11. Zveza med E in V

Vsebina poglavja: povezava med električno poljsko jakostjo in potencialom, smer polja v smeri zmanjševanja potenciala, gradient polja, izračun gradienta v različnih koordinatnih sistemih, ocena velikosti polja glede na porazdelitev potenciala (ekvipotencialnih ravnin).

Izračun električno poljske jakosti iz električnega potenciala.
Če poznamo porazdelitev električnega polja v prostoru, lahko z integracijo polja izračunamo potencial v poljubni točki (definicija potenciala):

$$V(T) = \int_{T}^{T(V=0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \ .$$

Vprašajmo se, ali lahko tudi iz znane porazdelitve potenciala določimo električno polje? Odgovor je seveda pritrdilen, uporabiti pa je potrebno nasprotno operacijo od integracije.[*] Najprej zapišemo diferencial potenciala kot $\mathrm{d}V = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$. Vzdolž ekvipotencialne ploskve je električna poljska jakost enaka nič. Torej mora biti (je) električna poljska jakost pravokotna na ekvipotencialne ploskve:[†]

$$\boxed{\vec{E} = \vec{e}_n E_n = -e_n \frac{\partial V}{\partial n}},$$

kjer je $\vec{e}_n$ normala na ekvipotencialno ploskev.

SLIKA: Električna poljska jakost kaže v smeri upadanja potenciala in je torej pravokotna na ekvipotencialne ravnine.

---

[*] Iz matematičnega priročnika lahko ugotovimo sledečo zvezo: $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t) \cdot dt = f(x)$. Glede na definicijo potenciala bi lahko pisali tudi $V(T) = -\int_{T(V=0)}^{T} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{T(V=0)}^{T} \left(E_x \cdot dx + E_y \cdot dy + E_z \cdot dz\right)$, od koder sledi $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, itd.

[†] $\frac{\partial}{\partial x}$ ponazarja parcialen odvod po x-ju. Razlika med totalnim odvodom $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ in parcialnim je v tem, da pri parcialnem odvodu odvajamo izraz parcialno, torej le po eni spremenljivki (v konkretnem primeru po x-u), vse ostale spremenljivke pa so v smislu odvajanja konstante.

Če želimo ugotoviti velikost polja v smeri koordinat, uporabimo parcialno odvajanje po posameznih koordinatah:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Če združimo posamezne komponente polja v vektor električne poljske jakosti, ga v kartezičnih koordinatah zapišemo kot[‡]
:

$$\boxed{\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)}.$$

Za cilindrični koordinatni sistem velja $\vec{E} = \left(E_r, E_\varphi, E_z\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \varphi}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$.

Za sferični koordinatni sistem velja $\vec{E} = \left(E_r, E_\vartheta, E_\varphi\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \vartheta}, \frac{\partial V}{r \sin(\vartheta) \partial \varphi}\right)$.

SLIKA: Večja gostota ekvipotencialnih ravnin pomeni večjo električno polje na tistem mestu, oziroma, zgoščenost ekvipotencialnih ploskev je merilo za velikost polja.

[‡] Enačbo $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ lahko zapišemo tudi kot $\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V$, kjer zapis v oklepaju imenujemo operator odvajanja, ki ga imenujemo nabla in pišemo s simbolom $\vec{\nabla}$ ali pa z imenom grad (za gradient). Zvezo med potencialom in poljem lahko torej zapišemo kot $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\mathrm{grad}(V)$. Gre torej za operator, ki skalarnemu polju priredi vektorsko na tak način, da kaže v smeri zmanjšanja potenciala, po velikosti pa je enak (krajevni) hitrosti spreminjanja polja.

Primer: Električni potencial v prostoru je določen z enačbo $V(x,y,z)=4\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}xy-3\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}z^2$. Določimo električno poljsko jakost v poljubni točki prostora ter v točki T(1 m, 2 m, 3 m).

Izračun:

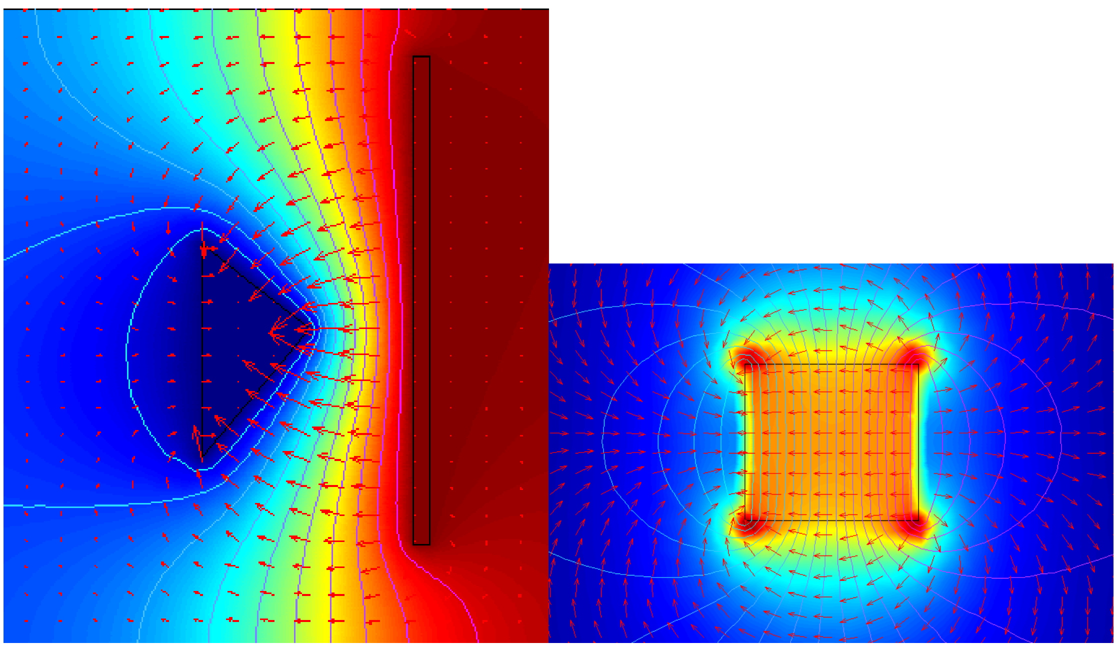
$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-4\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}y$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-4\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}x$$

$$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-(-2\cdot 3\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}z)=6\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}z$$

$$\vec{E}(x,y,z)=\underline{\underline{\left(-4y,-4x,6z\right)\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}}}$$

$$\vec{E}(1\,\mathrm{m},2\,\mathrm{m},3\,\mathrm{m})=\underline{\underline{\left(-8,-4,18\right)\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}}.$$



SLIKA: Električna poljska jakost kaže smer in hitrost upadanja potenciala. Primera polja klinaste elektrode ob ravni elektrodi in polja med ravnima ploščama. Na levi sliki so poljeg vektorjev polja prikazane še ekvipotencialne ravnine ter potencial v barvni lestvici. Na desni sliki pa so zaradi lažjega opazovanja vektorji polja normirani, velikost polja pa prikazuje barvna lestvica. Poleg tega so prikazane ekvipotencialne ravnine.

Vprašanja za obnovo:

1. Kako določimo potencial iz znane porazdelitve polja?
2. Kako določimo polje iz znane porazdelitve potenciala?
3. Kako bi iz porazdelitve ekvipotencialnih ploskev razbrali velikost in smer polja?
4. Kako bi skicirali silnice polja in gostotnice iz porazdelitve ekcipotencialnih ploskev?
5. * Kako zapišemo povezavo med poljem in potencialom za različne koordinatne sisteme?