energija. Kinetična energija je $\frac{mv^2}{2}$, potencialna pa QV .
- 2) Sila na naboj v magnetnem polju je $\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B}$. Sila deluje le na gibajoči naboj, usmerjena pa je pravokotno na ravnino, ki jo določata vektorja hitrosti in polja. Naboj v magnetnem polju rotira, polmer rotacije je $R = \frac{mv}{QB}$. Smer rotacije odvisna od predznaka naboja. Hitrost naboja ostaja pri rotaciji ista, zato se mu ne spreminja kinetična energija.
- 3) V električnem in magnetnem polju je potrebno upoštevati obe sili, dobimo $\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$. Ta zapis imenujemo Lorentzova sila.

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:

1. kolokvij, 11. april 2005

1. kolokvij, 17.4.2002

1. kolokvij, 4. maj 2006

1. kolokvij, 3. maj 2004

1. kolokvij, 17.4.2002

izpit, 19. januar 2006

izpit, 8. aprila 2002

izpit, 29. januar 2007

Izpit, 20. aprila 2005

MAGNETNE LASTNOSTI SNOVI (8)

Vemo, da trajni (permanentni) magnet v svoji okolici povzroča magnetno polje. Kot smo že ugotavljali, splošno velja Gaussov zakon za magnetno polje, ki »govori« o brezizvornosti magnetnega polja. Od kod torej trajnim magnetom lastnost, da povzročajo magnetno polje? Že Ampere je razrešil to vprašanje s trditvijo, da morajo obstajati nekakšni tokovi v snovi, ki to polje povzročajo. Spoznanja moderne fizike so pokazala, da kroženje elektronov okoli jedra atoma pa tudi lastno vrtenje elektrona okoli svoje osi določajo magnetne lastnosti snovi. Kroženje elektrona okoli lastne osi opišemo s spinom elektrona. Spin elektrona je v osnovi pojav, ki ga je mogoče razložiti le z upoštevanjem kvantne fizike, pri čemer se izkaže, da elektron poseduje kotni moment, ki ga je mogoče povezati z magnetnim dipolnim momentom $m = IA$. Vsi atomi imajo določene magnetne lastnosti, vendar velika večina zelo šibke, saj se magnetno polje magnetnih momentov posameznih elektronov zaradi njihovega naključnega gibanja izničuje. Snovi s takimi lastnostmi imenujemo diamagnetiki. Obstajajo pa določeni atomi, v katerih se magnetni momenti ne izničujejo in povzročajo izrazito magnetno polje v svoji okolici. Materiale s takimi lastnostmi imenujemo feromagnetiki (po železu, latinsko Ferrum). Ti lahko tvorijo trajne magnete, ki si jih lahko predstavljamo kot skupek velikega števila majhnih enako usmerjenih magnetkov. Te magnetke pa lahko opišemo z njihovimi magnetnimi dipolnimi momenti (tokovnimi zankicami), ki v svoji okolici povzročajo magnetno polje, ki je vsota polj posameznih zankic.

SLIKA: Trajni magnet (S in N), razdeljen na vrsto mahnih magnetov in na vrsto tokovnih zankic.

Vektor magnetizacije. Prehod iz mikroskopskega v makroskopsko obravnavo magnetnega polja trajnih magnetov omogoča definiranje **vektorja magnetizacije** kot povprečje magnetnih dipolnih momentov na enoto volumna:

$$\bar{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \bar{m}}{\Delta V}, \quad (8.1)$$

kjer je Δv makroskopsko majhen volumen (ki še vedno vsebuje milijone atomov oziroma magnetnih momentov). Trajni magnet lahko torej namesto z upoštevanjem velikega števila (atomske - mikroskopske) magnetnih momentov obravnavamo z (makroskopskim) vektorjem magnetizacije. Ta način obravnave je zelo podoben načinu obravnave električnih lastnosti snovi z vpeljavo vektorja polarizacije P . Enota vektorja magnetizacije je

$$\left[\frac{A \cdot m^2}{m^3} \right] = \left[\frac{A}{m} \right].$$

Primer: Magnet v obliki cilindrične palice premera 1 cm in dolžine 5 cm ima enakomerno magnetizacijo $5,3 \cdot 10^3$ A/m. Kolikšen je magnetni dipolni moment?

Izračun: Uporabimo enačbo (8.1) in pišemo $m = M \cdot V = M \cdot \pi r^2 L = 2,08 \cdot 10^{-2}$ Am.

Magnetni naboj¹. Zgodovinsko gledano je bil za razlago trajnih magnetov, še bolj pa za izračun polja, dolgo v uporabi koncept magnetnega naboja, pač analogno električnemu naboju. Kljub temu, da se zavedamo, magnetnega naboja ne poznamo (ga ni), ga lahko definiramo v smislu analogije z električnim nabojem. Obravnava se ga s površinsko gostoto magnetnega naboja σ_m , ki je lahko pozitiven (na N strani magnetu) ali negativen (na S strani). Celotni magnetni naboj na N površini je tako $Q_m = \sigma_m \cdot A$. Če ta naboj primerjamo z vektorjem magnetizacije, ugotovimo, da velja $\sigma_m = -M_{\perp}$, kjer je $M_{\perp}$ komponenta vektorja magnetizacije, ki je pravokotna na površino (normalna komponenta), torej $\sigma_m = \vec{e}_n \cdot \vec{M}$. Magnetni naboj »nastopa« torej le na mestih, kjer je vektor magnetizacije pravokoten na površino. Analogija z elektrostatiko je neposredna: Električna sila na električni naboj je $\vec{F}_e = Q_e \cdot \vec{E}$, magnetna sila na »magnetni naboj« pa je $\vec{F}_m = Q_m \cdot \vec{B}$. Silo med dvema dolgima paličastima magnetoma razmaknjenima za razdaljo r (ki je dosti manjši od dolžine) lahko v tem smislu ocenimo kar kot silo med dvema »točkastima« magnetnima nabojema (če

upoštevamo le bližnja »pola«): $F_m = \frac{\mu_0 \cdot Q_m^2}{4\pi r^2}$.

¹ Kljub temu, da je koncept magnetnega naboja napačen v smislu njenega neobstoja, se v določenih primerih še vedno uporablja (tako v študijski literaturi (npr. W. Saslow: Electricity, magnetism and light, Thomson Learning 2002), kot v praksi).

Ker smo uporabili analogijo z električnim nabojem, lahko uporabimo tudi izraze, ki smo jih izpeljali za električno polje v okolici naelektrenih teles za določitev magnetnega polja v okolici magnetiziranih teles. Na primer, magnetno polje tik nad tanko namagnetneno ploščo

lahko določimo analogno električni poljski jakosti naelektrene ravnine $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ kot $B = \mu_0 \frac{\sigma_m}{2}$

Primer: Ocenimo magnetno polje tik nad površino trajnega magneta iz Alnica (AlNiCo) dolžine 15 cm, pravokotnega preseka $A = 1 \text{ cm}^2$, z magnetizacijo vzdolž daljše osi $M = 8,5 \cdot 10^5 \text{ A/m}$.

Izračun: Največji prispevek lahko pričakujemo od prispevka magnetnega naboja na površini, kjer računamo polje. Tu lahko zaradi velike površine glede na točko merjenja (tik nad

površino) uporabimo enačbo za namagnetneno ploščo, torej $B = \mu_0 \frac{\sigma_m}{2}$, kjer je $\sigma_m = M$ in je

torej $B = \mu_0 \frac{M}{2} \cong 0,53 \text{ T}$. Drugi »pol« je dosti bolj oddaljen in njegov prispevek lahko ocenimo

kot prispevek »točkastega magnetnega naboja«. Ta prispevek bo torej velik

$B = \frac{\mu_0 Q_m}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 MA}{4\pi r^2} \cong 377 \mu\text{T}$. To vrednost je potrebno odšteti od že izračunanega, vidimo pa, da je dosti manjši in ga lahko tudi zanemarimo. Naj ponovno povemo, da magnetnih nabojev NI, lahko pa ta koncept izkoristimo za izračun magnetnega polja v okolici magnetov ali sile na magnetne.

Zveza med magnetizacijo in tokom. Če primerjamo polje, ki ga v svoji okolici povzroča trajni magnet in polje ravne tuljave, ugotovimo, da sta ti dve polji navzven enaki. To nas tudi navede na misel, da lahko polje trajnega magneta prikažemo tudi kot posledico površinskega toka (K_m) ali pa kot tuljavo z N ovoji in tokom I_m . Preproste zveze to pokažejo na sledeč način

$$M = \frac{m}{\Delta v} = \frac{I_m \cdot \Delta A}{\Delta A \cdot \Delta l} = \frac{I_m}{\Delta l} \cdot \frac{N}{N} = \frac{NI_m}{l} = K_m. \quad (8.2)$$

SLIKA: Trajni magnet s prikazom površinskega magnetnega naboja in tuljavo s tokom in N ovoji ali s površinskim tokom.

Primer: Ocenimo velikost magnetnega polja v sredini trajnega magneta v obliki diska polmera $R = 2$ cm in debeline $d = 5$ mm z magnetizacijo $M = 5 \cdot 10^4$ A/m v smeri osi.

Uporabimo koncept izračuna s pomočjo opisa magneta s tokovno zanko s površinskim tokom.

Izračun: Iz enačbe (8.2) ugotovimo, da je $M = K$, torej je tok v zanki

$I_m = K \cdot d = M \cdot d = 250$ A. V skladu z enačbo za polje v sredini tokovne zanke velja

$$B = \frac{\mu_0 I_m}{2R} \cong 7,85 \text{ mT}.$$

Magnetna poljska jakost in razširjen Amperov zakon. Naredimo preprost eksperiment.

Vzemimo zračni toroid za katerega smo že pokazali, da je polje v sredini ovojev enako

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}, \quad (8.3)$$

kjer je l dolžina srednje poti in N število ovojev. Polje lahko izmerimo na primer s postavitvijo Hallove sonde v sredino ovojev. Nato vzamemo toroidno jedro iz feromagnetika in ga ovijemo z enakim številom ovojev. Pri vzbujaanju s tokom I ugotovimo povečanje polja v sredini ovojev (v praksi bi morali narediti majhno odprtino (režo) v feromagnetik za vstavitve Hallove sonde)². Amperov zakon, kot smo ga poznali do sedaj, očitno ne bo več primeren za izračun polja v feromagnetiku, saj povečanja polja ne predvidi. Zakon je potrebno spremeniti tako, da bo upošteval tudi vplive magnetnih momentov v feromagnetiku.

Spremenjena oblika bo

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N(I + I_m), \quad (8.4)$$

kjer smo z NI_m označili tok zaradi magnetizacije feromagnetika. Ta tok lahko povežemo z vektorjem magnetizacije, kot smo prikazali z enačbo (8.2). Polje znotraj toroida s feromagnetikom bi torej lahko zapisali kot

$$B = \mu_0 \left(\frac{NI}{l} + \frac{NI_m}{l} \right) = \mu_0 \left(\frac{NI}{l} + M \right). \quad (8.5)$$

Enačbo lahko preuredimo tako, da bo na desni strani enačbe le vzbujaanje NI

$$\frac{B}{\mu_0} - M = \frac{NI}{l}. \quad (8.6)$$

² Reža v feromagnetiku bo sicer nekoliko zmanjšala velikost polja, kar s poznavanjem vpliva zračne reže lahko pri izračunu upoštevamo. (To bomo kasneje tudi naredili.) Da bi se izognili temu problemu, lahko spremembo velikosti polja v feromagnetiku ugotovimo tudi posredno z vzbujaanjem z izmeničnim signalom in merjenjem inducirane napetosti na dodatnem (sekundarnem) navitju na toroidu. Tudi to bomo spoznali v nadaljevanju.

Očitno bi torej lahko zapisali Amperov zakon v obliki, ki bi imela na desni strani enačbe le vzbujanje NI , če bi pisali

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = NI. \quad (8.7)$$

Enačba postane zopet podobna prvotni, če definiramo novo veličino, *magnetno poljsko jakost* $\vec{H}$ kot

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (8.8)$$

pri čemer Amperov zakon dobi obliko

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (8.9)$$

V splošnem lahko enačbo (8.9) zapišemo tako, da namesto produkta NI uporabimo splošnejši zapis z gostoto (konduktivnega) toka, ki ga zanka oklepa:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_A \vec{J}_c \cdot d\vec{A} \quad (8.10)$$

Zveza med $\vec{B}$, $\vec{H}$ in $\vec{M}$. V modificirani obliki Amperovega zakona ni več vpliva snovi, saj je “skrita” v definiciji jakosti magnetnega polja. V primeru, da nas zanima gostota magnetnega pretoka pri uporabi feromagnetikov, lahko najprej izračunamo jakost polja, nato pa iz enačbe (8.8) še gostoto pretoka. Pri tem enačbo (8.8) običajno zapišemo kot

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (8.11)$$

Magnetna poljska jakost ima očitno enako enoto kot vektor magnetizacije, torej A/m in je neposredno povezana s tokovnim vzbujanjem.

³ Amperov zakon je ena od osnovnih enačb za opis elektromagnetnega polja. V splošni obliki, ki je tudi znana kot prva Maxwelllova enačba, je za tok na desni strani enačbe (8.11) potrebno upoštevati vse vrste tokov, ki vplivajo na razvoj magnetnega polja (konduktivni in poljski tok) in je v integralni obliki običajno zapisana v

obliki $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J}_c \cdot d\vec{A} + \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}.$

Primer: Skicirajmo polje znotraj in v okolici trajnega magneta cilindrične oblike z magnetizacijo v smeri osi. Vpliv magnetizacije upoštevajmo kot vpliv tokovne obloge, torej polje določimo kot polje v okolici ravne tuljave (solenoida).

1) Gostota magnetnega pretoka (magnetno polje) ima enako obliko kot polje solenoida.

2) Zunaj magneta magnetizacije ni $M = 0$, torej je v skladu z enačbo (8.11) jakost

magnetnega polja $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ in ima enako smer kot gostota magnetnega pretoka.

3) Jakost magnetnega polja znotraj magneta je usmerjena v nasprotni smeri kot je vektor magnetizacije. To sledi iz razširjenega Amperovega zakona, saj ker ni zunanega

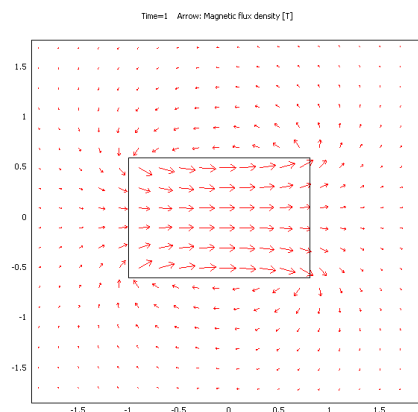
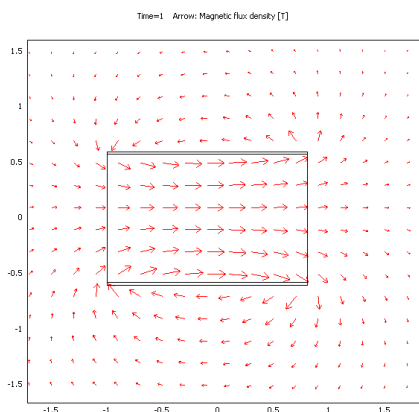
tokovnega vira velja $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$, torej mora biti določen del H-ja v smeri poti

usmerjen v drugo smer, da bo celotni integral po zaključeni (poljubni) poti enak nič.

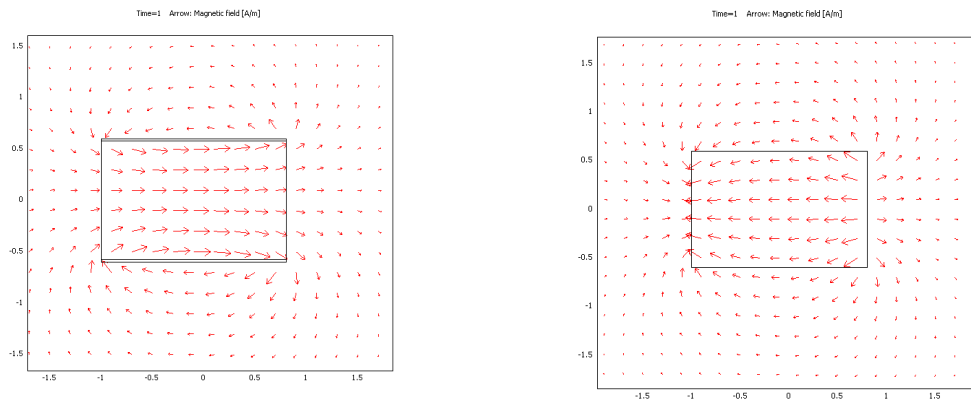
4) Poleg tega, da je H znotraj magneta v nasprotni smeri, kot je M (in tudi B), je tudi

smer drugačna kot smer M-a in B-ja, saj mora veljati $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$, pri čemer sta

znotraj magneta B in M drugače usmerjena (razen na osi).



SLIKA: Prikaz gostote magnetnega pretoka v okolici tuljave (levo) in trajnega magneta (desno). Trajni magnet ima homogeno magnetizacijo v smeri v desno.



SLIKA: Prikaz jakost magnetnega polja v okolici tuljave (levo) in trajnega magneta (desno). Trajni magnet ima homogeno magnetizacijo v smeri v desno.

Magnetna susceptibilnost in relativna permeabilnost. Velikost magnetizacije je odvisna od vzbujanja. Običajno velja, da večanje vzbujanja povečuje magnetizacijo, saj se usmerjenost magnetnih dipolov z večanjem vzbujanja vedno bolj orientira v smer vzbujalnega polja. To zvezo opišemo kot

$$\overline{M} = \chi_m \overline{H} \quad ^4, \quad (8.12)$$

kjer χ_m imenujemo *magnetna susceptibilnost*, ki je mera za dovzetnost materiala za magnetizacijo pri vzpostavitvi magnetnega polja. Z upoštevanjem te zveze v enačbi (8.11), dobimo

$$\overline{B} = \mu_0(\overline{H} + \chi_m \overline{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\overline{H} = \mu_0\mu_r \overline{H}, \quad (8.13)$$

kjer μ_r imenujemo *relativna permeabilnost* in je brez enote. V skladu z enačbo (8.13) določimo μ_r iz zveze med H jem in B jem

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}. \quad (8.14)$$

Za določen material torej iz poznane vzbujanja (H ja) in izmerjenega polja (B ja) določimo relativno permeabilnost. Za feromagnetne materiale se izkaže, da ni linearna in je torej funkcija vzbujanja $\mu_r = \mu_r(H)$. Pa ne le to, izkaže se, da se relativna permeabilnost po

⁴ Ta zveza je lahko tudi bolj kompleksna, saj se lahko material različno magnetizira v različnih smereh pri vzpostavitvi magnetnega polja. V takem primeru je potrebno susceptibilnost zapisati kot tenzor (v obliki matrike), kar seveda še dodatno zaplete analizo magnetnih materialov. V tem primeru rečemo, da ima material izotropne lastnosti, sicer pa anizotropne.

izključitvi vzbujanja spreminja drugače, kot pri vključitvi. Tej lastnosti rečemo **histereza** in bistveno vpliva na uporabo magnetnih materialov v elektrotehniki.

Zveza med B in H. Enačbo (8.13) običajno pišemo kar v obliki

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (8.15)$$

kjer je $\mu = \mu_r \mu_0$.

Analogija z elektrostatiko. Vsekakor je mogoče najti analogijo z elektrostatiko, kjer smo električne lastnosti materialov opisali z električno susceptibilnostjo ali relativno dielektričnostjo ter zvezo med gostoto električnega pretoka in električno poljsko jakostjo $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$. Pri tem velja omeniti, da v smislu osnovnih veličin (tiste, ki so neposredno povezane s pojmom sile) v magnetiki nastopa gostota magnetnega pretoka B, v elektrostatiki pa električna poljska jakost E. Gostota električnega pretoka D in magnetna poljska jakost H pa sta uvedeni predvsem v smislu lažje obravnave električnega in magnetnega polja v snoveh.

Primer: V toroidnem feromagnetnem jedru srednje dolžine 12 cm s 150 ovoji in tokom 1,2A je vzdolž srednje dolžine gostota magnetnega pretoka 1,22 T. Kolikšna je jakost magnetnega polja, magnetizacija, relativna permeabilnost in magnetna susceptibilnost?

Izračun:

$$H = \frac{NI}{l} = 1500 \text{ A/m},$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H \cong 9,69 \cdot 10^5 \text{ A/m}.$$

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} \cong 647, \quad \chi = \mu_r - 1 \cong 646$$

Magnetna napetost. V enačbi (8.9) nastopa tok pomnožen s številom ovojov kot vzbujanje (vir) magnetnega polja. Zato ga pogosto imenujemo tudi *magnetna napetost* $\Theta = NI$ in

enačbo (8.9) zapišemo kot $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Theta$ ali v obratnem vrstnem redu kot

$$\Theta = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}. \quad (8.16)$$

Magnetna napetost je pomemben koncept pri analizi magnetnih sestavov iz feromagnetnih materialov in navitij, ki jih lahko obravnavamo kot magnetna vezja. Tam magnetna napetost predstavlja analogijo z električno napetostjo, le da se je potrebno zavedati, da je to v bistvu vzbujaalni tok pomnožen s številom ovojev. Njegova enota je torej A(mpere), pogosto rečemo tudi Amperski ovoji.

Primer: Določimo magnetno napetost iz prejšnjega primera. Izračun: $\Theta = NI = 180 \text{ Aov}$.

Magnetni potencial⁵. Če obstaja magnetna napetost, ali obstaja tudi magnetni potencial? Obstaja, oziroma, lahko ga definiramo, vendar z eno omejitvijo. Za električni potencial je v elektrostatiki veljalo, da je integral električne poljske jakosti po zaključeni poti enak nič, v magnetostatiki pa to ne velja, saj je integral jakosti magnetnega polja po zaključeni poti enak magnetni napetosti, oziroma toku, ki ga zanka oklene. Torej ima smisel definirati magnetni potencial le tedaj, ko ga ne računamo po zaključeni poti. V tem primeru bo magnetna napetost

med točkama T_1 in T_2 določena kot $V_m(T_1) - V_m(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$. Če si v točki T_2 izberemo

magnetni potencial enak nič, lahko *magnetni potencial* v točki T_1 zapišemo kot

$$V_m(T_1) = \int_{T_1}^{T_2 (V_m=0)} \vec{H} \cdot d\vec{l} . \quad (8.17)$$

Ko bomo obravnavali magnetna vezja bomo torej lahko govorili o tem, da imamo vzdolž zaključene poti po jedru delne padce napetosti, ki so posledica magnetnih upornosti materialov. Ker pa bomo računali po zaključeni poti, bo vsota padcev magnetnih napetosti enaka magnetnim vzbujanjem, določenim s tokovi v navitjih okoli jedra.

⁵ Bolj natančno rečemo magnetnemu potencialu, ki ga opisuje enačba (8.17) **skalarni magnetni potencial**, saj poznamo tudi **vektorski magnetni potencial**. Že ime samo pove, da je slednji definiran kot vektor (običajno zapisan s simbolom $\vec{A}$) in ima v teoriji elektromagnetike pomembno vlogo, ga pa v okviru tega predmeta zaradi dodatne zahtevnosti ne obravnavamo.

Mejni pogoji magnetnega polja

Zanima nas, kako se spremeni magnetno polje pri prehodu iz ene snovi v drugo. Ti snovi morata seveda imeti različne magnetne lastnosti, ki jih opišemo z njunima relativnima permeabilnostima. Vzemimo dve snovi (prostora) s permeabilnostima μ_1 in μ_2 in poljema $\vec{B}_1$ in $\vec{B}_2$, ki sta tik ob skupni meji (SKICA). Mejne pogoje lahko določimo z

upoštevanjem dveh splošno veljavnih zakonov: o brezizvornosti magnetnega polja (Gaussov zakon za magnetiko) $\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ in o vrtinčnosti magnetnega polja (Amperov zakon)

$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$. Če si zamislimo mali volumen, ki sega v obe snovi in obravnavamo

Gaussov zakon v limiti, ko stiskamo volumen proti mejam obeh snovi, ugotovimo, da se mora fluks skozi mejno površino ohranjati, oziroma, da mora veljati $B_{n2} \cdot A = B_{n1} \cdot A$, kjer sta B_{n1} in B_{n2} komponenti polja na meji snovi z indeksom 1 in 2, ki sta v smeri (iste) normale na površino. Torej mora veljati

$$B_{n2} = B_{n1}. \quad (8.18)$$

V vektorski obliki pa enačbo (8.18) zapišemo kot $\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$.

SLIKA: Skica dveh snovi in meje, fluks skozi mali volumen pri stiskanju v smeri meje. stranski fluksi se izničijo, normalni se ohrani.

Ugotovili smo torej, da morata normalni komponenti gostote magnetnega pretoka ostati nespremenjeni. Ali velja to tudi za tangencialni komponenti? To obravnavajmo najprej v primeru, ko na meji ni površinskih tokov. V tem primeru si zamislimo pravokotno zanko, ki vsebuje polje obeh snovi. Upoštevamo Amperov zakon, ko zanko stiskamo v smeri meje. Magnetne napetosti na stranicah s procesom stiskanja zanke (v limiti) izzvenijo, vzdolžne pa se izenačijo, oziroma $H_{t2} \cdot l - H_{t1} \cdot l = 0$, kar tudi pomeni, da se ohranjata tangencialni komponenti jakosti polja:

$$H_{t2} = H_{t1}. \quad (8.19)$$

SLIKA: Zanka, ki oklepa tako snov 1 kot 2 s smerjo integracije, tangencialnega H-ja in limitiranje v smeri meje.

Kako torej dobimo še tangencialni komponenti gostote magnetnega pretoka? Preprosto, z upoštevanjem $H = \frac{B}{\mu}$ (iz enačbe (8.13)) velja

$$\frac{B_{t2}}{\mu_2} = \frac{B_{t1}}{\mu_1}. \quad (8.20)$$

Če sedaj upoštevamo še možnost, da po površini med snovema teče površinski tok (tokovna obloga označena s simbolom K), moremo ugotoviti, da mora biti razlika tangencialnih magnetnih jakosti ravno enaka gostoti toka po površini (tokovni oblogi K):

$H_{t2} \cdot l - H_{t1} \cdot l = \pm K$. Gre za K , ki je pravokoten na smer tangencialnih komponent H -ja, pa še smer (predznak) K -ja je pomembna. V tem smislu je ta pogoj najboljše zapisati kar z uporabo vektorskega produkta kot

$$\vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}, \quad (8.21)$$

pri čemer je pomembna tudi smer normale, ki je definirana od snovi z indeksom 1 v snov z indeksom 2.

Primer: $H_{t1} = 0$, $H_{t2} = 10$ A/m. Skicirajmo smer in velikost tokovne obloge.

Rešitev: $K = H_{t2} = 10$ A/m, smer pa je pravokotna na H_{t2} in sicer tako, da v prvem mediju ustvari polje, ki je nasprotno usmerjeno kot H_{t2} , saj se morata vpliva H-ja v drugem mediju in tokovne obloge izničiti.

Primer: V zraku je homogeno polje 1,5 mT, ki je usmerjeno pod kotom 30° na normalo na površino feromagnetika z relativno permeabilnostjo 1200. Kolikšna je gostota magnetnega pretoka v feromagnetiku in pod kakšnim kotom je glede na normalo? NARIŠI SLIKO.

SLIKA:

Izračun: Normalna komponenta polja se ohranja in je torej enaka (glej (8.18))

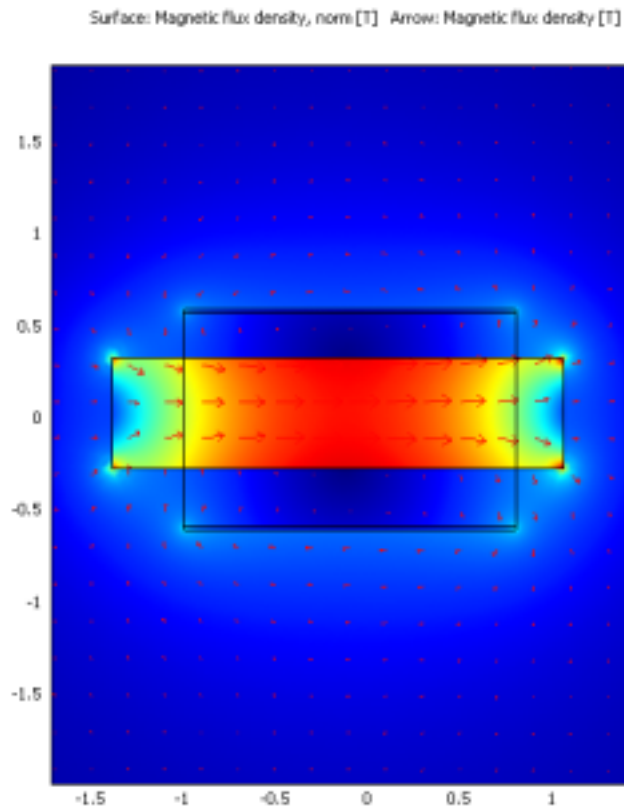
$B_{n2} = B_{n1} = B_1 \cdot \cos(30^\circ) = 1,3$ mT . Tangencialna komponenta pa se »ojača« za razmerje

permeabilnosti (glej (8.20)): $B_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot B_{t1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot B_1 \cdot \sin(30^\circ) = 0,9$ T . V feromagnetiku je torej

polje precej »ojačano« glede na zunanost. Normalna komponenta polja ne prispeva skoraj nič k skupnemu polju v notranjosti: $B_2 = \sqrt{B_{n2}^2 + B_{t2}^2} = 0,9$ T . Zanimivo je pogledati še smer polja

v feromagnetiku. Glede na normalo bo ta kot enak $\alpha = \text{Arc tan} \left(\frac{B_{t2}}{B_{n2}} \right) = 98,9^\circ$, torej skoraj

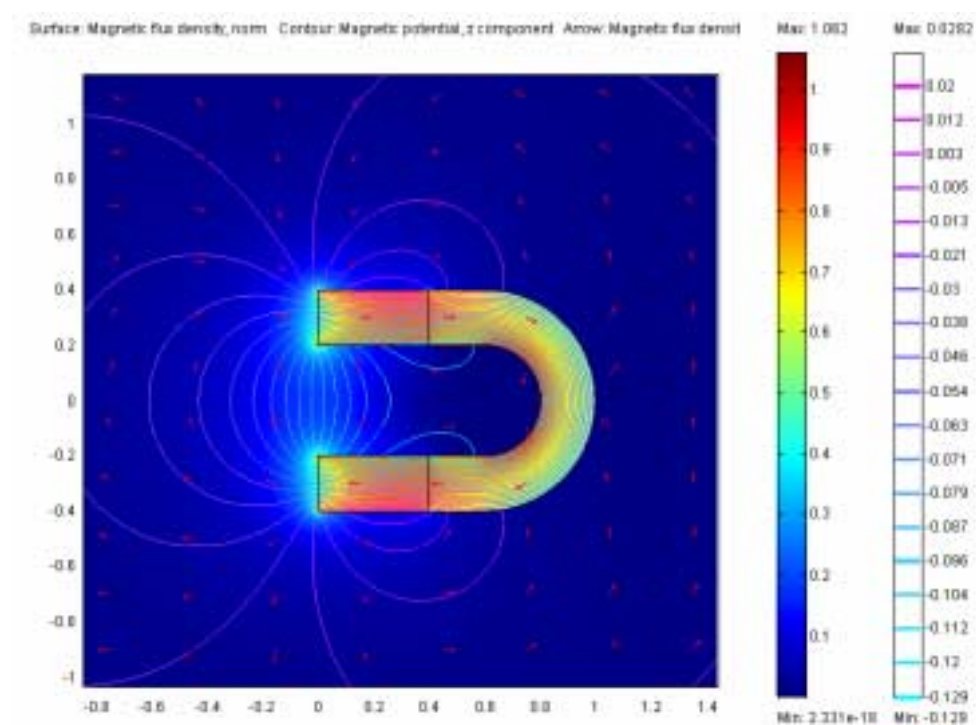
enak 90° . To je pomemben rezultat, saj kaže, da čim magnetno polje vstopi v feromagnetik, se njegova pot popolnoma spremeni in usmeri praktično vzdolž njegove oblike.



SLIKA: Magnetno polje v okolici tuljave (puščice in barve) z vloženim feromagnetnim materialom. Polje znotraj feromagnetika se izrazito poveča v skladu z mejnimi pogoji. Predvsem se poveča tangencialna komponenta (v razmerju permeabilnosti), kar ima tudi za posledico prevladujočo usmerjenost fluksa v smeri vzdolž feromagnetika.

PRIMERI MAGNETNIH MATERIALOV (POKAŽI)

1. RLS prečno magnetiziran magnet za dajalnike kota (NeFeB)
2. Iskra magneti: Prečno magnetiziran magnet za majhne motorčke (AlNiCo)
3. Iskra magneti: Močan magnet za magnetne zavore
4. Magnet za pritrditev mobitela (NS NS magnetizacija), problem pritrditve
5. NSNSNS magneti za otroke
6. Iskra Feriti: Feritni lončki
7. Iskra Feriti: Nikelj (surovina)



SLIKA: Polje podkvastega magneta. Ravna dela imata trajno magnetizacijo, ukrivljen del je iz feromagnetnega materiala.

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:

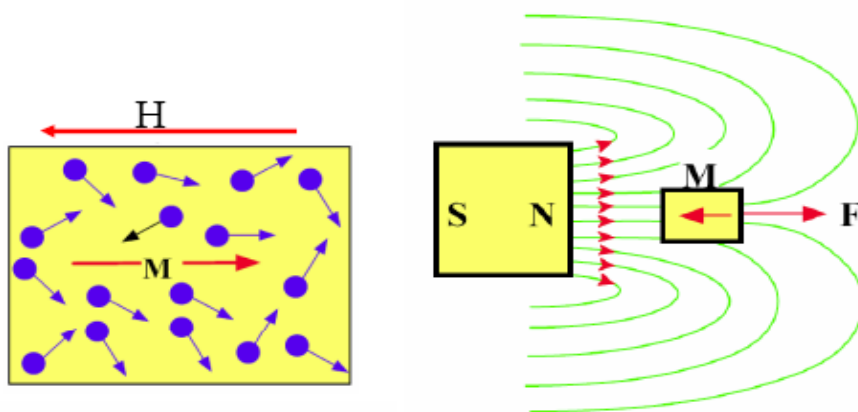
Mejni pogoji:

- 1. kolokvij, 13. april 2006
- 1. kolokvij 19.04.2001
- Izpit, 28. avgust 2006
- Izpit 28. 01. 2005
- Izpit, 18. 09. 2003
- izpit, 6. februar 2003
- Izpit, 17. 01. 2002

MAGNETNI MATERIALI, HISTEREZNA ZANKA IN RAČUNANJE MAGNETNIH STRUKTUR (9)

Kot smo že omenili, imajo vsi materiali določene magnetne lastnosti, le da so močno izražene le pri zelo redkih. Glede na obnašanje snovi v magnetnem polju jih delimo na diamagnetike, paramagnetike, feromagnetike, antiferomagnetike, ferimagnetike in superparamagnetike.

Diamagnetiki izkazujejo izredno šibke magnetne lastnosti. Magnetni dipolni momenti kroženja elektronov in njihovega spina se v taki snovi kompenzirajo. Se pa pod vplivom zunanjega magnetnega polja nekoliko celo zmanjša magnetno polje v notranjosti, ker je vpliv zunanjega polja na spin elektronov nekoliko močnejši kot na orbitalni moment. Te snovi imajo negativno magnetno susceptibilnost oziroma relativno permeabilnost, ki je malo manjša od 1. Primeri takih snovi so Cu (relativna permeabilnost 0,999983), Au, Ag, Hg, H₂O (0,999991), itd. Če diamagnetik postavimo v bližino močnega trajnega magneta, bo med njima odbojna sila (neodvisno od pola magneta). To je odkril že Michael Faraday leta 1846 na primeru bizmuta (0,99983).

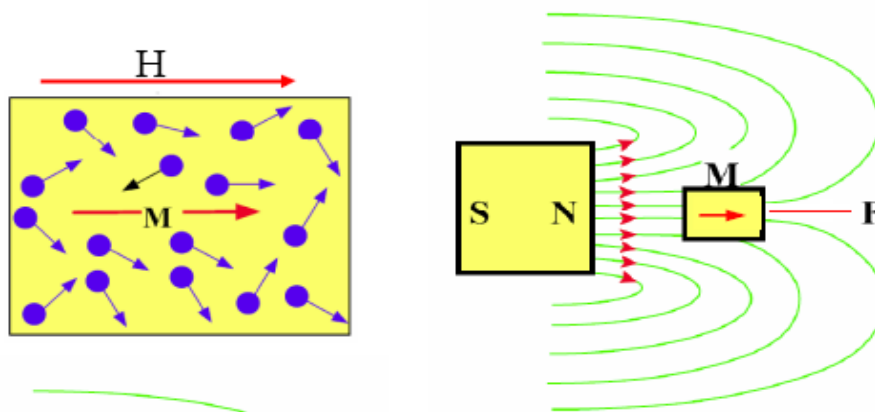


SLIKA: M kaže v nasprotni smeri kot vzbujanje. Diamagnetik se odbija od trajnega magneta: sila je v smeri manjše gostote polja.

Paramagnetiki so snovi, v katerih ni ravnotežja med magnetnimi dipolnimi momenti zaradi kroženja elektronov in spina. Vsak atom izkazuje rezultančni magnetni dipolni moment, ki pa se zaradi neurejenosti strukture kompenzirajo. Se pa s postavitvijo take snovi v magnetno polje v določeni meri magnetno polje v notranjosti nekoliko poveča (usmerijo se magnetni

dipoli) v smeri zunanjega polja. Take snovi so npr. aluminij (1,00002), platina, mangan, kisik, zrak (1,0000004).

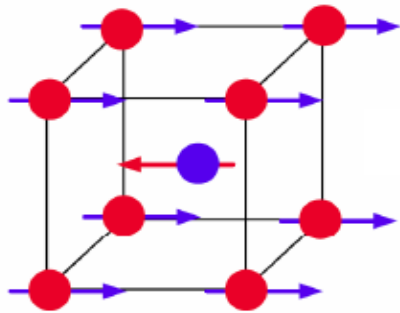
V smislu upoštevanja magnetnih lastnosti dia- in paramagnetikov bi lahko zaključili, da je njihova susceptibilnost v praksi zanemarljiva.



SLIKA: Magnetizacija kaže v smeri vzbujačnega polja. Sila na paramagnetik v polju je v smeri večje gostote polja.

SLIKA: $B(H)$ KRIVULJA ZA ZRAK, DIAMAGNETIKE IN FEROMAGNETIKE.

Antiferimagnetiki so snovi, v katerih se magnetni momenti sosednjih atomov usmerijo v nasprotni smeri, zato je skupen magnetni moment teh snovi pri vzpostavitvi zunanjega polja enak nič.

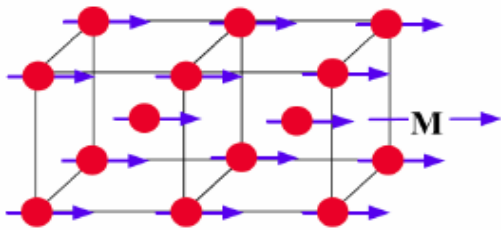


Ferimagnetiki imajo tudi nasprotno usmerjene magnetne momente vendar njihova vrednost ni enaka nič. Še vedno pa ni ta efekt tako izrazit kot pri feromagnetikih. So pa določeni ferimagnetiki, ki jih imenujemo **feriti** izredno pomembni v elektrotehniki, saj je v nasprotju z feromagnetiki njihova električna prevodnost zelo majhna, kar s pridom izkoriščamo tam, kjer bi sicer imeli velike izgube zaradi ohmskih tokov (vrtinčni toki) pri višjih frekvencah. Srečamo ga tudi v naravi, kot magnetit (železov oksid Fe_3O_4).

Superparamagnetiki so feromagnetiki, ki so vmešani v dielektričen material. Uporabljajo se npr. za audio in video trakove.

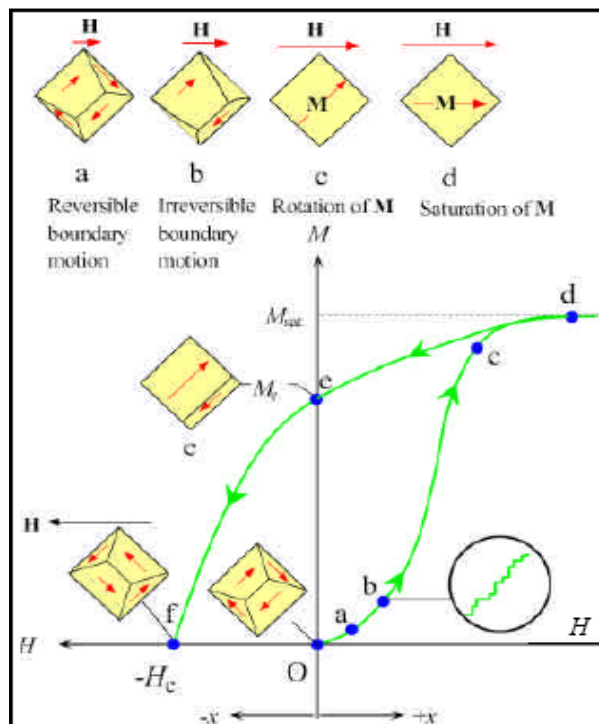
Feromagnetiki. V feromagnetikih ima vsak atom relativno velik magnetni dipolni moment. Le ta je posledica neuravnoveženih momentov spinov elektronov, kar se da prikazati z uporabo spoznanj kvantne fizike. Tipični predstavniki feromagnetikov so železo (5000), nikel (600) in kobalt (250), ki so v periodičnem sistemu na mestih 26, 27 in 28. Poleg izraženih dipolnih momentov na nivoju atoma, se ti atomi v kristalni strukturi grupirajo v območja, ki jim pravimo magnetne domene, znotraj katerih so momenti orientirani, navzven pa so domene neurejene in zato tudi magnetno polje ni izrazito. Lahko pa se pod vplivom zunanega polja magnetni momenti v domenah usmerijo v smer zunanega polja. Proces orientiranja se odvija po fazah, tako, da se najprej nekoliko povečajo domene, katerih stene tvorijo majhen kot glede na zunanje polje. Pri taki reorientaciji je polje reverzibilno: če izklopimo zunanje polje, se domene vrnejo v prvoten položaj. Če se zunanje polje še dodatno poveča, se začnejo obračati celotne domene. Če v takem momentu izklopimo zunanje polje, se domene ne vrnejo več v začetno stanje, temveč ostanejo delno orientirane. Če pa zunanje polje še povečujemo, prihaja do nasičenja, ko so praktično že vsi dipolni momenti domen usmerjeni v smer polja. Povečevanje polja ni več mogoče. Gostota magnetnega pretoka sicer še naprej narašča

spovečevanjem vzbujanja vendar je relativna permeabilnost enaka 1 (feromagnetik se obnaša kot zrak).



SLIKA: Primer zgradbe feromagnetnega materiala z domenami in magnetnimi dipolnimi momenti. Prikaz usmerjanja dipolov pred magnetizacijo in ob nasičenju.

Krivulja magnetenja. Zanima nas, kako se magnetizacija spreminja z večanjem vzbujalne gostote magnetnega pretoka. Namesto opazovanja $M(B)$, je bolj običajno, da zunanje vzbujanje opišemo z jakostjo magnetnega polja H , rezultat magnetenja pa opazujemo z naraščanjem gostote magnetnega pretoka B . Dobimo torej $B(H)$ krivuljo, ki pa pri feromagnetikih ni linearna. Na začetku je naklon manjši, potem največji in pri velikih vzbujanjih zopet manjši (nasičenje). Začetni krivulji magnetenja rečemo *deviška krivulja*, ker se ob izklopu zunanjega vzbujanja gostota pretoka ne vrne na nič, pač pa na neko vrednost, ki je različna od nič.



SLIKA: Magnetilna krivulja s tipičnimi izrazi: deviška krivulja, nasičenje. Meja reverzibilnega in ireverzibilnega procesa. Prikaz zveze $B(H)$ v vakuumu.

Z upoštevanjem zveze med B jem in H jem je relativna permeabilnost definirana kot

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} . \quad (0.1)$$

To permeabilnost imenujemo tudi statična in je primerna za obravnavo v primerih, ko se magnetilni tok ne spreminja ali pa je take oblike, da jo lahko dobro aproksimiramo s premico. Tej permeabilnosti rečemo tudi *statična*, saj ni definiran z naklonom krivulje pač pa z razmerjem med B in H . Zadnji odsek predstavlja nasičenje, kjer relativna permeabilnost postane enaka 1. Pri feromagnetikih so vrednosti relativne permeabilnosti nekaj tisoč do nekaj sto tisoč. Vrednost statične relativne permeabilnosti je odvisna od točke računanja in bo zaradi nelinearne magnetilne krivulje tudi sama nelinearna. V smislu lažjega računanja jo

pogosto poenostavimo tako, da lineariziramo magnetilno krivuljo. Tako postane statična relativna permeabilnost konstanta. V nasičenju pa ima relativna statična permeabilnost vrednost 1.

V določenih primerih (npr. pri vzbujujanju z majhnimi izmeničnimi signali) je bolj primerno upoštevati le del krivulje magnetenja pri čemer je bolj smiselno upoštevati naklon na krivuljo v določeni (delovni) točki. Tako dobimo *dinamično relativno permeabilnost*, ki je definirana

kot
$$\mu_{rd} = \frac{dB}{\mu_0 \cdot dH}.$$

SLIKA: Prikaz statične relativne permeabilnosti kot razmerje med B in $\mu_0 H$ v točki. Krivulja ima določen maksimum in pade v nasičenju na vrednost 1.

Če imamo opravka z izmeničnim signalom, ki je superponiran na enosmernega, je običajno bolj primerno uporabiti t.i. inkrementalno relativno permeabilnost, ki ni definirana z odvodom krivulje pač pa z diferencami v lokalni histerezni zanki $\mu_{ri} = \frac{\Delta B}{\mu_0 \cdot \Delta H}$. Ta je manjša od dinamične permeabilnosti.

Histerezna zanka: Do določenega Bja je proces magnetenja še reverzibilen, ko pa je ta vrednost presežena, se pri zmanjševanju vzbujujanja B počasneje zmanjšuje kot pri povečevanju. Dobimo histrežno zanko. Ko je vzbujujanje izklopljeno, ostane v materialu določeno polje, ki ga imenujemo remanenčno in označimo z Br. Če smer vzbujujanja obrnemo, se zmanjšuje polje in pri določeni vrednosti vzbujujanja pade na nič. Tej točki vzbujujanja rečemo koercitivna jakost polja in jo označimo s Hc. Pri še povečanjem vzbujujanju pridemo do

nasičenja v negativni smeri. Vzbujanje zopet zmanjšujemo do nič in nato do nasičenja, kjer se začetna in končna krivulja stakneta.

SLIKA: Histerezna krivulja s prikazom *remanenčne gostote magnetnega pretoka* (B_r), ki ostane v materialu po izklopu vzbujanja in *koercitivne jakost polja* (H_c), kjer je gostota pretoka enaka nič.

Če želimo material uporabiti kot trajni magnet, je primerno uporabiti material, ki ima veliko vrednost remanenčne gostote polja. Poleg tega je pomembno tudi, da ga ni lahko razmagnetiti, torej mora imeti veliko tudi koercitivno jakost polja. Najboljši materiali za trajni magnet imajo veliko vrednost produkta H_c in B_r . Takim materialom rečemo tudi *trdomagnetni*.

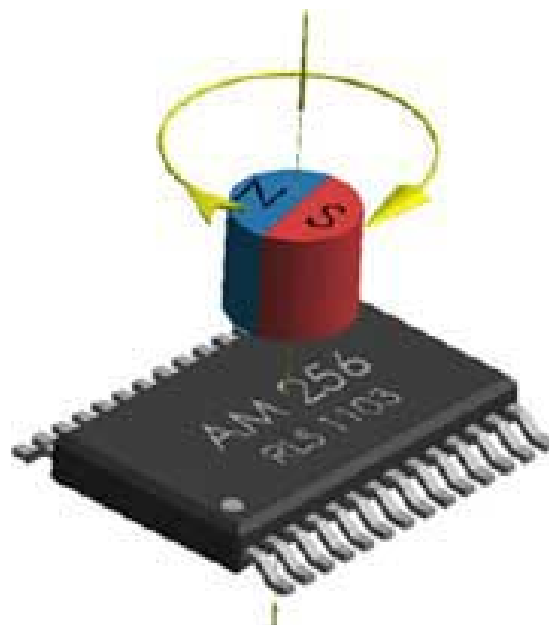
Mehkomagnetni materiali imajo ozko histerezno zanko in veliko permeabilnost. Tipičen mehkomagnetni material je čisto železo. Zelo ozke histerezne zanke imajo tudi feritni materiali.

SLIKA: Primerjava med histerezno zanko mehkomagnetnega materiala in trdomagnetnega materiala.

Razmagnetenje. Običajni način razmagnetjenja je zmanjševanje izmeničnega polja, pri čemer pa moramo začeti razmagnetenje z amplitudo, pri kateri je material v nasičenju. Določeni materiali so zelo občutljivi na mehanske udarce (so krhki), ki tudi lahko delno spremenijo

magnetne lastnosti. Poleg tega vsak material izgubi magnetne lastnosti pri dovolj visoki temperaturi, ki jo imenujemo *Curiejeva temperatura*. Pri tej temperaturi snov zaradi povečanega termičnega gibanja izgubi magnetne lastnosti. Pri železu je $T_c=770^0\text{ C}$.

SLIKA: Primer uporabe prečno magnetiziranega trajnega magneta NeFeB za aplikacijo dajalnika kota, ki se ga določa z odčitavanjem magnetnega polja. Pod senzorjem se nahaja čip z množico Hallovih elementov in elementi za obdelavo signalov. Čip je bil razvit na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani, celotni produkt pa trži slovensko podjetje RLS: www.rls.si.



RAČUNANJE MAGNETNIH STRUKTUR

Spoznali smo obliko Amperovega zakona izraženo z jakostjo magnetnega polja H :

$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$. Ugotovili smo, da je ta oblika zapisa posebno primerna za obravnavo polja v

snoveh z izraženimi magnetnimi lastnostmi (npr. feromagnetiki). Zveza med gostoto

magnetnega pretoka in jakostjo polja je $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_r \mu_0 H = \mu \vec{H}$, kjer je zveza lahko

podana v matematični obliki (konstantna permeabilnost ali nelinearna funkcija H -ja) ali pa je

podana grafično – v obliki magnetilne krivulje. Za analizo magnetnih struktur nam služi ravno

Amperov zakon, ki pa ga moramo nekoliko poenostaviti. Namesto v integralni obliki ga

zapišemo kot vsoto posameznih padcev magnetne napetosti. Tako dobimo obliko

$$\sum_{i=1}^N H_i \cdot l_i = \Theta. \quad (0.2)$$

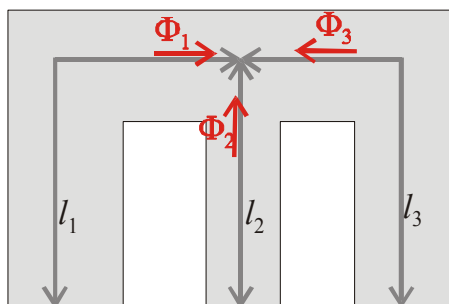
Desna stran enačbe predstavlja tokovno vzburjanje (lahko je več takih vzburjanj), leva stran enačbe pa so padci magnetne napetosti na posameznih odsekih po zaključeni magnetni poti.

Pri tem smo morali narediti določeno poenostavitev in sicer, da je po preseku jedra polje homogeno in da računamo razdalje l_i po srednji dolžini gostotnice (po sredini jedra).

Poleg zgornjega zapisa, ki spominja na Kirchofov zakon o vsoti napetosti po zaključeni poti, potrebujemo še povezavo med gostotami pretoka v sosednjih odsekih poti. To zvezo dobimo iz zakona o brezizvornosti magnetnega polja, ki ga zopet zapišemo v diskretni obliki

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i = 0, \quad (0.3)$$

kjer je N število odcefov. Poglejmo si to na primeru E oblike jedra na sliki.



SLIKA: Prikaz srednjih dolžin gostotnic ter vsote fluksov v jedru E oblike. Veljati

mora: $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$.

PRIMERI IZRAČUNOV:**Primer 1:** Navitje na feromagnetnem jedru s konstantno permeabilnostjo brez zračne

reže: Na feromagnetnem jedru pravokotnega preseka 1 cm^2 je navitje s tokom $1,2 \text{ A}$ in 150 ovoji. Relativna permeabilnost feromagnetika je 647 . Določite gostoto magnetnega pretoka, fluks v jedru in induktivnost navitja.

Izračun:

$$NI = Hl \Rightarrow H = 750 \text{ A/m}$$

$$B = \mu_r \mu_0 H = 0,6 \text{ T}$$

$$\Phi = BA = 6 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

$$L = \frac{N\Phi}{I} = 7,5 \text{ mH.}$$

Primer 2: Navitje na jedru iz feromagnetika s konstantno permeabilnostjo in z zračno

režo: Vzemimo enako jedro kot v primeru 1, pri čemer naj ima jedro še 1 mm široko zračno režo. Privzemimo, da v zračni reži ni stresanja polja (enako homogeno kot v jedru). Kolikšno polje dobimo v zračni reži in feromagnetiku pri enakem vzbujujanju ter kolikšna je induktivnost navitja?

Izračun: Vsota vseh padcev magnetnih napetosti po zaključeni dolžini magnetne poti mora

biti enaka magnetnemu vzbujujanju $\sum_{i=1}^N H_i \cdot l_i = \Theta$. Imamo dva padca magnetnih napetosti: eno

v feromagnetiku in drugo v zračni reži. Predpostavili bomo, da je polje v feromagnetiku (index m) homogeno po prerezu in da računamo integral po srednji dolžini magnetne poti:

$$H_m \cdot l_m + H_{zr} \cdot l_{zr} = NI. \text{ Sedaj } H \text{ je izrazimo z } B \text{, pri čemer je potrebno upoštevati različne}$$

relativne permeabilnosti (v zraku le μ_0): $\frac{B_m}{\mu_{rm}\mu_0} \cdot l_m + \frac{B_{zr}}{\mu_0} \cdot l_{zr} = NI$. Da dobimo zvezo med

poljem v feromagnetiku in zračni reži uporabimo enačbo (0.3) iz katere sledi, da mora biti fluks skozi jedro enak fluksu skozi zračno režo:

$$\Phi_m = \Phi_{zr} \text{ torej zaradi predpostavljene homogenosti polja } B_m \cdot A_m = B_{zr} \cdot A_{zr}. \text{ Ker zanemarimo}$$

stresanje polja v zračni reži ($A_m = A_{zr}$), velja oziroma kar $B_m = B_{zr}$. Iz tega sledi, da bo polje v

zračni reži in feromagnetiku določala enačba $B_m = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l_m}{\mu_{rm}} + l_{zr}}$. Vidimo, da se je polje znotraj

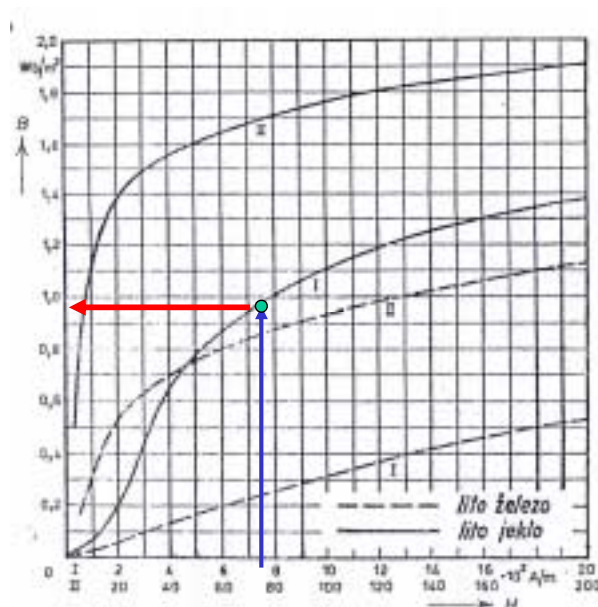
feromagnetika zmanjšalo glede na prejšnji primer (0,9 T) in sedaj znaša 0,16 T. Prav tako se zmanjša tudi lastna induktivnost, ki je sedaj 2 mH.

Vprašanje: Zakaj potem sploh uporabiti zračno režo, če pa tako močno zmanjša polje? Ponavadi je zračno režo potrebno uporabiti zato, da se zmanjšajo nelinearnosti, ki so posledica nelinearne zveze med B jem in H jem, ki se odraža v nelinearni relativni permeabilnosti. Zračna reža deluje kot magnetni upor, ki je popolnoma linearen in zmanjša končen vpliv nelinearnosti feromagnetika. Potrebno je najti ravno pravi kompromis, ki daje dovolj velik odziv, nelinearnosti pa morajo biti znotraj določenih okvirov (meja).

Primer 3: Navitje na feromagnetnem jedru brez zračne reže. Upoštevamo magnetilno krivulja feromagnetika.

Vzemimo feromagnetno jedro iz litega jekla pravokotne preseka 1 cm^2 . Na jedru je navitje s 150 ovoji in tokom 1,2 A. Določimo gostoto magnetnega pretoka, fluks v jedru in induktivnost navitja.

Izračun: Zapišemo $H_m \cdot l_m = NI$ od koder sledi $H_m = 750 \text{ A/m}$. B_m določimo iz magnetilne krivulje in je 0,95 T. Fluks bo torej $= 95 \mu\text{Wb}$ in induktivnost $L=11,8 \text{ mH}$. Ta induktivnost ni več linearna temveč je odvisna od toka vzbujanja medtem ko je bila pri jedru s konstantno permeabilnostjo konstantna.



SLIKA: Primer določitve gostote pretoka iz znane jakosti polja.

Primer 4: Navitje na jedru z zračno režo. Upoštevamo magnetilno krivuljo feromagnetika. Podan je NI , iščemo fluks ali gostoto pretoka.

Vzemimo jedro kot v primeru 3 vendar z dodano 1 mm dolgo zračno režo.

Zopet lahko pišemo $H_m \cdot l_m + H_{zr} \cdot l_{zr} = NI$. Jakost polja v zračni reži izrazimo z gostoto pretoka v zračni reži, ki je ob zanemaritvi stresanja polja enaka kot v jedru. Torej velja

$$H_m \cdot (l_m - l_{zr}) + \frac{B_m}{\mu_0} \cdot l_{zr} = NI. \text{ Zvezo med } B_m \text{ in } H_m \text{ predstavlja magnetilna krivulja. Enačbo}$$

lahko rešimo s preizkušanjem ali pa grafično:

S preizkušanjem: enačbo napišemo z vstavljenimi vrednostmi (enostavneje kar brez enot)

$H_m \cdot 0,24 + B_m \cdot 796 = 180$. Pri pravilno izbranem B_m in H_m mora biti leva stran enačbe enaka 180. Izberemo si določen B in na magnetilni krivulji poiščemo ustrezen H . Preverimo če rezultat ustreza in se s preizkušanjem bližamo rešitvi.

$B_m = 1 \text{ T}, H_m = 800 \text{ A/m}, H_m \cdot 0,24 + B_m \cdot 796 = 988$; mnogo preveč

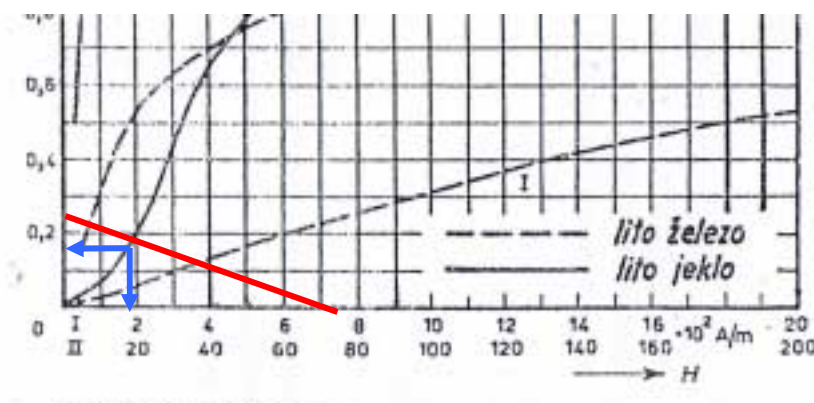
$B_m = 0,5 \text{ T}, H_m = 320 \text{ A/m}, H_m \cdot 0,24 + B_m \cdot 796 = 475$; mnogo preveč

$B_m = 0,2 \text{ T}, H_m = 200 \text{ A/m}, H_m \cdot 0,24 + B_m \cdot 796 = 207$; blizu rešitve

$B_m = 0,15 \text{ T}, H_m = 150 \text{ A/m}, H_m \cdot 0,24 + B_m \cdot 796 = 155,4$; premalo

Zaključimo, da mora biti B_m med 0,2 in 0,15 T.

Grafičen postopek: Gornja enačba predstavlja enačbo premice, ki v presečišču z magnetilno krivuljo določa delovno točko. Potrebujemo dve točki na premici. Najbolj enostavno kar $B_m(H_m=0) = 0,226 \text{ T}$ in $H_m(B_m=0) = 750 \text{ A/m}$. Skozi ti dve točki potegnemo premico in odčitamo delovno točko.



SLIKA: Primer grafičnega določanja delovne točke in posledično magnetne napetosti.

Primer 5: Jedro z zračno režo. Podan fluks ali gostota toka, iščemo NI.

Isto kot primer 3 in 4, le da iščemo magnetno napetost pri želeni gostoti pretoka v zračni reži.

Na primer pri $B = 0,5 \text{ T}$.

Enačba je enaka kot v prejšnjem primeru, postopek pa je direkten. Ker zanemarimo stresanje polja v zračni reži, je gostota pretoka v jedru enaka kot v zračni reži. Iz magnetilne krivulje odčitamo H pri $B = 0,5 \text{ T}$, ki je 320 A/m in vstavimo v enačbo. Dobimo 475 A .

Primer 6: Izračun trajnega magneta.

Poiščimo velikost magnetizacije trajnega magneta z zračno režo dolžine 5 mm , pri čemer je magnet oblike toroida okroglega preseka notranjega polmera $2,5 \text{ cm}$ in zunanjskega polmera $3,5 \text{ cm}$. V zračni reži smo izmerili polje $0,5 \text{ T}$.

Izračun: Ker ni (zunanjskega) vzbujaanja, bo veljalo $H_m \cdot l_m + H_{zr} \cdot l_{zr} = 0$, od koder je

$$H_m = -\frac{H_{zr} \cdot l_{zr}}{l_m}. \text{ Vidimo, da je smer jakosti polja v magnetu različna kot v zračni reži. In ker}$$

je smer gostote pretoka v zračni reži enaka smeri jakosti polja ($B = \mu_0 H$), lahko zaključimo, da je smer B -ja v magnetu različna od smeri H -ja. Ker zvezo med B in H v zraku vedno

$$\text{poznamo, lahko določimo } H \text{ v železu } H_m = \frac{\frac{B_{zr}}{\mu_0} l_m}{l_m} = 10,8 \text{ kA/m} \quad H_m = -\frac{\frac{B_{zr}}{\mu_0} l_{zr}}{l_m} = 10,8 \text{ kA/m. Pri}$$

tem nismo upoštevali stresanja polja v zračni reži. Z upoštevanjem stresanja bi morali upoštevati efektivno zmanjšanje zračne reže za (Carterjev) faktor približno $0,7$. Ker sta fluksa v zračni reži in magnetu enaka, sta tudi gostoti pretoka enaki (če ne upoštevamo stresanja polja) in je torej polje v magnetu tudi $0,5 \text{ T}$. Magnetizacijo pa dobimo iz izraza

$$B_m = \mu_0 H_m + \mu_0 M, \text{ od koder je } M = \frac{B_m}{\mu_0} - H_m = 3,8 \cdot 10^5 \text{ A/m}.$$

SLIKA: Jakost polja in gostota pretoka ter magnetizacija v magnetu in zračni reži.

Delovna točka magneta. Ugotovili smo, da sta B in H pri trajnem magnetu nasprotnega

predznaka, saj velja $H_m = -\frac{B_m \cdot l_{zr}}{l_m}$. Torej se delovna točka magneta nahaja na magnetilni

krivulji v drugem kvadrantu. Temu delu histerezne zanke rečemo tudi krivulja demagnetizacije ali razmagnetilna krivulja. Enačba predstavlja naklon premice in v presečišču s krivuljo magnetenja določa delovno točko. Za trajni magnet si večinoma želimo, da ima čim večji produkt B-ja in H-ja. Optimalna delovna točka je tam, kjer je produkt Bja in Hja največji. Kot bomo videli, določa produkt B-ja in H-ja gostoto magnetne energije v jedru. Desno od grafa B(-H) običajno narišemo še graf B(B H), kjer lahko identificiramo točko z največjim produktom BH.

SLIKA: Delovna točka trajnega magneta.

* Dodatki iz prakse:

Enačbo, ki smo jo izpeljali za polje v feromagnetiku z zračno režo se v praksi pogosto zasledi v katalogih proizvajalcev feromagnetnih in feritnih jeder zapisano v smislu efektivne relativne permeabilnosti. Z dodatkom zračne reže v jedro se namreč polje zmanjša in lahko pišemo

$$B_m = B_{zr} = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l_m}{\mu_{rm}} + l_{zr}} = \frac{\mu_{rm} \mu_0 NI}{l_m + \mu_{rm} l_{zr}} = \frac{\mu_{rm} \mu_0 NI}{l_m \left(1 + \mu_{rm} \frac{l_{zr}}{l_m} \right)} = \frac{\mu_{ref} \mu_0 NI}{l_m}, \text{ kjer je}$$

efektivna relativna permeabilnost določena kot $\frac{\mu_{rm}}{1 + \mu_{rm} \frac{l_{zr}}{l_m}}$. Zapis z efektivno relativno

permeabilnostjo je posebno pogost pri zapisu induktivnosti feromagnetnega jedra z zračno

režo, kjer dobimo induktivnost kot $L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_{ref}\mu_0 N^2 A}{l_m}$. Pogosto je za jedra podan t.i.

faktor induktivnosti A_L , ki je $A_L = \frac{L}{N^2}$, kar popolnoma poenostavi izračun potrebne

induktivnosti, saj jo dobimo kar z množenjem faktorja induktivnosti s kvadratom števila obojev.

RM cores
(Fig. 2, Fig 3, Fig. 4)

	Dimensions			d2	d3	2h1	2h2	2h3	A_L [nH]			Fig
	a	c							15G	45G	35G	
	mm	mm		mm	mm	mm	mm	mm	+30/-20%	+30/-20%	+30/-20%	
RM 4 P	10,4-11,0	9,4-9,8		7,95-8,35	3,7-3,9	10,3-10,5	7,0-7,4	8,75-9,25	1000	1100	1100	2
RM 5 P	14,0-14,6	11,8-12,3		10,2-10,6	4,7-4,9	10,3-10,5	6,3-6,7	8,75-9,25	1800	2000	2000	2

SLIKA: Izsek prospekta podjetja Iskra FERITI (skupina Kolektor), ki kaže primere uporabe feritnih jader, ki jih izdeluje podjetje. Prospekti so na voljo na spletnih straneh podjetja, žal le v angleškem jeziku: www.iskra-feriti.si. Poleg je prikazan primer RM jedra z izmerami in pomembnim podatkom A_L , iz katere določimo potrebno induktivnost z množenjem s kvadratom obojev.

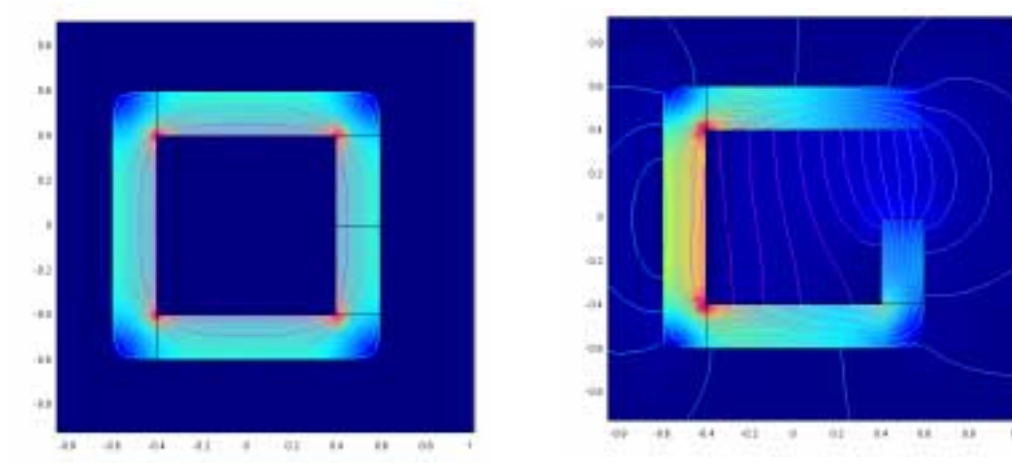
Application survey

APPLICATION	PROPERTIES	MATERIALS	AVAILABLE SHAPES
Common mode chokes	Very high μ , low losses	19G, 22G, 22GN 12G, 32G, 45G	toroids, U, E
Filter inductors	High Q, high temperature & time stability	10G, 16G, 26G	RM, pot
Power inductors	low power losses, high saturation	15G, 25G, 35G 45G, 55G, 75G	toroids, E, ETD, ER, U, RM, RMLPL, PQ, Eplanar
Power transformers	low power losses, high saturation	15G, 25G, 35G 45G, 55G, 75G	E, ETD, EFD, ER, RM, RMLP, pot, PQ, toroids, Eplanar
xDSL transformers	Very high μ , low THD	12G	EP, EPX, RM, ER, pot
Wideband transformers	Very high μ	19G, 22G, 12G, 32G	RM, pot, E, EFD, ETD, EP, toroids
Proximity switches	High Q and high temperature stability	10G, 16G, 19G	pot, custom design shapes
Radio-frequency transformers	low losses, high frequency range	2E, 1F, 2C	toroids, double aperture cores
Inductors in resonant circuit and open filters	low losses, high frequency range	1F, 2C, 10G	rods, tubes, screws, custom design shapes

SLIKA: Aplikacije in primeri jader, ki so predlagani za te aplikacije.

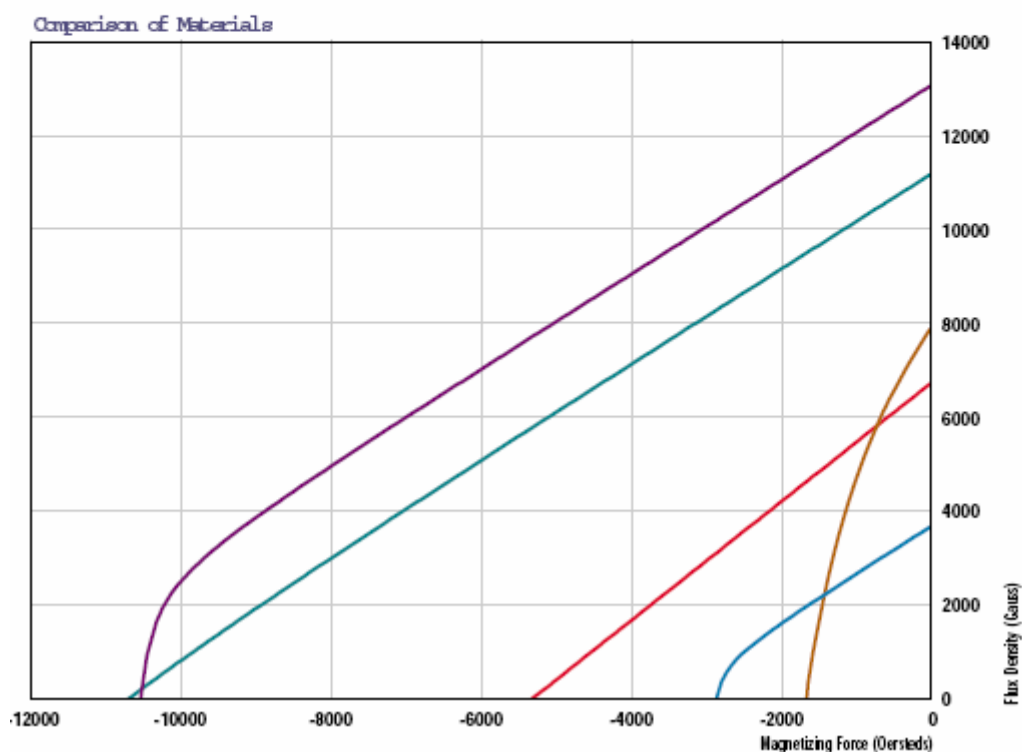
Upoštevanje stresanja fluksa v zračni reži. V dosedanjih primerih smo predpostavili, da je polje homogeno tudi v zračni reži. To je dober približek le v primeru, ko je zračna reža ozka v primerjavi z dolžino preseka jedra. Če to ne velja, je potrebno upoštevati, da se gostotna cevka v zračni reži razširi, oziroma, da je polje stresano v okolici zračne reže. To lahko upoštevamo kot povečano (efektivno) površino preseka zračne reže ali pa kot efektivno podaljšano širino zračne reže. To podaljšanje upoštevamo s t.i. *Carterjevim faktorjem*, ki je odvisen od širine zračne reže in dolžina preseka jedra d : $\delta_c = C \cdot \delta$:

d/δ	3 - 6	10 - 20	30 - 100
C	0,67 – 0,76	0,80 – 0,87	0,90 – 0,96



SLIKA: Prikaz numeričnega izračuna polja v jedru brez in z zračno režo. Numeričen izračun upošteva realno geometrijo jedra in s tem tudi prikaže efekt stresanje polja v zračni reži kot tudi vse druge nehomogenosti, ki so posledica geometrijskih danosti. Ugotovimo lahko, da je polje v jedru precej homogeno, v zračni reži pa se razširi po okolici. Če primerjamo še velikosti polja pri enakem vzburjanju v obeh primerih, ugotovimo precejšnje zmanjšanje polja v primeru uporabe zračne reže.

Material	Maximum Operating Temperature	Maximum Magnetic Energy	Relative Cost	Resistance to Demagnetization
NdFeB	150°C	48 MGOe	High	High
SmCo	300°C	32 MGOe	Very High	Very High
NeoForm™ Bonded NdFeB	150°C	10 MGOe	High	High
Alnico	550°C	7.5 MGOe	Moderate	Low
Ceramic Ferrite	300°C	4 MGOe	Very Low	Moderate



SLIKA: Primer grafa iz prospekta podjetja Dexter, ki prikazuje demagnetizacijske krivulje najpogostejše uporabljenih materialov za trajne magnete. Opazimo lahko tudi vztrajanje proizvajalcev pri starih (nedovoljenih) enotah za gostoto magnetnega pretoka in magnetno poljsko jakost, kar pa običajno podajo v dodatni preglednici, glej naslednjo sliko. Pogosto odločitev o uporabi določenega materiala za trajni magnet ne temelji na kakovosti magneta pač pa na ceni: izberemo tak material, ki še zadovoljuje naše potrebe in je cenen.

	CGS unit	SI unit	Conversion Factors
Permeability of Free Space	Unity	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ WbA}^{-1}\text{m}^{-1}$	
Induction in Free Space (Field)	B gauss (G)	B_0 Tesla (T)	1G = 10^{-4} T
Magnetic Field Strength	H Oersted (Oe)	H (Am^{-1})	1Oe = 79.58 Am^{-1}
Induction in Free Space	$B = H$	$B_0 = \mu_0 H$	1G = 10^{-4} T
Induction in Medium	$B = H + 4\pi M$	$B = B_0 + \mu_0 M = \mu_0 (H + M)$	1G = 10^{-4} T
Magnetization per Unit Volume	$M (\text{erg Oe}^{-1} \text{cm}^3) (\text{emu cm}^3)$	$M (\text{kJT}^{-1} \text{m}^3)$	1emu $\text{cm}^3 = 1 \text{ kJT}^{-1} \text{m}^3$
Maximum Energy Product	$(BH)_{\max} (\text{MGOe})$	$(BH)_{\max} (\text{kJm}^{-3})$	1MGOe = 7.958 kJm^{-3}

SLIKA: Preglednica, ki se uporablja za pretvorbo med starimi (žal še vedno v praksi uporabljanimi) CGS enotami in mednarodno sprejetim sistemom SI enot (iz kataloga podjetja Dexter: www.dextermag.com).

Primeri kolokvijev in izpitov:

Magnetizacija, trajni magnet:

kolokvij, 9. maj 2005

izpit, 20. junij 2006

izpit, 19. januar 2006

izpit, 8. aprila 2002

izpit, 24. junij 2004

Feromagnetik podan z magnetilno krivuljo:

kolokvij, 13. april 2006

kolokvij, 3. maj 2004

kolokvij, 15. april 2004

kolokvij, 07. maja 2002

Feromagnetik z ali brez zračne reže, konstantna permeabilnost:

kolokvij, 4. maj 2006

izpit 23. junija 2006

MAGNETNA VEZJA (10)

Ponovitev:

Spoznali smo obliko Amperovega zakona izraženo z jakostjo magnetnega polja H : $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$.

Ugotovili smo, da je ta oblika zapisa posebno primerna za obravnavo polja v snoveh z izraženimi magnetnimi lastnostmi (npr. feromagnetiki). Zveza med gostoto magnetnega pretoka in jakostjo polja pa je $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_r \mu_0 H = \mu \vec{H}$. Gostota magnetnega pretoka se ob uporabi

feromagnetika izrazito poveča, kar s pridom izkoristimo v vrsto namenov. Tuljave tako pogosto navijemo okoli feromagnetnih jeder. Za analizo takih sestavov nam služi ravno Amperov zakon, ki pa ga moramo nekoliko poenostaviti. Namesto v integralni obliki ga zapišemo kot vsoto posameznih padcev magnetne napetosti. Tako dobimo obliko

$$\sum_{i=1}^N H_i \cdot l_i = \Theta. \quad (10.1)$$

Desna stran enačbe predstavlja tokovno vzbujanje (lahko je več takih vzbujanj), leva stran enačbe pa so padci magnetne napetosti na posameznih odsekih po zaključeni magnetni poti. Pri tem smo morali narediti določeno poenostavitev in sicer, da je po preseku jedra polje homogeno in da računamo razdalje l_i po srednji dolžini gostotnice (po sredini jedra).

Poleg zgornjega zapisa, ki spominja na Kirchofov zakon o vsoti napetosti po zaključeni poti, potrebujemo še povezavo med gostotami pretoka v sosednjih odsekih poti. To zvezo dobimo iz zakona o brezizvornosti magnetnega polja (), ki ga zopet zapišemo v diskretni obliki

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i = 0, \quad (10.2)$$

kjer je N število odcepov.

Magnetna upornost. Že doslej smo govorili o magnetni napetosti, o viru magnetne napetosti Θ in o padcih magnetne napetosti $H l$. Ali lahko govorimo tudi o »magnetnem toku« in »magnetni

upornosti«? Lahko, le enačbo $\sum_{i=1}^N H_i \cdot l_i = \Theta$ bomo v ta namen nekoliko preoblikovali. Ker smo predpostavili homogenost polja v preseku jedra, lahko za fluks pišemo

$$\Phi = B \cdot A = \mu H \cdot A \quad (10.3)$$

in nadomestimo H s fluksom:

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i \cdot \frac{l_i}{\mu_i A_i} = \Theta \quad (10.4)$$

V enačbi (10.4) prepoznamo podobnost električni upornosti ravnega vodnika, ki smo jo zapisali v obliki $R_e = \frac{l}{\gamma A}$, kjer je γ specifična električna prevodnost snovi. Očitno lahko analogno izrazimo magnetno upornost kot

$$R_m = \frac{l}{\mu A}, \quad (10.5)$$

kjer je μ permeabilnost, lahko bi rekli tudi specifična magnetna prevodnost. Večja kot je permeabilnost, bolj je material "magnetno prevoden". Enota magnetne upornosti seveda ni Ohm,

pač pa $\left[\frac{\text{m}}{\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \text{m}^2} \right] = \left[\frac{\text{A}}{\text{Vs}} \right] = \left[\frac{1}{\Omega \text{s}} \right].$

Enačba (10.4) bo torej z upoštevanjem magnetne upornosti enaka

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i \cdot R_{m_i} = \Theta. \quad (10.6)$$

Primerjalno z Ohmovim zakonom in Kirchofovimi zakoni za električno vezje, lahko tvorimo t.i. magnetna vezja, kjer fluks zamenja vlogo toka, vlogo virov prevzame magnetna napetost z amperskimi ovoji, namesto električne pa nastopa magnetna upornost. Tako lahko obravnavamo poljubno magnetno vezje, kjer pa je potrebno upoštevati, da mora biti relativna permeabilnost konstantna. Omejeni smo torej na tiste primere, kjer je magnetilna krivulja podana v obliki premice.

Primer 3: Določimo polje v jedru magneta iz naloge 2 še z uporabo magnetnega upora.

Izračun: Ker je fluks skozi jedro in zračno režo le en, magnetna upora pa dva, pišemo:

$$\Phi \cdot R_m + \Phi \cdot R_\delta = NI$$

$$\Phi \cdot (R_m + R_\delta) = NI$$

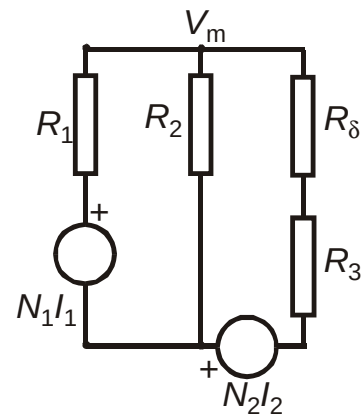
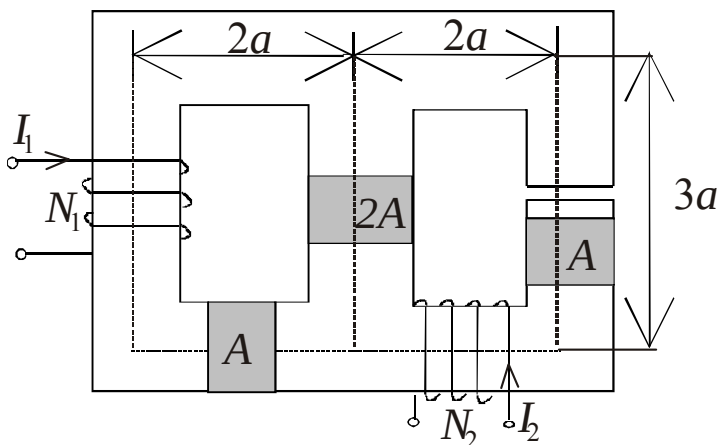
$$\Phi = \frac{NI}{R_m + R_\delta} = \frac{NI}{\frac{l_m}{\mu_{rm}\mu_0 A} + \frac{l_\delta}{\mu_0 A}} = \frac{\mu_0 NIA}{\frac{l_m}{\mu_{rm}} + l_\delta}$$

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l_m}{\mu_{rm}} + l_\delta}$$

, enako kot pri drugem primeru.

Za analizo magnetnih vezij lahko uporabimo vse metode za analizo električnih vezij, ki smo jih spoznali pri predmetu Osnove elektrotehnike I, kot npr. zanka metoda, metoda superpozicije, metoda spojiščnih potencialov pa tudi Theveninov in Nortonov teorem.

Primer 4: Določite fluks v zračni reži dolžine 1 mm, če so $I_1 = 1$ A, $N_1 = 100$, $I_2 = 0,5$ A, $N_2 = 400$, $a = 2$ cm, $A = 1$ cm², $\mu_{rz} = 100$?



Izračun: Najprej narišemo magnetno vezje z magnetnimi upornostmi in viri magnetne napetosti. V našem primeru imamo tri stebre, kar v vezju predstavimo s tremi vejami vezja. Leva in srednja veja imata eno po magnetno upornost, v desni veji imamo dve magnetni upornosti, eno zaradi magnetne upornosti feromagnetika, drugo pa zaradi magnetne upornosti zračne reže. Vire moramo pravilno označiti. Potrebno je preveriti, kako je jedro navito in v katero smer teče tok. Smer toka, ki jo na viru označuje znak “+” mora ustrezati smeri fluksa v jedru, ki ga poganja vir.

Način reševanja je lahko poljuben. V konkretnem primeru bomo uporabili metodo spojiščnih potencialov, saj je v tem primeru potrebno zapisati le eno enačbo. (Ponovi metode reševanja vezij).

Vsota vseh fluksov v zgornje spojišče mora biti enak nič: $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$. Flukse izrazimo z

magnetnim potencialom (spodnje spojišče ozemljimo, potencial zgornjega označimo z V_m , napetost med spojiščema je torej V_m):

$$\frac{V_m - N_1 I_1}{R_1} + \frac{V_m}{R_2} + \frac{V_m + N_2 I_2}{R_\delta + R_3} = 0$$

Magnetne upornosti so:

$$R_1 = \frac{7a}{100\mu_0 A}$$

$$R_2 = \frac{3a}{100\mu_0 2A}$$

$$R_3 = \frac{7a - \delta}{100\mu_0 A}$$

$$R_\delta = \frac{\delta}{\mu_0 A}$$

Po ustavitvi v zgornjo enačbo in preurejanju dobimo

$$\frac{V_m - N_1 I_1}{7a} + \frac{V_m}{3a/2} + \frac{V_m + N_2 I_2}{7a + 100\delta} = 0.$$

Sedaj vstavimo vrednosti in dobimo $\frac{V_m - 100A}{14\text{cm}} + \frac{V_m}{3\text{cm}} + \frac{V_m + 200A}{24\text{cm}} = 0$. Rešitev je $V_m = -1,24A$.

Očitno se vpliv virov med sabo odšteva, rezultat je ta, da fluks v desnem stebru povzroča skoraj izključno magnetna napetost navitja na tem stebru. Fluks skozi zračno režo bo

$$\Phi_3 = \frac{V_m + N_2 I_2}{R_\delta + R_3} = 10,5 \mu\text{Wb}.$$

Naloge:

Magnetna vezja:

izpit, 23. januar 2007

1. kolokvij, 17.4.2002

izpit, 14. junij 2006

Izpit, 10. marec 2006

INDUCIRANA NAPETOST (11)

V tem poglavju bomo nadgradili spoznanja o magnetnih pojavih v stacionarnih razmerah (pri konstantnem toku) z analizo razmer pri časovno spremenljivih signalih. Ugotovili bomo, da pri časovno spremenljivih signalih pride do pojavov, ki jih v enosmernih razmerah nismo opazili. Najpomembnejša ugotovitev bo, da pri časovni spremembi fluksa skozi tuljavo na priključkih tuljave zaznamo (izmerimo) napetost, ki jo bomo poimenovali inducirana napetost.

Časovno spreminjajoči fluks v tuljavi povzroči inducirano napetost. Michael Faraday je prvi ugotovil, da tedaj dobimo napetost na sponkah tuljave, ki je enaka časovni spremembi fluksa skozi tuljavo pomnoženem s številom obojev tuljave, matematično torej $N \frac{d\Phi}{dt}$.

Napetosti, ki se ob spremembi časovni fluksa skozi tuljavo pojavi na priključnih sponkah imenujemo **inducirana napetost**. Je takega predznaka, da bi po sklenjeni zanki (kratko sklenjeni tuljavi) pognala tok, katerega fluks bi nasprotoval prvotnemu fluksu skozi zanko. Temu »pravilu«
rečemo tudi **Lentzovo pravilo**, ki ga matematično upoštevamo s predznakom minus:

$$u_i = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (11.1)$$

Pogosto produkt števila obojev in fluksa skozi oboje označimo z novo veličino, ki jo imenujemo **magnetni sklep**:

$$\Psi = N\Phi$$

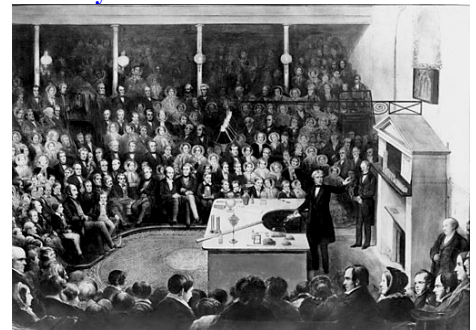
V tem smislu lahko enačbo za inducirano napetost zapišemo v obliki

$$u_i = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (11.2)$$



Michael Faraday (1791-1867): en največjih znanstvenikov in izumiteljev: elektromagnetna indukcija, dinamo, elektroliza, odkril vrsto kemijskih substanc, vpeljal pojme anoda, katoda, elektroda, ion, ...

http://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday



Predavanja Faradaya so bila izredno priljubljena tudi med širšo množico.

SLIKA: Eksperimenti z inducirano napetostjo: a) premikanje trajnega magneta v tuljavi, b) premikanje tuljave pri mirujočem magnetu, c) s spreminjanjem fluksa skozi tuljavo ustvarimo inducirano napetost, ki požene tok skozi žarnico.

SLIKA: Zanka znotraj katere fluks s časom narašča v določeni smeri. V vodniku, ki objema fluks inducira tako električno polje, ki bi v primeru sklenjenega vodnika v njem povzročilo (induciran) tok, ki bi s svojim fluksom nasprotoval osnovnemu.

Inducirana napetost v zanki pri znani spremembi magnetnega pretoka skozi zanko.

Oglejmo si primer, ko se v tuljavi časovno spreminja gostota magnetnega pretoka zaradi zunanje spremembe polja.

Primer: Tuljavica z $N=100$ ovoji površine $A = 2 \text{ cm}^2$ je postavljena pravokotno na smer polja, ki se spreminja harmonično po enačbi $B(t) = B_0 \sin(10^3 \text{ s}^{-1} t)$, kjer je $B_0 = 50 \text{ mT}$. Določimo inducirano napetost na sponkah tuljave.

Izračun: Gre za krajevno homogeno polje, zato je fluks skozi tuljavico enak kar $\Phi(t) = B(t)A = B_0 A \sin(10^3 \text{ s}^{-1} t) = 10 \sin(10^3 \text{ s}^{-1} t) \mu\text{Vs}$. Inducirana napetost je

$$u_i = -N \frac{d\Phi(t)}{dt} = -100 \cdot \frac{d}{dt} (10 \sin(10^3 \text{ s}^{-1} t) \mu\text{Vs}) = -10 \cdot 100 \cdot 10^3 \cos(10^3 \text{ s}^{-1} t) \mu\text{V} = -1 \cos(10^3 \text{ s}^{-1} t) \text{ V}$$

SLIKA: Tuljavica v homogenem časovno spreminjajočem polju.

Ugotovili smo, da se v tuljavi inducira napetost, če se znotraj tuljave časovno spreminja magnetno polje. V izračunanem primeru je bil fluks skozi ovoje tuljave posledica spreminjanja magnetnega polja, ki ni bil posledica toka skozi ovoje tuljave. Ali se na sponkah tuljave pojavi napetost tudi v primeru, da je povzročitelj spremembe fluksa v tuljavi lasten tok v tuljavi? Odgovor je pozitiven.

Inducirana napetosti na tuljavi pri znanem toku skozi ovoje tuljave in padec napetosti na tuljavi.

Pri računanju fluksa skozi tuljavo smo ugotavljali, da je le ta odvisen od toka v ovajih tuljave. V primeru, da ni posredi feromagnetnih materialov velja linearna zveza med magnetnim sklepom in tokom skozi tuljavo $\Psi = N\Phi = LI$, od koder je **lastni induktivnost tuljave**

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I}.$$

Ta povzroči na sponkah tuljave inducirano napetost

$$u_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}.$$

Pri tem pa je potrebno opozoriti na pravilno razumevanje predznaka inducirane napetosti. Ta predznak je uveden zato, da se pravilno interpretira učinek spreminjanja fluksa pri nastanku inducirane napetosti, ki je tak, da se v zanki generira taka notranja (generatorska) napetost, ki z lastnim induciranim tokom nasprotuje spremembam fluksa v zanki. Gledano na tuljavo s stališča bremena (ki ga v smislu koncentriranega elementa shematično predstavimo z nekaj narisanimi ovoji), je padec (bremenske) napetosti ravno nasproten (generatorski) inducirani napetosti

$$u_L = -u_{iL} = L\frac{di}{dt}. \quad (11.3)$$

V prvem primeru opazujemo pojav inducirane napetosti z vidika vira napetosti, v drugem pa z vidika bremena.

SLIKA: Tuljava z induktivnostjo kot koncentriran element. Smer padca (zunanje) napetosti je nasprotna smeri inducirane (notranje) napetosti in je v smeri vzbujačnega toka.

Primer: Tok skozi tuljavo z induktivnostjo $L = 2 \text{ mH}$ se spreminja harmonično, z amplitudo $I_0 = 0,5 \text{ A}$ in periodo $T = 5 \text{ ms}$. Določimo padec napetosti na tuljavi.

Izračun: Najprej moramo tokovni signal zapisati v matematični obliki. Zagotoviti moramo ponovitev signala na vsakih 5 ms, zato tok zapišemo v obliki¹ $i(t) = 0,5 \sin(\omega t) \text{ A} = I_0 \sin(\omega t)$, kjer je frekvenca signala enaka $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5 \text{ ms}} = 200 \text{ s}^{-1} = 200 \text{ Hz}$, **kotna frekvenca** ω pa je $\omega = 2\pi f = 2\pi 200 \text{ Hz} \approx 1,26 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$. Odvajamo tok: $\frac{di}{dt} = I_0 \omega \cos(\omega t)$ in ga pomnožimo z induktivnostjo in dobimo $u_L = L \frac{di}{dt} = L I_0 \omega \cos(\omega t) \approx 1,26 \cos(1,26 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} t) \text{ V}$. Rezultat lahko zapišemo tudi kot $1,26 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$.

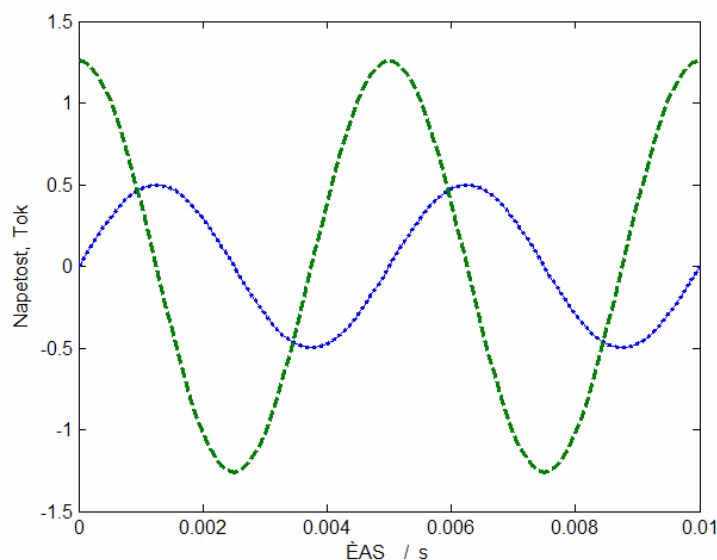
Iz rezultata ugotovimo, da se napetost na tuljavi spreminja z enako frekvenco kot tok, vendar je napetostni signal časovno zamaknjen glede na tokovnega za kot 90° : $\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Če oba signala narišemo v časovnem diagramu, ugotovimo, da doseže napetostni signal maksimalno amplitudo za četrtno periode pred tokovnim signalom. To običajno opišemo kot prehitevanje napetosti na tuljavi za tokom za kot $\pi/2$. Enakovredno lahko rečemo tudi, da tok na tuljavi zaostaja za napetostjo za kot $\pi/2$.

Kako si razložimo ta zamik? Če si zamislimo harmonično spreminjajoč se tok skozi tuljavo, ugotovimo, da bo časovna sprememba toka največja tedaj, ko tok zamenja predznak, tedaj pa bo

¹ Za osnovo bi lahko vzeli tudi kosinusni tokovni signal.

tudi padec napetosti na tuljavi zaradi največje spremembe fluksa največji. Ko bo tok okoli ničle, bo napetost maksimalna, kar opišemo s sinusnim potekom toka in s kosinusnim potekom napetosti.

Kako se spreminja amplituda napetosti glede na frekvenco signala? Ugotovimo, da bo amplituda večja pri višji frekvenci in sicer se linearno večja s frekvenco signala: $u_L = U_m \cos(\omega t)$, kjer je $U_m = LI_o \omega$. To je tudi razumljivo, saj zaradi časovno hitrejšega spreminjanja toka zvečuje tudi največja sprememba toka in s tem napetost.



SLIKA: Napetost na tuljavi (črtkano) prehiteva tok (pikčasto) za četrtno periode signala $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Poglejmo si še primer, ko se fluks v eni tuljavi spreminja kot posledica fluksa v drugi tuljavi.

Inducirana napetost v tuljavi zaradi spremembe fluksa v drugi tuljavi.

Primer: Tuljava dolžine 15 cm premera 3,2 cm ima 30 ovojev na centimeter. V njeno sredino postavimo manjšo tuljavo dolžine 2 cm premera 2,1 cm s 60 ovoji. Tok v večji tuljavi se od časa $t = 0$ s linearno manjša od 1.5 A in doseže -0.5 A v času 25 ms. Nato ostane konstanten. Kolikšna je inducirana napetost v manjši tuljavi? Predpostavimo homogeno polje v večji tuljavi, ki ga izračunamo z aproksimativno formulo.

SLIKA: Sprememba toka v večji tuljavi povzroča inducirano napetost v manjši tuljavi. Inducirana napetost je odvisna od hitrosti spreminjanja toka v večji tuljavi oziroma od spreminjanja hitrosti magnetnega pretoka skozi manjšo tuljavo.

Izračun: Inducirano napetost bomo dobili z uporabo enačbe (11.1), torej moramo izračunati fluks, ki gre skozi manjšo tuljavico v času spremembe toka v večji. Izračun razdelimo na dve fazi. V prvi se tok linearno manjša, v drugi pa ostane konstanten. Označimo z indeksom 1 večjo tuljavo, z 2 pa manjšo tuljavo. Ker gre za linearne spremembe, lahko namesto odvajanja uporabimo difference

$$\text{(rezultat bo enak)} \quad u_{i2} = -N_2 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Big|_2 = -N_2 \frac{\Delta \Phi_{21}}{\Delta t} = -N_2 \left(\frac{\Phi_{končna} - \Phi_{začetna}}{t_{končna} - t_{začetna}} \right). \quad (11.4)$$

Začetni fluks izračunamo iz začetne gostote pretoka v tuljavi, končnega pa iz končnega pretoka.

Polje znotraj tuljave določimo iz poenostavljene formule $B = \frac{\mu Ni}{l}$. Dobimo

$$B_{začetni} = \frac{\mu_0 Ni_{začetni}}{l} = \mu_0 \frac{N}{l} i_{začetni} = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 30 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1} \cdot 1,5 \text{ A} \cong 5,7 \text{ mT}. \text{ Pri izračunu fluksa skozi}$$

tuljavico moramo upoštevati površino manjše tuljavice in ne večje:

$$\Phi_{začetni} = B_{začetni} \cdot A_2 = B_{začetni} \cdot \pi \left(\frac{2,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2} \right)^2 \cong 1,96 \text{ } \mu\text{Wb}. \text{ Na enak način bi dobili z upoštevanjem}$$

toka $-0,5 \text{ A}$ končni pretok $\Phi_{končni} = -0,653 \text{ } \mu\text{Wb}$.

Uporabimo še enačbo (11.4) in z njeno pomočjo določimo inducirano napetost v času od $t = 0 \text{ s}$ do t

$$= 25 \text{ ms: } u_i = -60 \frac{-0,653 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} - 1,96 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}{25 \text{ ms} - 0 \text{ ms}} \cong 6,27 \text{ mV}. \text{ To napetost bi lahko izmerili, če bi}$$

na zunanje sponke tuljave priključili sondo osciloskopa. (Zaradi poenostavitev s homogenostjo polja bi meritev pokazala seveda nekoliko različno vrednost.). Ta napetost je konstantna ves čas spreminjanja toka v veliki tuljavi. V drugi fazi, ko bo tok skozi večjo tuljavo konstanten, v manjši tuljavi ne bo spremembe magnetnega pretoka in s tem bo inducirana napetost enaka 0.

SLIKA: Graf spremembe toka v mali tuljavi, spodaj graf inducirane napetosti v večji tuljavi.

Medsebojna induktivnost. O lastni induktivnosti smo že govorili. Povezana je s fluksom, ki gre skozi tuljavo zaradi toka v lastni tuljavi. Če pa nas zanima fluks v navitju, ki je posledica vzbujaanja v drugem (ne lastnem) navitju, govorimo o **medsebojni induktivnosti**. Definiramo jo kot

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{21}}{I_1}, \quad (11.5)$$

kjer je Φ_{21} fluks skozi drugo tuljavo zaradi toka I_1 skozi prvo tuljavo. Na isti način lahko

definiramo M_{12} kot $M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot \Phi_{12}}{I_2}$. Poglejmo si razmere na sliki.

SLIKA: Medsebojna induktivnost določa zvezo med tokom v drugem navitju in fluksom, ki ga ta tok povzroča v lastnem navitju.

Če imamo opravka z linearnimi magnetnimi materiali (če je μ_r konstanten), sta M_{21} in M_{12} kar enaka, torej $M = M_{21} = M_{12}$.

Inducirana napetost izražena z medsebojno induktivnostjo tuljave.

V prejšnjem razdelku smo obravnavali primer, ko je šel en del fluksa prve tuljave skozi drugo tuljavo in v slednji povzročil inducirano napetost. Izračunali smo fluks skozi drugo tuljavo zaradi spreminjanja toka v prvi tuljavi. Sedaj smo ugotovili, da to zvezo lahko opišemo z medsebojno induktivnostjo, kjer je magnetni sklep v drugi tuljavi zaradi toka v prvi določen z $\Psi_{21} = M_{21}I_1 = MI_1$. Torej lahko inducirano napetost v drugi tuljavi izrazimo kot

$$u_{iM_{21}} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d(MI_1)}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Ponovno lahko ugotovimo, da je predznak le posledica zapisa z upoštevanjem Lentzovega pravila. Če pa upoštevamo, da je zunanja napetost ravno nasprotna notranji (gonilni), bomo zopet dobili

$$u_{M_{21}} = -u_{iM_{21}} = M \frac{di_1}{dt}.$$

Primer: Določimo inducirano napetost v manjši tuljavi iz prejšnjega primera s pomočjo medsebojne induktivnosti.

Za določitev medsebojne induktivnosti moramo poiskati fluks skozi drugo tuljavo ki ga povzroča tok skozi prvo tuljavo. Fluks je

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 A_2 = N_2 \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1} A_2$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l_1} A_2 \cong 78,35 \mu\text{H}$$

kjer smo z indeksom 1 označili veliko tuljavo, z 2 pa manjšo tuljavo. Sprememba toka v času 25 ms

$$\text{bo } -\frac{2\text{ A}}{25\text{ ms}} = -80\text{ A/s, inducirana napetost pa } u_{M_{21}} = M \frac{di_1}{dt} = 78,35\text{ mH} \cdot (-80\text{ A/s}) = 6,3\text{ mV}.$$

Razlika v končnem rezultatu glede na primer 1 je izključno posledica različnega zaokroževanja v prvem in drugem primeru. Natančnejši rezultat je slednji. Preverite še sami.

Realna tuljava – ohmska in induktivna upornost.

Nobena tuljava ni idealna (razen, če jo ohladimo blizu absolutne ničle, ko pade ohmska upornost ovojev na nič) pač pa ima tudi neko ohmsko upornost. Ta je v osnovi odvisna od specifične prevodnosti materiala (pri navitjih običajno kar baker), preseka in dolžine: $R = \frac{l}{\gamma A}$. V realni tuljavi

tako lahko ločimo dva padca napetosti: zaradi padca napetosti na ohmski upornosti (Ohmov zakon) in padca napetosti na t.i. induktivni upornosti². Matematično bi za napetost na tuljavi zapisali

$$u = u_R + u_L = iR + L \frac{di}{dt}. \quad (11.6)$$

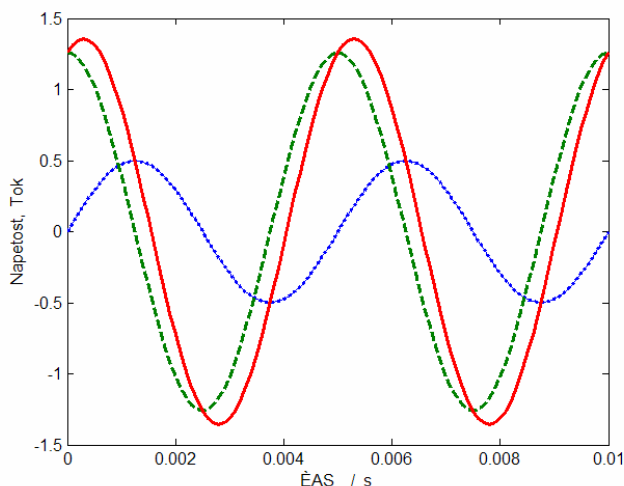
² V resnici dveh padcev napetosti na tuljavi ne moremo »fizično« ločiti, saj nastopata hkrati in na zunanjih sponkah opazujemo skupen učinek. Lahko pa ju ločeno obravnavamo v matematičnem smislu.

Primer: Vzemimo, da upoštevamo poleg induktivnosti tuljave iz drugega primera (Tok skozi tuljavo z induktivnostjo $L = 2 \text{ mH}$ se spreminja harmonično, z amplitudo $I_0 = 0,5 \text{ A}$ in periodo $T = 5 \text{ ms}$.) še njeno upornost, ki naj bo 1Ω . Kolikšna bo sedaj napetost na tuljavi?

Izračun: V skladu z enačbo (11.6) bo napetost na tuljavi enaka

$$u = RI_0 \sin(\omega t) + L \frac{d}{dt}(I_0 \sin(\omega t)) = RI_0 \sin(\omega t) + LI_0 \omega \cos(\omega t).$$

Amplituda padca napetosti zaradi induktivnosti bo $1,26 \text{ V}$ (kot smo že izračunali), zaradi ohmske upornosti pa $0,5 \text{ A} \cdot 1 \Omega = 0,5 \text{ V}$. Ali bo skupna napetost $1,26 \text{ V} + 0,5 \text{ V}$? Ne. Napetost na tuljavi je vsota dveh napetosti, ki pa sta časovno zamaknjeni za četrtno periode signala. Zato amplitude ne moremo preprosto sešteti. Lahko pa ugotovimo, da je dobljeni napetosti signal zopet sinusne oblike in da je amplituda in faza signala v skladu z matematično zvezo $a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi)$. A je amplituda signala in je enaka $A = \sqrt{a^2 + b^2} = 1,36 \text{ V}$, φ pa je **fazni kot** in označuje prehitevanje ali zaostajanje signala za prvotnim signalom. Določimo ga kot $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = 68,36^\circ$. V našem primeru bo rezultat $u \cong 1,36 \cdot \sin(1,26 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}t + 68,36^\circ) \text{ V}$. Predznak plus predstavlja prehitevanje napetostnega signala pred tokovnim, ki pa v primeru realne tuljave ni 90° , pač pa nek manjši kot, pač v skladu z velikostjo padcev napetosti na idealni tuljavi in na ohmski upornosti tuljave.



SLIKA: Tokovno vzbujanje (pikčasto). Napetost na induktivnosti tuljave (črtkano), napetost na ohmski upornosti tuljave (pikčasto, po obliki in vrednosti enako tokovnemu signalu) in skupna napetost na tuljavi (polna črta). Napetost na realni tuljavi prehiteva tok tuljave za kot $90^\circ > \varphi > 0^\circ$.

Induktivna upornost - reaktanca. Kot smo ugotovili, je amplituda padca napetosti na tuljavi pri vzbujanju s harmoničnim signalom sorazmerna produktu amplitude toka in produkta ωL . Slednji predstavlja upornost tuljave pri izmeničnih signalih in jo imenujemo induktivna upornost ali **reaktanca** in uporabimo simbol $X_L = \omega L$. Ponovno lahko ugotovimo, da se induktivna upornost linearno veča z večanjem frekvence vzbujalnega signala.

SLIKA: Večanje induktivne upornosti – reaktance s frekvenco vzbujanja.

Kazalci. Pogosto si pri izračunu zvez med tokom in napetostjo olajšamo delo z grafičnim prikazom le teh s t.i. kazalci. Vsak kazalec predstavlja eno od veličin, ki se vrti okoli izhodišča glede na kotno hitrost pri čemer upoštevamo še fazo signala. Zveza med tokom in napetostjo na ohmski upornosti tuljave bi bila preprosta, saj se »vrtita« skladno, v isti legi. Rečemo tudi, da sta tok in napetost *v fazi*. Kazalec napetosti idealne tuljave pa je premaknjen glede na tokovnega za kot 90° . Skupen padec napetosti bo vsota obeh kazalcev, ki ju grafično seštejemo. Dobimo amplitudo napetosti kot vsoto kvadratov in določimo še zamik med kazalcema napetosti in toka – *fazni kot*. Tangens tega kota je enak razmerju velikosti kazalcev ali pa kar razmerju induktivne in ohmske upornosti.³

³ Tak način obravnave je bil običajen v srednješolskem izobraževanju. V nadaljevanju bomo spoznali, da je mnogo bolj učinkovit, pa tudi korekten, zapis kazalcev v t.i. kompleksni ravnini.

SLIKA: Prikaz padcev napetosti na ohmskem in induktivnem delu tuljave s pomočjo kazalcev.

Faktor sklopa. Če je magnetna povezava med dvema tuljavama (1 in 2) linearna, ima smisel določiti faktor sklopa. Če sta magnetni sklep skozi lastno tuljavo in sosednjo določena z linearno zvezo

$$\begin{aligned}\Psi_{21} &= k\Psi_{11} \\ \Psi_{12} &= k\Psi_{22}\end{aligned},$$

kjer sta Ψ_{11} in Ψ_{22} fluksa skozi lastno tuljavo pomnožena s številom ovojev lastne tuljave. Velja

$$M_{21} \cdot M_{12} = M^2 = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \cdot \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{k \cdot \Psi_{11}}{I_1} \cdot \frac{k \cdot \Psi_{22}}{I_2} = k^2 L_1 L_2$$

in iz tega

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad (11.7)$$

ali **faktor sklopa**

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Označitev medsebojne induktivnosti v smislu koncentriranega elementa. Kako označimo medsebojno induktivnost kot koncentriran element? V osnovi enako kot dve navadni tuljavi z lastno induktivnostjo, ki pa ju povežemo z linijo in puščicama, s čimer prikažemo, da je med njima magnetni sklep. Pri tem pa je zopet potrebno paziti na predznak padca napetosti zaradi medsebojne induktivnosti, saj je predznak odvisen od lege posameznih tuljav. Predznak je tako lahko pozitiven ali pa negativen, kar mora biti v sami električni shemi razvidno. To označujemo s pikami na začetku ali konce vsake tuljave (glede na smer toka) odvisno od tega, če se magnetna pretoka tuljav med seboj podpirata ali ne. Dogovor je tak, da postavimo piki na začetek obeh tuljav (ali pa obe na konec) glede na smer toka, če se magnetni pretok druge tuljave skozi prvo tuljavo podpira z lastnim pretokom skozi prvo tuljavo.

SLIKA: Dve tuljavi z medsebojno induktivnostjo. Podpiranje fluksov označimo s piko ta tisti strani tuljave, kjer vstopa ali izstopa tok.

Splošen zapis zveze med dvema tuljavama z diferencialno enačbo.

Če imamo dve sklopljeni navitji, potem tok skozi eno navitje povzroča padec napetosti v lastnem, pa tudi v drugem navitju. Slednji je proporcionalen spremembi toka in medsebojni induktivnosti. Vpliv pa je v obe smeri. Torej, če spreminjajoči fluks v drugi tuljavi povzroča tok v drugem navitju, pride do vzajemnega učinka. Napetost na prvi tuljavi je

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt},$$

na drugi pa

$$u_2 = R_2 \cdot i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

Dobimo sistem dveh (linearnih) diferencialnih enačb, ki ga je potrebno reševati s primerno metodo. Ugotovili bomo, da nam za obravnavo izmeničnih signalov lahko analizo bistveno olajša uporaba *kompleksnega računa*.

SLIKA: Nariši vezje s koncentriranimi elementi in povezavo med tuljavama z medsebojno induktivnostjo.

Inducirana napetost - drugič

Ugotovili smo že, da je inducirana napetost v zanki določena s časovno spremembo fluksa skozi zanko, kar smo v matematični obliki zapisali kot

$$u_i = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (11.8)$$

kjer je predznak minus posledica upoštevanja Lentzovega pravila, da je predznak inducirane napetosti v zanki tak, da induciran tok v zanki povzroča fluks, ki nasprotuje spremembi fluksa skozi zanko.

Ugotovili smo tudi, da gre pri inducirani napetosti za notranjo, generatorsko napetost, ki je porazdeljena po zanki. Lahko bi v osnovi govorili tudi o induciranju električne poljske jakosti, ki v zanki požene inducirani tok. Če se spomnimo definicije električne napetosti kot integrala električne poljske jakosti, lahko tudi sedaj pogledamo, kaj dobimo z integracijo inducirane električne poljske jakosti po poti zanke. Zanima nas torej $\int_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$. V elektrostatiki smo ugotovili, da je ta integral po zaključeni poti enak nič (dobimo kot razliko dveh elektrostatičnih potencialov v isti točki), iz česar je tudi sledila definicija električne poljske jakosti kot gradienta potenciala. Pri izmeničnih signalih ta integral očitno ne bo enak nič, pač pa bo enak inducirani napetosti

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = u_i \quad (11.9)$$

Celotna električna poljska jakost je vsota elektrostatične in inducirane jakosti $\vec{E} = \vec{E}_{es} + \vec{E}_i$, kar pa enačbo (11.9) spremeni le v toliko, da velja še bolj splošno

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = u_i. \quad (11.10)$$

Če upoštevamo v enačbi (11.10) še enačbo (11.8) in to, da lahko fluks zapišemo kot integral Bja po preseku zanke $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$, dobimo splošen zapis

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (11.11)$$

To je pomembna enačba, ki jo v elektrotehniki poznamo kot **2. Maxwellova enačba**. V osnovi gre za Faradayevo enačbo, ki pa jo je Maxwell pravilno uvrstil v sistem osnovnih enačb za opis elektromagnetnega polja.

Dva tipa inducirane napetosti: transformatorska in gibalna.

V osnovi lahko ločimo dva različna tipa induciranja napetosti: v prvem primeru, ki smo ga že spoznali, se inducirana napetost v zanki pojavi kot posledica časovne spremembe fluksa v zanki. Tej napetosti pogosto rečemo *transformatorska inducirana napetost*. Drugi tip induciranja pa nastopi kot posledica gibanja prevodnika v časovno konstantnem ali spremenljivem magnetnem polju. Tej inducirani napetosti rečemo tudi *gibalna ali rezalna inducirana napetost*.

Gibalna (rezalna) inducirana napetost.

Poglejmo si primer prevodne palice, ki se premika v prečnem polju gostote B . V prevodniku je zelo veliko prostih nosilcev naboja (elektronov) na katere deluje magnetna sila $\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B}$. V polju bo na naboje delovala magnetna sila, oziroma (inducirana) električna poljska jakost $E_{m,ind}$, ki bo

$$\vec{E}_{m,ind} = \frac{\vec{F}}{Q} = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (11.12)$$

Integral jakosti polja vzdolž palice pa da napetost – gibalno inducirano napetost:

$$u_i = \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (11.13)$$

Tej napetosti rečemo tudi rezalna napetost, saj nastane tedaj, ko prevodnik “reže” magnetno polje

Primer: Prevodna palica dolžine $l = 5$ cm je postavljena vzdolž Y osi in se giblje s hitrostjo $\vec{v} = \vec{e}_x 2$ m/s v homogenem polju $\vec{B} = \vec{e}_z 5$ mT. Določite inducirano napetost med koncema palice.

Izračun: $\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{e}_y vB = -\vec{e}_y 10^{-2} \text{ T} \cdot \text{m/s}$. $u_i = \int_0^{l=5 \text{ cm}} (-\vec{e}_y vB) \cdot \vec{e}_y dy = -vBl = -5 \cdot 10^{-4} \text{ V} = -0,5 \text{ mV}$.

Dodatno: Hitro lahko pokažemo, da do enakega rezultata pridemo tudi iz enačbe za časovno spremembo fluksa skozi zanko, če si pač zamislimo, da je palica del stranice zanke, ki se večja v smeri X osi. Ker se s časom povečuje površina zanke, se večja tudi fluks skozi zanko. Dobimo $\Phi(t) = B \cdot A(t) = B \cdot lx = B \cdot lvt$, inducirana napetost v zanki (med koncema potujoče palice) pa je

$$u_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv = -0,5 \text{ mV}$$

SLIKA: a) premikanje vodnika v magnetnem polju. Na koncih premikajoče se prevodne palice v prečnem magnetnem polju se pojavi (inducira) napetost. b) Časovno večanje površine zanke zaradi premikanja stranice zanke povzroči povečanje fluksa in posledično inducirno napetost.

Skupna transformatorska in gibalna inducirana napetost. Kakšna pa je zveza med tem zapisom inducirane napetosti in tistim s časovno spremenljivim fluksom? Na tem primeru lahko pokažemo, da bi z uporabo osnovnega zapisa dobili enak rezultat. Le zamisliti bi si morali virtualno zanko, katere fluks se večja ali zmanjšuje s časom.

Z drugačnim zapisom enačbe (11.11) lahko upoštevamo tako inducirano napetost, ki je posledica časovne spremembe gostote pretoka v mirujoči zanki in inducirano napetost, ki je posledica gibanja v časovno konstantnem polju:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{A} + \oint_L \vec{v} \times \vec{B} \quad (11.14)$$

Prvi člen imenujemo transformatorska, drugega pa gibalna ali rezalna inducirana napetost. Odvisno od primer moramo upoštevati prvo, drugo ali pa kar obe hkrati.

Faradayev homopolarni generator.

Je naprava, ki proizvaja enosmerno napetost pri vrtenju prevodnega diska v magnetnem polju. Prvi jo je opisal že leta 1831 Michael Faraday. Deluje tudi v obratnem režimu, kot motor in se smatra kot prvi enosmerni električni motor.

SLIKA: Vrteči prevodni disk v prečnem magnetnem polju. Med osjo in obodom priključimo kontaktorje in na sponkah se pojavi napetost – inducirana napetost.

Izračun generatorske (inducirane) napatosti: med kontaktoma si zamislimo prevodno progo. Na naboje v disku, ki se vrtijo s hitrostjo $v = \omega r$ deluje magnetna sila $\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B}$, ki premakne (pozitivne) naboje v smeri vektorskega produkta. Pojavi se torej inducirana električna poljska

jakosti $\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$, ki je v smeri radija od osi proti zunanjemu kontaktu. Med kontaktoma se

inducira napetost
$$u_i = \int_0^R \vec{E}_i d\vec{l} = \int_0^R \omega r B dr = \omega \frac{R^2}{2} B.$$

Primer: Prevodni disk polmera $R = 10$ cm se vrti s hitrostjo 1000 obr/min v prečnem homogenem magnetnem polju 200 mT. Določimo inducirano napetost med osjo in obodom diska.

Izračun:
$$u_i = \int_0^R \vec{E}_i d\vec{l} = \int_0^R \omega r B dr = \omega \frac{R^2}{2} B = 2\pi \frac{1000}{60 \text{ s}} \frac{(0,1 \text{ m})^2}{2} 0,2 \text{ T} = 104,8 \text{ mV}.$$

Napetost ni velika, je pa zato lahko zelo velik tok, ki steče v zanki, saj je ohmska upornost izredno majhna. Zato dejansko lahko pričakujemo izredno velike toke. Problem se pojavi v kontaktih, kjer se pojavi pri zelo velikih tokih

SLIKA: Homopolarni generator.

Več: Ključne besede na internetu: homopolar, generator, motor, Faraday

Generator izmenične napetosti z vrtenjem tuljave v magnetnem polju.

Tuljavo postavimo v enosmerno homogeno magnetno polje in jo vrtimo s kotno hitrostjo ω . Pojavi inducirane napetosti v zanki lahko razložimo na oba načina: kot posledico časovne spremembe fluksa skozi zanko (transformatorska napetost) ali pa kot posledico sile na gibajoče naboje (rezalna napetost). V prvem primeru opazujemo časovno spreminjanje fluksa skozi zanko, ki bo enako $\Phi = B \cdot A(t) = B \cdot b \cdot a \cos(\omega t)$, inducirana napetost pa bo

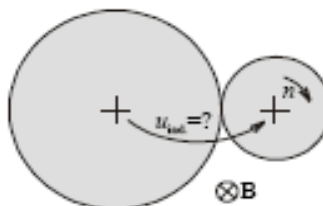
$$u_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -Nab \frac{d\cos(\omega t)}{dt} = Nab\omega \sin(\omega t) = U_m \sin(\omega t).$$

Amplituda inducirane napetosti je odvisna od površine zanke (ne od oblike, ki je lahko tudi trikotna), velikosti magnetnega polja in kotne frekvence. Izhodna (inducirana) napetost je sinusne oblike.

SLIKA: a) Vrtenje pravokotne tuljave v homogenem magnetnem polju. b) Izhodna napetost je sinusne oblike.

Primer 3. Vrtenje zanke v magnetnem polju: izpit, 5. septembra 2002

Desni kolut ženemo z n obrati na minuto, levi pa se brez drsenja vrti ob njem v obratni smeri. Polmer desnega je $a/2$ polmer levega pa a . Izrazite inducirano napetost med osema kolutov, če se vrtita v homogenem magnetnem polju gostote B , ki vpada pravokotno nanju!



3. Inducirano napetost u_{ind} med osema kolutov določimo kot vsoto inducirane napetosti u_{ind1} med osjo in obodom levega koluta ter napetosti u_{ind2} med obodom in osjo desnega koluta:

$$u_{ind} = u_{ind1} + u_{ind2} = -\pi a^2 B f_1 - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 B f_2, \text{ kjer sta } f_1 = \frac{n/2}{60} \text{ in } f_2 = \frac{n}{60} \text{ frekvenci vrtenja levega ter desnega koluta (zaradi dvakrat večjega obsega je frekvenca levega dvakrat manjša od frekvence desnega). Inducirana napetost med osema bo torej: } u_{ind} = -\pi a^2 B \frac{n/2}{60} - \pi \frac{a^2}{4} B \frac{n}{60} =$$

$$= -\frac{1}{80} \pi a^2 B n.$$

MALO ZA ZABAVO MALO ZARES:

Izdelajte in raziščite delovanje homopolarnega motorja sestavljenega iz baterije, vijaka, žičke in trajnega magneta., <http://www.evilmadscientist.com/article.php/HomopolarMotor>

**Primeri kolokvijev in izpitov:**

kolokvij, 3. maj 2004
2. kolokvij, 11. 6. 2003
izpit, 16. april 2002
izpit, 8. april 2002
izpit, 4. 12. 2001
Izpit, 03. 09. 2003
izpit, 5. septembra 2002

S pomočjo induktivnosti:

Izpit, 25. 08. 2004
Izpit, 21. 06. 2004