14. Okovinjenje ekvipotencialnih ploskev

Vsebina poglavja: polje med okovinjenimi ekvipotencialkami, potencial v okolici dveh premih nabojev, ekvipotencialne ploskve v okolici dveh premih nabojev, dva prevodna valja priključena na napetostni vir, ekscentričnost.

Polje med okovinjenimi ekvipotencialnimi ploskvami.
Dosedanje ugotovitve: Ekvipotencialna ploskev povezuje točke z enako vrednostjo potenciala. Površina prevodnika je ekvipotencialna ploskev. Celo več, celoten prevodnik je na istem potencialu. Običajno rišemo ekvipotencialne ploskve tako, da je med sosednjimi enaka potencialna razlika (napetost). Hitreje, kot se krajevno spreminja potencial, večja je električna poljska jakost. Zgoščenost ekvipotencialnih ploskev nam torej nakazuje večjo električno poljsko jakost na tem mestu. Velja seveda tudi obratno: Večje polje ima posledično bolj zgoščene ekvipotencialne ploskve na tem območju.

Vprašanje: ali se razmere (porazdelitev polja in potenciala) med dvema ekvipotencialnima ploskvama spremenijo, če ekvipotencialni ploskvi okovinimo, pri čemer okovinjena ekvipotencialka ohrani vrednost potenciala ekvipotencialke?
Odgovor je NE, porazdelitev polja med okovinjenima ekvipotencialnika ploskvama se ne spremeni, saj je kovina sama kot prevodnik tudi ekvipotencialna ploskev in če ohrani potencial ekvipotencialke, se razmere ne spremenijo. V nadaljevanju bomo to ugotovitev s pridom uporabili pri mnogih problemih določanja električnega polja.

SLIKA: Porazdelitev ekvipotencialk in okovinjenje ekvipotencialke. Razmere med ekvipotencialkama se ne spremeni.

Sistem dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev.
En pomembnejših primerov, ki ima tudi precejšnjo praktično uporabo, sledi iz okovinjenja ekvipotencialnih ploskev sistema dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev. Torej sistema dveh vzporednih tankih enakomerno naelektrenih žic.

Potencial v okolici ene same preme elektrine je

$$V(T) = \int_T^{T(V=0)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_T^{T(V=0)} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r)\Big|_T^{T(V=0)} .$$

Ugotovimo lahko, da zaidemo v težave, če vzamemo, da je točka, kjer je potencial enak nič v neskončnosti, saj iz enačbe sledi $\ln(\infty)=\infty$. Torej bi bil potencial v neskončnosti neskončen.

Problem je v tem, da imamo pri enem samem premem naboju opravka z enim samim neskončno razsežnim električno nezaključenim sistemom, kar pa v realnosti ni možno. Nekaj, kar v realnosti ni možno, pogosto tudi v teoriji ne da smiselne rezultate. Temu problemu se ognemo tako, da obravnavamo sistem dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev, razmaknjenih za razdaljo *s*.

SLIKA: Dva prema naboja vzdolž X osi.

Vzemimo, da sta naboja položena na X osi simetrično na Y os in potekata vzdolž Z osi. Od Y osi sta oddaljena za razdaljo *s*. Glej sliko. Potencial v točki *T*, ki je od naboja q_1 oddaljena za r_1 in od naboja q_2 za razdaljo r_2, je sedaj vsota prispevkov obeh nabojev:

$$V(T) = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r)\Big|_{r_1}^{T(V=0)} + \frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r)\Big|_{r_2}^{T(V=0)} = -\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r_1) - \frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r_2) + \frac{(q_1+q_2)}{2\pi\varepsilon_0}\ln(T(V=0)),$$

Če velja $q_1 = -q_2 = q$ je tretji člen v gornji enačbi enak nič in potencial enak

$$V(T) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_1 - \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Potencial v točki *T* v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev bo torej enak

$$\boxed{V(T) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$ POTENCIAL V OKOLICI DVEH PREMIH NABOJEV

Sedaj lahko ugotovimo, da je potencial enak nič v neskončnosti (kjer je $r_1 = r_2$), pa tudi vzdolž Y osi (pri $x = 0$).

Ekcipotencialne ploskve polja dveh premih nabojev so krožnice (plašči valjev).

Poskušajmo določiti ekvipotencialne ploskve sistema dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev. To pomeni, da iščemo točke, kjer je $\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = V_{ep}$ oziroma $\frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{V_{ep}2\pi\varepsilon_0}{q}} = k$, kjer je V_{ep} potencial ekvipotencialke.

Če upoštevamo, da je $r_2^2 = (x-s)^2 + y^2$ in $r_1^2 = (x+s)^2 + y^2$ dobimo

$\frac{(x-s)^2+y^2}{(x+s)^2+y^2}=k^2$ in $(x-s)^2+y^2=k^2\left((x+s)^2+y^2\right)$. Po preureditvi lahko enačbo spravimo v obliko

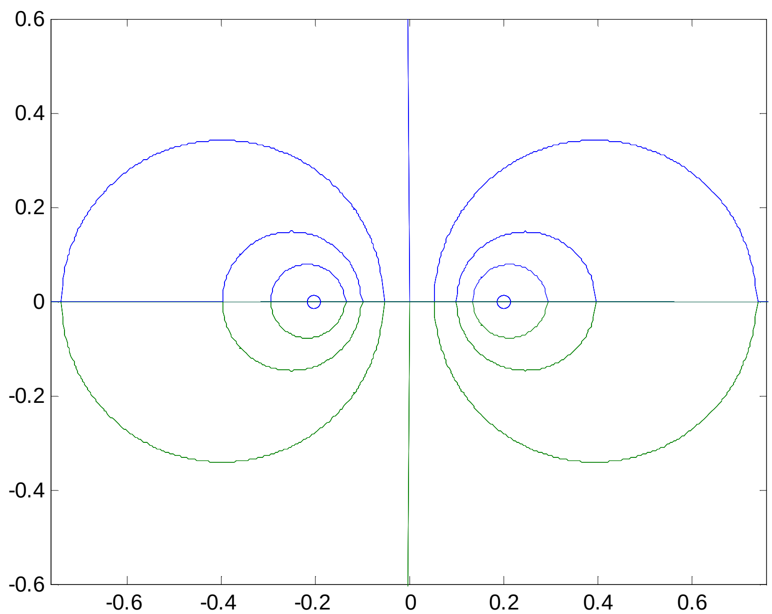
$(x-p)^2+y^2=r^2$. Toje **enačba za krog polmera *r* , ki je zamaknjen v X osi za *p*.** S primerjavo enačb dobimo

$$p=-\frac{k^2+1}{k^2-1}s \text{ in } r=\frac{2k}{\left|k^2-1\right|}s \text{ ter } s^2=p^2-r^2.$$

Primer: Poiščimo potek ekvipotencialne ploskve s potencialom V = 300 V za prema naboja $q=\pm 10$ nC/m, ki sta razmaknjena za 0,4 m.

Izračun:

Določimo konstanti $s=0{,}2$ m, $k=e^{\frac{V_{ep}\cdot 2\pi\varepsilon_0}{q}}\simeq 5{,}31$¨. Sledi p =- 0,215 m in r = 0,078 m. Torej, središče ekvipotencialke se nahaja 0,215 m stran od središčne točke med nabojema, polmer ekvipotencialke pa je 7,8 cm. Pozitivni naboj je od centra ekvipotencialke oddaljen za 1,5 cm, kar tudi imenujemo ekscentričnost.



SLIKA: Ekvipotencialne ploskve izračunane pri vrednostih potenciala V = -300 V, -200V, -100V, 0 V, 100 V, 200 V, 300 V, za prema naboja $q=\pm 10$ nC/m.

```
% ekvipot_2preme.m
q=10e-9; s=0.2;
eps0=8.854e-12;

Veq=[-300,-200,-100,0.001,100,200, 300];
%Veq=[300];
for i=1:length(Veq)
k=exp(Veq(i)*2*pi*eps0/q);
p=-(k^2+1)/(k^2-1)*s;
r=sqrt(p^2-s^2);

x=-5*s:0.01*s:5*s;
lx=length(x);
y=sqrt(ones(1,lx)*r^2-(x-ones(1,lx)*p).^2);
plot(x,y,x,-y); plot(x,y,x,-y);
axis([-3*s 3*s -3*s 3*s]); axis equal;
plot(-s,0,'o');plot(s,0,'o')
hold on
end
```

Dva prevodna valja enakega polmera priključena na vir napetosti.

Namen vsega tega izvajanja ni bil samo določitev ekvipotencialnih ploskev dveh premih nabojev. Šele z okovinjenjem ekvipotencialk dobimo strukture, ki so tudi v realnosti zanimive. Ugotovili smo, da so ekvipotencialke za sistem dveh premih nabojev krogi oziroma plašči valjev, kar pomeni, da je mogoče **z okovinjenjem ekvipotencialk izračunati polje in potencial v okolici dveh naelektrenih valjev s pomočjo sistema dveh premih nabojev.**

Kaj je potrebno narediti? Običajno poznamo napetost med prevodnima valjema, polmer valjev in razdaljo med valjema. Torej je potrebno iz znane napetosti in geometrije določiti lokacijo dveh nadomestnih premih nabojev in njun naboj. Ko to določimo, lahko zelo preprosto določimo tudi polje in potencial v okolici dveh naelektrenih valjev*.

Če analiziramo dve simetrični okovinjeni ekvipotencialki (površina valja), je napetost med njima enaka dvojni vrednosti potenciala ene od njih (na sredini med valjema je potencial enak nič):

$U = V(T_1) - V(T_2) = 2\cdot V(T_1) = 2\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_-}{r_+} = 2\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)$, kjer je r_- razdalja od $-q$ do točke, r_+ pa razdalja od $+q$ do točke. Z upoštevanjem parametrov na sliki je $U = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)$, kjer je r_0 polmer valja, d razdalja med geometrijskima središčema valja, s pa razdalja od središča med nabojema do nabojev $\pm q$. V primeru okovinjenja ekvipotencialnih ploskev torej upoštevamo zamik naboja glede na geometrijsko središče ekvipotencialke. Za ekvipotencialko, ki je površina valja, velja $p = \dfrac{d}{2}$ in $r = r_0$. To vstavimo v zvezo $s^2 = p^2 - r^2$ in določimo s kot $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}$. Iz te enačbe torej lahko določimo lego naboja, ki predstavlja v primeru dveh prevodnih valjev le navidezni naboj znotraj valja. Zamiku nabojev glede na geometrijsko središče valjev pravimo tudi **ekscentričnost** in je podana kot $e = d/2 - s$. Z upoštevanjem zgornje enačbe je $e = \dfrac{d-\sqrt{d^2-4r_0^2}}{2}$.

Postopek izračunavanja je torej sledeč: Če poznamo legi in napetost med dvema prevodnima valjema, lahko lego nadomestnih premih nabojev določimo s pomočjo zveze

$$\boxed{s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}}, \text{ ali tudi } e = \frac{d-\sqrt{d^2-4r_0^2}}{2}.$$

kjer je s razdalja od središča med valjema (kjer je potencial enak nič) do lege nabojev. Velikost naboja pa določimo iz enačbe za napetost

$$\boxed{U = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)}.$$

* V resnici tega naboja ni, saj znotraj valja ni polja. Lahko pa analiziramo polje v okolici dveh valjev z določitvijo polja v okolici dveh premih nabojev. Smiselne rešitve so le v prostoru zunaj in na površini dveh valjev. Znotraj prevodnih valjev je pač polje enako nič.

Primer: Naelektrena valja polmera 4 cm sta razmaknjena za 10 cm. Med valjema je napetost 20 kV. Določimo lego in velikost navideznih nabojev.

Izračun: $d = 10\text{ cm} + 2\cdot 4\text{ cm} = 18\text{ cm}$. $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{2}\right)^2 - 4^2}\text{ cm} \cong 8{,}06\text{ cm}$.

$20\text{ kV} = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{8{,}06+9-4}{8{,}06-9+4}\right)$, od koder sledi $q = \underline{\underline{3{,}833\ 10^{-7}\text{ C/m}}}$.

Določimo še polje na sredini med valjema:

$$\vec{E} = \vec{e}_x \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 s}\cdot 2 = \vec{e}_x \frac{3{,}833\cdot 10^{-7}\text{ C/m}}{\pi\varepsilon_0 8{,}06\cdot 10^{-2}\text{ m}} \simeq \underline{\underline{171\text{ kV/m}}}.$$

In kolikšno bi bilo za primerjavo polje med ravnima ploščama azmaknjenima za 10 cm in priključenima na napetost 20 kV? $E = \frac{U}{d} = \frac{20\text{ kV}}{0{,}1\text{ m}} = 200\text{ kV/m}$. Ugotovimo, da je polje na sredini med valjema manjše od polja enako razmaknjenih vzporednih plošč. Je pa zato večje polje na površini valjev. Določite ga sami!

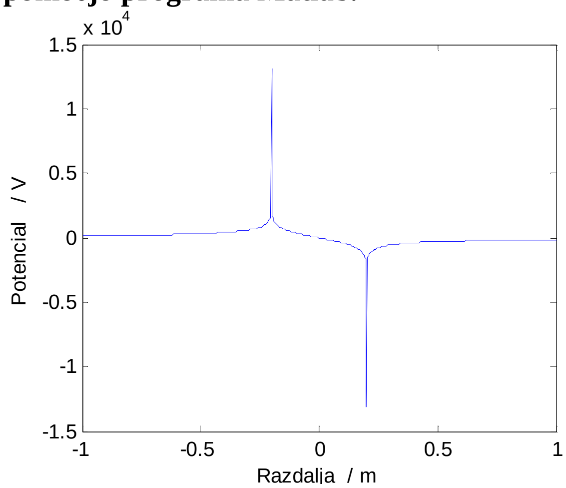
Druge strukture, ki jih lahko analiziramo z okovinjenjem ekvipotencialk dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev:

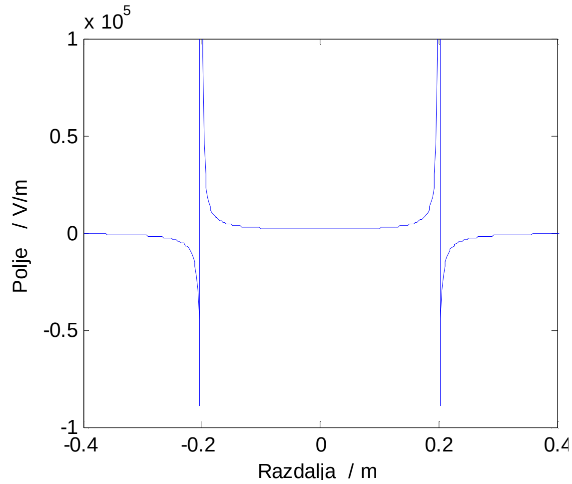
a) dva valja z različnima polmeroma
b) en valj v drugem (koaksialni kabel z ekscentrom)
c) valj nad prevodno ravnino – zemljo

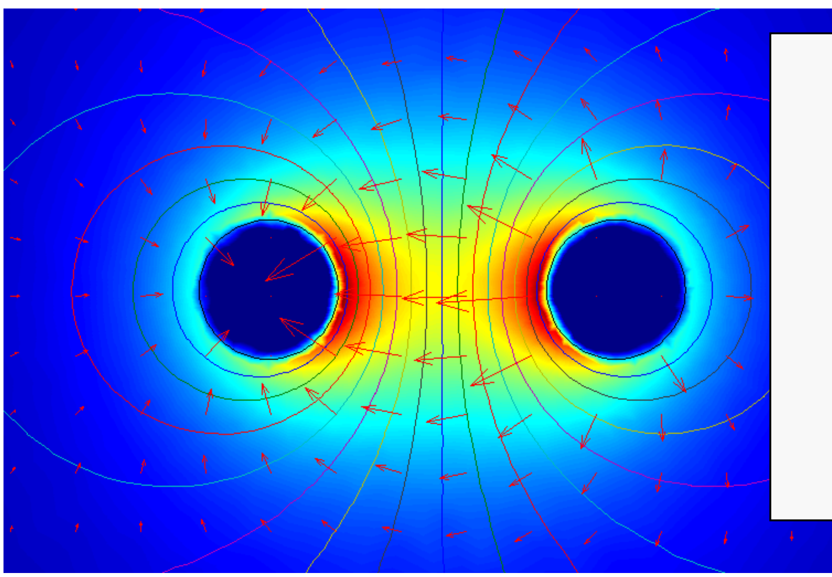
Posebno zanimiv je tretji primer, primer valja nad zemljo. Gre namreč za pomembno strukturo, ki jo pogosto srečamo v našem vsakdanu in je za elektrotehnika še posebno zanimiva – za daljnovodno žico nad zemljo. To bomo obravnavali v posebnem (naslednjem) poglavju.

SLIKA: Primeri možne analize struktur izhajajočih iz okovinjenja ekvipotencialk nasprotno naelektrenih premih nabojev.

Izračun potenciala in polja vzdolž osi X za dva prema nasprotno naelektrena naboja s pomočjo programa Matlab.







```
% pot_2preme.m
q=10e-9; s=0.2;
eps0=8.854e-12;

x=-5*s:0.01*s:5*s;

r1=x+s; r2=x-s;
V=q/(pi*eps0)*log(r2./r1)

E=q/(2*pi*eps0)*(1./r1-1./r2)
plot(x,V);
xlabel('Razdalja  / m');
ylabel('Potencial   / V');
figure;
plot(x,(E)); axis([-2*s 2*s -1e5 1e5])
xlabel('Razdalja  / m');
ylabel('Polje   / V/m');
```

Vprašanja za obnovo:

1. Ali se spremeni polje, če okovinimo ekvipotencialni ploskvi?
2. Kako določimo potencial v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev?
3. Kakšne oblike so ekvipotencialne ploskve polja dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev?
4. Kako uporabimo dva prema naboja pri izračunu polja v okolici dveh naelektrenih valjev?
5. Kaj je to ekscentričnost in kako jo določimo?
6. Kakšne strukture lahko analiziramo z uporabo principa okovinjenja ekvipotencialk?