15. Metoda zrcaljenja

Metoda zrcaljenja se uporablja tudi v arhitekturi. Na sliki najnovejša stavba nove operne hiše v Pekingu.

Vsebina poglavja: Valj nad zemljo z upoštevanjem ekscentričnosti, daljnovodna vrv nad zemljo (zanemaritev ekscentričnosti), polje in površinska gostota naboja na površini zemlje, analiza sistema vrvi nad zemljo, kapacitivnost med vrvjo in zemljo, točkasti naboj ob ozemljeni krogli.

V prejšnjem poglavju smo ugotavljali, da so ekvipotencialne ploskve v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev krožnice oziroma plašči valjev. Ena od krožnic je tudi ravnina med nabojema, v obravnavanem primeru ravnina $x = 0$ (krožnica z neskončnim radijem). Tam je potencial enak nič. Obenem smo ugotavljali, da lahko poljubne ekvipotencialne ploskve okovinimo in s tem ne spremenimo razmer (polja) med okovinjenimi ploskvami. Če je ena od okovinjenih ekvipotencialnih ploskev ravnina $x = 0$, lahko v tem primeru prepoznamo možnost analize vodnika nad prevodno ravnino. Običajno smatramo, da je zemlja dober prevodnik. V tem primeru lahko naelektrene valje nad zemljo (npr. daljnovodne vrvi), smatramo kot valje nad prevodno ravnino. Take strukture analiziramo na način, da naboj zrcalimo preko ravnine, kjer pa »dobi« nasproten predznak.

SLIKA: Zrcaljenje nabojev: točkasti naboj, premi naboj, dipol, linijski na boj, površinski naboj.

Prevodni valj nad zemljo (upoštevanje ekscentričnosti).

Primer prevodnega valja nad zemljo obravnavamo z znanjem iz prejšnjega poglavja. V konkretnem primeru okovinimo ekvipotencialko z radijem r_0 in drugo, ki ima neskončen radij (ravnino v osi Y kjer je potencial enak nič). Tudi ta primer lahko analiziramo z dvema nasprotno naelektrenima premima nabojema. En od teh se nahaja »pod zemljo«, zato pravimo, da **analiziramo primer naelektrenega valja nad zemljo s pomočjo metode zrcaljenja. To pomeni, da moramo v primeru analize premega naboja nad zemljo za izračun postaviti še navideznega zrcalno na ravnino zemlje. Zrcalni naboj ima nasproten predznak od tistega nad zemljo.**

SLIKA: Naelektren valj nad zemljo: okovinjenje ekvipotencialke z radijem r_0 in ravnine x = 0. Desno: sistem dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev, s pomočjo katerega analiziramo primer valja nad zemljo.

Napetost med valjem in zemljo določimo podobno kot v prejšnjem poglavju, le da je sedaj $V(T_2)=0$ in napetost med valjem in zemljo $U=V(T_1)-V(T_2)=V(T_1)=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)$. Razlika med tem izrazom in napetostjo med dvema premima nabojema je le v »polovički«. Lego navideznega naboja določimo enako kot v prejšnjem poglavju: $s=\sqrt{(d/2)^2-r_0^2}$, kjer je d/2 razdalja med geometrijskim središčem valja in zemljo, r_o pa polmer valja.

Daljnovodna vrv nad zemljo (zanemaritev ekscentričnosti)

Primer: 20 m nad zemljo se nahaja daljnovodna vrv polmera 2 cm z nabojem q = 300 nC/m. Določimo napetost med vrvjo in zemljo, električno poljsko jakost na površini zemlje tik nad vrvjo ter površinsko gostoto naboja na zemlji.

SLIKA: Izračun polja na površini zemlje.

<u>Izračun:</u> $d/2 = 20,01\,\mathrm{m}$; $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2} = 20,0099975\,\mathrm{cm}$. Ugotovimo lahko, da je razmak med geometrijskim središčem vrvi in lego nadomestnega naboja praktično zanemarljiv $e = d/2 - s = (20,01 - 20,0099975)\mathrm{cm} \cong 2,5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{cm}$. V tem primeru lahko ekscentrično postavitev navideznega naboja zanemarimo in smatramo, da se navidezni naboj nahaja v geometrijskem središču valja (vrvi). **Za zanemaritev ekscentričnosti mora veljati, da je razdalja od vrvi do zemlje dosti večja od polmera vrvi**: $d \gg r_0$. V praksi lahko vzamemo $d \geq 100 r_0$. V primeru zanemaritve ekscentričnosti se poenostavi tudi izračun napetosti med vrvjo in zemljo, ki je sedaj ($d/2 \simeq s$):

$$\boxed{U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{d - r_0}{r_0}\right)}.$$

Izračunajmo napetost v konkretnem primeru

$$U = \frac{300 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C/m}}{2\pi 8,854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/Vm}} \cdot \ln\left(\frac{40,04\,\mathrm{m}}{0,02\,\mathrm{m}}\right) \cong \underline{\underline{41\,\mathrm{kV}}}.$$

<u>Dodatno:</u> Določimo še polje na površini zemlje. Upoštevati je potrebno oba naboja – originalnega v središču vrvi in zrcalnega z nasprotnim predznakom. Polje na površini zemlje tik pod vrvjo je torej vsota prispevkov obeh nabojev in je enako

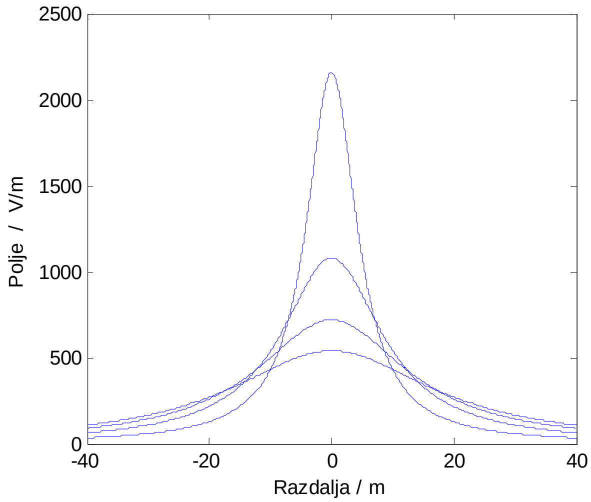
$$\vec{E} = -\vec{e}_y \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \cdot 2 = -\vec{e}_y \frac{300 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C/m}}{\pi\varepsilon_0 20\,\mathrm{m}} \simeq \underline{\underline{-\vec{e}_y 540\ \mathrm{V/m}}}.$$

Koliko pa je površinska gostota naboja na tem mestu? Ugotovili smo že, da je na površini prevodnika $\sigma = \varepsilon_0 E_n$, torej bo $\sigma = \underline{\underline{-4,77 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C/m}}}$.

V poljubni točki na zemlji je polje:

$$\vec{E} = -\vec{e}_y 2 \cdot E \cdot \cos(\alpha) = -2 \cdot \vec{e}_y \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \sqrt{h^2 + x^2}} \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} = -\vec{e}_y \frac{q \cdot h}{\pi\varepsilon_0 \left(h^2 + x^2\right)}$$

To polje je največje na zemlji direktno pod vrvjo in se z oddaljenostjo manjša. Za vizualizacijo se zopet poslužimo programa Matlab.




```
% zrcaljenje1.m
q=300e-9; h=20;
eps0=8.854e-12;

for h=5:5:20
x=-40:0.01*h:40;
E=q*h./(pi*eps0*(x.^2+h^2));
plot(x,E)
hold on
end
xlabel('Razdalja / m');
ylabel('Polje  /  V/m');
```

SLIKA: Električna poljska jakost na površini zemlje za razdalje od zemlje do vrvi 5, 10, 15 in 20 m za naboj na vrvi 30 nC. Bližje zemlji kot se nahaja vrv, večje je polje tik pod vrvjo na zemlji.

Z integracijo površine pod krivuljo polja bi dobili enak rezultat za vse krivulje. Zakaj? Zato, ker je polje na površini sorazmerno gostoti naboja $\sigma = \varepsilon_0 E_n$, z integracijo gostote naboja po površini pa dobimo celoten naboj, ki je po iznosu enako velik kot naboj na vrvi, le nasprotnega predznaka je. To je naboj, ki se inducira na površini zemlje kot posledica naboja na vrvi.

Izračun linijske gostote naboja za različne razdalje od zemlje do vrvi (*h*) in konstantno napetostjo 40 kV:

h / m	*q* / nC/m
5	358
10	322
15	304
20	293

..

Izračun napetosti med vrvjo in zemljo za različne razdalje od zemlje do vrvi in konstantno gostoto naboja 300 nC/m:

h / m	*U* / kV
5	33,5
10	37,3
15	39,4
20	41

Kapacitivnost med vrvjo in zemljo.

Pri konstantni napetosti med vrvjo in zemljo se naboj na vrvi spreminja v odvisnosti od višine vrvi. Bližje kot je vrv površini zemlje, večji je njen naboj. In seveda obratno. Pri konstatnem naboju na vrvi ugotavljamo spreminjanje napetosti z višino vrvi. Zakaj je temu tako? Zato, ker bližje, kot je vrv zemlji, bolj se bodo na površini zemlje pod vrvjo zgostili (influirali) naboji nasprotnega predznaka in večja bo električna poljska jakost na zemlji. Posledično bo višja tudi napetost med zemljo in vrvjo.

SLIKA: Kapacitivnost med vrvjo in zemljo.

Med nabojem na vrvi in napetostjo med vrvjo in zemljo velja linearna zveza:

$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$ oziroma $q = \frac{U\,2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$.

Če zapišemo celoten naboj na dolžini *l* vrvi, dobimo $Q = ql = \frac{U\,2\pi\varepsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$.

Razmerje *Q/U* je konstantno. To konstanto imenujemo kapacitivnost. Kapacitivnost sistema vrvi nad zemljo je torej

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}}.$$

V praksi pogosto za daljnovodne vrvi uporabljamo izraz za kapacitivnost na enoto razdalje, $\boxed{c = C/l = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}}$.

Določimo kapacitivnost daljnovodne vrvi na enoto dolžine v našem primeru:

$$C/l = \frac{300\ \text{nC/m}}{41\,\text{kV}} \cong \underline{\underline{7{,}32\ \text{pF/m}}}.$$

Kapacitivnost smo izračunali iz poznanega naboja in napetosti med vrvjo in zemljo. Ugotovimo lahko, da bi lahko kapacitivnost določili tudi direktno s pomočjo uokvirjene enačbe in da ni odvisna ne od napetosti ne od naboja pač pa le od geometrijskih razmer, torej od razdalje od vrvi do zemlje in njenega polmera. Kapacitivnost je torej geometrijsko pogojena.

Računanje polja in potenciala v okolici daljnovodnih vrvi nad zemljo.

Ugotovili smo, da običajno lahko zanemarimo vpliv ekscentričnosti, in da je napetost med vrvjo in zemljo podana z enačbo $U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$. Če imamo opravka z več daljnovodnimi vrvmi, je smiselno ugotavljati potencial posamezne vrvi, zato poglejmo, kako je sestavljen potencial ene same vrvi:

$V = U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(d-r_0\right) - \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0$. Prvi člen predstavlja potencial, ki ga povzroča zrcalni naboj, drugi člen pa je vpliv naboja na vrvi.

Običajno zanemarimo tudi r_0 v primerjavi z d in dobimo

$$\boxed{V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{r_0}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(d\right) - \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(r_0\right)}.$$

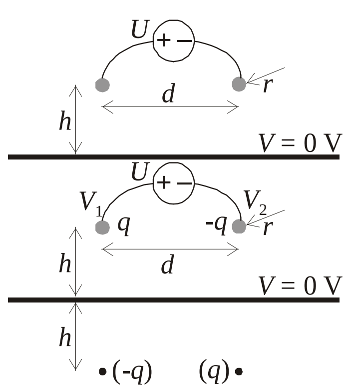
Prvi člen je potencial, ki ga povzroča negativni naboj na mestu pozitivnega od katerega je oddaljen za razdaljo d. Drugi člen je potencial lastnega (pozitivnega) naboja. Da ne bi pri izračunu pozabili, da se pozitivni predznak nanaša na razdaljo od negativnega naboja, lahko enačbo zapišemo tudi v obliki:

$$\boxed{V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{r_0}\right) + \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{d}\right)}.$$

Če je vrvi več, je potrebno seveda sešteti (superpozicija) vpliv vseh na vsako vrv posebej. Če bi na primer imeli nad zemljo dve vrvi, je potencial vsake prispevek štirih premih nabojev: lastne in lastne zrcaljene ter sosed nje in sosednje zrcaljene.

Primer (izpitna naloga 4.2.2005):

Vodnika simetričnega dvovoda dolžine 5 m ležita vzporedno nad ozemljeno prevodno ploščo. Med njiju je priključen vir napetosti U = 400 V. Izračunajte naboja na vodnikih. ($h = 3$ cm, $d = 6$ cm, $r = 2$ mm)



Izračun: Glede na priključitev vira sta vzdolžni gostoti nabojev na vodnikih enakih absolutnih vrednosti, vendar nasprotnih predznakov, ($\pm q$). Polje naboja ozemljene prevodne plošče določata polji zrcalnih nabojev ($\pm q$). Naboja $Q_{1,2} = \pm ql$ vodnikov (dolžine $l = 5$ m) določa napetost vira, ki je enaka razliki potencialov vodnikov: $U = V_1 - V_2$. Njiju zapišemo kot vsoto prispevkov dveh parov nabojev:

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{r} + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{\sqrt{(2h)^2+d^2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2+d^2}}$$

$$V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{d} + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(2h)^2+d^2}}{2h} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r\sqrt{(2h)^2+d^2}}{2hd} = -V_1$$

$$U = V_1 - V_2 = 2V_1 = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2+d^2}} \quad\Rightarrow\quad Q_{1,2} = \pm ql = \pm\frac{\pi\varepsilon_0 lU}{\ln\left(2hd\big/r\sqrt{(2h)^2+d^2}\right)} \simeq \underline{\underline{18{,}2\ \text{nC}}}.$$

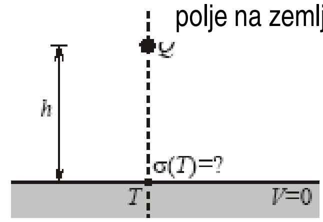
Druge variante možnih izračunov:

a) Dve vrvi sta priključeni na vir napetosti: v tem primeru je na eni vrvi pozitivni, na drugi pa negativni naboj enake absolutne vrednosti.
b) Naboja na vrveh nista priključena na vir napetosti: v tem primeru sta naboja (lahko) različna.
c) Na nevtralnemu vodniku ni naboja: vodnika na katerem ni naboja ne zrcalimo.
d) Vodnik se nahaja v homogenem polju: v tem primeru je poleg ostalih prispevkov potrebno upoštevati še potencial vrvi zaradi homogenega polja (Eh), kjer je h višina vrvi.
e) Zrcalimo tudi točkaste in druge naboje; zrcalni naboji imajo nasprotni predznak.

Domača naloga: kako izračunati polje na zemlji tik ob stebru?

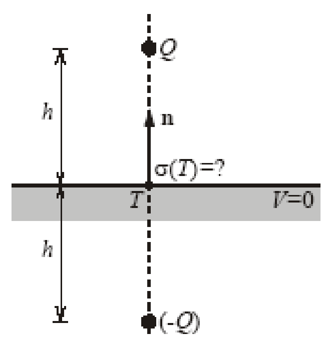
Primer, zrcaljenje točkastih nabojev: kolokvij 17.12.2002

4. Točkasta elektrina množine Q se nahaja na višini h nad zemljo. Kolikšna je ploskovna gostota σ elektrine na površini zemlje v točki T, ki leži navpično pod točkasto elektrino?



4. Ploskovna gostota elektrine na površini zemlje je sorazmerna normalni komponenti električne poljske jakosti tik nad površino: $\sigma(T) = \varepsilon_0 E_n(T_+)$. Pri določanju poljske jakosti upoštevamo še zrcalno elektrino $(-Q)$, ki v točki T_+ povzroča enako polje kot originalna elektrina Q:

$$\overline{E}(T_+) = -2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}\overline{n}\,; \quad \sigma(T) = \boxed{-\frac{Q}{2\pi h^2}}.$$



* Zrcaljenje točkastega naboja na kovinski krogli.

Vzemimo dva točkasta naboja vzdolž X osi. Potencial v točki *T* je

$$V(T)=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Poiščimo točke (ekvipotencialno ravnino), kjer je potencial enak nič. Tedaj bo

$$V(T_0)=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{10}}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{20}}=0\Rightarrow\frac{R_{20}}{R_{10}}=-\frac{Q_2}{Q_1}.$$

Tudi pri razmerju dveh premih nabojev smo dobili, da je razmerje radijev konstantno, ekvipotencialne ploskve pa so bile krožnice oziroma plašči valjev. V tem primeru je ekvipotencialna ploskev krogla s polmerom R_{20}, če je $|Q_1|>|Q_2|$.

Če zapišemo potenciala v dveh točkah na krogli, določimo ekscentrično lego naboja Q_2 znotraj krogle iz $\boxed{e=\frac{r_0^2}{d}}$, kjer je r_0 polmer krogle, d pa razdalja od središča krogle do naboja Q_1. Poleg dobimo zvezo med Q_1 in Q_2: $\boxed{\frac{Q_1}{Q_2}=-\frac{d}{r_0}}$.

SLIKA: Dva točkasta naboja imata ekvipotencialke od katerih je ena krogla s potencialom nič. Polje v okolici naboja, ki se nahaja v bližini ozemljene krogle analiziramo s pomočjo zrcalnega naboja, ki leži ekscentrično od geometrijskega središča krogle.

Primer: Določimo silo na točkasti naboj Q_1 = 10 nC, ki je oddaljen za 10 cm od prevodne ozemljene krogle polmera 8 cm.

Izračun:

$$e=\frac{r_0^2}{d}=\frac{(8\text{ cm})^2}{10\text{ cm}+8\text{ cm}}\simeq\underline{\underline{3{,}556\text{ cm}}}.$$

Naboj Q_2 moramo torej postaviti za 3,556 cm od središča krogle v smeri naboja Q_1. Po velikosti pa mora biti

$$Q_2=-Q_1\frac{r_0}{d}=-10\text{ nC}\cdot\frac{8\text{ cm}}{10\text{ cm}}=-8\text{ nC}.$$

Sila med nabojema (hkrati tudi sila med prevodno naelektreno kroglo in točkastim nabojem) je $F=\left|\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right|=\left|\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0(d-e)^2}\right|=\left|\frac{10\text{ nC}\cdot(-8\text{ nC})}{4\pi\varepsilon_0(18\text{ cm}-3{,}556\text{ cm})^2}\right|\cong\underline{\underline{498\ \mu\text{N}}}$.