18. Energija

Vsebina poglavja: Ponovitev dela in potencialne energije, energija naboja pri preletu polja, potencialna energija sistema nabojev, električna energija v polju kondenzatorja, energija sistema porazdeljenih nabojev, gostota energije, energija pri gibalnih procesih – sila.

Ponovitev: delo električnih sil, potencialna energija, napetost in potencial.

V tem poglavju bomo ponovili določena spoznanja iz poglavja 12 (Delo in energija) in jih nadgradili s celostnim pogledom na pojem energije v elektrostatiki. V poglavju 12 smo spoznali, da je delo električnih sil potrebno za premik naboja Q iz točke T_1 v točko T_2

$$A_{\mathrm{e}} = A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{F}_{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = Q\int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \ .$$

Električna napetost je enaka delu, ki jo enota pozitivnega naboja (1 C) opravi pri premiku iz točke T_1 v točko T_2

$$U = \frac{A_{\mathrm{e}}}{Q} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \ .$$

Hkrati smo ugotovili, da je potencialna energija naboja enaka delu, ki ga opravi zunanja sila pri prenosu iz oddaljenosti (kjer je njegov potencial enak nič) do mesta, kjer se nahaja. Enakovredno lahko rečemo, da je ta energija enaka delu električnih sil za premik z mesta, kjer se nahaja do neskončnosti (kjer je potencial enak nič): $\boxed{W(T) = A_e(T \to T_\infty)}$. Ta definicija pa je hkrati definicija potenciala, le da je definirana s potencialno energijo enote naboja: $V(T) = \dfrac{A_{\mathrm{e}}(T \to \infty)}{Q} = \displaystyle\int_{T}^{T(V=0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

Potencial v okolici osamljenega naboja in energija sistema dveh nabojev

Potencial na razdalji r od osamljenega točkastega naboja Q je $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Da bi na razdaljo r od naboja Q pripeljali naboj Q_2 bi torej potrebovali energijo $W = Q_2 V = Q_2 \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Ali tudi: v sistemu dveh nabojev Q in Q_2 je shranjena potencialna energija $W = \dfrac{Q_2 Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

SLIKA: Delo električnih sil in potencialna energija.

Energija posameznega naboja pri preletu električnega polja.
Če se v električnem polju giblje le en naboj, se njegova potencialna energija poveča ali zmanjša za $\Delta W = Q\Delta V = QU$. Tak primer je na primer gibanje elektrona v električnem polju. Če preleti elektron v smeri polja napetost 20 kV, se bo njegova kinetična energija povečala na račun zmanjšanja potencialne za $\Delta W = QU = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{As}\cdot 20\ \mathrm{kV} = 3{,}2\cdot 10^{-14}\ \mathrm{J}$. Pogosto namesto enote Joule pri zapisu energije osnovnih delcev uporabljamo enoto elektron-volt, kjer je 1 eV = 1,6 10^{-19} J. V tem smislu je kinetična energija delca po preletu polja 20 kV enaka 20 10^3 eV ali 20 keV.

SLIKA: Energija naboja pri preletu polja.

Potencialna energija sistema točkastih nabojev.
Vzemimo, da imamo prostor brez nabojev in torej brez električnega polja. Če želimo v ta prostor prenesti naboj, moramo opraviti delo. V električnem smislu za prenos prvega naboja (Q_1) ni potrebno vložiti nič dela, saj ni nobene električne sile na ta delec. Ko pa želimo v njegovo bližino prenesti naboj Q_2, moramo za to opraviti delo, ki bo $A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q_2 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$,
kjer je r_{12} razdalja med nabojema Q_1 in Q_2.

SLIKA: Elektrenje prostora z vnašanjem nabojev.

Ko prenašamo tretji naboj, mora ta premagovati dvoje sil, tako na naboj Q_1, kot na naboj Q_2. Torej potrebujemo opraviti delo $\dfrac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \dfrac{Q_2 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$, kjer sta r_{12} in r_{23} razdalji med nabojema Q_1 in Q_3 ter Q_2 in Q_3. In tako dalje. To delo se shrani v obliki potencialne energije v pozicijah delcev. Potencialna energija sistema treh nabojev je torej

$$W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}.$$

Zapišimo to vsoto nekoliko drugače:

$$W = \frac{1}{2}Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}\right) + \frac{1}{2}Q_2\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}\right) + \frac{1}{2}Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right).$$

Ugotovimo, da so vrednosti v oklepajih enake potencialom V_1, V_2 in V_3, kjer je V_1 potencial na mestu naboja Q_1, ki ga povzročata naboja Q_2 in Q_3. Enačbo torej lahko zapišemo v obliki:

$$W = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 + \frac{1}{2}Q_3V_3.$$

Očitno bi lahko za sistem n nabojev zapisali potencialno energijo v obliki:

$$W = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 + \frac{1}{2}Q_3V_3 + \cdots + \frac{1}{2}Q_nV_n,$$

oziroma na kratko

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_iV_i},$$

kjer je V_i je potencial na mestu naboja Q_i in ga zapišemo kot vsoto:

$$\boxed{V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{Q_j}{r_{ij}}},$$

kjer so r_ij razdalje med nabojem Q_i in Q_j.

Primer: Določimo energijo sistema treh enako velikih nabojev Q = 20 nC, ki se nahajajo v ogliščih enakostraničnega trikotnika stranice a = 10 cm.

SLIKA: Sistem treh nabojev v ogliščih enakostraničnega trikotnika.

Izračun: Ker so naboji enako veliki in simetrično razporejeni, je tudi potencial na vseh mestih nabojev enako velik. Na mestu naboja Q_1 je enak: $V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{3}\frac{Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{a} + \frac{Q_3}{a}\right) = 2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Energija sistema bo torej

$$W = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 + \frac{1}{2}Q_3V_3 = 3\cdot\frac{1}{2}Q_1V_1 = 3\frac{1}{2}Q2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a},$$ in številčno

$$W = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = 9\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s}}\cdot\frac{3\cdot\left(20\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\right)^2}{0{,}1\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{108\,\mu\mathrm{J}}}.$$

Primer: Koliko dela moramo vložiti za premik naboja iz enega oglišča v sredino med druga dva naboja?
Izračun: Vzemimo zgornji naboj (označen kot Q_3) in ga premaknimo med Q_1 in Q_2. Delo bi lahko določili iz osnovne formule za izračun dela, torej kot $A_e = Q_2 \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$, kjer je E polje na mestu naboja Q_2. Izračunati bi morali polje na mestu naboja (kar v konkretnem primeru ne bi bilo ravno zahtevno) in ga integrirati po poti. Še bolj enostavno pa je določiti delo iz razlike potencialnih energij sistema pred in po premiku:

$$\boxed{A(T_1 \to T_2) = W(T_1) - W(T_2) = W_{začetna} - W_{končna}}.$$

Energijo v začetni legi smo že določili, preostane še izračun v končni legi $W(T_2)$.

$$W(T_2) = W_{končna} = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 + \frac{1}{2}Q_3V_3 = 2\frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_3V_3 =$$
$$= Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a/2}\right) + \frac{1}{2}Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a/2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a/2}\right) = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{5Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Energija sistema se bo po premiku očitno povečala, torej bo delo negativno. To pomeni, da ga bodo morale opraviti zunanje sile. To delo bo enako

$$A = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{5Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \underline{\underline{-72\ \mu\mathrm{J}}}.$$

Energija v polju kondenzatorja.
Tako kot smo potrebovali določeno energijo, da smo v prostor pripeljali naboje, je potrebna določena energija, da naelektrimo kondenzator. V najpreprostejši obliki si lahko kondenzator predstavljamo kar kot dve prevodni telesi. Med njiju priključimo vir napetosti in povečujmo napetost. Z večanjem napetosti med telesoma, se povečuje tudi naboj na telesoma. Pač skladno z enačbo $Q = CU$. Vzemimo sedaj (diferencialno) majhen naboj dQ in ga premaknimo iz enega telesa na drugega, pri čemer je napetost med telesoma U. Sprememba energije bo enaka $\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q \cdot U$. Napetost lahko izrazimo tudi z nabojem in kapacitivnostjo, tako da je diferencial energije enak $\mathrm{d}W = \frac{Q}{C} \cdot \mathrm{d}Q$. Celotno energijo, ki smo jo pridobili z elektrenjem kondenzatorja dobimo z integracijo naboja od začetnega (0), do končnega $Q_{\text{končni}}$:

$$\boxed{W = \int_0^{Q_{končni}} \frac{Q}{C} \cdot \mathrm{d}Q = \frac{Q_{končni}^2}{2C}}.$$

SLIKA: Elektrenje kondenzatorja in graf povečevanja naboja na kondenzatorju z večanjem napetosti med elektrodama.

To je energija v naelektrenem kondenzatorju, ki jo lahko izkoristimo v različne namene. Ni pa nujno, da je to tudi celotna energija, ki jo lahko koristno uporabimo. Del energije se ob razelektritvi lahko porabi tudi znotraj kondenzatorja (baterije) - na njeni notranji upornosti.

Enačbo lahko s pomočjo zveze $Q = CU$ zapišemo tudi v obliki

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}}$$

Primer: Določimo energijo v zračnem ploščnem kondenzatorju kapacitivnosti 20 nF, ki je priključen na enosmerni vir napetosti 60 V. Za koliko procentov se spremeni energija shranjena v kondenzatorju, če razdaljo med ploščama razpolovimo?
Izračun: Električna energija shranjena v kondenzatorju je $W = \frac{CU^2}{2} = \frac{20\ \text{nF} \cdot (60\ \text{V})^2}{2} = \underline{\underline{36\ \mu\text{J}}}$. Iz enačbe za kapacitivnost ploščnega kondenzatorja $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ ugotovimo, da zmanjšanje razdalje med ploščama za polovico predstavlja zvečanje kapacitivnosti za 2x, kar pomeni, da se bo energija povečala za 2x, na 72 mJ, torej za 100%.

Dodatno: Za koliko procentov se bo spremenila energija v kondenzatorju, če pred zmanjšanjem razdalje med ploščama kondenzatorja za polovico odklopimo kondenzator od vira napajanja?
Izračun: Sedaj se ohranja naboj, ki ga je pred odklopom $Q = CU = 20\ \text{nF} \cdot 60\ \text{V} = 1{,}2\ \mu\text{C}$, enako pa tudi po preklopu, saj se naboj ohranja. Torej bo ob 2x večji kapacitivnost ob premiku energija enaka $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(1{,}2\ \mu\text{C})^2}{2 \cdot 2 \cdot 20\ \text{nF}} = \underline{\underline{18\ \mu\text{J}}}$. Energija v kondenzatorju se bo očitno zmanjšala za 2x. Zakaj? ..... Med pozitivno in negativno naelektreno ploščo deluje sila, ki plošči privlači. Če ne bi delovale druge sile (težnosti, lepenja), bi se plošči združili, naboji bi se razelektrili in energija bi se pretvorila v drugo obliko (recimo toplotno). Torej se energija sistema manjša z zmanjševanjem razdalje med elektrodama.

Dodatno: V zračni kondenzator vstavimo dielektrik z relativno dielektrično konstanto 10. Za koliko se poveča energija v kondenzatorju pri ohranitvi priključene napetosti 60 V ali pri konstantnem naboju 1,2 μF.
Izračun: V skladu z izrazom $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ se kapacitivnost kondenzatorja poveča za 10x. V skladu s tem se energija v kondenzatorju pri priključeni napetosti poveča za 10x, v primeru konstantnega naboja pa se zmanjša za 10x.
Vprašanje: Kako razložimo povečanje oz. zmanjšanje energije pri vstavitvi dielektrika?

SLIKA: Energija v kondenzatorju z dielektrikom in brez dielektrika.

Dodatno: Koliko je energija v kondenzatorju, če pri priključeni napetosti vstavimo vanj dielektrični listič debeline, ki je enaka polovici razdalje med elektrodama in ima relativno dielektričnost 6?

Izračun: Spremeni se kapacitivnost $C=\varepsilon_0 \frac{A}{d}$ in sicer tako, da imamo sedaj zaporedno vezavo dveh kapacitivnosti $C_{zraka}=\varepsilon_0 \frac{A}{d/2}$ in $C_{diel}=\varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{A}{d/2}$, torej je $C_{diel}=6.C_{zraka}$ in nadomestna kapacitivnost $C_{nad}=\frac{C_{diel}\cdot C_{zraka}}{C_{diel}+C_{zraka}}=\frac{6C_{zraka}\cdot C_{zraka}}{6C_{zraka}+C_{zraka}}=\frac{6}{7}C_{zraka}=\frac{6}{7}2\cdot C=\frac{12}{7}C$. Kapacitivnost kondenzatorja je po vložitvi dielektrika približno 2x večja (za 12/7) od začetne kapacitivnosti. Ker je priključena napetost fiksna, bo energija po vložitvi lističa večja od prvotne za 12/7 in bo enaka $W=\frac{\frac{12}{7}C\cdot U^2}{2}=\underline{\underline{61,71\,\mathrm{mJ}}}$. Pred vložitvijo dielektričnega lističa pa je bila energija v kondenzatorju 36 μJ. Zakaj se je energija povečala? Ko vstavimo dielektrik med plošči kondenzatorja, se na površini kondenzatorja poveča naboj (ki pride iz vira), ki kompenzira zmanjšanje polja v dielektriku zaradi polarizacije dielektrika.

Dodatno: Kaj pa, če pred vstavitvijo dielektrika odklopimo vir? ..... V tem primeru se bo na ploščama kondenzatorja ohranil naboj (ne bo se povečal), kapacitivnost pa se bo povečala kot smo že izračunali – za 12/7. Energija pa se bo posledično zmanjšala, kar sledi iz $W=\frac{Q^2}{2\cdot\frac{12}{7}C}$, torej za 7/12.

Določitev kapacitivnosti iz energije v kondenzatorju.
Pogosto se gornji izraz uporabi tudi za določitev kapacitivnosti. Če torej znamo energijo ob znani napetosti med elektrodama v kondenzatorju določiti na nek drug način, potem lahko izračunamo kapacitivnost iz $C=\frac{2W}{U^2}$.

Energija elektrostatičnega sistema porazdeljenih nabojev.
Poslužimo se izraza iz prejšnjega odstavka, pri čemer zamenjamo napetost U za potencial V, ki je potencial na mestu diferencialno majhnega naboja dQ:

$\mathrm{d}W=\mathrm{d}Q\cdot V$.

Z integracijo po vseh nabojih in upoštevanju potenciala na mestu teh nabojev je energija elektrostatičnega sistema enaka

$$W = \int_{\text{po vseh Q-jih}} V\mathrm{d}Q\,,$$

kjer lahko pišemo tudi $\mathrm{d}Q = \rho \cdot \mathrm{d}V$ in

$$\boxed{W = \int_{\mathrm{V}} V_{\mathrm{el}} \rho \mathrm{d}V}.$$

Nerodnost te enačbe je, da uporabljamo enak simbol za volumen in potencial. Da bi to razmejili, smo v zadnji enačbi zapisali potencial kot V_{el}.

Gostota energije in energija polja.

Do sedaj smo izračunavali električno energijo iz kapacitivnosti, naboja in napetosti. Ker je vez med napetostjo in nabojem električna poljska jakost, mora obstajati tudi povezava med energijo in jakostjo polja. Vzemimo primer naelektrene krogle z nabojem *Q*, ki je na potencialu *V*. Električna energija, potrebna, da smo zbrali skupaj ta naboj, je enaka $W = \frac{1}{2} QV$.

SLIKA: Energija v polju naelektrene krogle.

V tem smislu bi za postavitev dela naboja pri določenem potencialu potrebovali energijo $\mathrm{d}W = \frac{1}{2} V\mathrm{d}Q$. $\mathrm{d}Q$ lahko izrazimo z uporabo Gaussovega zakona $E \cdot \mathrm{d}A = \mathrm{d}Q / \varepsilon_0$. Diferencial energije pa zapišemo v obliki
$\mathrm{d}W = \frac{1}{2} V(\varepsilon_0 E\mathrm{d}A)$. Poleg tega zapišemo diferencial potenciala kot $\mathrm{d}V = E\mathrm{d}l$, od koder lahko za diferencial energije zapišemo $\mathrm{d}W = \frac{1}{2} E \cdot \mathrm{d}l(\varepsilon_0 E\mathrm{d}A)$ in ker je diferencial volumna enak $\mathrm{d}V = \mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}l$ je $\mathrm{d}W = \frac{1}{2} E\varepsilon_0 E\mathrm{d}V = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$. Z integracijo po volumnu pa dobimo celotno energijo sistema:

$$\boxed{W = \int_V \tfrac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V}$$

Izraz v integralu lahko prepoznam kot **gostoto energije** in ga tako tudi poimenujemo ter uporabimo simbol *w*:

$$\boxed{w = \tfrac{1}{2} \varepsilon_0 E^2}$$

Enota je energija na volumen, torej $\mathrm{J/m^3}$.

Enačba za energijo, ki smo jo zapisali, velja za polje v vakuumu oz. zraku. Če imamo polje v dielektriku, bi do izraza za energijo prišli na podoben način, le z uporabo Gaussovega zakona za dielektrike. V tem smislu bi dobili za energijo

$$W = \int_{Vol} \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 \cdot dV,$$

za diferencial energije pa

$$w = \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 .$$

Bolj splošen izraz, ki pa ga ne bomo izpeljevali je $\boxed{w = \tfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$ oziroma za diferencial gostote energije.

$$\boxed{dw = \vec{E}\cdot d\vec{D}}.$$

Primer: Določimo izraz za energijo ploščnega kondenzatorja površine plošč A in razdalje med ploščama d z uporabo enačbe $W = \int_V \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$.

Izračun: $E = \dfrac{U}{d}$,

$$W = \int_{Vol} \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 \cdot dV = \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 \int_V \mathrm{d}V = \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2 V =$$
$$= \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2 \cdot A\cdot d = \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{U^2}{d}\cdot A = \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{A}{d}\cdot U^2 = \tfrac{1}{2} C\cdot U^2 .$$

Dobimo seveda enak izraz kot smo ga že izpeljali za energijio v polju kondenzatorja. Razlika je le v tem, da znamo sedaj ugotavljati tudi energijo shranjeno v električnem polju, izraženo z gostoto električne energije, ta pa je sorazmerna kvadratu električne poljske jakosti.

Gibalni procesi – sila med na telesa.

1) Primer gibalnih procesov naelektrenih teles brez priključenega vira napetosti.

Vzemimo sistem dveh naelektrenih teles z naboji +Q in -Q. Energija shranjena v električnem polju je enaka $W_e = \dfrac{QU}{2}$. Če dopustimo, da se eno od teles premakne v smeri drugega za neko majhno razdaljo dl, pri tem opravi delo $\mathrm{d}A = \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l}$. To delo se je opravilo na račun zmajšanja električne energije sistema, saj mora veljati, da je vsota opravljenega dela in zmajšane električne energije enaka nič: $\mathrm{d}W_e + \mathrm{d}A = 0$. Če izrazimo delo le v smeri X, bo veljalo: $F_{e,x}\cdot \mathrm{d}x = -\mathrm{d}W_e$ in torej

$F_{e,x} = -\dfrac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x}$. Če se razmere spreminjajo tudi v drugih smereh, je bolj korektno uporabiti parcialni odvod:

$$\boxed{F_{e,x} = -\frac{\partial W_e}{\partial x}}.$$

Enako lahko določimo tudi silo v drugih smereh. V splošnem je torej sila enaka

$$\boxed{\vec{F}_e = \left(-\frac{\partial W_e}{\partial x}, -\frac{\partial W_e}{\partial y}, -\frac{\partial W_e}{\partial z} \right)}.$$

SLIKA: Sila na naelektreno telo.

2) Primer gibalnih procesov pri priključeni napetosti.
V tem primeru je potrebno v energijsko bilanco vključiti tudi energijo, ki pride ali se vrne v vir. Torej bo spremembe energije polja in dela premika enaka spremembi energiji vira:

$$\mathrm{d}W_e + \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}A_g ,$$

kjer smo z $\mathrm{d}A_\mathrm{g}$ označili spremembo energije vira.
Če se bosta telesi ob priključeni napetosti oddaljili za majhno razdaljo, se bo povečala kapacitivnost sistema dveh teles, zato se bo tudi povečal naboj med telesoma za dQ. Ta naboj bo prišel iz vira na račun opravljenega dela $\mathrm{d}A_e = \mathrm{d}QU$. Zaradi povečanja naboja med telesoma se bo povečala tudi energija v polju kondenzatorja:

$$\mathrm{d}W_e = \frac{U}{2}(Q + \mathrm{d}Q) - \frac{U}{2}\mathrm{d}Q = \frac{U}{2}\mathrm{d}Q .$$

Velja torej:

$$\frac{U}{2}\mathrm{d}Q + \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}QU ,$$

torej je

$\vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \dfrac{\mathrm{d}QU}{2} = \mathrm{d}W_e$ od koder sledi

$$\boxed{\vec{F}_e = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}, \frac{\partial W_e}{\partial y}, \frac{\partial W_e}{\partial z} \right)}.$$

Ugotovimo lahko, da se bo ob premiku naboja v polju pri konstantni napetosti polovico dela generatorja porabilo za premik, druga polovica pa za gradnjo električnega polja. Lahko pa je tudi obratno, da vir deluje kot porabnik, torej, da dobi energijo iz gibalnega procesa, na primer, če bi se enako naelektrena naboja približevala.

Silo med telesi je najlažje določiti iz povezave med energijo in kapacitivnostjo....

Primeri iz kolokvijskih in izpitnih nalog:

Primer: Izpit (UNI) 3.12.2001

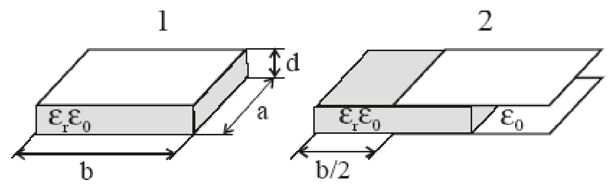
3. Med nadzemni vodnik polmera $\rho_0 = 2\,\mathrm{cm}$ in dolžine $l = 10\,\mathrm{km}$, ki je obešen na višini $h = 10\,\mathrm{m}$, ter zemljo priključimo napetost $U = 150\,\mathrm{kV}$. Kolikšna je električna energija, ki je akumulirana v električnem polju?

3.

$$W_e = \frac{qlU}{2} \quad ; \quad U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2h/\rho_0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln 2h/\rho_0} \quad ; \quad W_e = \frac{\pi\varepsilon_0 l U^2}{\ln 2h/\rho_0} \doteq \boxed{906\,\mathrm{J}}$$

Primer: Kolokvij 21.1.2002.

2. Ploščati kondenzator je priključen na napetostni vir U. Za kolikšen % se spremeni elektrostatična energija shranjena v polju ploščatega kondenzatorja, če dielektrik z relativno dielektričnostjo $\varepsilon_r = 2$ izvlečemo za b/2 (glej skico)?



2.

$$1: \ W_1 = \int_{V_1} w\,dV = \int_{V_1} \frac{1}{2}\varepsilon E^2\,dV = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \int_0^b dx \int_0^a dy \int_0^d dz = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 U^2 ab}{d}\varepsilon_r$$

$$2: \ W_2 = \int_{V_2} w\,dV = \int_{V_2} \frac{1}{2}\varepsilon E^2\,dV = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \int_0^{b/2} dx \int_0^a dy \int_0^d dz + \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \int_{b/2}^{b} dx \int_0^a dy \int_0^d dz = \frac{1}{4}\frac{\varepsilon_0 U^2 ab}{d}(\varepsilon_r + 1)$$

Odgovor: energija se zmanjša za 25%.

Vprašanja za obnovo:
1. Kolikšna je potencialna energija naboja pri preletu električnega polja?
2. Kako izračunamo potencialno energijo sistema točkastih nabojev?
3. Kakšna je povezava med potencialno energijo in delom električnih sil?
4. Kako določimo električno energijo v kondenzatorju?
5. Kako določimo elektrostatično energijo sistema porazdeljenih nabojev?
6. Kako je določena gostota energije?
7. Izračun energije iz gostote energije.
8. Kako določimo silo med naelektrenima telesoma brez in z priključeno napetostjo?

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:

izpit, 8. marec 2005
izpit, 4. februar 2005
izpit, 16. januar 2007
Izpit, 4. 6. 2007
2. kolokvij, 17. 01. 2002
Izpit, 02. 09. 2005
Izpit, 20. aprila 2005
izpit, 6. junij 2001