7. Gaussov zakon

Vsebina poglavja: silnice polja, gostotne cevke (gostotnice), homogeno in nehomogeno polje, pretok električnega polja, Gaussov zakon.

V tem poglavju bomo spoznali Gaussov zakon v integralni obliki, ki je v osnovi posledica Coulombovega zakona, torej dejstva, da polje v okolici točkastega naboja upada s kvadratom razdalje. Da bi razumeli njegov pomen, se moramo najprej seznaniti s pojmi kot so silnice polja, pretočne oz. gostotne cevke in električni pretok.

Silnice.
Električno poljsko jakost v prostoru lahko prikažemo z vektorji v prostoru. Če vektorje povežemo z linijami, le te imenujemo **silnice polja**. Prikaz s silnicami je zelo primeren in pogost način prikaza polja. (Konceptualno jih je vpeljal Michael Faraday, ki jih je imenoval lines of force.) Ker so silnice usmerjene v smeri polja, bi po silnici potoval naboj, če bi ga postavili v polje. Pri tem moramo predpostaviti, da vstavitev tega naboja v polje ne bi spremenila samega polja, saj bi tak naboj tudi deloval s silo na tiste naboje, ki ustvarjajo polje v katerem potuje.

SLIKA: Vektorji in silnice polja za prikaz električnega polja v prostoru .

Pretok električnega polja.
Nadalje je potrebno spoznati koncept *pretoka električnega polja* skozi neko ploskev.* Električnemu polju, ki je povsod enako veliko (konstantno) in ima enako smer, običajno rečemo *homogeno polje*. **Če je homogeno polje usmerjeno pravokotno na ravno ploskev ploščine *A*, potem je pretok skozi to površino določen kot produkt polja in ploščine:** $E \cdot A$. (V nekem smislu je pretok polja povezan s količino naboja iz katerih izhajajo silnice. Na površini naelektrenega telesa se izkaže produkt $E \cdot A$ direktno proporcionalen količini naboja.)

Če je ravna ploskev postavljena v smeri homogenega polja, je pretok enak nič, če pa je pod določenim kotom, je potrebno upoštevati kosinus vmesnega kota, pri čemer je to kot med normalo (pravokotnico) na površino in smerjo električnega polja $E \cdot A \cdot \cos(\alpha)$. Po definiciji skalarnega produkta lahko to zvezo zapišemo tudi s skalarnim produktom vektorja polja in vektorja površine, pri čemer je potrebno ponovno poudariti, da je smer vektorja površine določena z normalo na površino (smerjo, ki je pravokotna na površino). **Pretok homogenega**

* Koncept pretoka nekega vektorja skozi določeno površino je splošen pojem, ki se pogosto uporablja za opis določenih veličin in ga pogosto imenujemo fluks. V nadaljevanju bomo spoznali novo veličino, gostoto električnega pretoka, ki jo bomo označili s črko D in bo za prazen prostor enaka $\varepsilon_0 \vec{E}$.

polja skozi poljubno postavljeno ravno površino je enak skalarnemu produktu (vektorja) električnega polja in vektorja površine (ki ga določa normala na površino).

$\boxed{\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{A}}$ **Pretok homogenega električnega polja preko ravne ploskve**

SLIKA: Pretok homogenega električnega polja skozi ravno ploskev: a) pravokotno ($\Phi_e = EA$), b) vzporedno ($\Phi_e = 0$), pod kotom ($\Phi_e = EA\cos\alpha$).

Primer: Določimo pretok homogenega električnega polja velikosti 5 kV/m, ki je usmerjen pod kotom 30^0 na normalo ravne površine določene s pravokotnikom dimenzij 3 x 4 m^2.
Izračun:
1. način: Prikažemo polje v koordinatnem sistemu in zapišemo vektorja E in A:

$$\vec{E} = \vec{e}_E E = -\vec{e}_x E\sin\alpha - \vec{e}_y E\cos\alpha = E(-\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)$$

$$\vec{A} = -\vec{e}_y A = (0,-1,0)A$$

$$\vec{E} \cdot \vec{A} = E(-\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)(0,-1,0)A = EA\cos\alpha$$

2. način: Poiščemo komponento polja, ki je pravokotna na površino, to je $E_n = E\cos\alpha \cong 4{,}33\ \text{kV/m}$. Sedaj le še pomnožimo normalno komponento polja s ploščino in dobimo pretok $\Phi_E \cong 4{,}33\ \text{kV/m} \cdot 12\text{m}^2 \cong \underline{\underline{52 \cdot 10^3\ \text{V} \cdot \text{m}}}$.

Pretok nehomogenega polja skozi neravno površino.
Kaj pa če polje ni homogeno in/ali površina skozi katero računamo pretok ni ravna? Tedaj bomo dobili pravilen izraz za pretok na že poznan način: najprej zapišemo pretok za neko diferenčno majhno površino, na kateri bi homogenost približno veljala, torej za $\Delta\Phi_e = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$. To bi veljalo eksaktno, če bi $\Delta\vec{A}$ limitirali proti nič. V limiti pa dobimo diferencial pretoka $\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$, celotni pretok pa*

$\boxed{\Phi_e = \int_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}}$. **Pretok polja za poljubno obliko polja in površine**

V splošnem je pretok električnega polja skozi poljubno površino enak integralu električnega polja po tej površini. Pri tem je potrebno upoštevati skalarni produkt vektorja polja in vektorja diferenciala površine. V smislu skalarnega produkta je potrebno upoštevati le komponento polja, ki je v smeri normale na površino: E_n. Lahko pišemo tudi $\Phi_e = \int_A E_n \cdot \mathrm{d}A$.

* Ponovno velja opozoriti, da je bisten element izračuna pretoka vektorja skozi površino uporaba skalarnega produkta dveh vektorjev. V konkretnem primeru vektorja električne poljske jakosti E in vektorja (diferenciala) površine, pri čemer je smer vektorja površine določena z normalo (pravokotna smer) na površino: $\vec{A} = \vec{e}_n A$.

SLIKA: Pretok nehomogenega polja skozi neravno površino.

Pretočne cevke ali gostotnice.
Tudi pretok električnega polja lahko ponazorimo na enak način kot ponazarjamo silnice polja, le da sedaj govorimo o gostotnih ali **pretočnih cevkah**, silnice pa ponazarjajo le stene gostotnih cevk. Večji pretok električnega polja dosežemo, če zajamemo več pretočnih cevk. V poljubnem preseku gostotne cevke je enak pretok.

SLIKA: Pretok električnega polja znotraj gostotnic je konstanten (enako velik na poljubnem preseku).

Pretok polja po celotni (zaključeni) površini.
Sedaj pa si poglejmo vrednost tega pretoka po celotni - **zaključeni** površini. Včasih ji rečemo tudi **Gaussova površina**. To pomeni, da nas zanima pretok polja skozi površino krogle ali skozi vseh šest stranic kocke ali pač poljubne površine, ki v celoti zaobjame določen objekt. Pri tem niti ni potrebno, da računamo pretok skozi neko površino telesa, lahko je to popolnoma namišljeno (abstraktno) telo. Matematično integracijo po zaključeni površini naznačimo s krogcem v sredini simbola integrala:

Pretok polja skozi zaključeno površino = $\oint\limits_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Pretok polja točkastega naboja skozi zamišljeno površino krogle.
Vzemimo kar najpreprostejši primer, kjer je naboj Q postavljen v središče krogelnega koordinatnega sistema in računamo pretok skozi neko zamišljeno površino krogle polmera r:

$$\oint\limits_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r r^2 \sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot \varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos(\vartheta))\Big|_0^{\pi} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Ugotovimo, da je ta integral sorazmeren naboju, ki se nahaja v središču namišljene krogle.

Ali je to naključje, ali to morda velja za poljubno postavitev naboja znotraj namišljene krogle? Z razmislekom, da lahko naboj zamaknemo iz središča koordinatnega sistema, pa se število pretočnih cevk, ki »sekajo« površino krogle, ne spremeni, lahko ugotovimo, da bo rezultat enak tudi za poljubno postavitev naboja Q znotraj (namišljene) krogle polmera r.

SLIKA: Število pretočnih cevk, ki sekajo površino namišljene krogle je enako za poljubno postavitev naboja znotraj krogle. Enako velja za poljubno obliko površine zaključenega objekta.

Pretok polja skozi zaključeno površino poljubne oblike v kateri se nahaja množica nabojev.

Nadalje lahko razmislimo, kolikšen je pretok električnega polja, če se v prostoru z zaključeno površino nahaja več nabojev. Razmislek je podoben kot v prejšnjem primeru. Pomagamo si z veljavnostjo superpozicije polja $\left(\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+...\right)$ in zapišemo:

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A}=\oint_A\left(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+...\right)\cdot d\vec{A}=\oint_A \vec{E}_1\cdot d\vec{A}+\oint_A \vec{E}_2\cdot d\vec{A}+\cdots=\frac{Q_1}{\varepsilon_0}+\frac{Q_2}{\varepsilon_0}+\cdots=\frac{\sum_i Q_i\big|_{\text{znotraj A}}}{\varepsilon_0}$$

SLIKA: Pretočne cevke več nabojev, ki jih zajamemo z namišljeno površino krogle (ali poljubno zaključeno površino).

Primer: Določimo pretok skozi zaključene površine A_1, A_2 in A_3 za naboje na sliki.

Vpliv nabojev zunaj zaključene površine na pretok polja skozi notranjost površine.
Kaj pa naboji, ki se nahajajo zunaj krogle? Ugotovimo lahko, da sicer povzročajo polje na površini krogle, vendar je pretok polja v kroglo enako veliko pretoku polja iz krogle.

SLIKA: Pretok polja skozi zaključeno površino v kateri ni nabojev je enak nič. Če se v zunanji okolici površine nahajajo naboji, je pretok polja, ki vstopa v prostor enak pretoku polja, ki izstopa iz tega prostora.

Povzemimo ugotovitve: **Pretok električne poljske jakost skozi sklenjeno (zaključeno) površino je enak zaobjetemu naboju (algebrajski vsoti nabojev) deljeno z ε_0. Ta zapis imenujemo Gaussov zakon.**

$$\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{znotraj A}}}{\varepsilon_0}.$$

GAUSSOV ZAKON

Pomen Gaussovega zakona:

1) Ugotavlja **izvornost** električnega polja. Električno polje izvira iz pozitivnih nabojev in se zaključuje (ponira) na negativnih.
2) **Omogoča izračun naboja** v določenem prostoru ob poznavanju električnega polja na mejah tega prostora.
3) **Omogoča izračun električnega polja** v primeru simetrične porazdelitve naboja. V tem primeru namreč polje ni funkcija spremenljivk integracije.
4) Gaussov zakon smo spoznali v t.i. integralni obliki. Zapisan je namreč z integralom in velja po določeni površini. Poznamo tudi zapis Gaussovega stavka v diferencialni obliki, ki definira povezavo med električnim poljem in nabojem (gostoto naboja) v točki v prostoru. Ta zakon je en od osnovnih zakonov, ki opisujejo naravo električnega polja. **Gaussov zakon je znan tudi kot ena od štirih Maxwellovih enačb**, ki v celoti opisujejo elektromagnetne pojave.

Primeri izračunov z uporabo Gaussovega zakona

Primer – naelektrena krogla: Krogla polmera R ima enakomerno volumsko porazdelitev naboja. Določimo električno poljsko jakost znotraj in zunaj krogle.

Izračun:

1. Znotraj krogle si zamislimo zaključeno površino krogle s polmerom $r<R$ in zapišemo pretok polja skozi to ploskev. Uporabimo izraz

$\oint_{A(r)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_A}{\varepsilon_0}$, kjer je Q_A naboj zajet s površino krogle polmera r. Ker je gostota naboja enakomerno porazdeljena, je celoten naboj zajet s kroglo površine A(r) kar $Q_\mathrm{A} = \rho V = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$.

Polje je zaradi simetrične porazdelitve naboja usmerjeno radialno, kar lahko zapišemo v obliki $\vec{E} = \vec{e}_r E(r)$ in je le funkcija radija. Tudi diferencial površine je usmerjen v smeri radija (pravokotno na površino) in je enako $\mathrm{d}\vec{A} = \vec{e}_r \mathrm{d}A$. Skalarni produkt $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$ je enak $E\cdot\mathrm{d}A$. Poleg tega električno polje ni odvisno od integracijskih spremenljivk, saj je povsod kjer integriramo (po površini krogle) polje enako veliko - konstantno. Zato ga lahko pišemo pred integral:

$\oint_{A(r)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = E \oint_{A(r)} \mathrm{d}A$, integral d$A$ po zaključeni površini pa je kar enak tej površini (ploščini):

$\oint_{A(r)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = EA = E4\pi r^2$. Sedaj le še sestavimo levo in desno stran enačbe in preuredimo

$$E\cdot 4\pi r^2 = \rho\cdot 4\pi \frac{r^3}{3} / \varepsilon_0$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Na koncu le še dodamo »nastavek« $\vec{E} = \vec{e}_r E(r)$ in polje je $\boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$. Ta zveza velja za poljubne radije znotraj krogle, torej za $r \le R$.

Ugotovimo, da znotraj krogle s konstantno volumsko porazdelitvijo gostote naboja polje narašča linearno z radijem.

2. Polje zunaj krogle dobimo na podoben način: zamislimo si neko površino krogle pri nekem radiju $r > R$ in zapišemo Gaussov zakon za to namišljeno površino. Ugotovimo, da bo leva stran enačbe enaka kot v prejšnjem primeru, desna pa se spremeni, saj je potrebno upoštevati, da smo zajeli celotni naboj že pri $r = R$, za $r > R$ pa ni naboja. Torej bo desna stran enačbe kar $\rho\cdot 4\pi \frac{R^3}{3} / \varepsilon_0$, oziroma kar celoten naboj Q. Dobimo

$$E\cdot 4\pi r^2 = \rho\cdot 4\pi \frac{R^3}{3} / \varepsilon_0$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

Ugotovimo, da polje v zunanjosti krogle upada s kvadratom razdalje. In še več, enačbo lahko zapišemo tudi v obliki $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, kar ni nič drugega kot polje v okolici točkastega naboja. Torej, krogla z enakomerno volumsko gostoto naboja ima v okolici enako polje, kot če bi bil celoten naboj skoncentriran v centru krogle.

SLIKA: Polje v notranjosti in zunanjosti krogle z enakomerno volumsko gostoto naboja.

Primer – naelektrena valja: Določimo polje med enakomerno in nasprotnosmerno naelektrenima neskončnima plaščema valjev z linijsko gostoto naboja. $q(r = r_n) = +q$ in $q(r = r_z) = -q$.

SLIKA: Dva plašča valja z isto osjo, nasprotno naelektrena.

Izračun: Zamislimo si nek plašč valja polmera r in dolžine l med notranjim in zunanjim polmerom in zapišemo Gaussov zakon za ta namišljeni objekt. Podobno kot za kroglo lahko ugotovimo, da je polje neodvisno od spremenljivk integracije velja $\oint_{A(r)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = E2\pi rl + 0 + 0$. Z dvema ničlama smo zapisali pretok skozi stranske površine (ker je tam normalna komponenta polja enaka nič). Desna stran enačbe Gaussovega zakona je enaka naboju, ki ga zaobjamemo z namišljenim valjem. Ta je enaka $\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{ql}{\varepsilon_0}$. Z združitvijo leve in desne strani enačbe dobimo $E2\pi rl = \frac{ql}{\varepsilon_0}$, od koder sledi $E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}$. Dobili smo izraz, ki ga že poznamo – za polje premega naboja. Polje med naelektrenima valjema je enako $E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

Ugotovimo lahko, da pri izračunu polja med plaščema valjev nismo potrebovali upoštevati nabojev na zunanjem plašču. Njihov vpliv na polje znotraj plašča je enak nič. Vplivajo pa na polje zunaj valjev ($r > r_z$), tako, da se prispevek nabojev na notranjem in zunanjem plašču izničita: $E2\pi rl = \frac{ql}{\varepsilon_0} + \frac{-ql}{\varepsilon_0} = 0$.

Primer: Naelektrena ravnina. S pomočjo Gaussovega zakona določimo polje v okolici naelektrene površine.

Izračun: Zapišemo Gaussov stavek skozi namišljeno kocko, katere polovica je na eni strani ravnine in polovica na drugi strani. Skozi stranske površine je pretok enak nič, skozi normalni pa je enak $\oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = EA + EA = 2EA$. Desna stran enačbe je sorazmerna zaobjetemu naboju $\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$. Z združitvijo dobimo $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, kar je enak izraz, kot smo ga dobili v prejšnjem poglavju..

SLIKA: Naelektrena ravnina.

Vprašanja za obnovo:

1. Kaj so to silnice polja?
2. Kaj je to pretok električnega polja?
3. Kako določimo pretok homogenega električnega polja skozi ravno površino?
4. Kako določimo pretok nehomogenega električnega polja skozi poljubno površino?
5. Čemu je enak pretok električnega polja skozi zaključeno površino?
6. Pokažite uporabo Gaussovega zakona na primeru izračuna polja naelektrene krogle, naelektrenega valja in naelektrene ravnine.
7. Kakšen je pomen Gaussovega zakona?

Primera kolokvijev: 1. kolokvij, 08.12.2000, 12. december 2001