# 9. Potencial in napetost


**Vsebina poglavja: Električni potencial - definicija, potencial v okolici točkastega naboja, potencial sistema točkastih nabojev, potencial v okolici zvezno porazdeljenih nabojev, ekvipotencialne ploskve, električna napetost, Kirchoffov zakon.**

**Električni potencial.** Ugotovili smo že, da je električna potencialna energija naboja $Q$ na mestu $T$ enaka delu pri prenosu tega naboja od točke $T$ v neskončnost oziroma do mesta, kjer je energija enaka nič:

$$W(T) = Q\int_T^{\infty} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = Q\int_T^{T(V=0)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\ .$$

**Normirano potencialno energijo imenujemo električni potencial**

$$\boxed{V(T) = \frac{W(T)}{Q} = \int_T^{T(V=0)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

Enota za potencial je J/C = V.

**Številčno je torej električni potencial enak delu polja električnih sil za premik enote naboja (1 C) od točke *T* do neskončnosti.**

Ali obratno: Če poznamo potencial v določeni točki, bo energija potrebna za prenos naboja v polju električnih sil iz neskončnosti do te točke enaka produktu naboja in potenciala: $W(T) = QV(T)$ ali tudi, če se na mestu $T$ nahaja naboj $Q$ (ali pa ga na to mesto postavimo) in ga sila polja premakne do mesta, kjer je polje enako nič, pridobi energijo $W(T) = QV(T)$ .

SLIKA: Potencial kot delo za prenos naboja iz točke *T* v neskončnost.

**Potencial v okolici točkastega naboja *Q*.**
Z upoštevanjem definicije za potencial kot normirane potencialne energije, zapišemo (na določeno oddaljenost $r$ od naboja $Q$ postavimo testni naboj $Q_t$ in določimo delo, pri prenosu tega naboja od $r$ do neskončnosti):

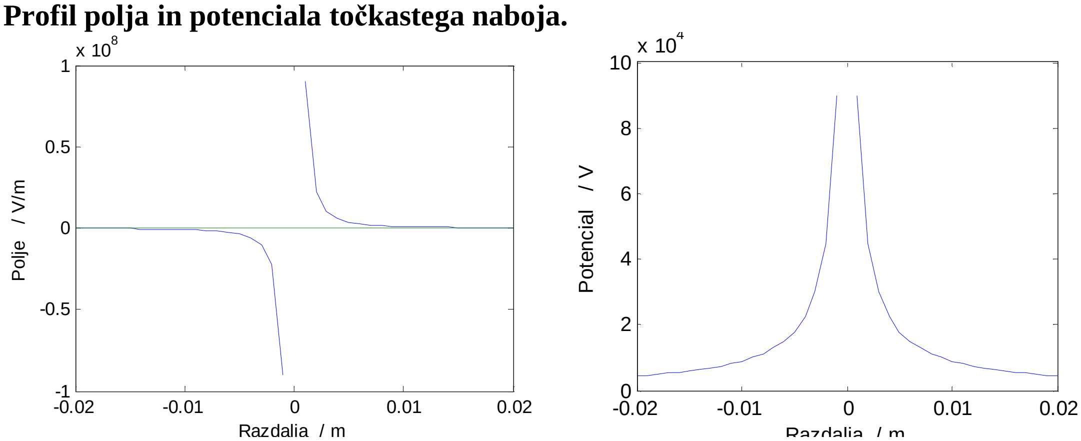
$$V(r) = \frac{W(r)}{Q_t} = \frac{1}{Q_t}\int_r^{\infty} Q_t \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

**SLIKA: Potencial v okolici točkastega naboja.**

Ponovimo ta pomemben rezultat: **potencial točkastega naboja se z oddaljenostjo manjša z 1/*r* in je enak**

$$\boxed{V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

**Profil polja in potenciala točkastega naboja.**




**SLIKA: Porazdelitev polja (levo) in potenciala (desno) v okolici točkastega naboja. Polje upada 1/r$^2$, potencial pa z 1/r.**

```
% IZRIS POLJA IN POTENCIALA TOČKASTEGA NABOJA Z MATLABOM
Q=1e-8;
e0=8.854e-12;
r=-2e-2:1e-3:2e-2;

V=Q./(4*pi*e0.*abs(r));
E=sign(r)*Q./(4*pi*e0.*r.^2); % funkcija sign() poskrbi za pravilen predznak polja
plot(r,V); xlabel('Razdalja  / m'); ylabel('Potencial  / V');
figure;
zero=zeros(length(r),1); % vektor ničel potrebujemo za izris linije ničle polja
plot(r,E,r,zero); xlabel('Razdalja  / m'); ylabel('Polje  / V/m');
```

**Primer**: Določimo potencial v okolici točkastega naboja $Q$ = 10 nC pri $r$ = 1 cm.

Izračun: Velja $V(r=1\,\mathrm{cm})=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}=9\cdot10^9\dfrac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s}}\dfrac{10\cdot10^{-9}\,\mathrm{C}}{10^{-2}\,\mathrm{m}}=\underline{\underline{9\,\mathrm{kV}}}$.

(To tudi pomeni, da bi bila energija potrebna za premik naboja 1 C iz neskončnosti do razdalje 1 cm od naboja 10 nC enaka 9 kV· 1 As = 9 kJ, energija za prenos naboja 2 nC pa $W = 2\text{ nC}\cdot 9\text{ kV} = 18\ \mu\text{J}$ .)

**Potencial sistema točkastih nabojev.**

Ugotovili smo, da je potencial v okolici enega točkastega naboja enak $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, kjer je $r$ razdalja od točke, kjer iščemo potencial, do točke, kjer se nahaja naboj $Q$. Ker velja superpozicija polja, lahko tudi potencial določimo kot superpozicijo posameznih delnih prispevkov normirane energije. Za sistem točkastih nabojev bo torej potencial v točki $T$ enak

$$\boxed{V(T) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + ... = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i}},$$

kjer so $r_1$, $r_2$ itd razdalje od naboja $Q_1$, $Q_2$, itd do točke $T$, kjer računamo potencial.

SLIKA: Izračun potenciala sistema točkastih nabojev.

**Primer**: Določimo potencial v sredini med dvema točkastima nabojema $Q$ = 10 nC oddaljenima za 2 cm.

Izračun: $V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = 2\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 1\text{cm}} = 2\cdot 9.10^{-9}\frac{\text{V}\cdot\text{m}}{\text{A}\cdot\text{s}}\cdot 10\cdot 10^{9}\,\text{C}\cdot 100\text{ m}^{-1} = \underline{\underline{18\text{ kV}}}$.

*** Potencial v okolici sistema zvezno porazdeljenih nabojev.**

Za porazdelitev točkastih nabojev smo ugotovili, da lahko potencial določimo kot vsoto $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i}$.

Če je porazdelitev naboja zvezna moramo vzeti en mali del celotnega naboja in z limitiranjem vsote delnih prispevkov dobimo

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\Delta Q\to 0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta Q_i}{r_i} = \int_{\substack{\text{po vseh}\\ \text{Q-jih}}}\frac{\text{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \text{ oziroma } \boxed{\text{d}V = \frac{\text{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}.$$

$r$ je razdalja od mesta, kjer se nahaja d$Q$ do točke kjer iščemo potencial. Odvisno od načina porazdelitve naboja (po površini, volumnu, liniji) določimo potencial kot

$$V = \int_V \frac{\rho \text{d}V}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V = \int_A \frac{\sigma \text{d}A}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V = \int_L \frac{q \text{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

**SLIKA: Izračun potenciala porazdeljenega naboja s seštevanjem (integracijo) delnih prispevkov d*V*. Na sliki je narisan diferencial naboja, točka *T* kjer računamo integral in razdalja *r* od d*Q* do točke *T*.**

**Primer**: Izračunajmo potencial vzdolž *Z* osi za enakomerno naelektren tanek obroč polmera *a* z nabojem *Q*, ki leži v ravnini z = 0.

Ker je naboj porazdeljen enakomerno po obroču lahko uporabimo enačbo $V = \int_L \frac{q\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r}$, ki jo zapišemo v obliki $V = \int_0^{2\pi} \frac{qa\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{\frac{Q}{2\pi a}a2\pi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$.

Ugotovimo lahko, da je način računanja potenciala podobno računanju električne poljske jakosti, le da je običajno nekoliko bolj preprosto. Predvsem zato, ker je potencial skalarna veličina, polje pa vektorska. Pogosto zato električno polje določimo posredno, tako, da najprej izračunamo potencial, nato pa iz potenciala še električno poljsko jakost. Kako, bomo spoznali v nadaljevanju.

**Potencialno polje je skalarno polje.**
Potencial lahko določimo v vsaki točki prostora neodvisno od porazdelitve nabojev, enako, kot je veljalo za električno poljsko jakost. Je pa za razliko od električnega polja, ki je vektorsko polje, potencial skalarna veličina in tvori **skalarno polje**.

**Ekvipotencialne ploskve.**
Če povežemo točke z enako velikostjo potenciala dobimo ploskev, ki jo imenujemo ekvipotencialna ravnina ali bolje ekvipotencialna ploskev. V primeru osamljenega točkastega naboja so ekvipotencialne ploskve krožnice, oz. v 3D površine krogle. Običajno jih rišemo tako, da je razlika potencialov med vsako naslednjo ploskvijo konstantna.

**Primer**: Določimo ekvipotencialne ploskve v okolici točkastega naboja *Q* = 10 nC.

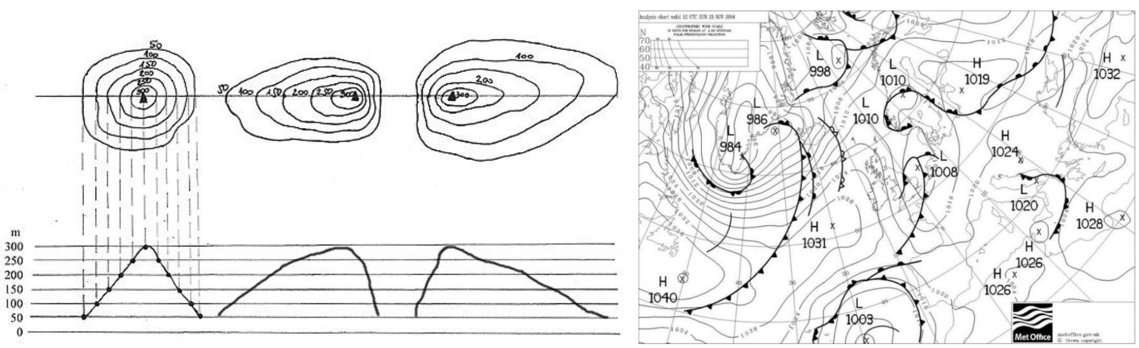
Ugotovili smo že, da velja za potencial v okolici točkastega naboja enačba $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Ugotovili smo tudi, da je ta potencial na razdalji 1 cm enak $V(r = 1\,\mathrm{cm}) = 9\,\mathrm{kV}$. Potencial 9 kV je torej enak v vseh točkah, ki so od točkastega naboja oddaljeni za 1 cm, kar prikažemo z lupino krogle (v 2D z krožnico) polmera 1 cm. Kje pa se nahajajo ekcipotencialne ploskve s potenciali 8 kV, 7 kV itd.? Preprosto: enačba, ki jo je potebno rešiti za ekvipotencialno ploskev s potencialom 8 kV bo

$$8\,\mathrm{kV} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_{8\mathrm{kV}}} \Rightarrow r_{8\mathrm{kV}} = Q/\left(8\,\mathrm{kV}\cdot 4\pi\varepsilon_0\right) = \frac{9\cdot 10^9\cdot 10\cdot 10^{-9}}{8\cdot 10^3}\,\mathrm{m} = 0{,}01125\ \mathrm{m} = 1{,}125\ \mathrm{cm}.$$

Naslednja ekvipotencialka bo pri $r_{7\mathrm{kV}} = \frac{8}{7}\,1{,}125\ \mathrm{cm} = 1{,}285\ \mathrm{cm}$ itd. V splošnem nas zanimajo ekvipotencialne ploskve, katerih potenciali se razlikujejo za konstantno razliko napetosti, v našem primeru za 1 kV). Za ekvipotencialne ploskve v okolici točkastega naboja lahko ugotovimo, da se vrstijo v geometrijskem zaporedju.

**SLIKA: Prikaz ekvipotencialnih ploskev za točkasti naboj.**




**SLIKA: Grafično na več načinov lahko prikazujemo ekvipotencialne ploskve. Na podoben način so določene izohipse, kot točke z enako višinsko razliko. Na sliki levo je razviden profil različnih vzpetin in ustrezne izohipse. Vir: http://www.o-4os.ce.edus.si/gradiva/geo/zemljevid/vse.htm. Podobno lahko pri razlagi vremena uporabljamo izobare (črte z enakim pritiskom), lahko tudi druge veličine, pomembne za razlago vremena: temperatura, hitrost dviganja vetra. Vir: http://www.pro-vreme.net/index.php?id=107.**

**Električna napetost.**

Ugotovili smo že, da lahko delo potrebno za premik naboja med dvema točkama določimo iz razlike potencialne energije sistema nabojev pred in po premiku. Če to delo opravi testni naboj 1 C govorimo o električni napetosti med dvema točkama. **Električna napetost je torej številsko enaka delu polja električnih sil potrebnem za prenos enote naboja iz točke $T_1$ do točke $T_2$:**

$$\boxed{U_{12} = \frac{A_{Q_t}(T_1 \to T_2)}{Q_t} = \frac{W(T_1) - W(T_2)}{Q_t} = \frac{Q_t \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{Q_t} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}.$$

Ugotovimo lahko, da lahko **električno napetost določimo tudi kot razliko potencialov**:

$$\boxed{U_{12} = V(T_1) - V(T_2) = \int_{T_1}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{T_2}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}.$$ ELEKTRIČNA NAPETOST

**Kirchoffov zakon.** Ugotovili smo, da električno napetost med dvema točkama določimo z integracijo električne poljske jakosti po poljubni poti od ene do druge točke. Obenem smo ugotovili, da je ta integral enak nič, če je pot zaključena sama vase. Torej bi lahko pisali:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{T_2}^{T_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \cdots + \int_{T_{N-1}}^{T_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_1 + U_2 + \cdots + U_N = 0$$

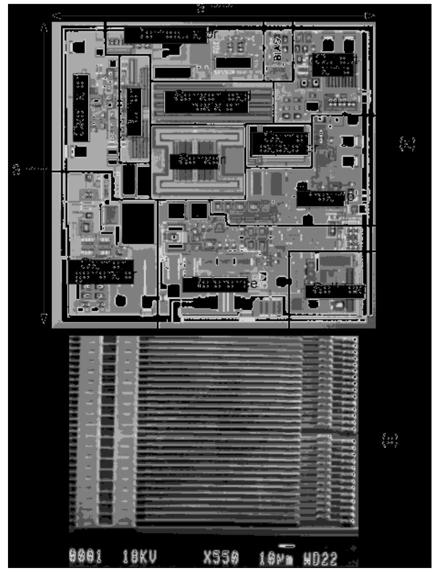
Ali tudi, vsota vseh napetosti po zaključeni poti (zanki) je enaka nič, kar je 2. Kirchoffov zakon:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} U_i = 0}$$

**OSNOVNI PRIMERI IZRAČUNA NAPETOSTI, POLJA IN POTENCIALA ZA: PLOŠČATI, VALJNI IN SFERIČNI KONDENZATOR:**

## Dve ravni vzporedni naelektreni plošči: ploščni kondenzator

Ravni vzporedni plošči površine $A$ = 5·8 cm$^2$ sta oddaljeni za $d$ = 10 cm in imata naboj $\pm Q = \pm 20\,\mathrm{nC}$. Določimo polje, potencial in napetost med ploščama, pri čemer predpostavimo homogenost polja med ploščama (polje neskončnih naelektrenih ravnin).




Mikroelektronska industrija uporablja tehnologijo mikromehanske obdelave (MEMS) za realizacijo mikronskih struktur. Na sliki integracija merilnika pospeškov, z elektroniko. Merilnik pospeškov je v osnovi sestavljen iz niza ploščnih kondenzatorjev. Ene stranice so fiksno vpete, druge pa se lahko premikajo. Z merjenjem spremembe kapacitivnosti lahko določimo hitrost spremembe – pospešek. http://www.aero.org/publications/helvajian/

**SLIKA: a) Dve ravni nasprotno naelektreni plošči postavljeni v koordinatni sistem z normalo v smeri osi X. b) Napetost in polje med dvema ravnima (nasprotno) naelektrenima ploščama.**

Plošči postavimo v koordinatni sistem, recimo tako, da je normala na površino v smeri X osi in da ima leva elektroda pozitivni naboj. Ob predpostavki enakomerne porazdelitve naboja, je $\sigma = \dfrac{Q}{A}$. Dobimo

$\sigma = \dfrac{20\,\mathrm{nC}}{40\,\mathrm{cm}^2} = 5\,\mu\mathrm{m/m}^2$.

Električno polje med ploščama je superpozicija polj dveh plošč in je enako* $\vec{E} = \vec{e}_x \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot 2 = \vec{e}_x \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Napetost med ploščama dobimo z integracijo polja med ploščama:

$$\boxed{U = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^d \vec{e}_x \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d}$$

Izračun:

$$U = \frac{5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{A \cdot s/m^2}}{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{V \cdot m}}} \cdot 0{,}1\mathrm{m} = \underline{\underline{56{,}5\ \mathrm{kV}}}.$$

* Tu smo predpostavili polje v okolici dveh naelektrenih ravnin. V resnici sta dve vzporedni plošči omejenih dimenzij, zato velja aproksimalcija le delno, torej predvsem tedaj, ko je površina plošč velika v primerjavi z razdaljo med ploščama.

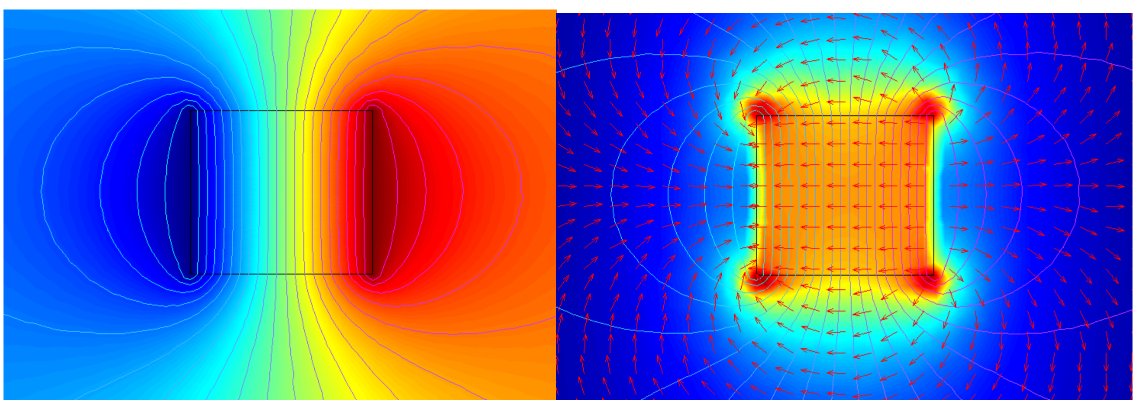
- Iz primera ugotovimo, da je električna poljska jakost med ploščama konstantna in enaka $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Takemu polju rečemo tudi **homogeno polje**.
- Če v enačbi za napetost med ploščama zamenjamo $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = E$, dobimo $\boxed{U = Ed}$ oziroma $\boxed{E = \dfrac{U}{d}}$. To sta enačbi, ki ju poznamo že iz srednješolske fizike. Ugotovimo lahko, da sta enačbi ustrezni za izračun polja ali napetosti, vendar le v tem konkretnem primeru, torej, za polje oz. napetost med dvema ravnima enakomerno naelektrenima ploščama. To seveda ne zmanjšuje pomembnosti izraza, pač pa velja le kot opozorilo, da se ga ne bi uporabljalo nekritično. Če polje med dvema točkama ni homogeno, je potrebno napetost med točkama izračunati s pomočjo integrala električne poljske jakosti po poti. To bomo prikazali z naslednjim primerom (koaksialni kabel).

Določimo še potencial med ploščama ploščnega kondenzatorja: če ozemljimo desno elektrodo (elektrodo, ki ima negativni naboj), bo potencial med elektrodama ($V(x=d)=0, V(x=0)=U$ ):

$$\boxed{V(x) = \int_x^d \vec{e}_x \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot (d-x)}.$$

Če ozemljimo levo elektrodo, bo potencial med elektrodama:

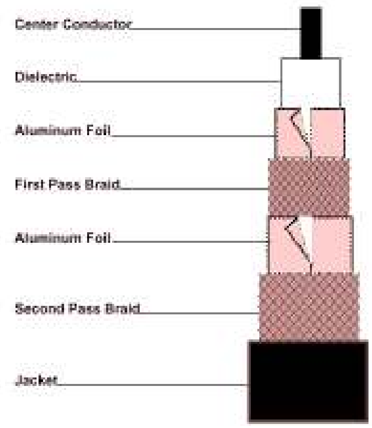
$\boxed{V(x) = \int_x^0 \vec{e}_x \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot x}$. $V(x=0)=0, V(x=d) = -U$



**SLIKA: Levo: Ekvipotencialne ploskve med in v okolici dveh nasprotno naelektrenih ravnih plošč. Ugotovimo, da so med ploščama ekvipotencialne ploskve enakomerno razmaknjene, v okolici pa ne (bolj goste so ob robovih elektrod). Desno: Vektorji električne poljske jakosti skupaj z ekvipotencialnimi ploskvami in velikostjo električne poljske jakosti (večje polje bolj rdeča barva). Za lažje opazovanje so vektorji polja prikazani enako veliki neodvisno od velikosti polja.**

## Koaksialni kabel (valjni kondenzator)

Med žilo in oklopom zračnega koaksialnega kabla je napetost 2 kV. Določimo linijsko gostoto naboja na žili in oklopu ter maksimalno električno poljsko jakost, če je polmer žile $r_n$ = 2 mm, $r_o$ = 5 mm, $r_z$ = 7 mm. Oklop in žila sta iz prevodnega materiala.




Koaksialen kabel za visokofrekvenčni prenos signalov. http://www.smarthome.com/851081.html

**SLIKA: Koaksialni kabel s priključitvijo napetosti med oklopom in žilo.**

<u>Izračun</u>: Najprej moramo predpostaviti enakomerno porazdelitev naboja na žili in oklopu. Predpostavimo pozitivni naboj na žili ($Q$) in negativni na oklopu (-$Q$). Električno poljsko jakost med žilo in oklopom določimo s pomočjo Gaussovega zakona. Na neki razdalji $r$ od osi kabla izračunamo pretok el. polja skozi plašč valja (na velikost polja na radiju $r$ vpliva le zaobjeti naboj):in dobimo enačbo, ki je identična enačbi za polje v okolici preme elektrine (naelektrene premice) *:

$$E_r \cdot 2\pi rl = \frac{ql}{\varepsilon_0} \text{ in } E_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ oziroma } \boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}}.$$

Ali je površinska gostota naboja enako velika na oklopu in na površini žile? Odgovor je NE. Enako velik je celotni naboj, za gostoto naboja pa velja: $Q(r_n) = \sigma_n 2\pi r_n l = -Q_o = -\sigma_o 2\pi r_o l$, torej bo

$$\sigma_o = -\sigma_n \frac{r_n}{r_o}.$$

V konkretnem primeru bo torej $\sigma_o = -\sigma_n \frac{r_n}{r_o} = -\sigma_n \frac{2\,\text{mm}}{5\,\text{mm}} = -\frac{2}{5}\sigma_n$.

Pogosto nas zanima tudi gostota površinsko porazdeljenega naboja. Iz izpeljanih enačb $E(r_n) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_n} = \frac{\sigma_n 2\pi r_n}{2\pi\varepsilon_0 r_n} = \frac{\sigma_n}{\varepsilon_0}$ oziroma $\sigma_n = \varepsilon_0 E(r_n)$.

Da bi lahko določili $q$ ali $\sigma$ moramo zapisati še izraz za napetost med žilo in oklopom. Napetost med oklopom in žilo določimo z integracijo polja med kontaktoma:

* Podobno bi izvajali, če bi izhajali iz enakomerne površinske gostote naboja na površini žile $\sigma(r = r_n) = \sigma_n$:

$$E_r \cdot 2\pi rl = \frac{\sigma_n A(r_n)}{\varepsilon_0} \text{ in in } E_r = \frac{\sigma_n 2\pi r_n l}{2\pi\varepsilon_0 rl} = \frac{\sigma_n r_n}{\varepsilon_0 r} \text{ oziroma } \vec{E} = \vec{e}_r \frac{\sigma_n r_n}{\varepsilon_0 r}.$$ Enačba je seveda enakovredna prejšnji, saj velja $Q = ql = \sigma_n 2\pi r_n l$, oziroma $q = \sigma_n 2\pi r_n$.

$$U = \int_0^{r_z} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^{r_n} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{r_n}^{r_0} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{r_0}^{r_z} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 + \int_{r_n}^{r_0} \vec{E}\cdot d\vec{l} + 0 .$$

Zakaj sta prvi in tretji integral enaka nič? Zato, ker integriramo polje, ki pa je znotraj žile in znotraj (prevodnega oklopa) enako nič! To lahko hitro ugotovimo z razmislekom, da se pozitivni in negativni naboji privlačijo in se zato pozitivni naberejo na površini žile, negativni pa na notranji strani oklopa. Z uporabo Gaussovega zakona na plašču valja z radijem, ki je večji od polmera $r_0$ bi hitro ugotovili, da je polje znotraj oklopa enako nič, saj je zaobjeti naboj vsota enako velikega pozitivnega in negativnega naboja.

$$\boxed{U = \int_{r_n}^{r_0} \vec{E}\cdot\vec{e}_r \mathrm{d}r = \int_{r_n}^{r_0} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\vec{e}_r \mathrm{d}r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_n}}$$

Napetost bi lahko določili tudi iz razlike potencialov. Če pripišemo potencialu oklopa potencial nič, torej $V(r_o)=0$, bo

$$U = V(r_n) - V(r_0) = V(r_n) = \int_{r_n}^{r_0} \vec{E}\cdot\vec{e}_r \mathrm{d}r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_n} .$$

Potencial v poljubni točki bo torej $V(r) = \int_r^{r_0} \vec{E}\cdot\vec{e}_r \mathrm{d}r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$. Znotraj žile ni polja (kar lahko pokažemo z Gaussovim stavkom), potencial je torej v notranjosti žile enak kot na površini. Podobno lahko pokažemo tudi za oklop.

In še izračun linijske gostote naboja (iz enačbe za napetost):

$$q = U\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{r_0}{r_n}} = 2\cdot 10^3\,\mathrm{V}\cdot\frac{2\pi 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\cdot s}}{\mathrm{V\cdot m}}}{\ln\frac{5\ \mathrm{mm}}{2\ \mathrm{mm}}} = \underline{\underline{0{,}121\,\mu\mathrm{C/m}}} .$$

Električno polje je maksimalno pri najmanjšem radiju, torej pri $r_n$:

$$\vec{E}_{\max} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_n} = \vec{e}_r \frac{U}{r_n \ln\frac{r_0}{r_n}} \qquad E_{\max} = \frac{2\cdot 10^3\ \mathrm{V}}{2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\ln\frac{5}{2}} = \underline{\underline{1{,}09\,\mathrm{MV/m}}}$$

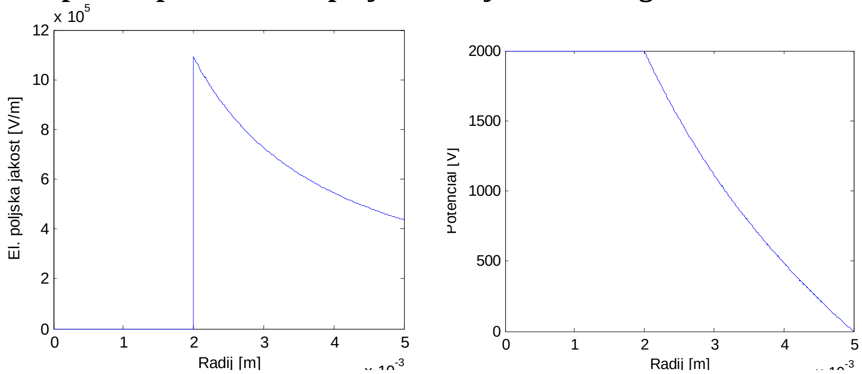
Ponovimo pomembne rezultate iz tega primera:
**napetost med žilo in plaščem koaksialnega kabla je**
$\boxed{U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_n}}$,

**električno polje pa** $\boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}}$ **ali** $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\sigma_n r_n}{\varepsilon_0 r}$

**oziroma izraženo z napetostjo** $\boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \frac{U}{r\cdot\ln\frac{r_0}{r_n}}}$.

**Površinska gostota naboja pri $r_n$ je** $\sigma_n = \varepsilon_0 E(r_n)$.

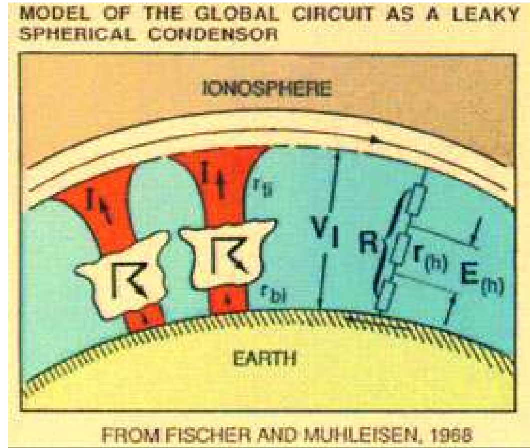
**Izris poteka potenciala in polja znotraj koaksialnega kabla.**




**Slika: Električna poljska jakost in potencial znotraj koaksialnega kabla.**

```
% PRIMER IZRISA POLJA IN POTENCIALA KOAKSIALNEGA KABLA S PROGRAMOM MATLAB
e0=8.854e-12;
U=2000; rn=2e-3; ro=5e-3;
q=U*2*pi*e0/(log(ro/rn));
R=0:1e-5:ro;
E=zeros(length(R),1);V=E;
E=q/(2*pi*e0)./R;
V=q/(2*pi*e0)*log(ro./R);
for i=1:1:length(R)
   if R(i)<rn
      V(i)=U;
      E(i)=0;
   end
end
plot(R,V); xlabel(' Radij [m]'); ylabel(' Potencial [V]');
figure; plot(R,E); xlabel(' Radij [m]'); ylabel(' El. poljska jakost [V/m]');
break
```

## Krogelni (sferični) kondenzator




Zemlja kot sferični kondenzator. Med zemljo in ionosfero je visoka napetost, kar vpliva na električne pojave.

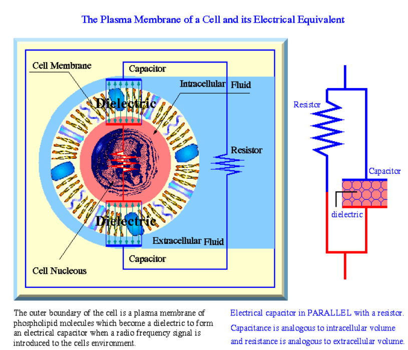
Obravnavamo dve lupini krogle z enakomerno in nasprotno naelektreno gostoto naboja. Primer krogelnega kondenzatorja je zemlja z zračno atmosfero, ki ločuje površino zemlje od ionosfere. Drug pomemben primer je biološka celica, ki ima slabo prevodno tanko membrano. Primer je tudi krogla Van de Graffovega generatorja z drugo elektrodo v neskončnosti.

Primer: Na površini zemlje izmerimo električno poljsko jakost 150 V/m, ki je usmerjena v smeri središča zemlje. Določimo napetost med zemljo in ionosfero, ki je od površine zemlje oddaljena približno* 40 km. Določimo še površinsko gostoto naboja. Polmer zemlje je $r_n$ = 6370 km, ionosfere pa $r_i$ = 6410 km. Predpostavimo zemljo in ionosfero kot sferični kondenzator.

**SLIKA: Področje med površino zemlje in ionosfero predstavimo kot velik krogelni kondenzator. Ker je polje na površini usmerjeno v smeri središča zemlje pomeni, da je zemlja naelektrena negativno glede na ionosfero.**

Zemljo in ionosfero predstavimo kot sferični kondenzator. Znano je, da je na površini zemlje presežek negativnega naboja, v ionosferi pa pozitivnega. Električno polje kaže v smeri centra zemlje in je (lahko z uporabo Gaussovega zakona) enako ($Q$ je negativen)

$\vec{E} = \vec{e}_r \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Napetost med ionosfero in zemljo je




Biološko celico lahko obravnavamo v električnem smislu kot sferični kondenzator. Celična membrana je izredno tanka, nekaj nm, in slabo prevodna, medtem, ko je notranjost mnogo bolj prevodna. http://www.rjlsystems.com/docs/bia_info/fundamentals/

* Pri izračunu smo predpostavili, da je zemlja oblike krogle. Ionosfera je del atmosfere zemlje, ki je ioniziran zaradi učinkov radiacije sonca in kozmičnih visokoenergijskih delcev. Energija, ki jo sonce oddaja v določenem spektru je tako velika, da lahko razbije molekule in jih ionizira.Več o tem: http://en.wikipedia.org/wiki/Ionosphere.

$$U=\int_{r_i}^{r_n}\vec{E}\cdot\vec{e}_r dr=\int_{r_i}^{r_n}\vec{e}_r\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\vec{e}_r dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_i}^{r_n}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_n}\right).$$

$$\vec{E}(r=r_n)=\vec{e}_r\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}=\vec{e}_r\frac{U}{r_n^2}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_n}\right)^{-1}=-\vec{e}_r\,150\,\text{V/m}$$ . Sledi

$$U=-150\,\text{V/m}\cdot r_n^2\cdot\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_n}\right)=-150\,\text{V/m}\cdot\left(6370\cdot10^3\,\text{m}\right)^2\left(\frac{1}{6410}-\frac{1}{6370}\right)10^{-3}\text{m}^{-1}\approx 6\text{ MV}.$$

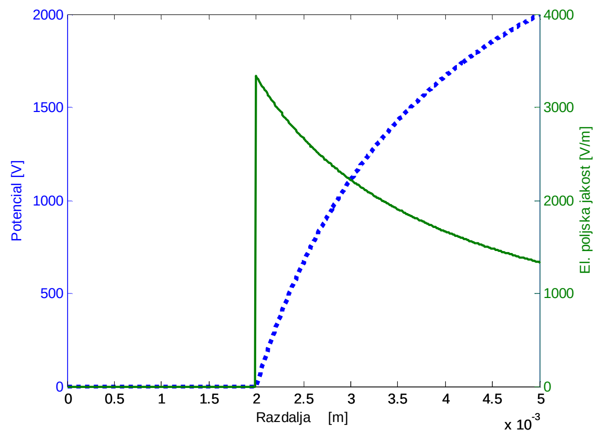
Če predpostavimo potencial zemlje enak nič $V(r_n)=0$, dobimo za potencial

$$V(r)=\int_{r}^{r_n}\vec{E}\cdot\vec{e}_r dr=\int_{r}^{r_n}\vec{e}_r\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\vec{e}_r dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r}^{r_n}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_n}\right).$$

Gostota naboja na površini zemlje je $Q=E(r_n)\cdot 4\pi\varepsilon_0 r_n^2$,

$$\sigma(r_n)=\frac{Q}{A}=\frac{Q}{4\pi r_n^2}=\frac{E(r_n)\cdot 4\pi\varepsilon_0 r_n^2}{4\pi r_n^2}=E(r_n)\cdot\varepsilon_0 .$$

In še rezultat: $\sigma=-150\text{ V/m}\cdot\varepsilon_0=-1{,}33\,\text{nC/m}^2$ .




**SLIKA: Prikaz porazdelitve potenciala in absolutne vrednosti polja v sferičnem kondenzatorju. (razdalje in napetosti so za primerjavo vzete iz primera cilindričnega kondenzatorja)**

```
% PRIMER IZRISA POLJA IN POTENCIALA KOAKSIALNEGA KABLA S PROGRAMOM MATLAB
e0=8.854e-12;
U=2000; rn=2e-3; rz=5e-3;
Q=U*4*pi*e0/(1/rz-1/rn);
R=0:1e-5:rz;
E=zeros(length(R),1); V=E;
E=abs(Q./(4*pi*e0.*R));
V=Q/(4*pi*e0).*(1./R-1/rn);
for i=1:1:length(R)
  if R(i)<rn
    V(i)=0;
    E(i)=0;
  end
end
[ax ax1 ax2]=plotyy(R,V,R,E,'plot');
axes(ax(1)); ylabel(' Potencial [V]'); xlabel('Razdalja    [m]')
axes(ax(2)); ylabel(' El. poljska jakost [V/m]');
set(ax1,'LineStyle',':')
set(ax1,'Linewidth',3)
set(ax2,'Linewidth',2)
```

**Pomembni rezultati za sferični kondenzator:**
**V splošnem imamo sferični kondenzator z notranjim polmerom $r_n$ in zunanjim polmerom $r_i = r_z$:**

**Polje v sferičnem kondenzatorju je enako** $\boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$**, napetost pa** $\boxed{U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z}\right)}$ **oziroma** $\boxed{U = E(r_n)\cdot r_n^2 \cdot \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z}\right)}$**. Površinska gostota naboja pri r = $r_n$ je** $\boxed{\sigma(r_n) = E(r_n)\cdot\varepsilon_0}$**.**

**POVZETEK:**

1) Električni potencial je enaka normirani potencialni energiji naboja. Ali tudi: električni potencial v točki T je števisko enak delu pri prenosu enote naboja (1 C) od točke $T$ v neskončnost oziroma do mesta, kjer je potencial enaka nič.

$$\boxed{V(T)=\frac{W(T)}{Q}=\int_{T}^{T(V=0)}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}.$$

2) Potencial v okolici točkastega naboja se manjša z 1/r: $\boxed{V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

3) Potencial sistema točkastih nabojev je enak vsoti prispevkov posameznih potencialov: $\boxed{V(T)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i}}$. $r_i$ je razdalja od točke, kjer računamo potencial do naboja $Q_i$.

4) Potencial porazdeljenih nabojev določimo z integracijo $V=\int_{\text{po vseh Q-jih}}\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. $r$ je razdalja od d$Q$-ja do točke, kjer računamo potencial.

5) Potencial je tako kot električna poljska jakost definiran povsod v prostoru, zato ga lahko prikažemo kot potencialno polje. Za vizualizacijo pogosto uporabljamo prikaz ekvipotencialnih ploskev, ki so ploskve z enako vrednostjo električnega potenciala. Običajno jih rišemo tako, da je razlika potencialov med vsako naslednjo ploskvijo konstantna.

6) Električna napetost je števisko enaka delu polja električnih sil potrebnem za prenos enote naboja iz točke $T_1$ do točke $T_2$. $\boxed{U_{12}=\frac{A_{Q_t}(T_1\to T_2)}{Q_t}=\int_{T_1}^{T_2}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$. Napetost je razlika potencialov $\boxed{U_{12}=V(T_1)-V(T_2)}$.

7) Delo po zaključeni poti je enako nič, kar zapišemo tudi kot $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$. Iz tega sledi 2. Kirchoffov zakon, da je vsota vseh padcev napetosti po zaključeni poti (zanki) enaka nič: $\boxed{\sum_{i=1}^{N}U_i=0}$.