2. Coulombov zakon

Vsebina: sila med točkastima nabojema, dielektrična konstanta vakuuma, vektorski zapis sile, superpozicija sil.

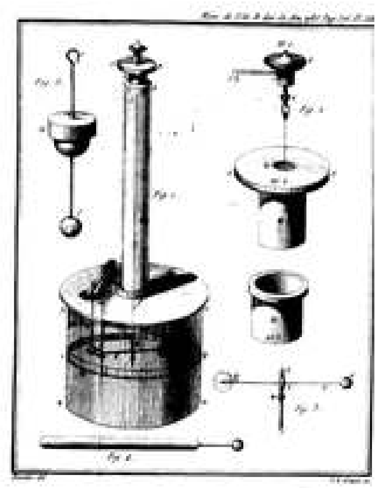
Že stari Grki so ugotovili, da med naelektrenimi telesi deluje sila, ki jo je William Gilbert leta 1600 v znameniti knjigi De Magnete poimenoval električna sila. Kljub znanstvenim raziskavam je preteklo kar nekaj časa, da je bila dognana zveza med velikostjo sile in naboji, ki to silo povzročajo.

Osnovno zakonitost je s pomočjo eksperimenta s torzijsko tehtnico dognal Charles Augustin de Coulomb. Ugotovil je, da je sila med dvema naelektrenima kroglicama proporcionalna produktu nabojev in inverzno proporcionalna kvadratu razdalje med kroglicama. Matematično to zapišemo kot

$$\boxed{F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}},$$

kjer je k konstanta. Odvisna je od izbire merskega sistema. V sistemu merskih enot, ki je v veljavi dandanes (SI), velja $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ in je približno enaka $k \cong 9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s}}$.

ε_0 imenujemo dielektrična konstanta vakuuma[*] in je enaka $\varepsilon_0 \cong 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/Vm}$.



Coulombova torzijska tehtnica, s katero je izvajal poskuse in ugotovil povezavo med nabojem in silo.

Da bi bila enačba točna, morata biti kroglici čim manjši. Eksaktno enačba velja le za tako imenovane **točkaste elektrine**. To je čista matematična formulacija, saj točkastih nabojev v naravi ni. Še tako majhen naboj ima določen polmer, četudi majhen[†]. Je pa koncept točkaste elektrine (točkastega naboja) zelo pomemben v elektrotehniki in z njegovo pomočjo izpeljemo izraze za silo med naelektrenimi telesi.

Primer: Določimo električno silo med dvema točkastima nabojema Q_1 = 2 μC in Q_2 = 5 μC, ki sta oddaljena za 1 cm.

<u>Izračun:</u>

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s}} \frac{2\mu\mathrm{C}\cdot 5\mu\mathrm{C}}{(0{,}01\,\mathrm{m})^2} = \underline{\underline{900\,\mathrm{N}}}.$$

Iz rezultata lahko ugotovimo, da smo enoto N(ewton) kar pripisali, saj bi po izvajanju morala biti enota za silo VAs/m. To tudi je ekvivalentna enota za silo, le da je bolj običajno, da silo izrazimo z enoto iz mehanike, newtnom (njutnom).

Izračun sile med točkastimi naboji je torej preprost. Potrebno pa je poudariti, da je sila vektorska veličina, saj ima poleg velikosti tudi smer. Kot smo že omenili, je smer sile taka, da

[*] Pogosto tudi zrak smatramo za prostor brez nabojev, v katerem določamo silo med naboji na enak način kot v vakuumu. Kasneje bomo ugotovili, da je za izračun sil in električnega polja v različnih medijih potrebno upoštevati vpliv samega medija. Ta vpliv opišemo z relativno dielektrično kostanto. Za vakuuma je ta 1, za zrak pa 1,00059.

[†] Polmer elektrona je 2,8179 10^{-15} m.

se enako naznačena (predznačena) naboja odbijata, nasprotno naznačena pa privlačita. To pravilo moramo le še zapisati v matematični obliki in ga upoštevati pri izračunu sile. Pri tem si pomagamo z vektorskim zapisom. Silo zapišemo kot vektor, hkrati pa z vektorji zapišemo tudi pozicije mest, kjer se naboji nahajajo.

SLIKA: Odbojna in privlačna sila med naboji.

Zapis sile v vektorski obliki. Imejmo točkasta naboja Q_1 in Q_2, ki se nahajata v točkah T_1 in T_2, kjer je točka T_1 določena s koordinatami (x_1, y_1, z_1) in T_2 z (x_2, y_2, z_2). Vektor iz koordinatnega izhodišča do točke T_1 označimo z $\vec{r}_1$ in ima komponente (x_1, y_1, z_1) ter $\vec{r}_2$ s komponentami (x_2, y_2, z_2). Določimo še vektor, ki kaže iz točke T_1 v točko T_2. Ta je $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ oziroma $\vec{r}_{12} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Da bi izračunali vektor sile, moramo velikosti sile, določeni z enačbo $F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, dodati še smer. Smer sile, ki jo naboj Q_1 povzroča na naboj Q_2 bo v smeri vektorja $\vec{r}_{12}$. Potrebujemo torej vektor, ki kaže v smeri vektorja $\vec{r}_{12}$, njegova velikost pa je 1. Ta vektor imenujemo **enotski vektor** in ga dobimo tako, da vektor $\vec{r}_{12}$ delimo z njegovo absolutno vrednostjo (velikostjo): $\vec{e}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$.

Sila na Q_2, ki jo povzroča naboj Q_1, zapisana v vektorski obliki, je

$\boxed{\vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{r_{12}}}$. To enačbo imenujemo **Coulombov zakon**.

Zapisana sila je sila na naboj Q_2, če pa želimo izraziti silo na naboj Q_1, moramo obrniti vektor $\vec{r}_{12}$, oziroma upoštevati $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

SLIKA: Sila med nabojema Q_1 in Q_2.

Primer: Vzdolž X osi sta na razdalji 3 m naboja Q_1 = 2 μC in Q_2 = 3 μC. Določimo silo na Q_2.

Izračun: $F \cong 9\cdot 10^9 \dfrac{2\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{-6}}{3^2}\ \mathrm{N} = \underline{\underline{6\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}}}$.

Če si narišemo skico ugotovimo, da bo smer sile v smeri osi X. Silo lahko torej zapišemo kot vektor $\vec{F} \cong \underline{\underline{\vec{e}_x 6\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}}}$.

Primer: Določimo električno silo med točkastima nabojema Q_1 = 2 μC in Q_2 = -5 μC. Q_1 se nahaja v točki T_1(1,0,2) cm, naboj Q_2 pa v točki T_2(2,3,1) cm.

Izračun: Zapišimo točki z vektorjema $\vec{r}_1$ in $\vec{r}_2$ ter tvorimo vektor $\vec{r}_{12} = (2-1, 3-0, 1-2)\ \mathrm{cm} = (1,3,-1)\ \mathrm{cm}$. Enotski vektor dobimo tako, da delimo vektor z njegovo absolutno vrednostjo:

$$\left|\vec{r}_{12}\right| = \sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}\ \mathrm{cm} = \sqrt{11}\ \mathrm{cm} \text{ in } \vec{e}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{\left|\vec{r}_{12}\right|} = \frac{(1,3,-1)\,\mathrm{cm}}{\sqrt{11}\,\mathrm{cm}} = \frac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}}.$$

Sila na naboj Q_2 je torej

$$\vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mu\mathrm{C}\cdot(-5\mu\mathrm{C})}{11\mathrm{cm}^2}\frac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}} =$$

$$= -9\cdot 10^9\frac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s}}\frac{10^{-11}\mathrm{A\cdot s}}{11\cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2}\frac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}} \cong \underline{\underline{-24{,}7\cdot(1,3,-1)\ \mathrm{N}}}.$$

Rezultat je negativen, torej sila kaže v nasprotno smer kot vektor $\vec{r}_{12}$, kar je seveda pravilno, saj sta naboja nasprotnega predznaka in se torej privlačita.

Dodatno: Kolikšna je komponenta sile v smeri določene osi?

Pomnožimo komponente z 24,7 in dobimo: $\vec{F}_{12} \cong -24{,}7\,\mathrm{N}\cdot\vec{e}_x - 74\,\mathrm{N}\cdot\vec{e}_y + 24{,}7\,\mathrm{N}\cdot\vec{e}_z$.

Superpozicija sil. Kaj pa če imamo tri ali več nabojev? Kako določimo silo na določen naboj? Določimo jo preprosto s seštevanjem posameznih prispevkov sil. Matematično temu rečemo superpozicija in princip seštevanja sil kot superpozicija sil. Sila na Q_1 bi bila torej enaka vsoti sil med nabojema Q_1 in Q_2, Q_1 in Q_3, Q_1 in Q_4, itd.

$$\vec{F}_{Q_1} = \vec{F}_{Q_2\to Q_1} + \vec{F}_{Q_3\to Q_1} + \vec{F}_{Q_4\to Q_1} + \cdots$$

SLIKA: Primer superpozicije sil.

Primer: Poleg nabojev Q_1 in Q_2 iz gornjega primera imamo še naboj Q_3 = 3 μC, ki se nahaja na mestu T_3(2,3,-3)cm. Določimo (skupno) silo na naboj Q_2.

Izračun: Silo med nabojema Q_3 in Q_2 je nekoliko lažje izračunati, saj je razdalja med nabojema 1 cm (razlika samo v smeri z osi). Ker je en naboj pozitiven drugi pa negativen, bo sila na Q_3 v smeri naboja Q_2, torej v smeri –z osi. Rezultat bo torej

$$\vec{F}_{32}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3Q_2}{r_{32}^2}\vec{e}_{r_{12}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left|3\mu\text{C}\cdot(-5\mu\text{C})\right|}{(4\text{cm})^2}(-\vec{e}_z)=$$

$$=-9\cdot10^9\,\frac{\text{V}\cdot\text{m}}{}\frac{15\cdot10^{-12}\,\text{A}\cdot\text{s}}{16\cdot10^{-4}\text{m}^2}\vec{e}_z=\underline{\underline{-84{,}38\cdot\vec{e}_z\,\text{N}}}$$

Skupni seštevek je

$$\vec{F}_2=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{32}=\underline{\underline{-24{,}7\,\text{N}\cdot\vec{e}_x+74\,\text{N}\cdot\vec{e}_y+59{,}675\,\text{N}\cdot\vec{e}_z}}\,.$$

Dva možna pristopa k računanju Coulombove sile:

1. matematični, pri katerem določimo vektorje $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{12}, \vec{e}_{r_{12}}$ in nato vstavimo v enačbo $\vec{F}_{Q_2}=\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{r_{12}}$. (kot v prvem primeru)
2. z razmislekom, pri čemer posebej določimo smer sile in velikost sile in nato zapišemo $\vec{F}=\vec{e}_F F$. (kot v drugem primeru)

Vprašanja za obnovo:

1) Kdaj je sila med dvema nabojema odbojna in kdaj je privlačna?
2) Razloži Coulombov zakon.
3) Kako določimo razdaljo med nabojema, če sta mesti nabojev podani s koordinatami?
4) Kako tvorimo enotski vektor?
5) Zapišite vektor sile med nabojema.
6) Kako računamo silo na naboj v okolici več nabojev?