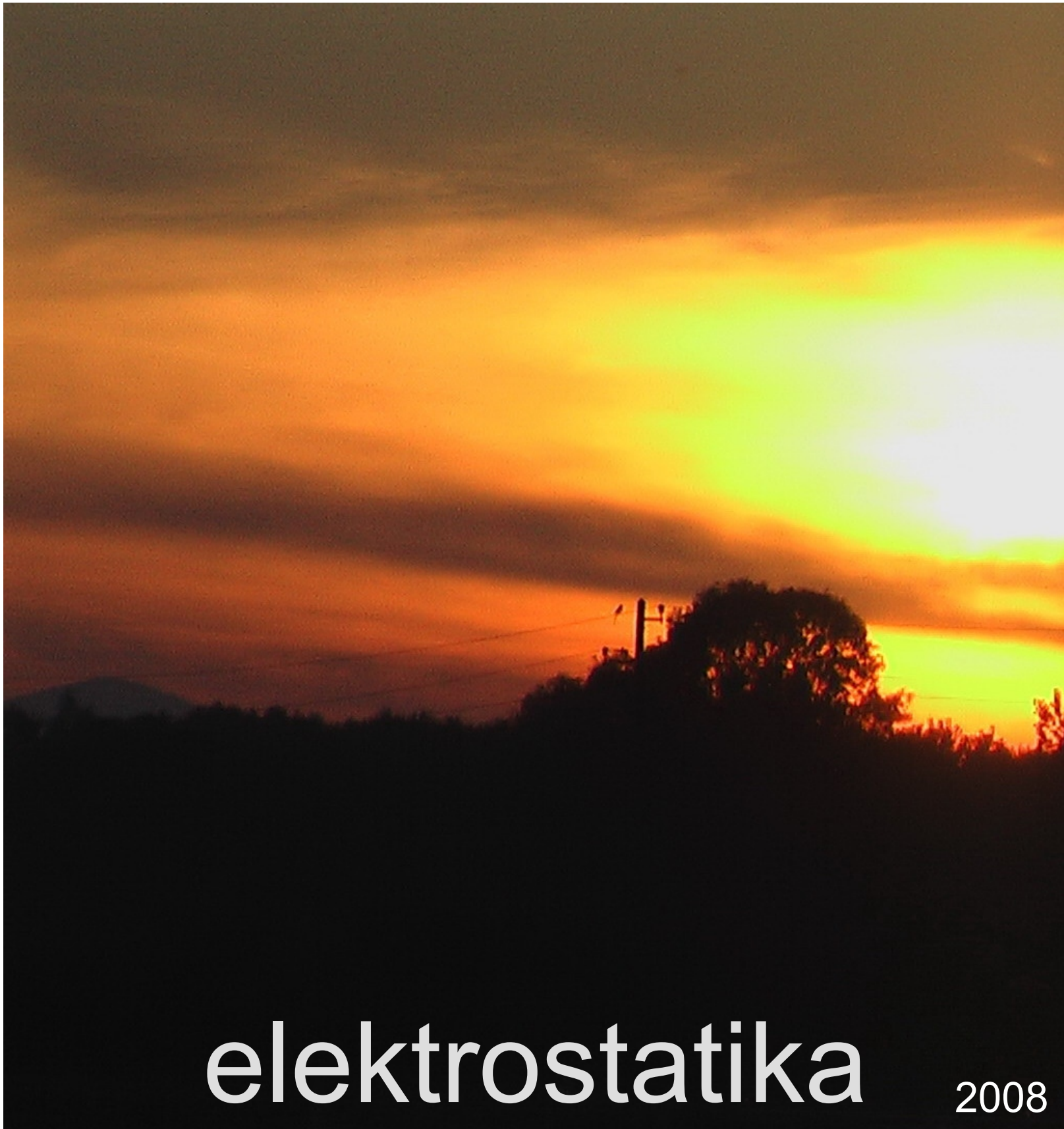


OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I



elektrostatika

2008

DEJAN KRIŽAJ

Spoštovani študenti!

Pred vami je skripta, ki jo lahko uporabljate za lažje spremljanje predavanj pri predmetu Osnove elektrotehnike 1 na visokošolskem študiju na Fakulteti za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani. Sestavljena je kot zbirka mojih priprav na predavanja.

Skripta večinoma ne vsebuje slikovnega materiala, razen v posebnih primerih. Je pa v njej rezerviran določen prostor, kjer lahko narišete ustrezno sliko, ki ste jo že narisali na predavanjih. Na ta način si lahko z nekoliko lastne aktivnosti pripravite literaturo, primerno za pripravo na izpit.

Skripta je neke vrste delovni zvezek. Vsebuje teorijo, primere, napotke za obnavljanje znanja, dodatne naloge, poleg tega pa še usmerja k uporabi spleta za dopolnjevanje znanja.

Poleg »standardnega« teksta z razlagami osnovnih električnih pojavov in pojmov ter njihovega matematičnega zapisa sem dodal nekaj primerov uporabe Matlaba za izračun in vizualizacijo polja. Več primerov si lahko ogledate na spletni strani na <http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE/OE.html>. Predlagam, da tudi sami poskusite uporabiti Matlab ali pa kakšen soroden program. Na spletu so na voljo tudi brezplačni programi, ki tudi omogočajo zelo kakovostno delo. Poglejte na primer možnosti programov FreeMat (http://freemat.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page) ali Octave (www.gnu.org/software/octave).

Poleg analitične obravnave smo uporabili tudi programe za numeričen izračun električnega polja. Ta je posebno primeren za vizualizacijo polja, je pa tudi pogost način dela v praksi. V delu je uporabljen komercialen programski paket Femlab (www.comsol.com), za študentsko delo pa so primerni tudi drugi nekomercialni programi (npr. Quickfield ali Maxwell SV).

Pri predmetu OE1 imate možnost izdelati seminarsko nalogo. To ni obveznost, se pa uspešno izvedena seminarska naloga upošteva pri končni oceni (izpitu). Primeri možnih nalog so na strani <http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE/OE.html>, lahko pa predlagate tudi svojo.

Na spletni strani <http://torina.fe.uni-lj.si/oe/> se nahaja osnovna stran predmetov OE1 in OE2, kjer najdete tudi povezave na zbirko rešenih izpitnih in kolokvijskih nalog, ki so izdatno opremljene z rešitvami. To je gradivo, ki vam ga toplo priporočam kot študijsko gradivo, predvsem kot priprava za pisni del izpita in kolokvije.

Za boljšo komunikacijo s študenti in med študenti se poslužujte Foruma, ki smo ga odprli posebno v ta namen: <http://torina.fe.uni-lj.si/~oe/forum/>

Poleg te skripte obstaja veliko knjižnega gradiva, ki je primeren kot študijsko gradivo. Krajši spisek je na strani <http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE>.

Pa še to: verjetno ste se za študij elektrotehnike odločili zato, ker vas to področje zanima. Če boste iz tega izhajali, ste na pravi poti. Predmet Osnove elektrotehnike I vam bo dal znanja s katerimi boste razumeli osnovne koncepte, ki jih uporabljamo za razlago in seveda izkoriščanje električnih pojavov.

Uspešen študij,

Dejan Križaj, 2008

VSEBINA

Poglavja 1 - 5 so v skripti Osnove elektrotehnike 1: enosmerna vezja

6. COULOMBOV ZAKON
7. ELEKTRIČNA POLJSKA JAKOST
8. PORAZDELITEV NABOJA
9. KOORDINATNI SISTEMI
10. ELEKTRIČNA POLJSKA JAKOST PORAZDELJENIH NABOJEV
11. GAUSSOV ZAKON
12. DELO IN ENERGIJA ELEKTROSTATIČNEGA POLJA
13. POTENCIAL IN NAPETOST
14. PREVODNIK V POLJU
15. ZVEZA MED E IN V
16. GIBANJE NABOJEV V ELEKTRIČNEM POLJU
17. ELEKTRIČNI DIPOL
18. OKOVINJENJE EKVIPOTENCIALNIH RAVNIN
19. METODA ZRCALJENJA
20. KAPACITIVNOST
21. DIELEKTRIK V ELEKTRIČNEM POLJU
22. KONDENZATOR
23. ENERGIJA
24. ČASOVNO KONSTANTNO TOKOVNO POLJE
25. VIRI NAPETOSTI

6. Coulombov zakon

Vsebina: sila med točkastima nabojema, dielektrična konstanta vakuumu, vektorski zapis sile, superpozicija sil.

Že stari grki so ugotovili, da med naelektrenimi telesi deluje sila, ki jo je William Gilbert leta 1600 v znameniti knjigi *De Magnete* poimenoval električna sila. Kljub znanstvenim raziskavam je preteklo kar nekaj časa, da je bila dognana zveza med velikostjo sile in nabojem, ki to silo povzročajo.

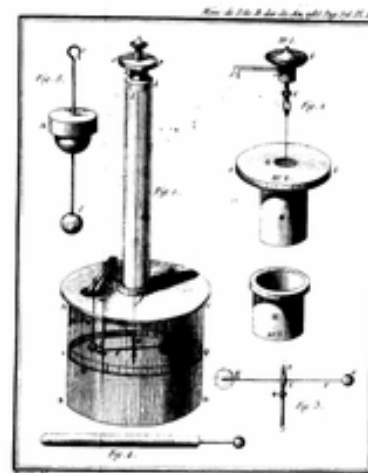
Osnovno zakonitost je s pomočjo eksperimenta s torzijsko tehtnico dognal Charles Augustin de Coulomb. Ugotovil je, da je sila med dvema naelektrenima kroglicama proporcionalna produktu nabojev in inverzno proporcionalna kvadratu razdalje med kroglicama. Matematično to zapišemo kot

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

kjer je k konstanta. Odvisna je od izbire merskega sistema. V sistemu merskih enot, ki je v veljavi dandanes (SI), velja

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ in je približno enaka } k \cong 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}}.$$

ϵ_0 imenujemo dielektrična konstanta vakuumu* in je enaka $\epsilon_0 \cong 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$.



Coulombova torzijska tehtnica s katero je izvajal poskuse in ugotovil povezavo med nabojem in silo.

Da bi bila enačba točna, morata biti kroglici čim manjši. Eksaktno enačba velja le za tako imenovane **točkaste elektrine**.

To je čista matematična formulacija, saj točkastih nabojev v naravi ni. Še tako majhen naboj ima določen polmer, četudi majhen†. Je pa koncept točkaste elektrine (točkastega naboja) zelo pomemben v elektrotehniki in z njegovo pomočjo izpeljemo izraze za silo med naelektrenimi telesi.

Primer: Določimo električno silo med dvema točkastima nabojema $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ in $Q_2 = 5 \mu\text{C}$, ki sta oddaljena za 1 cm.

Izračun:

$$\text{Sila je } F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{2 \mu\text{C} \cdot 5 \mu\text{C}}{(0,01 \text{ m})^2} = \underline{\underline{900 \text{ N}}}.$$

Iz rezultata lahko ugotovimo, da smo enoto N(ewton) kar pripisali, saj bi po izvajanju morala biti enota za silo VAs/m. To tudi je ekvivalentna enota za silo, le da je bolj običajno, da silo izrazimo z enoto iz mehanike, newtnom (njutnom).

Izračun sile med točkastimi naboji je torej preprost. Potrebno pa je poudariti, da je sila vektorska veličina, saj ima poleg velikosti tudi smer. Kot smo že omenili, je smer sile taka, da se enako naznačena naboja odbijata, nasprotno naznačena pa privlačita. To pravilo moramo le

* Pogosto tudi zrak smatramo za prostor brez nabojev, v katerem določamo silo med naboji na enak način kot v vakuumu. Kasneje bomo ugotovili, da je za izračun sil in električnega polja v različnih medijih potrebno upoštevati vpliv samega medija. Ta vpliv opišemo z relativno dielektrično konstanto. Za vakuumu je ta 1, za zrak pa 1,00059.

† Polmer elektrona je $2,8179 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

še zapisati v matematični obliki in ga upoštevati pri izračunu sile. Pri tem si pomagamo z vektorskim zapisom. Silo zapišemo kot vektor, hkrati pa z vektorji zapišemo tudi pozicije mest, kjer se naboji nahajajo.

SLIKA: Odbojna in privlačna sila med naboji.

Imejmo točkasta naboja Q_1 in Q_2 , ki se nahajata v točkah T_1 in T_2 , kjer je točka T_1 določena s koordinatami (x_1, y_1, z_1) in T_2 z (x_2, y_2, z_2) . Vektor iz koordinatnega izhodišča do točke T_1 označimo z $\vec{r}_1$ in ima komponente (x_1, y_1, z_1) ter $\vec{r}_2$ s komponentami (x_2, y_2, z_2) . Določimo še vektor, ki kaže iz točke T_1 v točko T_2 . Ta je $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ oziroma $\vec{r}_{12} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Da bi izračunali vektor sile, moramo velikosti sile, določeni z enačbo $F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, dodati še smer. Smer sile, ki jo naboj Q_1 povzroča na naboj Q_2 bo v smeri vektorja $\vec{r}_{12}$. Potrebujemo torej vektor, ki kaže v smeri vektorja $\vec{r}_{12}$, njegova velikost pa je 1. Ta vektor imenujemo **enotski vektor** in ga dobimo tako, da vektor $\vec{r}_{12}$ delimo z njegovo absolutno vrednostjo (velikostjo): $\vec{e}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$.

Silo na Q_2 , ki jo povzroča naboj Q_1 zapisana v vektorski obliki je

$$\vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}}. \text{ To enačbo imenujemo Coulombov zakon.}$$

Zapisana sila je sila na naboj Q_2 , če pa želimo izraziti silo na naboj Q_1 moramo obrniti vektor $\vec{r}_{12}$ oziroma upoštevati $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

SLIKA: Sila med nabojema Q_1 in Q_2 .

Primer: Določimo električno silo med točkastima nabojema $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ in $Q_2 = -5 \mu\text{C}$. Q_1 se nahaja v točki $T_1(1,0,2)$ cm, naboj Q_2 pa v točki $T_2(2,3,1)$ cm.

Izračun: Zapišimo točki z vektorjema $\vec{r}_1$ in $\vec{r}_2$ ter tvorimo vektor $\vec{r}_{12} = (2-1, 3-0, 1-2)$ cm = $(1, 3, -1)$ cm. Enotski vektor dobimo tako, da delimo vektor z njegovo absolutno vrednostjo.

$$|\vec{r}_{12}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} \text{ cm} = \sqrt{11} \text{ cm}$$

$$\text{in } \vec{e}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{(1, 3, -1) \text{ cm}}{\sqrt{11} \text{ cm}} = \frac{(1, 3, -1)}{\sqrt{11}}.$$

Sila na naboj Q_2 je torej

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mu\text{C} \cdot (-5\mu\text{C})}{11\text{cm}^2} \frac{(1, 3, -1)}{\sqrt{11}} = \\ &= -9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{11 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} \frac{10^{-11} \text{A} \cdot \text{s}}{\sqrt{11}} \frac{(1, 3, -1)}{\sqrt{11}} \cong \underline{\underline{-24,7 \cdot (1, 3, -1) \text{ N}}} \end{aligned}$$

Rezultat je negativen, torej sila kaže v nasprotno smer kot vektor $\vec{r}_{12}$, kar je seveda pravilno, saj sta naboja nasprotnega predznaka in se torej privlačita. Kolikšna je komponenta sile v smeri določene osi? Pomnožimo komponente z 24,7 in dobimo:

$$\vec{F}_{12} \cong -24,7 \text{ N} \cdot \vec{e}_x - 74 \text{ N} \cdot \vec{e}_y + 24,7 \text{ N} \cdot \vec{e}_z.$$

Superpozicija sil. Kaj pa če imamo tri ali več nabojev? Kako določimo silo na določen naboj? Določimo jo preprosto s seštevanjem posameznih prispevkov sil. Matematično temu rečemo superpozicija in princip seštevanja sil kot superpozicija sil. Sila na Q_1 bi torej bila enaka vsoti sil med nabojem Q_1 in Q_2 , Q_1 in Q_3 , Q_1 in Q_4 , itd.

$$\vec{F}_{Q_1} = \vec{F}_{Q_2 \rightarrow Q_1} + \vec{F}_{Q_3 \rightarrow Q_1} + \vec{F}_{Q_4 \rightarrow Q_1} + \dots$$

Primer: Poleg nabojev Q_1 in Q_2 iz gornjega primera imamo še naboj $Q_3 = 3 \mu\text{C}$, ki se nahaja na mestu $T_3(2,3,-3)\text{cm}$. Določite skupno silo na naboj Q_2 .

Izračun: Silo med nabojem Q_3 in Q_2 je nekoliko lažje izračunati, saj je razdalja med nabojem 1 cm (razlika samo v smeri z osi), ker je en naboj pozitiven drugi pa negativen, bo sila na Q_3 v smeri naboja Q_2 , torej v smeri $-z$ osi. Rezultat bo torej

$$\begin{aligned} \vec{F}_{32} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q_2}{r_{32}^2} \vec{e}_{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|3\mu\text{C} \cdot (-5\mu\text{C})|}{(4\text{cm})^2} (-\vec{e}_z) = \\ &= -9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{16 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} \frac{15 \cdot 10^{-12} \text{A} \cdot \text{s}}{\sqrt{11}} \vec{e}_z = \underline{\underline{-84,38 \cdot \vec{e}_z \text{ N}}} \end{aligned}$$

Skupni seštevek je

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} = \underline{\underline{-24,7 \text{ N} \cdot \vec{e}_x - 74 \text{ N} \cdot \vec{e}_y + 59,675 \text{ N} \cdot \vec{e}_z}}.$$

Prepoznali smo dva možna pristopa k računanju Coulombove sile:

1. matematični, pri katerem določimo vektorje $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{12}, \vec{e}_{r_{12}}$ in nato vstavimo v enačbo

$$\vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}}. \text{ (prvi primer)}$$

2. z razmislekom, pri čemer posebej določimo smer sile in velikost sile in nato zapišemo

$$\vec{F} = e_F F. \text{ (drugi primer)}$$

Vprašanja:

- 1) Kdaj je sila med dvema nabojema odbojna in kdaj je privlačna?
- 2) Razloži Coulombov zakon.
- 3) Kako določimo razdaljo med nabojema, če sta mesti nabojev podani s koordinatami?
- 4) Kako tvorimo enotski vektor?
- 5) Zapišite vektor sile med nabojema.
- 6) Kako računamo silo na naboj v okolici več nabojev?

ELEKTROSTATIČNI GENERATORJI

Zgodovina

Že Grki (**Thales iz Mileta, 6 st.**) so poznali lastnost jantarja; da privlači druge predmete, kadar ga podrgnemo ob blago ali krzno. Znanstvene temelje opazovanjem elektrike pa je postavil šele **William Gilbert (1544-1603)**, ki je leta 1600 izdal znamenito knjigo *De Magnete*. V njej je predvsem raziskal magnetne pojave, med drugim pa je tudi prvi uporabil besedo *electricus* - elektrika (beseda izhaja iz grščine in pomeni jantar). Lastnost, da je mogoče z drgnjenjem ločevati naboj, je uporabil **Otto von Gureicke**, ki je leta **1663** izdelal preprosto napravo v obliki krogle iz žvepla. Izdelal jo je tako, da je staljeno žveplo vliv v stekleno bučko in jo razbil, ko se je žveplo strdilo. Kasneje je ugotovil, da tudi samo steklo daje podobne učinke.



Nadaljnji razvoj je vodil v smer učinkovitejšega pridobivanja električne energije. Znana je vrsta naprav za "proizvodnjo električne energije". V osnovi vse temeljijo na dveh principih ločevanja naboja: s pomočjo triboelektrike (ločevanja nabojev z drgnjenjem) ter elektrostatične influence (privlaka nasprotno predznačenih nabojev). Več o tem v nadaljnjih predavanjih.



Poleg čisto znanstvenih raziskav je bilo zelo popularno uporabljati generatorje elektrike v praktične namene. Ena bolj zabavnih uporab je bil t.i. električni poljub. Našle pa so se tudi druge »ekstotične« uporabe, kot na primer zdravljenje zobobola.

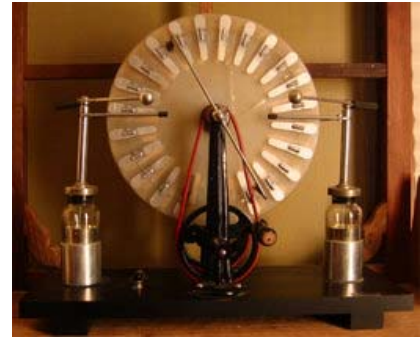


Osnovna karakteristika prvih elektrostatičnih generatorjev je bila, da so omogočali doseganje precej visokih napetostih, tok, pa je bil relativno majhen ali pa kratkotrajen (razelektritev). Problem je predstavljajo shranjevanje nakopičenega naboja. Pri doseženi visoki napetosti je namreč prišlo do razelektritve naboja v zraku (preboja).

Velik napredek pri shranjevanju naboja je bila iznajdba kondenzatorja. Zaslugo za to ima prof. **Musschenbroek**, ki je leta **1745** opazil, da se je učinek elektrostatičnega generatorja močno povečal, če je v roki držal steklenico (t.i. **Leidenska steklenica**), v notranjost katere je bil v vodo potisnjen en kontakt od generatorja. (Več o tem v poglavju o kondenzatorjih). Z vezavo več kondenzatorjev je bilo mogoče shraniti večje količine naboja, kar pa je hkrati zaradi visoke napetosti in povečanja količine shranjenega naboja predstavljalo smrtno nevarnost.

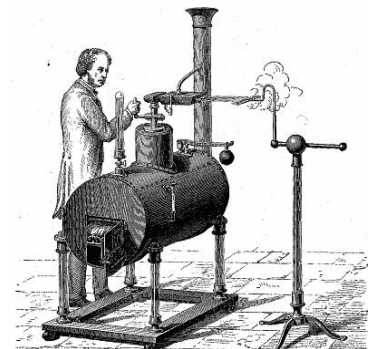


Leidenska flaša in uporaba principa elektrostatične indukcije so pripeljali do razvoja novih tipov elektrostatičnih generatorjev (Toplerjev, Carrejev, Ramsdenov, Bonnetijev, Winterjev, Wimshurstov). Na sliki sta prikazani Toplerjev in Wimshurstov influenčni generator. Nekatere od teh se je pogosto uporabljalo za generacijo X-žarkov v katodni cevi. Dandanes se elektrostatični generatorji uporabljajo le v demonstracijske namene.



<http://www.hp-gramatke.net/history/english/page4000.htm>
http://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatic_generator
<http://www.coe.ufrj.br/~acmq/electrostatic.html> (in omenjene reference)
<http://www.sparkmuseum.com/FRICTION.HTM> (lepe slike)

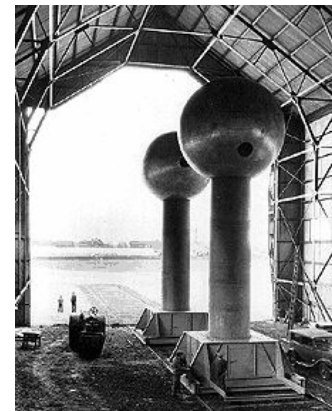
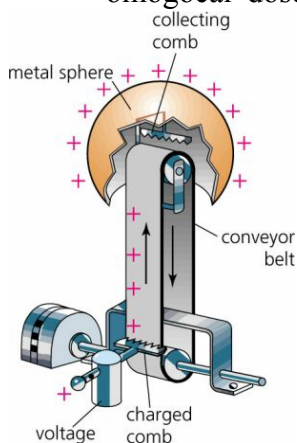
Zanimiv princip je tudi t.i. parni elektrostatični generator, kjer je ločevanje naboja posledica trenja uparjenih kaplic vode. Znan je t.i. Armstrongov **parni generator** iz leta 1840.



Moderni generatorji: Van de Graaffov generator

Modern princip elektrostatičnega generatorja predstavlja izum Van de Graffa, ki omogoča pridobivanje zelo visokih napetosti. Leta **1929** je izdelal prvi model generatorja, ki je omogočal doseganje napetosti 80 kV. Že leta 1931 pa je prikazal napravo, ki je omogočala napetosti milijon voltov, leta 1933 pa napravo, ki je omogočala celo **7 MV**.

Osnova delovanja Van de Graffovega generatorja je silno preprosta – in učinkovita: na hitro vrteči neprevodni trak se na spodnjem delu nalagajo naboji, ki potujejo po traku navzgor do prevodne krogle, kamor se prenesejo na površino krogle. Manjši van de Graffovi generatorji omogočajo doseganje napetosti nekaj deset do nekaj sto kV, večji pa tudi do **20 MV**.



7 MV Van de Graffov generator. Premer ene polirane aluminijaste krogle je 4,6 m.

<http://chem.ch.huji.ac.il/history/graaft.html>



7. Električna poljska jakost

Vsebina poglavja: definicija električne poljske jakosti, superpozicija električnega polja.

Pojem električne poljske jakosti je en najpomembnejših konceptov v elektrotehniki. V osnovi abstrakten pojem se bo kasneje izkazal kot ključen za določanje napetosti, energije in drugih pomembnih veličin. **Električna poljska jakost je definirana kot sila na enoto pozitivnega naboja** $Q_t = 1 \text{ C}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_t}$$

Električno poljsko jakost v poljubni točki v prostoru določimo tako, da v to točko postavimo poskusni (testni) naboj Q_t in določimo silo na ta naboj. Nato silo delimo s poskusnim nabojem

Q_t in dobimo električno poljsko jakost. Med točkastima nabojem Q in Q_t je sila $\frac{Q_t Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, kjer

je r razdalja med nabojema. Električna poljska jakost na mestu naboja Q_t je torej

$$E = \frac{1}{Q_t} \frac{Q_t Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ker pa je tako sila kot električna poljska jakost vektorska veličina, moramo upoštevati še smer. Ta je v smeri vektorja r , ki je vektor od mesta naboja Q do testnega naboja Q_t .

SLIKA: Vektor električne poljske jakosti na oddaljenosti r od točkastega naboja Q .

Električna poljska jakost na oddaljenosti r od naboja Q je torej enaka

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Primer: Določimo električno poljsko jakost v koordinatnem izhodišču $(0, 0, 0) \text{ cm}$, če se v točki $T_1(1,0,2) \text{ cm}$ nahaja $Q = 2 \mu\text{C}$.

Izračun: Izračuna se lahko lotimo na enak način, kot da bi določali silo na (pozitivni) naboj Q_t v točki $(0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Q_t} &= \frac{Q_t Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\vec{e}_r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_t \cdot 2\mu\text{C}}{5\text{cm}^2} \cdot \frac{-(1,0,2)}{\sqrt{5}} = \\ &= -9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{Q_t \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{s}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}} = -Q_t \cdot 1,61 \cdot 10^7 (1,0,2) \text{ V/m} \end{aligned}$$

Električna poljska jakost pa je

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{Q_t}}{Q_t} = -1,61 \cdot 10^7 (1,0,2) \text{ N/C} = \underline{\underline{-1,61 \cdot 10^7 (1,0,2) \text{ V/m}}}.$$

Enota za električno poljsko jakost je V/m.

Iz primera vidimo, da lahko smer električne jakosti določimo kot smer sile na namišljen pozitivni naboj. V principu je vseeno, kako velik je ta testni naboj, saj vidimo, da v enačbi sploh ne nastopa – v enačbi nastopa naboj, ki povzroča silo na testni naboj. Naboj 1 C je zelo velika količina naboja, ki ga je (1) realno nemogoče zbrati v točki (v malem radiju) in (2) tak naboj bi vsekakor predstavljal izrazito veliko silo na okoliške naboje in povzročil njihovo premaknitev. Zato je bolj natančna **definicija za električno poljsko jakost, da je to sila na majhen poskusni pozitivni naboj**, matematično

$$\vec{E} = \lim_{Q_t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{Q_t}.$$

V čem je potem razlika med silo in električno poljsko jakostjo? Pomembna konceptualna razlika je v tem, da je mogoče sile določati le med naboji, medtem ko je **električna poljska jakost definirana v vsaki točki v prostoru**.

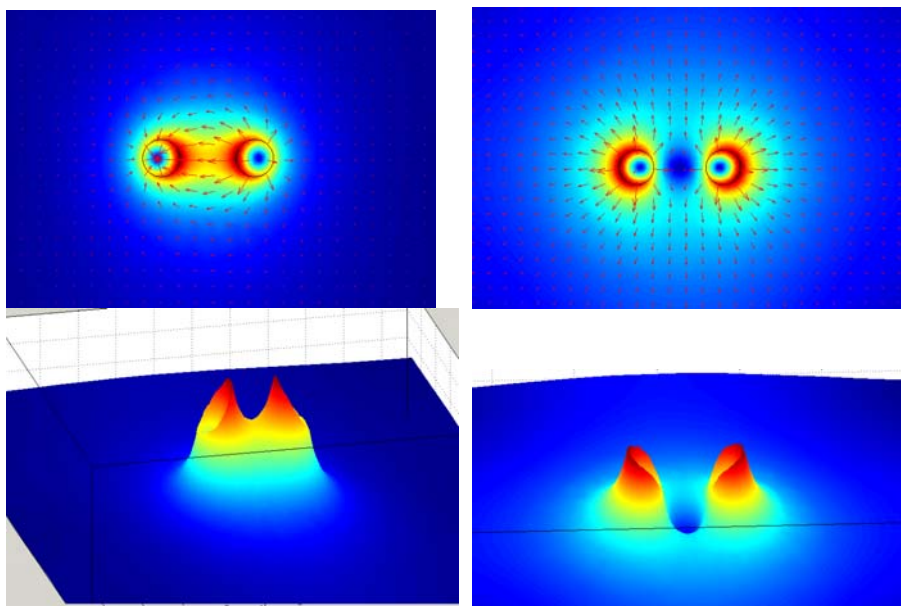
Superpozicija električnega polja. Kako določimo električno poljsko jakost v točki, če je v okolici več nabojev? Enako kot smo določali silo na naboj v okolici več nabojev. V točko postavimo poskusni naboj, izračunamo silo na poskusni (pozitivni) naboj kot superpozicijo posameznih prispevkov sile ter nato delimo s poskusnim nabojem. Oziroma, določimo električno poljsko jakost za vsak naboj posebej in prispevke seštejemo.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots = \sum_i \vec{E}_i$$

SLIKA: Več nabojev in električna poljska jakost v točki kot superpozicija električnih poljskih jakosti posameznih nabojev.

Prikazovanje električne poljske jakosti v prostoru. Ker je polje definirano v vsaki točki prostora, pomeni, da lahko v vsaki točki prostora ponazorimo polje z vektorjem, ki kaže smer in velikost polja v točki. Običajno se spoprijaznimo s tem, da rišemo vektorje električne poljske jakosti v določenih točkah v prostoru in tako prikažemo vektorsko polje. Druga možnost je, da prikazujemo velikost polja (vendar ne smeri) z 2D ali 3D prikazom.

SLIKA: Prikazovanje električne poljske jakosti v okolici točkastega naboja: a) z vektorji, b) 1D prikaz, c) 2D prikaz, d) 3D prikaz.



SLIKA: 2D in 3D prikaz električne poljske jakosti za polje v okolici dveh prevodnih naelektrenih valjev. Na dveh slikah na levi je prikazano električno polje v okolici dveh valjev naelektrenih z naboji nasprotnega predznaka (levi valj z negativnim, desni pa s pozitivnim nabojem), na desni pa dva valja z enakopredznačenim nabojem (pozitivnim). Smer polja prikazujejo puščice (vektorji), velikost pa tako velikost puščic, kot tudi obarvanost – toplejša barva predstavlja večjo poljsko jakost.

Vprašanja za obnovo:

1. Definicija električne poljske jakosti.
2. Enota.
3. Izpopolnjena definicija.
4. Konceptualna razlika med silo in električno poljsko jakostjo.
5. Superpozicija poljske jakosti.

8. Porazdelitev naboja

Vsebina poglavja: volumska, površinska in linijska porazdelitev naboja in zapis z ustrezno gostoto naboja.

Spoznali smo že koncept točkastega naboja, za katerega pa smo že rekli, da ga v naravi ni. Najmanjši naboj je naboj elektrona, s svojo maso in kvantizirano množino naboja. Nadaljnji problem je, da je količine osnovnih enot naboja, ki jih moramo vzeti v poštev običajno zelo veliko. Če samo malo podrgnemo, se med telesi prenesejo milijoni elektronov. Mi pa smo sposobni izračunati silo na nekaj točkastih nabojev. No, v principu bi lahko s superpozicijo izračunali tudi silo med nekaj milijoni nabojev. Kar pa ni običajno. Potrebno je najti nek drug način obravnave naelektrenih teles. Našli ga bomo v konceptu različnih tipov porazdelitve naboja v prostoru. Predpostavili bomo, da je naboj zaradi velike količine delcev porazdeljen zvezno. V tem smislu bomo definirali tri načine porazdelitve nabojev: volumsko, površinsko in linijsko porazdelitev naboja.

Tri načini porazdelitve naboja:

- 1) naboj, porazdeljen v volumnu. Govorimo o volumski porazdelitvi naboja, ki jo opišemo z **gostoto volumske porazdelitve naboja** ρ . Enota je C/m^3 . Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po volumnu, lahko gostoto volumskega naboja določimo kot

$$\rho = \frac{Q}{V}, \text{ oziroma celotni naboj kot } Q = \rho V. \text{ Bolj pogosto je, da ta naboj ni porazdeljen}$$

enakomerno, tedaj lahko enakomerno porazdelitev smatramo le v nekem zelo omejenem malem delu celotnega volumna ΔV . Del celotnega naboja je torej $\Delta Q = \rho \Delta V$ in če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno majhen), dobimo $dQ = \rho \cdot dV$. Celotni naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po volumnu:

$$Q = \int_V \rho dV.$$

- 2) naboj, porazdeljen po površini. Govorimo o površinski porazdelitvi naboja, ki jo opišemo z **gostoto površinske porazdelitve naboja** σ . Enota je C/m^2 . Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po površini, lahko površinsko gostoto naboja določimo kot

$$\sigma = \frac{Q}{A}, \text{ oziroma celotni naboj kot } Q = \sigma A. \text{ Bolj pogosto je, da ta naboj ni porazdeljen}$$

enakomerno, tedaj velja zveza $Q = \sigma A$ le za en majhen del celotnega naboja na neki majhni površini, torej $\Delta Q = \sigma \cdot \Delta A$ in če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno majhen), dobimo $dQ = \sigma \cdot dA$. Celotni naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po površini:

$$Q = \int_A \sigma \cdot dA.$$

- 3) naboj, porazdeljen po liniji (žici). Govorimo o linijski porazdelitvi naboja, ki jo opišemo z **gostoto linijske porazdelitve naboja** q . Enota je C/m . Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po liniji, lahko linijsko gostoto naboja določimo kot $q = \frac{Q}{L}$, oziroma celotni naboj kot $Q = qL$. Bolj pogosto je, da ta naboj ni porazdeljen

enakomerno, tedaj velja zveza $Q = qL$ le za en majhen del celotnega naboja na neki majhni razdalji, torej $\Delta Q = q \cdot \Delta L$ in če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno majhen), dobimo $dQ = q \cdot dl$. Celotni naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po liniji: $Q = \int_L q \cdot dl$.

Nekaj primerov....

(Kmalu pa se bomo soočili še z enim problemom. Če bi poznali porazdelitev naboja, bi še nekako izračunali posledice, torej električne poljske jakosti in sile med naboji, telesi. Običajno pa te porazdelitve niti ne poznamo, poznamo pa recimo napetosti med telesi. Potrebno bo torej poiskati še zvezo med napetostjo in porazdelitvijo naboja. A o tem kasneje.)

Vprašanja:

1. Naštejte tri različne porazdelitve naboja.
2. Zapišite enačbe, ki povezujejo gostote porazdelitve s celotnim nabojem.
3. Iz znane porazdelitve naboja prikažite izračun celotnega naboja.

9. Koordinatni sistemi

Vsebina: kartezični, valjni (cilindrični) in krogelni (sferični) koordinatni sistem. Točka v koordinatnem sistemu. Diferencialni elementi v koordinatnih sistemih.

Zakaj uporabljati več koordinatnih sistemov (KS), če nam je kartezični koordinatni sistem (KKS) najbolj poznan in najbolj razumljiv? Odgovor je preprost: zato, ker je v določenih primerih izračun mnogo bolj preprost z izbiro drugega koordinatnega sistema. Na primer, če je naboj porazdeljen po površini valja. Sama po sebi se ponuja najboljša izbira za matematični opis porazdelitve naboja uporaba valjnega koordinatnega sistema, itd.

Za koordinatne sisteme, ki jih obravnavamo mi, je značilno to, da so vse ravnine med sabo pravokotne. Takim koordinatnim sistemom rečemo ortogonalni.

Kartezični koordinatni sistem (KKZ)

Točko v koordinatnem sistemu določimo s presekom treh ravnin. V KKS so to tri ravnine:

$$x = x_1$$

$$y = y_1$$

$$z = z_1$$

Koordinate v KKS določa trojček (x,y,z) .

SLIKA: Kartezični koordinatni sistem.

Vzdolž vsake osi lahko določimo diferencial dolžine. Dobimo ga z limitiranjem malega dela dolžine: $dL = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \Delta L$. V smeri osi X je to dx , v smeri osi Y je dy in v smeri Z je dz . V splošnem lahko **diferencial poti** v KKS zapišemo kot vektor:

$$d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$$

$$d\vec{l} = (dx, dy, dz)$$

Če pomnožimo vse tri diferencialne dolžine dobimo majhen – **diferencialen volumen** zapisan v obliki

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

Ploskvice tega diferencialnega volumna imenujemo **diferenciali ploskev** in so $dx \cdot dy$, $dx \cdot dz$ in $dy \cdot dz$. Pogosto jim bomo dodali še smer in sicer pravokotna na površino. To imenujemo smer **normale** na površino. Kvadratu površine $dx \cdot dy$ bi torej pripisali smer osi Z. Velja torej:

$$d\vec{A}_x = \vec{e}_x dy \cdot dz$$

$$d\vec{A}_y = \vec{e}_y dx \cdot dz$$

$$d\vec{A}_z = \vec{e}_z dx \cdot dy$$

Primeri.**Valjni (cilindrični) koordinatni sistem (CKS).**

Točka je določena s presekom treh ravnin

$$r = r_1$$

$$\varphi = \varphi_1$$

$$z = z_1$$

Prva ravnina je plašč valja, druga je polravnina okoli Z osi, ki jo določa kot φ , tretja pa ravnina z eno vrednostjo koordinate Z. Koordinate v CKS sestavlja torej trojček (r, φ, z) .

Diferencial poti je

$$d\vec{l} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\varphi r d\varphi + \vec{e}_z dz.$$

Diferenciali površine so

$$d\vec{A}_r = \vec{e}_r r d\varphi \cdot dz,$$

$$d\vec{A}_\varphi = \vec{e}_\varphi dr \cdot dz,$$

$$d\vec{A}_z = \vec{e}_z r d\varphi \cdot dr.$$

Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri osi R (rotacijska simetrija), V tem primeru je diferencial v smeri osi Z določen z $dA_z = 2\pi r dr$

Diferencial volumna je

$$dV = dr r d\varphi dz.$$

SLIKA: Valjni koordinatni sistem.

Primer: Določite ploščino diska z notranjim polmerom 1 cm in zunanjim polmerom 6 cm.

Izračun: Vzamemo diferencial površine, ki kaže v smeri osi Z in zapišemo dvojni integral

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{1\text{ cm}}^{6\text{ cm}} r dr d\varphi = 2\pi \int_{1\text{ cm}}^{6\text{ cm}} r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_{1\text{ cm}}^{6\text{ cm}} = \pi \left[(6\text{ cm})^2 - (1\text{ cm})^2 \right] = \underline{\underline{35\pi\text{ cm}^2}}.$$

Primer: Po površini plašča valja višine 2 m polmera 5 cm se spreminja površinska gostota naboja z izrazom $\sigma = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mu\text{C/m}$. Določimo površinsko gostoto naboja.

Izračun: Uporabimo zvezo $Q = \int_A \sigma dA$, kar v našem primeru pomeni

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mu\text{C}/\text{m}^2 \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz = 5 \text{ cm} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot 2 \right)_0^{2\pi} \mu\text{C}/\text{m} \cdot 2 \text{ m} =$$

$$0,1 \cdot 4 \mu\text{C} = \underline{\underline{0,4 \mu\text{C}}}.$$

Krogelni (sferični) koordinatni sistem (SKS).

Točka je določena s presekom treh ravnin

$$r = r_1$$

$$\vartheta = \vartheta_1$$

$$\varphi = \varphi_1$$

Prva ravnina je plašč kroglice, druga je površina stožca (kjer je ϑ (theta) kot od Z osi navzdol), tretja pa polravnina znana iz CKS. Koordinate v SKS sestavlja torej trojček (r, ϑ, φ) .

Diferencial poti je

$$d\vec{l} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\vartheta r d\vartheta + \vec{e}_\varphi r \sin(\vartheta) d\varphi.$$

Diferenciali površin so

$$d\vec{A}_r = \vec{e}_r r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi,$$

$$d\vec{A}_\vartheta = \vec{e}_\vartheta r \sin(\vartheta) d\varphi dr,$$

$$d\vec{A}_\varphi = \vec{e}_\varphi r dr d\vartheta.$$

Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri osi R (rotacijska simetrija).

V tem primeru je diferencial v smeri osi R določen z $dA_\vartheta = 4\pi r dr$

Diferencial volumna je

$$dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi.$$

SLIKA: Krogelni koordinatni sistem.

Primer: Določimo površino krogle polmera R .

Izračun: Vzamemo diferencial volumna krogle $dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi$ in ga integriramo

$$V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_0^\pi \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\frac{4\pi R^3}{3}}}.$$

WWW: Tudi pri GPS signalih se uporabljajo ustrezni koordinatni sistemi. Več:
http://www.navigator.si/povezave/koordinatni_sistemi.htm

WWW: Kartezični koordinatni sistem:

http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

Polarni koordinatni sistem: http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system

10. Električna poljska jakost porazdeljenih nabojev

Vsebina: polje točkastega naboja, dela celotnega naboja in polje porazdeljenih nabojev.

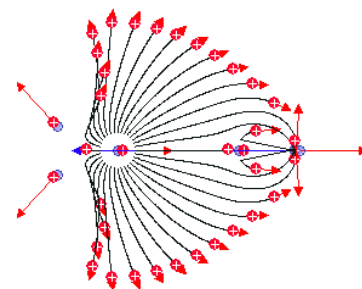
Polje točkastega naboja.

Spoznali smo že definicijo električne poljske jakosti ter enačbo za izračun polja v okolici osamljenega točkastega naboja ($\vec{r}$ je vektor od točke, kjer se nahaja naboj Q do točke, kjer določamo polje).

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{Polje točkastega naboja}$$

SLIKA: Polje v okolici točkastega naboja.

Nadalje smo ugotovili, da je število presežkov nabojev pogosto zelo veliko, kar pomeni, da se že ob manjšem drgnjenju dveh teles prenese med telesi milijone in milijone elektronov. Da bi izračunali električno poljsko jakost, ki jo povzročajo ti naboji, bi potrebovali mnogo računanja, saj bi z upoštevanjem superpozicije lahko izračunali prispevek polja vsakega naboja posebej in vplive sešteli. Tak način računanja bi bil zelo zamuden in nepraktičen, čeprav v pedagoške namene lahko uporabljamo tudi tak postopek. Tipičen primer je program JaCoB (jacob.fe.uni-lj.si), ki računa silo med naboji in jih dinamično pomika v smeri rezultantne sile. Tak način izračunavanja se pogosto uporablja tudi v raziskavah osnovnih delcev, kjer pa se upošteva tudi lastnosti trkanja delcev.



SLIKA: Primer izračuna in prikazovanja sil med naboji s programom JaCoB.

Polje porazdeljenih nabojev.

Pri izračunu električne poljske jakosti porazdeljenih nabojev lahko predpostavimo, da je zaradi velikega števila nabojev le-ta porazdeljen zvezno. Spoznali smo že možnost predstavitve porazdelitve nabojev kot volumsko, površinsko ali linijsko gostoto nabojev. Da bi dobili ustrezen izraz za izračun polja, ki ga povzročajo tovrstne porazdelitve nabojev, se najprej poslužimo ideje, da če velja za polje točkastega naboja izraz $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, potem

lahko trdimo, da bo to veljalo tudi za neko malo količino naboja ΔQ , ki se nahaja na majhnem prostoru (majhnem v primerjavi z razdaljo r). V tem smislu bi za del celotnega naboja lahko določili polje, ki ga povzroča:

$$\Delta\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

SLIKA: Polje, ki ga povzroča del celotnega naboja.

S procesom limitiranja diferenčnih vrednosti dobimo izraz za diferencial polja, ki ga povzroča diferencial naboja:

$$d\vec{E} = \vec{e}_r \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Vpliv vseh delnih vrednosti oz. diferencialov naboja seštejemo s superpozicijo, ki v zveznem prostoru predstavlja integracijo:

$$\vec{E} = \int_{\text{po vseh Q-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r. \text{ Izraz za izračun polja porazdeljenih nabojev}$$

SLIKA: Integracija prispevkov diferencialov naboja za izračun električne poljske jakosti. r je razdalja od dQ -ja do točke v kateri računamo polje.

Teoretično lahko na ta način določimo električno poljsko jakost za poljubno porazdelitev naboja. Praktično pa smo omejeni s primeri, ko je zapisan integral še analitično rešljiv. V nasprotnem primeru nam preostane numerična integracija vplivov posameznih majhnih delov

celotnega naboja: $\vec{E} = \sum \Delta\vec{E}_i = \sum_i \vec{e}_{r_i} \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}.$ ¹

Postopek za določitev polja porazdeljenih nabojev.

Zapišimo postopek, po katerem določimo električno poljsko jakost za porazdeljene naboje z

uporabo enačbe $\vec{E} = \int_{\text{po vseh Q-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, kjer je $\vec{r}$ vektor od mesta diferenciala naboja dQ do

mesta, kjer računamo električno poljsko jakost; $\vec{e}_r$ je enotski vektor vektorja $\vec{r}$.

- 1) Da bi natančneje določili diferencial volumna, površine ali razdalje, moramo našo naelektreno strukturo umestiti v ustrezen koordinatni sistem. Če bo struktura na kateri se nahaja naboj v obliki žice, bo najbolj primerna uporaba cilindričnega koordinatnega sistema, če bo naboj v volumnu krogle bo primeren sferični K.S., itd. Naboji, ki povzročajo polje so porazdeljeni po volumnu, površini ali liniji. V tem smislu bo diferencial naboja enak $dQ = \rho dV$, $dQ = \sigma dA$ ali $dQ = q dl$. Te določimo v skladu s sledečo tabelo:

¹ V praksi imamo na razpolago še nekaj drugih možnih načinov reševanja, ki jih bomo omenili v nadaljevanju.

	Kartezični k.s.	Cilindrični k.s.	Sferični k.s.
dl	dx, dy, dz	$dr, r d\varphi, dz$	$dr, r d\vartheta, r \sin \vartheta d\varphi$
dA	$dx \cdot dy, dx \cdot dz, dy \cdot dz$	$r d\varphi dz, r dr dz, r d\varphi dr$	$r d\vartheta dr, r \sin \vartheta dr d\varphi, r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$
dV	$dx \cdot dy \cdot dz$	$r dr d\varphi dz$	$r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$

- 2) Glede na izbran koordinatni sistem določimo ustrezen diferencial naboja. Na primer, če se naboj spreminja vzdolž palice, postavljene v osi X, bo $d\vec{l} = \vec{e}_x dx$ in $dQ = q dx$. Če se naboj nahaja na površini valja, bo potrebno uporabiti izraz $dQ = \sigma dA$, pri čemer bo $dA = r d\varphi dz$, itd.
- 3) Postaviti moramo diferencial naboja na neko poljubno mesto na strukturi in določiti vektor r kot funkcijo koordinat. Vektor r je vektor od mesta diferenciala naboja dQ do točke, kjer želimo izračunati polje.
- 4) Zapišemo integral ter določimo meje integracije. Meje integracije so določene s koordinatami, ki zajamejo celoten naboj.
- 5) Rešimo integral.

Primer izpeljave izraza za električno poljsko jakost naelektrene tanke palice.

Določimo električno poljsko jakost $h = 5$ cm stran od sredine enakomerno naelektrene tanke palice dolžine $d = 10$ cm. Naboj na palici je $2 \mu C$.

Izračun: Postopamo na sledeči način.

1. Palico postavimo v koordinatni sistem. Primeren je valjni koordinatni sistem. Naj bo sredina palice v središču k.s. in Z os usmerjena vzdolž palice.
2. določimo dQ , ki je v našem primeru, ker gre za linijsko porazdelitev naboja, enak $dQ = q dl$. Ker gre za enakomerno porazdelitev naboja je $q = Q/l = Q/d = 20 \mu C/m$.
3. Glede na izbran koordinatni sistem je $dl = dz$.
4. Postavimo dQ na neko poljubno mesto na palici, oddaljeno od izhodišča za z . Od dQ do točke, kjer iščemo vrednost polja, narišemo vektor r in ga izrazimo s koordinatami. Velja $r = \sqrt{z^2 + h^2}$.
5. Sedaj diferencial polja v točki zapišemo v obliki

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q \cdot dz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + h^2)}.$$

6. Sedaj moramo ugotoviti, da se vektor električne poljske jakosti spreminja za različne lege dQ -ja, kar pomeni, da jih moramo seštevati vektorsko. Da bi se temu izognili, lahko upoštevamo, da dQ na zrcalni strani Z osi povzroča polje, ki je v iskani točki usmerjeno tako, da vsota kaže v smeri radija. To upoštevamo tako, da bomo seštevati le komponente polja,

$$\text{ki so usmerjeni v smer radija: } dE_r = dE \cdot \cos(\gamma) = dE \cdot \frac{h}{\sqrt{z^2 + h^2}}.$$

7. Te komponente pa lahko seštejemo z integracijo:

$$E_r = \int dE_r = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{q \cdot dz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + h^2)} \frac{h}{\sqrt{z^2 + h^2}}$$

$$E_r = \frac{qh}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz}{(z^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$E_r = \frac{qh}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{h^2 (z^2 + h^2)^{3/2}} \right)_{-l/2}^{l/2} = \frac{q2l/2}{4\pi\epsilon_0 h \sqrt{(l/2)^2 + h^2}} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 h \sqrt{(l/2)^2 + h^2}}$$

Dobili smo rešitev. Vstaviti moramo le še vrednosti in določimo velikost radialne komponente polja: $E_r \cong 2,54 \cdot 10^5 \text{ V/m}$.

Neskončno dolga tanka naelektrena palica.

Zanimivo je pogledati, kakšno polje dobimo, če je naelektrena palica neskončno dolga. V tem primeru moramo limitirati razdaljo l proti neskončno in dobimo

$$E_r = \frac{qh}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{h^2 (z^2 + h^2)^{3/2}} \right)_{-\infty}^{\infty} = \frac{q2l/2}{4\pi\epsilon_0 h (l/2)} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h}. \text{ Dobimo izredno pomemben rezultat, to je,}$$

da polje z razdaljo od tanke neskončne naelektrene palice upada z $1/h$, medtem, ko polje v okolici točkaste elektrine upada s kvadratom razdalje.

Neskončno dolgo tanko naelektreno palico lahko smatramo kot naelektreno premico, zato taki strukturi tudi rečemo **premi naboj (elektrina)**. Zapišimo polje preme elektrine še enkrat, tokrat v smislu radija od preme elektrine (pazi: v izpeljavi smo z r definirali razdaljo od dQ -ja do točke, sedaj je r definiran v smislu cilindričnega koordinatnega sistema – kot radialna oddaljenost od premega naboja):

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

SLIKA: Polje v okolici preme elektrine.

Polje tokovne daljice.

Izhajamo lahko iz rešitve za polje v okolici tokovne premice in namesto sredinske umestitve določimo razdalji od koordinatnega izhodišča do levega roba z l_1 in do desnega roba z l_2 . Radialno komponento polja dobimo z rešitvijo integrala

$$E_r = \frac{qh}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dz}{(z^2 + h^2)^{3/2}},$$

ki je

$$E_r = \frac{qh}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z}{h^2(z^2 + h^2)^{3/2}} \right)_{-l_1}^{l_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h} \left(\frac{l_2}{\sqrt{(l_2)^2 + h^2}} - \frac{-l_1}{\sqrt{(l_1)^2 + h^2}} \right).$$

Enostavnejšo obliko tega zapisa dobimo, če uporabimo izraz za cosinusa notranjih kotov (glej sliko):

$$E_r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 h} (\cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_1)).$$

Na podoben način bi lahko določili še Z komponento polja. Izkaže se, da je rezultat

$$E_z = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 h} (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)).$$

Če tudi sedaj namesto razdalje h uporabimo polmer r od tokovne daljice, dobimo enačbo²:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} [\vec{e}_r (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)) + \vec{e}_z (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2))]$$

Ker je prema elektrina le poseben primer naelktrene daljice, dobimo iz gornje enačbe tudi enačbo za premo elektrino, ko velja $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow 0$. Tedaj je $\cos(0) = 1$ in $\sin(0) = 0$. Sledi enačba za premo elektrino.

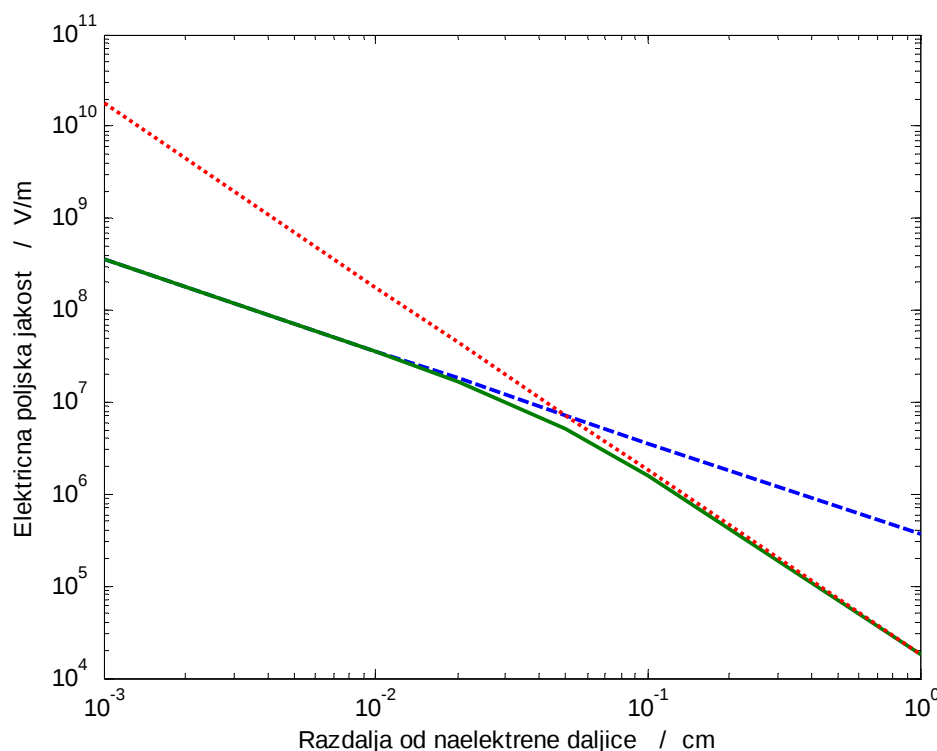
SLIKA: Tokovna daljica v koordinatnem sistemu.

² Enačba je v drugi literaturi lahko predstavljena z drugimi koti in je tem smislu spremenjena. Potrebno je torej pravilno določanje kotov α_1 in α_2 .

Primer: Primerjajamo vrednosti izračunov polja za polje naelektrene daljice tako, da ga primerjamo s poljem naelektrene premice in točkaste elektrine. Vzemimo za primer naelektreno tanko palico dolžine $d = 10$ cm z enakomerno porazdeljenim nabojem $2 \mu\text{C}$.

Primerjava pokaže, da je velikost polja naelektrene premice in daljice enaka za majhne razdalje od tanke palice (razdalja dosti manjša od dolžine palice), da pa je za razdalje, ki so dosti večje od dolžine palice bolj primerna aproksimacija polja tanke palice s poljem točkastega naboja.

Razdalja (cm)	E daljice (kV/m)	E premice (kV/m)	E točke (kV/m)
0,1	359	359	1797
1	35	36	179
2	17	18	45
5	5	7	7
10	2	3	2
100	0,17	0,36	0,17



SLIKA: Primerjava med vrednostjo polja v oddaljenosti od tanke naelektrene palice (polna zelena črta) in premege (črtkana modra črta) ter točkastega naboja (točkasta rdeča črta).

Polje v osi tokovne zanke.

V tem primeru uporabimo cilindrični koordinatni sistem in zapišemo del naboja kot $dQ = qdl = q \cdot r d\varphi$. Če označimo a polmer obroča velja $dQ = qa d\varphi$. Označimo dQ na skici in potegnemo vektor r od dQ do točke na Z osi, ki je od središča obroča oddaljeno za razdaljo z . Razdalja od dQ do točke na Z osi je $r = \sqrt{a^2 + z^2}$. Nato ugotovimo, da se pri sumaciji prispevkov dQ -jev k celotnemu polju ohranjajo le komponente polja v smeri osi Z , kar pomeni, da moramo določiti le prispevek te komponente in ga integrirati. Pišemo

$$dE_z = dE \cdot \cos(\alpha) = dE \cdot \frac{z}{r}$$

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

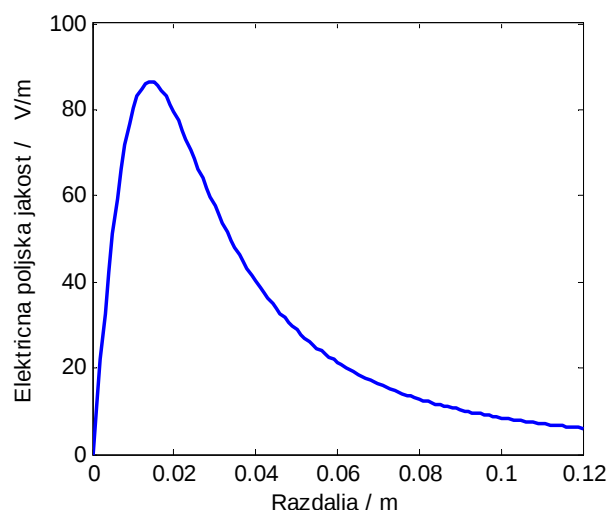
$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{z}{r} = \frac{qazd\varphi}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Sedaj ugotovimo, da integriramo po kotu in da nobena od spremenljivk v enačbi ni funkcija kota, od koder sledi:

$$E_z = \int_{\text{po } Q\text{-jih}} dE_z = \int_0^{2\pi} \frac{qazd\varphi}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{qaz}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}},$$

kar je tudi že končen rezultat. Zapišimo ga še v vektorski obliki:

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{qaz}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$$



SLIKA: Polje v osi naelektrenega obroča. Polmer obroča je 2 cm, na njem je enakomerno (linijsko) porazdeljen naboj 0,1 nC.

Polje v osi naelektrenega diska.

Polje v osi naelektrenega diska izračunamo na podoben način kot za druge strukture. Disk umestimo v cilindrični koordinatni sistem, določimo $dQ = \sigma dA$, kjer dA določimo iz poznavanja diferencialnih površin v cilindričnem koordinatnem sistemu. Uporabimo $dA = dr \cdot r d\varphi$, torej $dQ = \sigma r dr d\varphi$. Skiciramo disk v cilindričnem koordinatnem sistemu, postavimo dQ na neko poljubno razdaljo r od središča diska, razdaljo od dQ do točke T, kjer računamo polje in je za razdaljo z oddaljena od središča diska, pa označimo z R. Velja $R^2 = r^2 + z^2$. Narišemo dE v točki T in ga zapišemo v obliki $dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. Nadalje ugotovimo,

da se radialne komponente polja odštejejo, sumirajo pa se prispevki polja v smeri osi Z. V tem smislu zapišemo diferencial komponente polja v smeri osi Z:

$$dE_z = dE \cdot \cos \delta = dE \cdot \frac{z}{R} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{z}{R}$$

$$dE_z = \frac{\sigma r z dr d\varphi}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

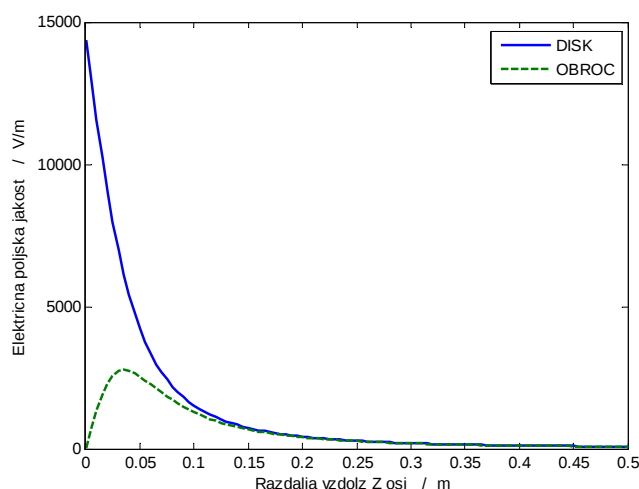
$$E_z = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma r z}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} dr d\varphi = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(-(r^2 + z^2)^{-1/2} \right)_0^R = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Nekoliko še lahko spremenimo obliko enačbe in dobimo

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos(\delta)).$$

Polje v osi naelektrenega diska določimo torej iz enačbe³:

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos(\delta)); \quad \text{za } z > 0.$$



SLIKA: Primerjava polj vzdolž Z osi naelektrenega obroča (črtkana zelena črta) in naelektrenega diska (polna modra črta). Naboj diska in obroča je 2 nC, polmer diska in obroča pa 5 cm.

Polje naelektrenega diska je največje na površini in upada z razdaljo, medtem ko je polje obroča pri $z=0$ enako nič. V oddaljenosti je velikost polja podobna.

Naelektrena ravnina.

Naelektrena ravnina je le poseben slučaj naelektrenega diska in to tedaj, ko gre radij diska v neskončnost oziroma, ko gre $\delta \rightarrow \pi/2$. Tedaj je

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad \text{Polje naelektrene ravnine (velja za } z > 0)$$

To je pomemben rezultat in kaže, da je polje v okolici naelektrene ravnine neodvisno od višine nad ravnino. Neskončne ravne površine seveda ni, lahko pa je to dober koncept v mnogih poenostavljenih primerih. Uporabili ga bomo tudi pri izračunu polja v ploščnem kondenzatorju, kjer je ena plošča naelektrena s pozitivnim, druga pa z negativnim nabojem.

³ Enačba velja za pozitivne z -je. Za negativne je potrebno spremeniti predznak polja, saj to kaže v smeri negativne Z osi (za pozitivni naboj na disku). Bolj splošna oblika je torej

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Polje znotraj ploščnega kondenzatorja bo torej očitno vsota prispevkov vsake posamezne plošče.

Tudi ta enačba, ki smo jo izpeljali, velja za pozitivne z -je. Za negativne z -je je potrebno

predznak spremeniti, torej $\vec{E} = -\vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ za $z < 0$.

SLIKA: Polje naelektrene ravnine.

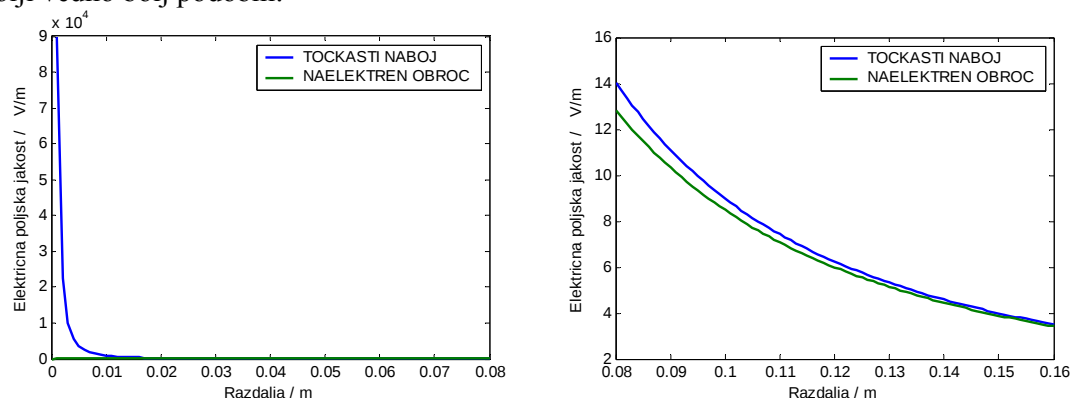
Primer: Ravni plošči sta naelektreni z nabojema $Q = \pm 20 \text{ pC}$. Določimo električno poljsko jakost med ploščama, če je površina ene plošče 20 cm^2 .

Izračun: Kot smo že omenili, je polje znotraj plošč vsota prispevkov vsake plošče, torej

$$E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \text{ kjer je } \sigma = \frac{Q}{A} = 10^{-8} \text{ C/m}^2. \text{ Dobimo } E \cong \underline{\underline{1,23 \text{ kV/m}}}.$$

PRIMERJAVE POTEKOV POLJA:

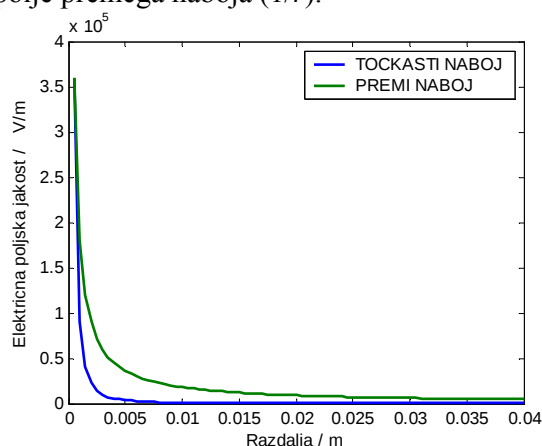
1. Primerjava med poljem v oddaljenosti od točkastega naboja in naelektrenega obroča pokaže, da je potek polja popolnoma različen v bližini naelektrenih struktur, kjer polje točkastega naboja narašča s približevanjem proti neskončnosti, v središču naelektrenega obroča pa je polje enako nič. V oddaljenosti od obroča oziroma točkastega naboja pa sta ti polji vedno bolj podobni.



SLIKA: Primerjava med poljem v oddaljenosti od točkastega naboja in v osi naelektrenega obroča. Oba imata enako velik naboj (0,1 nC, polmer prstana je 2 cm). **Levo: polje v bližini obroča. Desno: polje v oddaljenosti od obroča.** V oddaljenosti od prstana postane izraz $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ enakovreden izrazu $\vec{E} = \vec{e}_z \frac{qaz}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$, v bližini obroča (razdalja manjša od nekaj polmerov obroča) pa je razlika velika (polja naelektrenega obroča na sliki levo ne vidimo, ker je bistveno manjši od polja točkastega naboja).

2. Primerjava med poljem točkastega in premega naboja

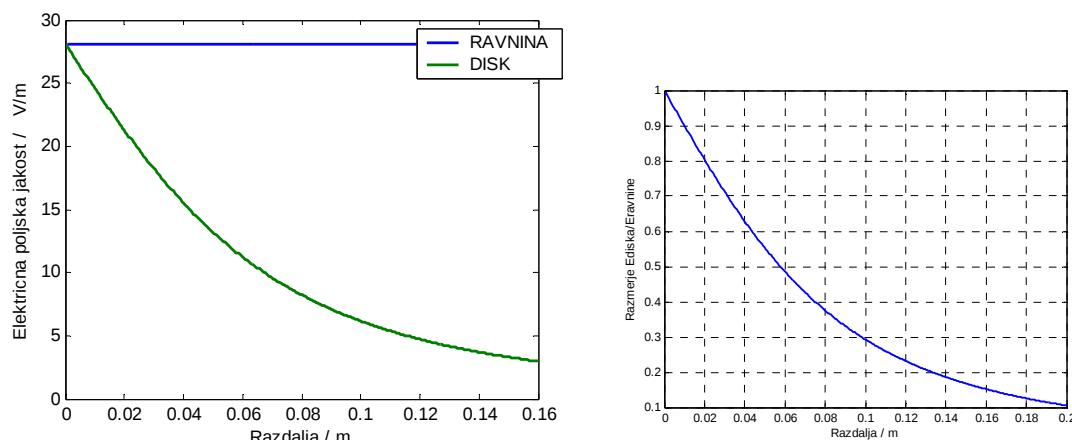
pokaže, da polje točkastega naboja mnogo hitreje (s kvadratom razdalje) upada z razdaljo kot polje premega naboja (1/r).



SLIKA: Primerjava med poljem točkastega (modra črta) in premega naboja (zelena črta). Polje točkastega naboja upada s kvadratom razdalje (1/r²), polje premega pa z razdaljo (1/r).

3. Primerjava med poljem naelektrenega diska in neskončne ravnine

V inženirskem smislu je potrebno vedno poiskati tisto strukturo, ki najbolj primerno opisuje električno polje. Na primer, če imamo opravka z naelektrenim televizijskim ekranom in nas zanima električno polje 1 cm stran od ekrana, je dovolj natančno, če upoštevamo ekran kot neskončno naelektreno ravnino, če nas zanima polje naelektrenega ekrana 10 ali 15 m stran od ekrana pa bi bilo mnogo bolj primerno ekran smatrati kot točast naboj, še bolj pa kot naelektren disk.



SLIKA: Primerjava med poljem naelektrenega diska in neskončne ravnine z enako velikim površinskim nabojem. Polmer diska je 8 cm. Desna slika kaže razmerje med poljem diska in poljem ravnine. Tik ob površini je izračun ustrezen, na razdalji polmera diska pa je polje diska 38 % polja ravnine.

POVZETEK IZPELJANIH ENAČB:**Polje naelektrene premice (prema elektrina):**

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Polje naelektrene daljice: (položene vzdolž Z osi) (glej sliko za razlago kotov):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\vec{e}_r (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)) + \vec{e}_z (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)) \right]$$

Polje v osi naelektrenega obroča (polmer obroča = a):

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{qaz}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Polje naelektrene ravnine (normala v smeri osi Z):

$$\vec{E} = \pm \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Vprašanja za obnovo:

- 1) Kateri izraz nam omogoča izračun polja v okolici porazdeljenih nabojev? Kako ga dobimo iz izraza za točasti naboj?
- 2) Kako uporabimo izraz za polje porazdeljenih nabojev na primeru izračuna polja naelektrene premice, obroča, diska?
- 3) Zapišite in uporabite izraze za polje preme elektrine, polje v osi naelektrenega obroča, polje naelektrene ravnine.
- 4) Skicirajte poteke polj obdelanih struktur.
- 5) Katere aproksimativne izraze bi uporabili, če bi želeli izračunati polje tik nad enakomerno naelektreno mizo ali pa 15 m nad naelektreno mizo?

11. Gaussov zakon

Vsebina poglavja: silnice polja, gostotne cevke (gostotnice), homogeno in nehomogeno polje, pretok električnega polja, Gaussov zakon.

V tem poglavju bomo spoznali Gaussov zakon v integralni obliki, ki je v osnovi posledica Coulombovega zakona, torej dejstva, da polje v okolici točkastega naboja upada s kvadratom razdalje. Da bi razumeli njegov pomen, se moramo najprej seznaniti s pojmi kot so silnice polja, pretočne oz. gostotne cevke in električni pretok.



Silnice.

Električno poljsko jakost v prostoru lahko prikažemo z vektorji v prostoru. Če vektorje povežemo z linijami, le te imenujemo **silnice polja**. Prikaz s silnicami je zelo primeren in pogost način prikaza polja. (Konceptualno jih je vpeljal Michael Faraday, ki jih je imenoval lines of force.) Ker so silnice usmerjene v smeri polja, bi po silnici potoval naboj, če bi ga postavili v polje. Pri tem moramo predpostaviti, da vstavev tega naboja v polje ne bi spremenila samega polja, saj bi tak naboj tudi deloval s silo na tiste naboje, ki ustvarjajo polje v katerem potuje.

SLIKA: Vektorji in silnice polja za prikaz električnega polja v prostoru .

Pretok električnega polja.

Nadalje je potrebno spoznati koncept *pretoka električnega polja* skozi neko ploskev.* Električnemu polju, ki je povsod enako veliko (konstantno) in ima enako smer, običajno rečemo *homogeno polje*. Če je homogeno polje usmerjeno pravokotno na ravno ploskev površine A , potem je pretok skozi to površino določen kot produkt polja in površine: $E \cdot A$. (V nekem smislu je pretok polja povezan s količino naboja iz katerih izhajajo silnice. Na površini naelektrenega telesa se izkaže produkt $E \cdot A$ direktno soracionalen količini naboja.)

Če je ravna ploskev postavljena v smeri homogenega polja, potem je ta pretok enak nič, če pa je pod določenim kotom na ploskev, je potrebno upoštevati kosinus vmesnega kota, pri čemer je to kot med normalo (pravokotnico) na površino in smerjo električnega polja $E \cdot A \cdot \cos(\alpha)$. Po definiciji skalarnega produkta lahko to zvezo zapišemo tudi s skalarnim produktom vektorja polja in vektorja površine, pri čemer je potrebno ponovno poudariti, da je smer vektorja površine določena z normalo na površino (smerjo, ki je pravokotna na površino).

* Koncept pretoka nekega vektorja skozi določeno površino je splošen pojem, ki se pogosto uporablja za opis določenih veličin in ga pogosto imenujemo fluks. V nadaljevanju bomo spoznali novo veličino, gostoto električnega pretoka, ki jo bomo označili s črko D in bo za prazen prostor enaka $\epsilon_0 \vec{E}$.

Pretok homogenega polja skozi poljubno postavljeno ravno površino je enak skalarnemu produktu (vektorja) električnega polja in vektorja površine (ki ga določa normala na površino).

$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

Pretok homogenega električnega polja preko ravne ploskve

SLIKA: Pretok homogenega električnega polja skozi ravno ploskev.

Primer: Določimo pretok homogenega električnega polja velikosti 5 kV/m, ki je usmerjen pod kotom 30° na normalo ravne površine določene s pravokotnikom dimenzij $3 \times 4 \text{ m}^2$.

Izračun:

1. način: Prikažemo polje v koordinatnem sistemu in zapišemo vektorja E in A :

$$\vec{E} = \vec{e}_x E \sin \alpha - \vec{e}_y E \cos \alpha = E(-\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$$

$$\vec{A} = -\vec{e}_y A = (0, -1, 0) A$$

$$\vec{E} \cdot \vec{A} = E(-\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)(0, -1, 0) A = EA \cos \alpha$$

2. način: Poiščemo direktno komponento polja, ki je pravokotna na površino, to je $E_n = E \cos \alpha \approx 4,33 \text{ kV/m}$. Sedaj le še pomnožimo normalno komponento polja s površino in dobimo pretok $\Phi_E \approx 4,33 \text{ kV/m} \cdot 12 \text{ m}^2 \approx \underline{\underline{52 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}}}$.

Pretok nehomogenega polja skozi neravno površino.

Kaj pa če polje ni homogeno in/ali če površina skozi katero računamo pretok ni ravna? Tedaj bomo dobili pravilni izraz za pretok na že poznan način: najprej zapišemo pretok za neko diferenčno majhno površino, na kateri bi homogenost veljala, torej za $\Delta \Phi_e = \vec{E} \cdot \Delta \vec{A}$, v limiti pa dobimo diferencial pretoka $d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{A}$, celotni pretok električnega polja pa kot*

$$\Phi_e = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Pretok polja za poljubno obliko polja in površine

V splošnem je pretok električnega polja skozi poljubno površino enak integralu električnega polja po tej površini. Pri te je potrebno upoštevati skalarni produkt vektorja polja in vektorja diferenciala površine. V smislu skalarne produkta je potrebno upoštevati le komponento polja, ki je v smeri normale na površino E_n . Lahko pišemo tudi $\Phi_e = \int_A E_n \cdot dA$.

* Ponovno velja opozoriti, da je bisten element izračuna pretoka vektorja skozi površino uporaba skalarne produkta dveh vektorjev. V konkretnem primeru vektorja električne poljske jakosti E in vektorja (diferenciala) površine, pri čemer je smer vektorja površine določena z normalo (pravokotna smer) na površino: $\vec{A} = \vec{e}_n A$.

SLIKA: Pretok nehomogenega polja skozi neravno površino.**Pretočne cevke ali gostotnice.**

Tudi pretok električnega polja lahko ponazorimo na enak način kot ponazarjamo silnice polja le da sedaj govorimo o gostotnih ali **pretočnih cevkah**, silnice pa ponazarjajo le stene gostotnih cev. Večji pretok električnega polja dosežemo, če zajamemo več pretočnih cev.

SLIKA: Pretok električnega polja znotraj gostotnic je konstanten (enako velik na poljubnem preseku).**Pretok polja po celotni (zaključeni) površini.**

Sedaj pa si pogledjmo vrednost tega pretoka po celotni - **zaključeni** površini. Včasih ji rečemo tudi **Gaussova površina**. To pomeni, da nas zanima pretok polja skozi površino krogle ali skozi vseh šest stranic kocke ali pač poljubne površine, ki v celoti zaobjame določen objekt. Pri tem niti ni potrebno, da računamo pretok skozi neko površino telesa, lahko je to popolnoma namišljeno (abstraktno) telo. Matematično integracijo po zaključeni površini naznačimo s krogcem v sredini simbola integrala:

$$\text{Pretok polja skozi zaključeno površino} = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Pretok polja točkastega naboja skozi zamišljeno površino krogle.

Vzemimo kar najpreprostejši primer, kjer je naboj Q postavljen v središče sferičnega koordinatnega sistema in računamo pretok skozi neko zamišljeno površino krogle polmera r :

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_0^\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Ugotovimo, da je ta integral sorazmeren naboju, ki se nahaja v središču namišljene krogle.

Ali je to naključje ali to morda velja za poljubno postavitve naboja znotraj namišljene krogle? Z razmislekom, da lahko naboj zamaknemo iz središča koordinatnega sistema, pa se število pretočnic, ki »sekajo« površino krogle, ne spremeni, lahko ugotovimo, da bo rezultat enak tudi za poljubno postavitve naboja Q znotraj (namišljene) krogle polmera r .

SLIKA: Število pretočnih cev, ki sekajo površino namišljene krogle je enako za poljubno postavitve naboja znotraj krogle. Enako velja za poljubno obliko površine zaključenega objekta.

Pretok polja skozi zaključeno površino poljubne oblike v kateri se nahaja množica nabojev.

Nadalje lahko razmislimo, kakšen je pretok električnega polja, če se v prostoru z zaključeno površino nahaja več nabojev. Razmislek je podoben kot v prejšnjem primeru. Pomagamo si z veljavnostjo superpozicije polja ($\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$) in zapišemo:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots) \cdot d\vec{A} = \oint_A \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} + \oint_A \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} + \dots = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} + \dots = \frac{\sum_i Q_i|_{\text{znotraj A}}}{\epsilon_0}$$

SLIKA: Pretočne cevke več nabojev, ki jih zajamemo z namišljeno površino krogle (ali poljubno zaključeno površino).

Vpliv nabojev zunaj zaključene površine na pretok polja skozi notranjost površine.

Kaj pa naboji, ki se nahajajo zunaj krogle? Ugotovimo lahko, da sicer povzročajo polje na površini krogle, vendar je pretok polja v kroglo enako veliko pretoku polja iz krogle.

SLIKA: Pretok polja skozi zaključeno površino v kateri ni nabojev je enak nič. Če se v zunanji okolici površine nahajajo naboji, je pretok polja, ki vstopa v prostor enak pretoku polja, ki izstopa iz tega prostora.

Povzemimo ugotovitve: Pretok električne poljske jakost skozi sklenjeno (zaključeno) površino je enak zaobjetemu naboju (algebrajski vsoti nabojev) deljeno z ϵ_0 . Ta zapis imenujemo Gaussov zakon.

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{znotraj } A}}{\epsilon_0} \quad \text{Gaussov zakon}$$

Pomen Gaussovega zakona:

- 1) Ugotavlja **izvornost** električnega polja. Električno polje izvira iz pozitivnih nabojev in se zaključuje (ponira) na negativnih.
- 2) **Omogoča izračun naboja** v določenem prostoru ob poznavanju električnega polja na mejah tega prostora.
- 3) **Omogoča izračun električnega polja** v primeru simetrične porazdelitve naboja. V tem primeru namreč polje ni funkcija spremenljivk integracije.
- 4) Gaussov zakon smo spoznali v t.i. integralni obliki. Zapisan je namreč z integralom in velja po določeni površini. Poznamo tudi zapis Gaussovega stavka v diferencialni obliki, ki definira povezavo med električnim poljem in nabojem (gostoto naboja) v točki v prostoru. Ta zakon je en od osnovnih zakonov, ki opisujejo naravo električnega polja. **Gaussov zakon je znan tudi kot ena od štirih Maxwellovih enačb**, ki v celoti opisujejo elektromagnetne pojave.

Primeri izračunov z uporabo Gaussovega zakona

Primer – naelektrena krogla: Krogla polmera R ima enakomerno volumnsko porazdelitev naboja. Določimo električno poljsko jakost znotraj in zunaj krogle.

Izračun:

1. Znotraj krogle si zamislimo zaključeno površino krogle s polmerom $r < R$ in zapišemo pretok polja skozi to ploskev. Uporabimo izraz

$$\oint_{A(r)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_A}{\epsilon_0}, \text{ kjer je } Q_A \text{ naboj zajet s površino krogle polmera } r. \text{ Ker je gostota naboja}$$

enakomerno porazdeljena, je celoten naboj zajet s kroglo površine $A(r)$ kar $Q_A = \rho V = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$.

Polje je zaradi simetrične porazdelitve naboja usmerjeno radialno, kar lahko zapišemo v obliki $\vec{E} = \vec{e}_r E(r)$ in je le funkcija radija. Tudi diferencial površine je usmerjen v smeri radija (pravokotno na površino) in je enako $d\vec{A} = \vec{e}_r dA$. Skalarni produkt $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ je enak $E \cdot dA$.

Poleg tega električno polje ni odvisno od integracijskih spremenljivk, saj je povsod kjer integriramo (po površini krogle) polje enako veliko - konstantno. Zato ga lahko pišemo pred integral:

$$\oint_{A(r)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint_{A(r)} dA, \text{ integral } dA \text{ po zaključeni površini pa je kar enak tej površini (ploščini):}$$

$$\oint_{A(r)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = E4\pi r^2. \text{ Sedaj le še sestavimo levo in desno stran enačbe in preuredimo}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot 4\pi \frac{r^3}{3} / \epsilon_0$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

Na koncu le še dodamo »nastavek« $\vec{E} = \vec{e}_r E(r)$ in polje je $\boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\rho r}{3\epsilon_0}}$. Ta zveza velja za

poljubne radije znotraj krogle, torej za $r \leq R$.

Ugotovimo, da znotraj krogle s konstantno volumsko porazdelitvijo gostote naboja polje narašča linearno z radijem.

2. Polje zunaj krogle dobimo na podoben način: zamislimo si neko površino krogle pri nekem radiju $r > R$ in zapišemo Gaussov zakon za to namišljeno površino. Ugotovimo, da bo leva stran enačbe enaka kot v prejšnjem primeru, desna pa se spremeni, saj je potrebno upoštevati, da smo zajeli celotni naboj že pri $r = R$, za $r > R$ pa ni naboja. Torej bo desna stran enačbe

kar $\rho \cdot 4\pi \frac{R^3}{3} / \epsilon_0$, oziroma kar celoten naboj Q . Dobimo

$$E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot 4\pi \frac{R^3}{3} / \epsilon_0$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

Ugotovimo, da polje v zunanosti krogle upada s kvadratom radialje. In še več, enačbo lahko zapišemo tudi v obliki $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, kar ni nič drugega kot polje v okolici točkastega

naboja. Torej, krogla z enakomerno volumsko gostoto naboja ima v okolici enako polje, kot če bi bil celoten naboj skoncentriran v centru krogle.

SLIKA: Polje v notranjosti in zunanosti krogle z enakomerno volumsko gostoto naboja.

Primer – naelektrena valja: Določimo polje med enakomerno in nasprotnosmerno naelektrenima neskončnima plaščema vajlev z linijsko gostoto naboja. $q(r = r_n) = +q$ in $q(r = r_z) = -q$.

SLIKA: Dva plašča valja, nasprotno naelektrena.

Izračun: Zamislimo si nek plašč valja polmera r in dolžine l med notranjim in zunanjim polmerom in zapišemo Gaussov zakon za ta namišljeni objekt. Podobno kot za kroglo lahko ugotovimo, da je polje neodvisno od spremenljivk integracije in je enako

$$\oint_{A(r)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = E2\pi rl + 0 + 0. \text{ Z dvema ničloma smo zapisali pretok skozi stranske površine}$$

(ker je tam normalna komponenta polja enaka nič). Desna stran enačbe Gaussovega zakona je enaka naboju, ki ga zaobjamemo z namišljenim valjem. Ta je enaka $Q/\epsilon_0 = \frac{ql}{\epsilon_0}$. Z združitvijo

leve in desne strani enačbe dobimo $E2\pi rl = \frac{ql}{\epsilon_0}$, od koder sledi $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$. Dobili smo

enačbo, ki jo že poznamo – enaka je polju preme elektrine. Polje med naelektrenima valjema je enako

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Primer: Naelektrena ravnina. S pomočjo Gaussovega zakona določimo polje v okolici naelektrene površine.

Izračun: Zapišemo Gaussov stavek skozi namišljeno kocko, katere polovica je na eni strani ravnine in polovica na drugi strani. Skozi stranske površine je pretok enak nič, skozi normalni pa je enak $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA + EA = 2EA$, desna stran je sorazmeren zaobjetemu naboju

$$Q/\epsilon_0 = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}. \text{ Z združitvijo dobimo } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

SLIKA: Naelektrena ravnina.

Vprašanja:

1. Kaj so to silnice polja?
2. Kaj je to pretok električnega polja?
3. Kako določimo pretok homogenega električnega polja skozi ravno površino?
4. Kako določimo pretok nehomogenega električnega polja skozi poljubno površino?
5. Čemu je enak pretok električnega polja skozi zaključeno površino?
6. Pokažite uporabo Gaussovega zakona na primeru izračuna polja naelektrene krogle, naelektrenega valja in naelektrene ravnine.
7. Kakšen je pomen Gaussovega zakona?

Primeri kolokvijev: 1. kolokvij, 08.12.2000, 12. december 2001



12. Delo in potencialna energija

Vsebina: Delo kot integral sile na poti, delo električne sile, delo po zaključeni poti, potencialna energija, potencialna energija sistema nabojev, delo kot razlika potencialnih energij.

V srednješolski fiziki je veljalo, da je delo enako produktu sile in dolžine poti, torej, če vzdolž poti dolžine l deluje sila F , le ta opravi delo $A = F \cdot l$. Če torej potiskamo voziček v smeri poti dolžine 5 m s silo 100 N opravimo delo 500 N·m ali 500 J. Kaj pa, če voziček potiskamo s silo 100 N v smeri, ki je pod kotom 60° na smer poti? V tem primeru moramo upoštevati le tisto komponento sile, ki deluje v smeri poti. Delo je torej $A = F \cdot l \cdot \cos(\alpha) = 100 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} \cdot \cos(60^\circ) = 250 \text{ J}$. Ugotovimo, da je za izračun dela primerna uporaba skalarnega produkta $A = \vec{F} \cdot \vec{l}$.

SLIKA: Premikanje vozička s konstantno silo a) v smeri poti in b) pod kotom 30° na smer poti.

Kaj pa drugi del sile, ki tudi nastopa pri premiku? Ta sila je usmerjena pravokotno na smer poti in ima za posledico trenje po ploskvi - ne prispeva pa k delu. V smislu definicije dela, torej kot produktu poti in sile v smeri te poti. V tem smislu je potrebno razlikovati pojem besede delo, kot ga smatramo v vsakdanu. Če primemo in pri miru držimo težko košaro v smislu definicije dela ne opravimo nič dela, čeprav moramo v to naše početje vložiti določen napor (delo). Bolj ustrezno bi naš napor ovrednotili s pojmom energije. Ta energija izhaja iz energije, ki se troši v naših mišicah nekaj pa je gre prav gotovo tudi v toploto - potenje.

In koliko energije potrebujemo za premik na poti 5 m? En del te energije je očitno delo 250 J, ki se odraža v spremembi kinetične energije vozička, drug del energije pa potrebujemo za premagovanje sile trenja. Za točen izračun bi torej morali poznati še energijo, ki se porabi pri trenju vozička s podlago.

Delo po poljubni poti in velikosti sile. Kaj pa če sila ni konstantna na poti in poleg tega ne deluje vedno v isti smeri glede na pot? Potem lahko zapišemo delo le za en mali (diferenčni) odsek, da dobimo tisti del sile, ki deluje v smeri poti pa uporabimo skalarni produkt. Diferenčni del sile na poti Δl je torej $\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l}$. Z limitiranjem dobimo iz diferenc diferencial: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{l}$, celotno delo pa je seveda integracija po poti od začetne točke do končne točke:

$$A = \int dA = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

SLIKA: Delo sil po poljubni poti.

Delo električne sile. Kako pa izračunamo delo električnih sil (A_e) na naboje? Na popolnoma enak način. Upoštevamo, da je sila na naboj v električnem polju enaka $\vec{F} = Q\vec{E}$, torej bo delo za premik naboja v električnem polju iz točke T_1 v točko T_2 enako

$$A_e = A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Primer: Vzemimo dva pozitivna naboja oddaljena za $d = 1$ cm z množino naboja $Q = 10$ nC. Koliko dela opravi naboj (zunanji vir) za premik na polovično razdaljo?

Izračun: naboja postavimo vzdolž X osi, levega v izhodišče k.s., desnega pa za razdaljo d v smeri X osi. Izračunali bomo delo, potrebno za premik desnega naboja v levo. Da bi lahko izračunali delo, moramo desni naboj postaviti na neko poljubno mesto vzdolž X osi, oddaljeno za razdaljo x od levega naboja. Polje na mestu desnega naboja je $\vec{E} = \vec{e}_x \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$, $d\vec{l}$ pa je usmerjen v smeri $-X$ osi*.

SLIKA: Premik desnega naboja v smeri levega naboja.

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_{x_1=d}^{x_2=d/2} \vec{e}_x \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cdot (\vec{e}_x dx) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right)_d^{d/2} = \\ &= -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d/2} - \frac{1}{d} \right) = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \cong -9 \cdot 10^9 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} (10 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2 10^2 \text{ m}^{-1} = \underline{\underline{-9 \cdot 10^{-5} \text{ J}}} \end{aligned}$$

Dobljen rezultat je negativen, kar pomeni, da bi bila za premik potrebna neka zunanja sila (A_z), ki bi opravila to delo. Veljati torej mora:

$$A_z + A_e = 0.$$

* Kljub temu, da je $d\vec{l}$ usmerjen v smeri $-X$ osi ni njegova vrednost $-\vec{e}_x dx$, pač pa $d\vec{l} = -\vec{e}_x (x - (x + dx)) = \vec{e}_x$.

Primer: Določimo delo za premik desnega naboja v desno za $d/2$. Rezultat je

$$A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_d^{3d/2} \vec{e}_x \frac{QQ}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cdot (\vec{e}_x dx) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right)_d^{3d/2} =$$

$$= -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{3d/2} - \frac{1}{d} \right) = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left(\frac{2}{3} - 1 \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Vs}{Am} (10 \cdot 10^{-9} C)^2 \cdot \frac{1}{3} 10^2 m^{-1} = \underline{\underline{3 \cdot 10^{-5} J}}$$

Rezultat je pozitiven, saj polje opravi delo 30 μJ : delec se premakne v drugo točko pod vplivom električne sile. Zakaj je rezultat mnogo manjši kot v prejšnjem primeru?

SLIKA: Premik desnega naboja stran od levega.

Delo po poljubni poti.

Kolikšno pa bi bilo delo, če bi ga opravili po drugi poti? Izračunajmo delo za enak premik kot v prejšnjem primeru le po drugi poti. Izberimo to pot tako, da bo šla najprej v smeri kota za 45° , nato v smeri radija do $r = 2,5$ cm in nato nazaj za kot 45° do končne točke.

Ugotovimo lahko, da je v smeri kota ($d\vec{l} = \vec{e}_\varphi r d\varphi$) polje enako nič, saj je polje v vsaki točki usmerjeno radialno. Torej je produkt integracije $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ v smeri kota enak nič in je rezultat enak kot prej.

Ker je rezultat integracije polja neodvisen od poti lahko

vzamemo dve poljubni poti in zapišemo $\int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$.



Pri kolesarjenju pogosto končamo na istem mestu kot smo začeli. Če bi šlo za delo električnih sil, bi bilo na (po definiciji) na koncu delo enako nič. Kako pa je z energijo?

SLIKA: Delo od točke T_1 do točke T_2 po poti L_1 in poti L_2 je enako.

Delo po zaključeni poti.

Ker velja $\int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, integracija v nasprotni smeri pa spremeni predznak integralu

$$\int_{-L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \text{ lahko pišemo}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{-L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Prišli smo do pomembnega rezultata, da je **krivuljni integral električne poljske jakosti po poljubni zaključeni poti (zanki) enak nič***:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

POTENCIALNA ENERGIJA

SLIKA: S premagovanjem sile težnosti pridobivamo (gravitacijsko) potencialno energijo. Na sliki je primer profila pete etape kolesarske poti po okolici Grosupelj, ki je primerna za tiste, ki žele neposredno spoznavati povezavo med delom in energijo ter zakonitosti integralov po zaključeni poti. Vir: <http://www.grosuplje.si>.

Potencialna energija ali delo pri prenosu naboja v neskončnost (kjer je polje enako nič). Določimo še delo, če bi enega od nabojev iz prejšnjega primera pustili v neskončnost. Opravljeno delo bi bilo:

$$A_{1\infty} = \int_{r_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_{r_1}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot (\vec{e}_r dr) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_1}^{\infty} =$$

$$= -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_1}$$

* Pri tem je potrebno biti previden, saj smo doslej obravnavali le elektrostatično polje, torej tako, ki se s časom ne spreminja. Zgornji zapis je torej **točen le za elektrostatične polje**. Ko bomo obravnavali dinamično polje bomo ugotovili, da je potrebno zgornji zapis spremeniti – dopolniti.

SLIKA: Delo pri prenosu naboja od točke T do neskončnosti.

Lahko rečemo, da je imel sistem (naboj) pred prenosom v neskončnost določeno energijo, ki se je nato porabila za prenos. Ta (potencialna) energija je ravno enaka delu, potrebnem za premik naboja v neskončnost. Če uporabimo simbol W za zapis električne potencialne energije, velja

$$W(T) = A_e(T \rightarrow T_\infty)$$

Delo, potrebno za prenos naboja Q od neke točke T do neskončnosti je enako električni potencialni energiji tega naboja v točki T .

Primer: Določite elektrostatično potencialno energijo sistema dveh nabojev velikosti 10 nC oddaljenih za 1 cm.

Izračun: Izračun smo že opravili, saj je ta energija enaka delu polja za premik enega od nabojev od začetne lege do neskončnosti:

$$W_e = A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \underline{\underline{9\mu\text{J}}}.$$

Komentar: na tem mestu lahko vpeljemo tudi koncept električnega potenciala.

Potencialna energija sistema nabojev. Kolikšna pa je energija sistema, če imamo več nabojev? Postopamo tako, kot da bi imeli najprej na mestu naboj Q_1 , nato na svoje mesto oddaljeno od Q_1 za r_{12} pripeljemo iz neskončnosti naboj Q_2 . Za to je potrebno delo

$$A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}, \text{ da pripeljemo poleg še naboj } Q_3 \text{ potrebujemo delo}$$

$$\frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}. \text{ Energija sistema treh nabojev bo torej } \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}. \text{ V}$$

nadaljevanju bomo ta rezultat prikazali še nekoliko drugače.

SLIKA: Sistem treh nabojev z označenimi naboji in razdaljami med naboji.

* Za postavitev naboja Q_1 na določeno mesto ne potrebujemo nobenega dela, saj imamo predhodno sistem brez nabojev in torej brez polja. V nadaljevanju pa seveda vsi nadaljnji naboji prispevajo k polju – delu.

Delo kot razlika potencialnih energij sistema. Imamo sistem nabojev porazdeljenih po prostoru in torej določeno električno potencialno energijo. Sedaj premaknemo enega od nabojev iz izhodiščnega mesta T_1 na drugo mesto (T_2) in pri tem opravimo določeno (pozitivno ali negativno) delo. Če je to delo pozitivno, je delo opravilo elektrostatično polje, energija sistema pa je po premiku manjša kot pred premikom. V nasprotnem primeru (delo negativno) mora delo opraviti neka zunanja sila, kar pomeni, da je končna energija sistema večja kot pred premikom. **Delo potrebno za premik naboja od T_1 do T_2 je enako razliki potencialnih energij sistema nabojev pred in po premiku:**

$$A(T_1 \rightarrow T_2) = W(T_1) - W(T_2)$$

SLIKA: Delo je enako razliki potencialnih energij sistema pred premikom in po premiku.

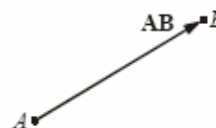
Vprašanja za obnovo:

1. Zapišite enačbo za izračun dela po poljubni poti in razložite pomen skalarnega produkta.
2. Kako izračunamo delo električnih sil?
3. Kaj pomeni pozitivno delo in kaj negativno delo električnih sil?
4. Koliko je integral polja po zaključni poti?
5. Kakšna je povezava med delom električnih sil in električno potencialno energijo?
6. Kako izračunamo potencialno energijo sistema nabojev?

Primer iz kolokvija 6.12.204

5. Koliko dela opravi homogeno električno polje jakosti $\mathbf{E} = (-20, 10, 30)$ kV/m pri premiku točkaste elektrine množine $Q = 1 \mu\text{C}$ od točke $A(10 \text{ cm}, 10 \text{ cm}, 40 \text{ cm})$ do točke $B(0 \text{ cm}, 30 \text{ cm}, 50 \text{ cm})$?

5. Delo W , ki ga opravi polje pri premiku točkaste elektrine množine $Q = 1 \mu\text{C}$ od točke A do točke B je sorazmerno napetosti U_{AB} med tema točkama: $W = QU_{AB}$. Ta napetost je enaka krivuljnemu integralu vektorja električne poljske jakosti po neki krivulji med tema točkama. Ker je polje homogeno, je vektor $\vec{E}$ konstanta v tem integralu in ga zato lahko izpostavimo pred integral:



$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \int_A^B d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{AB} = (-20, 10, 30) \text{ kV/m} \cdot (0 - 10, 30 - 10, 50 - 40) \text{ cm} = \boxed{7000 \text{ V}}$$

$$W = 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^3 \text{ J} = \boxed{7 \text{ mJ}}$$

13. Potencial in napetost

Vsebina poglavja: Električni potencial - definicija, potencial v okolici točkastega naboja, potencial sistema točkastih nabojev, potencial v okolici zvezno porazdeljenih nabojev, ekvipotencialne ravnine, električna napetost, Kirchoffov zakon.

Električni potencial. Ugotovili smo že, da je električna potencialna energija naboja Q na mestu T enaka delu pri prenosu tega naboja od točke T v neskončnost oziroma do mesta, kjer je energija enaka nič:

$$W(T) = Q \int_T^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Normirano potencialno energijo imenujemo električni potencial

$$V(T) = \frac{W(T)}{Q} = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Enota za potencial je $J/C = V$.

Številčno je torej električni potencial enak delu polja električnih sil za premik enote naboja (1 C) od točke T do neskončnosti.

Ali obratno: Če poznamo potencial v določeni točki, bo energija potrebna za prenos naboja v polju električnih sil iz neskončnosti do te točke enaka produktu naboja in potenciala: $W(T) = QV(T)$ ali tudi, če se na mestu T nahaja naboj Q (ali pa ga na to mesto postavimo) in ga sila polja premakne do mesta, kjer je polje enako nič, pridobi energijo $W(T) = QV(T)$.



SLIKA: Potencial kot delo za prenos naboja iz točke T v neskončnost.

Potencial v okolici točkastega naboja Q .

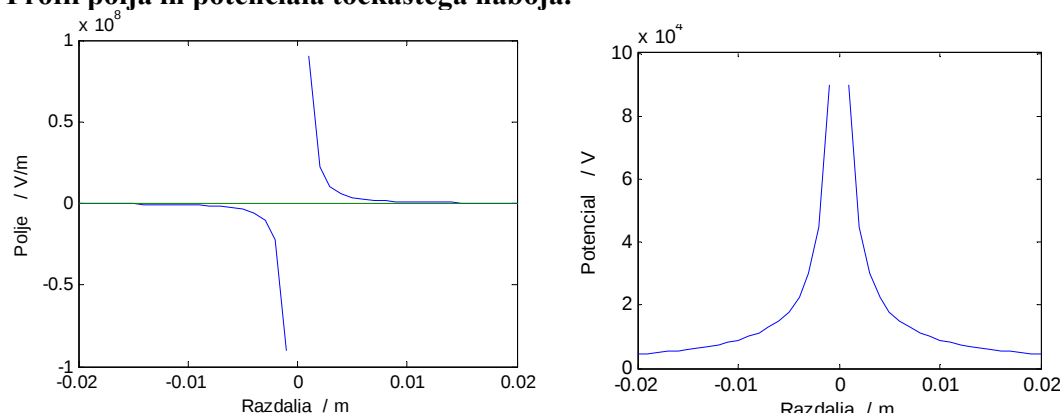
Z upoštevanjem definicije za potencial kot normirane potencialne energije, zapišemo (na določeno oddaljenost r od naboja Q postavimo testni naboj Q_t in določimo delo, pri prenosu tega naboja od r do neskončnosti):

$$V(r) = \frac{W(r)}{Q_t} = \frac{1}{Q_t} \int_r^{\infty} Q_t \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

SLIKA: Potenciala v okolici točkastega naboja.

Ponovimo ta pomemben rezultat: **potencial točkastega naboja se z oddaljenostjo manjša z $1/r$ in je enak**

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Profil polja in potenciala točkastega naboja.**SLIKA: Porazdelitev polja in potenciala v okolici točkastega naboja. Polje upada $1/r^2$, potencial pa z $1/r$.**

```
% IZRIS POLJA IN POTENCIALA TOČKASTEGA NABOJA Z MATLABOM
Q=1e-8;
e0=8.854e-12;
r=-2e-2:1e-3:2e-2;

V=Q./(4*pi*e0.*abs(r));
E=sign(r)*Q./(4*pi*e0.*r.^2); % funkcija sign() poskrbi za pravi predznak polja
plot(r,V); xlabel('Razdalja / m'); ylabel('Potencial / V');
figure;
zero=zeros(length(r),1); % vektor ničel potrebujemo za izris linije ničle polja
plot(r,E,r,zero); xlabel('Razdalja / m'); ylabel('Polje / V/m');
```

Primer: Določimo potencial v okolici točkastega naboja $Q = 10 \text{ nC}$ pri $r = 1 \text{ cm}$.

Izračun: Velja $V(r = 1 \text{ cm}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{10 \cdot 10^{-9} \text{C}}{10^{-2} \text{m}} = \underline{\underline{9 \text{ kV}}}$.

(To tudi pomeni, da bi bila energija potrebna za premik naboja 1 C iz neskončnosti do razdalje 1 cm od naboja 10 nC enaka $9 \text{ kV} \cdot 1 \text{ As} = 9 \text{ kJ}$, energija za prenos naboja 2 nC pa $W = 2 \text{ nC} \cdot 9 \text{ kV} = 18 \mu\text{J}$.)

Potencial sistema točkastih nabojev.

Ugotovili smo, da je potencial v okolici enega točkastega naboja enak $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, kjer je r razdalja od točke, kjer iščemo potencial, do točke, kjer se nahaja naboj Q . Ker velja

superpozicija polja lahko tudi potencial določimo kot superpozicijo posameznih delnih prispevkov normirane energije. Za sistem točkastih nabojev bo torej potencial v točki T enak

$$V(T) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i},$$

kjer so r_1, r_2 itd razdalje od naboja Q_1, Q_2 , itd do točke T , kjer računamo potencial.

SLIKA: Izračun potenciala sistema točkastih nabojev.

Primer: Določimo potencial v sredini med dvema točkastima nabojema $Q = 10 \text{ nC}$ oddaljenima za 2 cm.

Izračun: $V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 2 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 1\text{cm}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^{-9} \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \cdot 10 \cdot 10^9 \text{ C} \cdot 100 \text{ m}^{-1} = \underline{\underline{18 \text{ kV}}}.$

Potencial v okolici sistema zvezno porazdeljenih nabojev.

Za porazdelitev točkastih nabojev smo ugotovili, da lahko potencial določimo kot vsoto

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}.$$

Če je porazdelitev naboja zvezna moramo vzeti en mali del celotnega naboja in z limitiranjem vsote delnih prispevkov dobimo

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta Q_i}{r_i} = \int_{\text{po vseh } Q\text{-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ oziroma } \boxed{dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}}.$$

r je razdalja od mesta, kjer se nahaja dQ do točke kjer iščemo potencial. Odvisno od načina porazdelitve naboja (po površini, volumnu, liniji) določimo potencial kot

$$V = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = \int_A \frac{\sigma dA}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = \int_L \frac{q dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

SLIKA: Izračun potenciala porazdeljenega naboja s seštevanjem (integracijo) delnih prispevkov dV . Na sliki je narisana diferencial naboja, točka T kjer računamo integral in razdalja r od dQ do točke T .

Primer: Izračunajmo potencial vzdolž Z osi za enakomerno naelektren tanek obroč polmera a z nabojem Q , ki leži v ravnini $z = 0$.

Ker je naboj porazdeljen enakomerno po obroču lahko uporabimo enačbo $V = \int_L \frac{qdl}{4\pi\epsilon_0 r}$, ki jo

$$\text{zapišemo v obliki } V = \int_0^{2\pi} \frac{qad\varphi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\frac{Q}{2\pi a} a 2\pi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Ugotovimo lahko, da je način računanja potenciala podobno računanju električne poljske jakosti, le da je običajno nekoliko bolj preprosto. Predvsem zato, ker je potencial skalarna veličina, polje pa vektorska. Pogosto zato električno polje določimo posredno, tako, da najprej izračunamo potencial, nato pa iz potenciala še električno poljsko jakost. Kako, bomo spoznali v nadaljevanju.

Potencialno polje je skalarno polje.

Potencial lahko določimo v vsaki točki prostora neodvisno od porazdelitve nabojev, enako, kot je veljalo za električno poljsko jakost. Je pa za razliko od električnega polja, ki je vektorsko polje, potencial skalarna veličina in tvori **skalarno polje**.

Ekvipotencialne ravnine.

Če povežemo točke z enako velikostjo potenciala dobimo ravnino, ki jo imenujemo ekvipotencialna ravnina ali ekvipotencialna ploskev. V primeru osamljenega točkastega naboja so ekvipotencialne ploskve krožnice, oz. v 3D površine krogle. Običajno jih rešimo tako, da je razlika potencialov med vsako naslednjo ravnino konstantna.

Primer: Določimo ekvipotencialne ravnine v okolici točkastega naboja $Q = 10 \text{ nC}$.

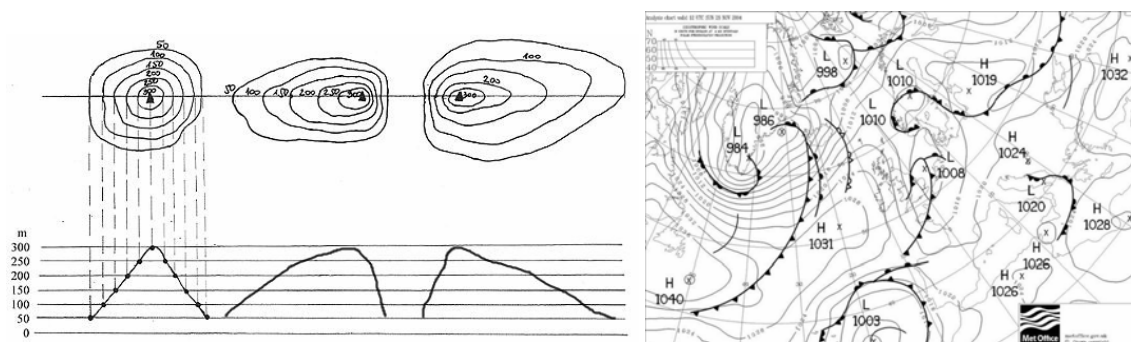
Ugotovili smo že, da velja za potencial v okolici točkastega naboja enačba $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Ugotovili smo tudi, da je ta potencial na razdalji 1 cm enak $V(r = 1 \text{ cm}) = 9 \text{ kV}$. Potencial 9 kV je torej enak v vseh točkah, ki so od točkastega naboja oddaljeni za 1 cm, kar prikažemo z lupino krogle (v 2D z krožnico) polmera 1 cm. Kje pa se nahajajo ekvipotencialne ravnine s potenciali 8 kV, 7 kV itd.? Preprosto: enačba, ki jo je potrebno rešiti za ekvipotencialno ravnino s potencialom 8 kV bo

$$8 \text{ kV} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_{8\text{kV}}} \Rightarrow r_{8\text{kV}} = Q / (8 \text{ kV} \cdot 4\pi\epsilon_0) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{8 \cdot 10^3} \text{ m} = 0,01125 \text{ m} = 1,125 \text{ cm}.$$

Naslednja ekvipotencialka bo pri $r_{7\text{kV}} = \frac{8}{7} 1,125 \text{ cm} = 1,285 \text{ cm}$ itd. V splošnem nas zanimajo ekvipotencialne ravnine, katerih potenciali se razlikujejo za konstantno razliko napetosti, v našem primeru za 1 kV). Za ekvipotencialne ravnine v okolici točkastega naboja lahko ugotovimo, da se vrstijo v geometrijskem zaporedju.

SLIKA: Prikaz ekvipotencialnih ravnin za točkasti naboj.



SLIKA: Grafično na več načinov lahko prikazujemo ekvipotencialne ploskve. Na podoben način so določene izohipse, kot točke z enako višinsko razliko. Na sliki levo je razviden profil različnih vzpetin in ustrezne izohipse. Vir: <http://www.o-4os.ce.edus.si/gradiva/geo/zemljevid/vse.htm>. Podobno lahko pri razlagi vremena uporabljamo izobare (črte z enakim pritiskom), lahko tudi druge veličine, pomembne za razlago vremena: temperatura, hitrost dviganja vetra. Vir: <http://www.pro-vreme.net/index.php?id=107>.

Električna napetost.

Ugotovili smo že, da lahko delo potrebno za premik naboja med dvema točkama določimo iz razlike potencialne energije sistema nabojev pred in po premiku. Če to delo opravi testni naboj 1 C govorimo o električni napetosti med dvema točkama. **Električna napetost je torej številsko enaka delu polja električnih sil potrebnem za prenos enote naboja iz točke T_1 do točke T_2 :**

$$U_{12} = \frac{A_{Q_t}(T_1 \rightarrow T_2)}{Q_t} = \frac{W(T_1) - W(T_2)}{Q_t} = -\frac{Q_t \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{Q_t} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Ugotovimo lahko, da lahko **električno napetost določimo tudi kot razliko potencialov:**

$$U_{12} = V(T_1) - V(T_2) = \int_{T_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{T_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Kirchoffov zakon. Ugotovili smo, da električno napetost med dvema točkama določimo z integracijo električne poljske jakosti po poljubni poti od ene do druge točke. Obenem smo ugotovili, da je ta integral enak nič, če je pot zaključena sama vase. Torej bi lahko pisali:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{T_2}^{T_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{T_{N-1}}^{T_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_1 + U_2 + \dots + U_N = 0$$

Ali tudi, vsota vseh napetosti po zaključeni poti (zanki) je enaka nič, kar je 2. Kirchoffov zakon:

$$\sum_{i=1}^N U_i = 0$$

OSNOVNI PRIMERI IZRAČUNA NAPETOSTI, POLJA IN POTENCIALA ZA: PLOŠČATI, VALJNI IN SFERIČNI KONDENZATOR:

Dve ravni vzporedni naelektreni plošči: ploščni kondenzator

Ravni vzporedni plošči površine $A = 5.8 \text{ cm}^2$ sta oddaljeni za $d = 10 \text{ cm}$ in imata naboj $\pm Q = \pm 20 \text{ nC}$. Določimo polje, potencial in napetost med ploščama, pri čemer predpostavimo homogenost polja med ploščama (polje neskončnih naelektrenih ravnin).

SLIKA: a) Dve ravni nasprotno naelektreni plošči postavljeni v koordinatni sistem z normalo v smeri osi X. b) Napetost in polje med dvema ravnima (nasprotno) naelektrenima ploščama.

Plošči postavimo v koordinatni sistem, recimo tako, da je normala na površino v smeri X osi in da ima leva elektroda pozitivni naboj. Ob predpostavki enakomerne porazdelitve naboja, je $\sigma = \frac{Q}{A}$. Dobimo

$$\sigma = \frac{20 \text{ nC}}{40 \text{ cm}^2} = 5 \mu\text{m/m}^2.$$

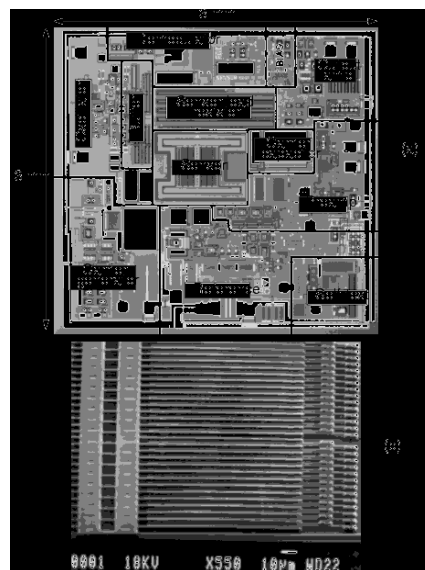
Električno polje med ploščama je superpozicija polj dveh plošč in je enako* $\vec{E} = \vec{e}_x \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot 2 = \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Napetost

med ploščama dobimo z integracijo polja med ploščama:

$$U = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^d \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d$$

Izračun:

$$U = \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{s/m}^2}{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}} \cdot 0,1 \text{ m} = \underline{\underline{56,5 \text{ kV}}}.$$



Mikroelektronska industrija uporablja tehnologijo mikromehanske obdelave (MEMS) za realizacijo mikronskih struktur. Na sliki integracija merilnika pospeškov, z elektroniko. Merilnik pospeškov je v osnovi sestavljen iz niza ploščnih kondenzatorjev. Ene stranice so fiksno vpete, druge pa se lahko premikajo. Z merjenjem spremembe kapacitivnosti lahko določimo hitrost spremembe – pospešek.
<http://www.aero.org/publications/helvajian/>

* Tu smo predpostavili polje v okolici dveh naelektrenih ravnin. V resnici sta dve vzporedni plošči omejenih dimenzij zato velja aproksimacija le delno, torej predvsem tedaj, ko je površina plošč velika v primerjavi z razdaljo med ploščama.

- Iz primera ugotovimo, da je električna poljska jakost med ploščama konstantna in enaka $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Takemu polju rečemo tudi **homogeno polje**.
- Če v enačbi za napetost med ploščama zamenjamo $\frac{\sigma}{\epsilon_0} = E$, dobimo $\boxed{U = Ed}$ oziroma

$$\boxed{E = \frac{U}{d}}$$

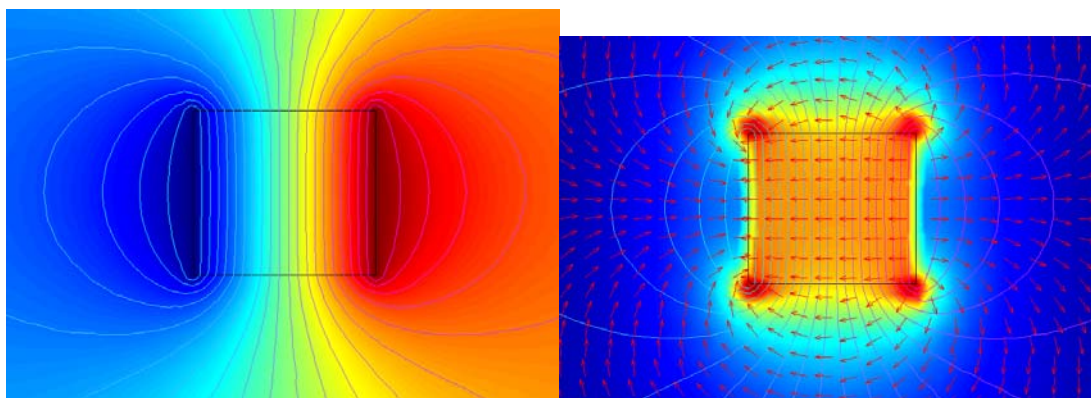
To sta enačbi, ki ju poznamo že iz srednješolske fizike. Ugotovimo lahko, da sta enačbi ustrezni za izračun polja ali napetosti, vendar le v tem konkretnem primeru, torej, za polje oz. napetost med dvema ravnima ploščama. To seveda ne zmanjšuje pomembnosti izraza, pač pa velja le kot opozorilo, da se ga ne bi uporabljalo nekritično. Če polje med dvema točkama ni homogeno, je potrebno napetost med točkama izračunati s pomočjo integrala električne poljske jakosti po poti. To bomo prikazali z naslednjim primerom (koaksialni kabel).

Določimo še potencial med ploščama ploščnega kondenzatorja: če ozemljimo desno elektrodo (elektrodo, ki ima negativni naboj), bo potencial med elektrodama ($V(x=d)=0, V(x=0)=U$):

$$V(x) = \int_x^d \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot (d-x).$$

Če ozemljimo levo elektrodo, bo potencial med elektrodama:

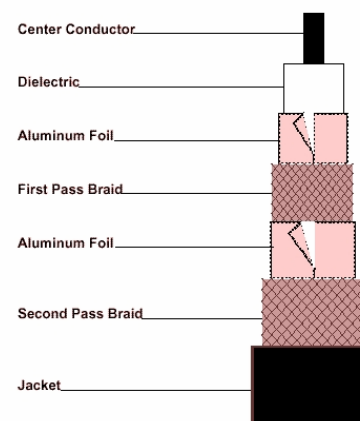
$$V(x) = \int_x^0 \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot x, \quad V(x=0)=0, V(x=d)=-U$$



SLIKA: Levo: Ekvipotencialne ravnine med in v okolici dveh nasprotno naelektrenih ravnih plošč. Ugotovimo, da so med ploščama ekvipotencialne ravnine enakomerno razmalnjene, v okolici pa ne. Desno: Vektorji električne poljske jakosti skupaj z ekvipotencialnimi ravninami in velikostjo električne poljske jakosti (večje polje bolj rdeča barva). Za lažje opazovanje so vektorji polja enako veliki neodvisno od velikosti polja.

Koaksialni kabel: valjni kondenzator

Med žilo in oklopom zračnega koaksialnega kabla je napetost 2 kV. Določimo linijsko gostoto naboja na žili in oklopu ter maksimalno električno poljsko jakost, če je polmer žile $r_n = 2$ mm, $r_o = 5$ mm, $r_z = 7$ mm. Oklop in žila sta iz prevodnega materiala.



SLIKA: Koaksialni kabel s priključitvijo napetosti med oklopom in žilo.

Koaksialen kabel za visokofrekvenčni prenos signalov. <http://www.smarthome.com/851081.html>

Izračun: Najprej moramo predpostaviti enakomerno porazdelitev naboja na žili in oklopu. Predpostavimo pozitivni naboj na žili (Q) in negativni na oklopu ($-Q$). Električno poljsko jakost med žilo in oklopom določimo s pomočjo Gaussovega zakona. Na neki razdalji r od osi kabla izračunamo pretok el. polja skozi plašč valja (na velikost polja na radiju r vpliva le zaobjeti naboj): in dobimo enačbo, ki je identična enačbi za polje v okolici preme elektrine (naelektrene premice) *:

$$E_r \cdot 2\pi r l = \frac{q l}{\epsilon_0} \text{ in } E_r = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r} \text{ oziroma } \vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r}.$$

Ali je površinska gostota naboja enako velika na oklopu in na površini žile? Odgovor je NE. Enako velik je celotni naboj, za gostoto naboja pa velja: $Q(r_n) = \sigma_n 2\pi r_n l = -Q_o = -\sigma_o 2\pi r_o l$, torej bo

$$\sigma_o = -\sigma_n \frac{r_n}{r_o}.$$

V konkretnem primeru bo torej $\sigma_o = -\sigma_n \frac{r_n}{r_o} = -\sigma_n \frac{2 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} = -\frac{2}{5} \sigma_n$.

Pogosto nas zanima tudi gostota površinsko porazdeljenega naboja. Iz izpeljanih enačb

$$E(r_n) = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r_n} = \frac{\sigma_n 2\pi r_n}{2\pi \epsilon_0 r_n} = \frac{\sigma_n}{\epsilon_0} \text{ oziroma } \sigma_n = \epsilon_0 E(r_n).$$

Da bi lahko določili q ali σ moramo zapisati še izraz za napetost med žilo in oklopom. Napetost med oklopom in žilo določimo z integracijo polja med kontaktoma:

* Podobno bi izvajali, če bi izhajali iz enakomerne površinske gostote naboja na površini žile $\sigma(r = r_n) = \sigma_n$:

$E_r \cdot 2\pi r l = \frac{\sigma_n A(r_n)}{\epsilon_0}$ in $E_r = \frac{\sigma_n 2\pi r_n l}{2\pi \epsilon_0 r l} = \frac{\sigma_n r_n}{\epsilon_0 r}$ oziroma $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\sigma_n r_n}{\epsilon_0 r}$. Enačba je seveda enakovredna prejšnji, saj velja $Q = q l = \sigma_n 2\pi r_n l$, oziroma $q = \sigma_n 2\pi r_n$.

$$U = \int_0^{r_z} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{r_n} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{r_n}^{r_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{r_0}^{r_z} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 + \int_{r_n}^{r_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + 0.$$

Zakaj sta prvi in tretji integral enaka nič? Zato, ker integriramo polje, ki pa je znotraj žile in znotraj (prevodnega oklopa) enako nič! To lahko hitro ugotovimo z razmislekom, da se pozitivni in negativni naboji privlačijo in se zato pozitivni naberejo na površini žile, negativni pa na notranji strani oklopa. Z uporabo Gaussovega zakona na plašču valja z radijem, ki je večji od polmera r_0 bi hitro ugotovili, da je polje znotraj oklopa enako nič, saj je zaobjeti naboj vsota enako velikega pozitivnega in negativnega naboja.

$$U = \int_{r_n}^{r_0} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_n}^{r_0} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_n}$$

Napetost bi lahko določili tudi iz razlike potencialov. Če pripišemo potencialu oklopa potencial nič, torej $V(r_0) = 0$, bo

$$U = V(r_n) - V(r_0) = V(r_n) = \int_{r_n}^{r_0} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_n}.$$

Potencial v poljubni točki bo torej $V(r) = \int_r^{r_0} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$. Znotraj žile ni polja (kar lahko pokažemo z Gaussovim stavkom), potencial je torej v notranjosti žile enak kot na površini. Podobno lahko pokažemo tudi za oklop.

In še izračun linijske gostote naboja (iz enačbe za napetost):

$$q = U \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_0}{r_n}} = 2 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \frac{2\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}}{\ln \frac{5 \text{ mm}}{2 \text{ mm}}} = \underline{\underline{0,121 \mu\text{C/m}}}.$$

Električno polje je maksimalno pri najmanjšem radiju, torej pri r_n :

$$\vec{E}_{\max} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r_n} = \vec{e}_r \frac{U}{r_n \ln \frac{r_0}{r_n}} \quad E_{\max} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ V}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \ln \frac{5}{2}} = \underline{\underline{1,09 \text{ MV/m}}}$$

Ponovimo pomembne rezultate iz tega primera:

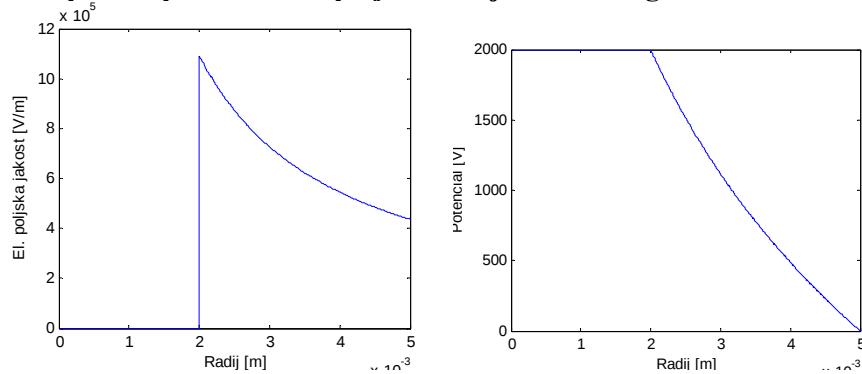
napetost med žilo in plaščem koaksialnega kabla je

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_n},$$

električno polje pa $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$ ali $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\sigma_n r_n}{\epsilon_0 r}$

oziroma izraženo z napetostjo $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{U}{r \cdot \ln \frac{r_0}{r_n}}.$

Površinska gostota naboja pri r_n je $\sigma_n = \epsilon_0 E(r_n).$

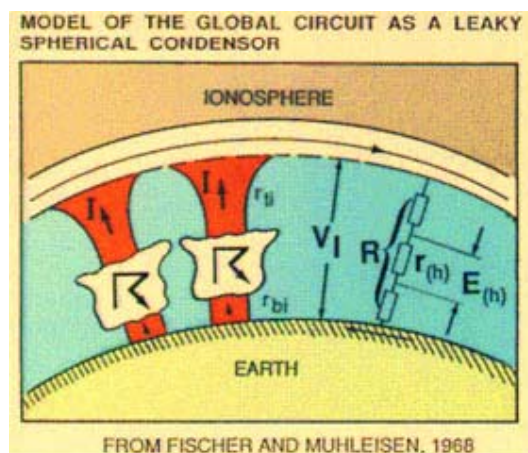
Izris poteka potenciala in polja znotraj koaksialnega kabla.**Slika: Električna poljska jakost in potencial znotraj koaksialnega kabla.**

```
% PRIMER IZRISA POLJA IN POTENCIALA KOAKSIALNEGA KABLA S PROGRAMOM MATLAB
e0=8.854e-12;
U=2000; rn=2e-3; ro=5e-3;
q=U*2*pi*e0/(log(ro/rn));
R=0:1e-5:ro;
E=zeros(length(R),1);V=E;
E=q/(2*pi*e0)/R;
V=q/(2*pi*e0)*log(ro./R);
for i=1:length(R)
    if R(i)<rn
        V(i)=U;
        E(i)=0;
    end
end
plot(R,V); xlabel(' Radij [m]'); ylabel(' Potencial [V]');
figure; plot(R,E); xlabel(' Radij [m]'); ylabel(' El. poljska jakost [V/m]');
break
```

Krogelni (sferični) kondenzator

Obravnavamo dve lupini krogle z enakomerno in nasprotno naelektreno gostoto naboja. Primer krogelnega kondenzatorja je zemlja z zračno atmosfero, ki ločuje površino zemlje od ionosfere. Drug pomemben primer je biološka celica, ki ima slabo prevodno tanko membrano. Primer je tudi krogla Van de Graffovega generatorja z drugo elektrodo v neskončnosti.

Primer: Na površini zemlje izmerimo električno poljsko jakost 150 V/m, ki je usmerjena v smeri središča zemlje. Določimo napetost med zemljo in ionosfero, ki je od površine zemlje oddaljena približno* 40 km. Določimo še površinsko gostoto naboja. Polmer zemlje je $r_n = 6370$ km, ionosfere pa $r_i = 6410$ km. Predpostavimo zemljo in ionosfero kot sferični kondenzator.

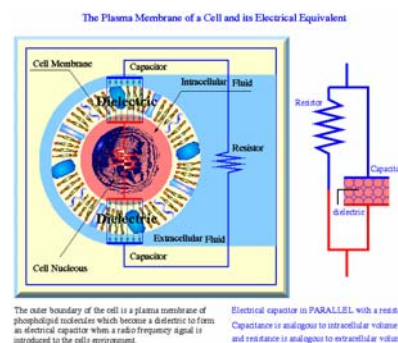


Zemlja kot sferični kondenzator. Med zemljo in ionosfero je visoka napetost, kar vpliva na električne pojave.

SLIKA: Področje med površino zemlje in ionosfero predstavimo kot velik krogelni kondenzator. Ker je polje na površini usmerjeno v smeri središča zemlje pomeni, da je zemlja naelektrena negativno glede na ionosfero.

Zemljo in ionosfero predstavimo kot sferični kondenzator. Znano je, da je na površini zemlje presežek negativnega naboja, v ionosferi pa pozitivnega. Električno polje kaže v smeri centra zemlje in je (lahko z uporabo Gaussovega zakona) enako (Q je negativen)

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \text{ Napetost med ionosfero in zemljo je}$$



Biološko celico lahko obravnavamo v električnem smislu kot sferični kondenzator. Celična membrana je izredno tanka, nekaj nm, in slabo prevodna, medtem, ko je notranjost mnogo bolj prevodna.
http://www.rjlsystems.com/docs/bia_info/fundamentals/

* Pri izračunu smo predpostavili, da je zemlja oblike krogle. Ionosfera je del atmosfere zemlje, ki je ioniziran zaradi učinkov radiacije sonca in kozmičnih visokoenergijskih delcev. Energija, ki jo sonce oddaja v določenem spektru je tako velika, da lahko razbije molekule in jih ionizira. Več o tem: <http://en.wikipedia.org/wiki/Ionosphere>.

$$U = \int_{r_i}^{r_n} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_i}^{r_n} \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_i}^{r_n} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_n} \right).$$

$$\vec{E}(r=r_n) = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \vec{e}_r \frac{U}{r_n^2} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_n} \right)^{-1} = -\vec{e}_r 150 \text{ V/m}. \text{ Sledi}$$

$$U = -150 \text{ V/m} \cdot r_n^2 \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_n} \right) = -150 \text{ V/m} \cdot (6370 \cdot 10^3 \text{ m})^2 \left(\frac{1}{6410} - \frac{1}{6370} \right) 10^{-3} \text{ m}^{-1} \approx 6 \text{ MV}.$$

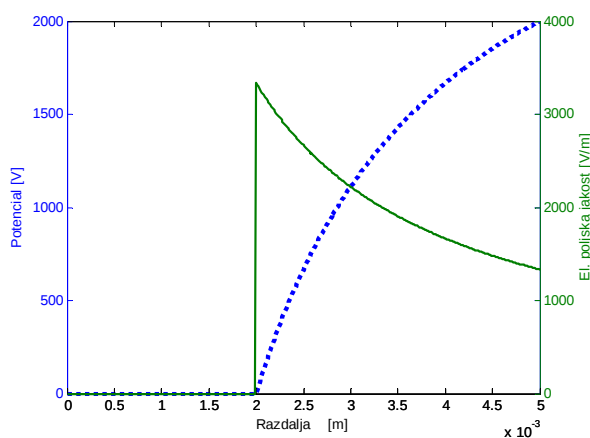
Če predpostavimo potencial zemlje enak nič $V(r_n)=0$, dobimo za potencial

$$V(r) = \int_r^{r_n} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_r^{r_n} \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{r_n} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n} \right).$$

Gostota naboja na površini zemlje je $Q = E(r_n) \cdot 4\pi\epsilon_0 r_n^2$,

$$\sigma(r_n) = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r_n^2} = \frac{E(r_n) \cdot 4\pi\epsilon_0 r_n^2}{4\pi r_n^2} = E(r_n) \cdot \epsilon_0.$$

In še rezultat: $\sigma = -150 \text{ V/m} \cdot \epsilon_0 = -1,33 \text{ nC/m}^2$.



SLIKA: Prikaz porazdelitve potenciala in absolutne vrednosti polja v sferičnem kondenzatorju. (razdalje in napetosti so za primerjavo vzete iz primera cilindričnega kondenzatorja)

```
% PRIMER IZRISA POLJA IN POTENCIALA KOAKSIALNEGA KABLA S PROGRAMOM MATLAB
e0=8.854e-12;
U=2000; rn=2e-3; rz=5e-3;
Q=U*4*pi*e0/(1/rz-1/rn);
R=0:1e-5:rz;
E=zeros(length(R),1); V=E;
E=abs(Q./(4*pi*e0.*R));
V=Q./(4*pi*e0).*(1./R-1./rn);
for i=1:length(R)
    if R(i)<rn
        V(i)=0;
        E(i)=0;
    end
end
[ax ax1 ax2]=plotyy(R,V,R,E,'plot');
axes(ax(1)); ylabel('Potencial [V]'); xlabel('Razdalja [m]');
axes(ax(2)); ylabel('El. poljska jakost [V/m]');
set(ax1,'LineStyle',':');
set(ax1,'Linewidth',3);
set(ax2,'Linewidth',2);
```

Pomembni rezultati za sferični kondenzator:

V splošnem imamo sferični kondenzator z notranjim polmerom r_n in zunanjim polmerom $r_i = r_z$:

Polje v sferičnem kondenzatorju je enako $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, napetost pa $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right)$

oziroma $U = E(r_n) \cdot r_n^2 \cdot \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right)$. Površinska gostota naboja pri $r = r_n$ je $\sigma(r_n) = E(r_n) \cdot \epsilon_0$.

POVZETEK:

1) Električni potencial je enaka normirani potencialni energiji naboja. Ali tudi: električni potencial v točki T je številsko enak delu pri prenosu tega naboja od točke T v neskončnost oziroma do mesta, kjer je energija enaka nič.

$$V(T) = \frac{W(T)}{Q} = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

2) Potencial v okolici točkastega naboja se manjša z $1/r$: $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

3) Potencial sistema točkastih nabojev je enak vsoti prispevkov posameznih potencialov:

$$V(T) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}. \quad r_i \text{ je razdalja od točke, kjer računamo potencial do naboja } Q_i.$$

4) Potencial porazdeljenih nabojev določimo z integracijo $V = \int_{\text{po vseh } Q\text{-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}$. r je razdalja od dQ -ja do točke, kjer računamo potencial.

5) Potencial je tako kot električna poljska jakost definiran povsod v prostoru, zato ga lahko prikažemo kot potencialno polje. Za vizualizacijo pogosto uporabljamo prikaz ekvipotencialnih ploskev, ki so ploskve z enako vrednostjo električnega potenciala. Običajno jih rišemo tako, da je razlika potencialov med vsako naslednjo ravnino konstantna.

6) Električna napetost je številsko enaka delu polja električnih sil potrebnem za prenos enote naboja iz točke T_1 do točke T_2 . $U_{12} = \frac{A_{Q_t}(T_1 \rightarrow T_2)}{Q_t} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Napetost je razlika potencialov $U_{12} = V(T_1) - V(T_2)$.

7) Delo po zaključeni poti je enako nič, kar zapišemo tudi kot $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Iz tega sledi 2.

Kirchoffov zakon, da je vsota vseh padcev napetosti po zaključeni poti (zanki) enaka nič:

$$\sum_{i=1}^N U_i = 0.$$

14. Prevodnik v polju

Vsebina poglavja: prevodnik v zunanjem električnem polju, površina prevodnika je ekvipotencialna ploskev, elektrostatična indukcija (influenca), polje znotraj votline prevodnika, Faradayeva kletka, prevodnik z nabojem v luknji prevodnika, električno polje na površini prevodnika, sila na površinski naboj.

Že v prejšnjem poglavju smo ugotovili, da polja znotraj žile koaksialnega kabla ni, niti ga ni znotraj prevodnega oklopa koaksialnega kabla. Ali je to le posledica simetrične porazdelitve naboja in uporabe Gaussovega zakona, ali je to splošna lastnost prevodnikov? Odgovor dobimo z razmislekom o lastnostih prevodnikov: dober prevodnik ima to lastnost, da je tudi v primeru nevtralnosti (brez presežkov naboja) mnogo nabojev (elektronov), ki so zelo šibko vezani na jedro, kar pomeni, da jih že najmanjše zunanje polje lahko premakne iz ravnovesne lege.

Prevodnik v zunanjem električnem polju. Če prevodnik postavimo v zunanje električno polje $\vec{E}_{\text{zunanje}}$, na vse naboje v prevodniku deluje električna sila, v skladu z zvezo $\vec{F} = Q\vec{E}$. Prosti oziroma šibko vezani elektroni se pomaknejo v nasprotni smeri polja (ker so negativnega predznaka) do roba prevodnika.* Koliko pa se jih pomakne? Toliko, kolikor »zahteva« zunanje polje, oziroma toliko, da se vzpostavi novo ravnotežje, v katerem je znotraj prevodnika polje enako nič. Kaj pa ostane tam, kjer ni več elektronov? Ostane primankljaj elektronov, torej število protonov in elektronov ni več enako. Ostane pozitiven naboj.

Torej, premaknjeni naboji delujejo z lastnim električnim poljem $\vec{E}_{\text{nabojev}}$ tako, da bo električno polje v prevodniku $\vec{E}_{\text{v prevodniku}} = \vec{E}_{\text{zunanje}} + \vec{E}_{\text{nabojev}} = 0$.

$$\vec{E}_{\text{v prevodniku}} = 0$$

SLIKA: a) V zunanje polje vstavimo prevodnik. b) Po (hitrem) prehodnem pojavu pride do prerazporeditve naboja (presežka elektronov na eni strani in pomanjkanja na drugi strani) tako, da je polje znotraj prevodnika enako nič.

Polje znotraj, pa tudi v okolici, polprevodnika se spremeni ob prerazporeditvi naboja, saj na polje vplivajo tudi prerazporejeni naboji.

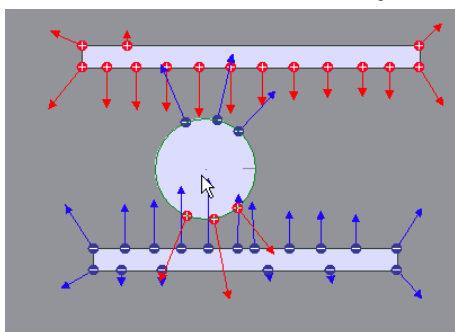
* V resnici elektron ne prepotuje celotne razdalje od enega roba do drugega roba prevodnika pač pa se elektroni le zamaknejo med samo. Povprečna hitrost elektronov v prevodniku je relativno počasna (reda) in ji rečemo tudi hitrost drifta, saj med prenosom trkajo z atomi v prevodniku tako, da njihova pot ni premočrtna pač pa se le v povprečju gibljejo v nasprotni smeri polja. Prerazporeditev, ki smo ji priča ko vstavimo prevodnik v polje pa je skoraj hipna.

Površina polprevodnika je ekvipotencialna ploskev.

Če je polje znotraj prevodnika enako nič, potem bo tudi napetost med poljubnima dvema točkama znotraj prevodnika enaka nič, saj velja $U_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$. To pa tudi pomeni, da imajo vse točke na prevodniku enak potencial in da je površina prevodnika ekvipotencialna ploskev.

Polje na nevtraln prevodno telo.

Če deluje polje na nevtraln prevodno telo, pride znotraj tega telesa do prerazporeditve elektronov, ki se premaknejo v smeri polja in pustijo za sabo pomanjkanje elektronov oz. pozitivni naboj. Presežkov pozitivnega naboja je enako veliko kot prerazporejenih elektronov, tako, da je vsota vseh nabojev znotraj telesa še vedno enaka nič. Prerazporeditvi naboja rečemo **elektrostatična indukcija**.



Simulacija elektrostatične indukcije s programom Jacob.
<http://jacob.fe.uni-lj.si>

SLIKA: Prerazporeditev nabojev imenujemo elektrostatična indukcija.

Ali je polje znotraj votline prevodnika v kateri ni nabojev različno od nič?

Če bi to polje obstajalo, potem bi imeli znotraj votline prevodnika ekvipotencialne ploskve in po Gaussovem zakonu bi morali z integracijo polja okoli ekvipotencialne ploskve dobiti količino zaobjetega naboja. Ker pa tega ni, je tudi polje enako nič.

SLIKA: Ekvipotencialne ravnine znotraj votline prevodnika. Polje kaže v smeri manjšanja potenciala.

Kaj pa, če je poleg zunanjega polja še v votlini prevodnika naboj? Ali je tudi v tem primeru polje v notranjosti prevodnika enako nič?

Odgovor je da, saj če bi se v notranjosti prevodnika nahajal naboj in polje, bi ga potegnili v smeri, ki jo diktira zunanje polje ali pa v smeri notranjega naboja v votlini. Če zapišemo

Gaussov stavek po prevodniku v okolici votline, hitro ugotovimo, da mora biti na notranji površini prevodnika (ob luknji) enaka količina naboja kot ga je v notranjosti.

SLIKA: Porazdelitev naboja po površini prevodnika z luknjo v primeru, ko se v luknji nahaja naboj.

Kaj pa če ni zunanjega polja? Če je torej je naboj v luknji, ki jo obkroža prevodnik.

Odgovor: V tem primeru bo prišlo do elektrostatične indukcije. Na notranji površini se bo induciral naboj nasprotnega predznaka kot je v luknji, na zunanji površini se pa v smislu indukcije nakopiči naboj enakega predznaka kot je v luknji. Kaj pa polje v zunanosti prevodnika? Vpliv polja naboja v luknji in naboja na notranji površini prevodnika se izničita, ostane le polje na zunanji površini prevodnika, ki je enakega predznaka in velikosti kot naboj v luknji. Ta bo povzročil polje v okolici. Če je prevodnika sferične oblike, bo polje v zunanosti enako polju, ki bi ga povzročal točasti naboj v središču sfere.

SLIKA: Porazdelitev naboja v prevodniku z luknjo v kateri se nahaja naboj.

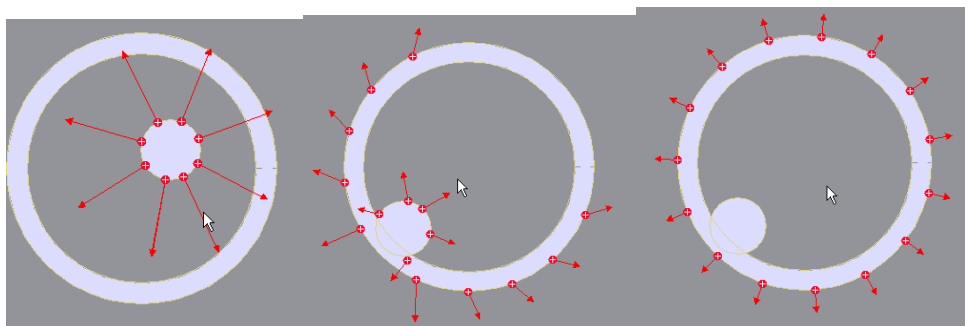
Faradayeva kletka. Ugotovili smo že, da se v izvotljenem prevodniku postavljenem v zunanje električno polje vzpostavijo take razmere, da na površini prevodnika pride do prerazporeditve naboja, znotraj prevodnika in tudi v votlini pa je polje enako nič. Če hočemo del prostora električno izolirati od okolice, ga moramo torej prevleči s prevodnikom, ki ga običajno ozemljimo. Omeniti velja, da je taka zaščita popolna za elektrostatično (enosmerno) polje, za časovno spremenljivo pa ne popolnoma, odvisno od frekvence motenj in debeline zaščitne plasti*.



Faradayeva kletka učinkovito varuje ne le pred elektrostatičnim poljem, pač pa tudi dinamičnim. Neučinkovita je le pri magnetostatičnem polju.

<http://tesladowndunder.com/>

* Znano je, da avto smatramo kot precej varnega pred udarom strele, ker je njegova karoserija iz prevodnika. Podobno velja za letala, kjer pa je kljub temu potrebna pazljiva dodatna zaščita elektronike pred udari strel. Poleg tega so moderna letala lahko zgrajena iz neprevodnih kompozitnih materialov (zaradi večje trdote in manjše teže), ki jim je ravno zaradi nevarnosti strel potrebno vgraditi dodatno prevodno plast.



SLIKA: Proces prenosa naboja iz notranjega prevodnika na zunanje ob dotiku.

Električno polje na površini prevodnika.

Ugotovili smo že, da je rob prevodnika ekvipotencialna ploskev. To tudi pomeni, da na robu ne more obstajati komponenta polja, ki je usmerjena vzdolž roba prevodnika. Taki komponenti rečemo tangencialna komponenta, pravokotno na površino pa je normalna komponenta. Če bi tangencialna komponenta polja obstajala, bi to polje delovalo na šibko vezane elektrone v kovini in jih premaknila v novo ravnovesno lego. Velja torej:

$$E_{t, \text{na robu prevodnika}} = 0$$

Poleg tega smo na treh primerih (ploščati, valjni in krogelni kondenzator) ugotovili, da je polje na površini prevodnika enako σ/ϵ_0 . Ali to velja splošno? DA. Polje na površini polprevodnika je usmerjeno v smeri normale na površino in je enako*

$$\vec{E}_{\text{na površini prevodnika}} = \vec{e}_n \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

SLIKA: Polje na površini polprevodnika.

Razlika med poljem naelektrene ravnine in poljem na površini prevodnika.

Za polje naelektrene ravnine smo ugotovili, da je enako $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ in to v smeri v stran od ravnine v

primeru pozitivnega in v ravnino v primeru negativnega naboja na površini prevodnika. Tik nad površino prevodnika lahko vpliv nabojev na polje razdelimo na dva dela. En del polja prispevajo naboji na površini, ti prispevajo polja $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, vsi ostali naboji pa tudi toliko, zato je

polje na površini naelektrenega prevodnika enako $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

* Za bolj natančno razlago glej A.R.Sinigoj: Osnove elektromagnetike.

* **Sila na naboj na površini prevodnika.** Če je na površini prevodnika električno polje, torej mora na naboje na površini delovati sila, pač v skladu z $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$. Upoštevati je potrebno električno polje na naboje σ na površini prevodnika, ki je posledica ostalih nabojev na prevodniku. To polje je enako polovici celotnega polja na površini prevodnika* oz. $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Sila

na naboje σ je ploskovna sila (ali pritisk) in je enaka $\vec{f}_e = \vec{e}_n \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$. Celotno silo na objekt pa bi

dobili z integracijo ploskovne sile po celotni površini $\vec{F}_e = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_A \sigma^2 \cdot d\vec{A}$.

* Drugače povedano, električna poljska jakost na površini prevodnika velja pravzaprav tik nad površino, medtem, ko je električna poljska jakost na naboje σ na površini prevodnika enaka povprečni jakosti v notranjosti in zunanosti: Ker je v notranjosti polje enako nič, je polje na mestu nabojev enako $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

15. Zveza med E in V

Vsebina poglavja: povezava med električno poljsko jakostjo in potencialom, smer polja v smeri zmanjševanja potenciala, gradient polja, izračun gradienta v različnih koordinatnih sistemih, ocena velikosti polja glede na porazdelitev potenciala (ekvipotencialnih ravnin).

Izračun električno poljske jakosti iz električnega potenciala.

Če poznamo porazdelitev električnega polja v prostoru, lahko z integracijo polja izračunamo potencial v poljubni točki:

$$V(T) = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Vprašajmo se, ali lahko tudi iz znane porazdelitve potenciala določimo električno polje? Odgovor je seveda pritrdilen, uporabiti pa je potrebno nasprotno operacijo od integracije.*

Najprej zapišemo diferencial potenciala kot $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$. Vzdolž ekvipotencialne ploskve je električna poljska jakost enaka nič. Torej je električna poljska jakost pravokotna na ekvipotencialne ploskve:†

$$\vec{E} = \vec{e}_n E_n = -e_n \frac{\partial V}{\partial n},$$

kjer je $\vec{e}_n$ normala na ekvipotencialno ploskev.

SLIKA: Električna poljska jakost kaže v smeri upadanja potenciala in je torej pravokotna na ekvipotencialne ravnine.

* Iz matematičnega priročnika lahko ugotovimo sledečo zvezo: $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) \cdot dt = f(x)$. Glede na definicijo

potenciala bi lahko pisali tudi $V(T) = - \int_{T(V=0)}^T \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{T(V=0)}^T (E_x \cdot dx + E_y \cdot dy + E_z \cdot dz)$, od koder sledi

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \text{ itd.}$$

† Simbol $\frac{\partial}{\partial x}$ je simbol za parcialen odvod po x-u. Razlika med totalnim odvodom $\frac{d}{dx}$ in parcialnim je v tem, da pri parcialnem odvodu odvajamo izraz parcialno, torej le po eni spremenljivki (v konkretnem primeru po x-u), vse ostale spremenljivke pa so v smislu odvajanja konstante.

Če želimo ugotoviti velikost polja v smeri koordinat pa uporabimo parcialno odvajanje po posameznih koordinatah:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Če združimo posamezne komponente polja v vektor električne poljske jakosti, ga v kartezičnih koordinatah zapišemo kot[‡]

:

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Za cilindrični koordinatni sistem velja $\vec{E} = (E_r, E_\varphi, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \varphi}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$.

Za sferični koordinatni sistem velja $\vec{E} = (E_r, E_\vartheta, E_\varphi) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \vartheta}, \frac{\partial V}{r \sin(\vartheta) \partial \varphi}\right)$.

SLIKA: Večja gostota ekvipotencialnih ravnin pomeni večjo električno polje na tistem mestu, oziroma, zgoščenost ekvipotencialnih ploskev je merilo za velikost polja.

[‡] Enačbo $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ lahko zapišemo tudi kot $\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V$, kjer zapis v oklepaju

imenujemo operator odvajanja, ki ga imenujemo nabla in pišemo s simbolom $\vec{\nabla}$ ali pa z imenom gradient. Zvezo med potencialom in poljem lahko torej zapišemo kot $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\text{grad}(V)$. Gre torej za operator, ki skalarnemu polju priredi vektorsko na tak način, da kaže v smeri zmanjšanja potenciala, po velikosti pa je enak (krajevni) hitrosti spreminjanja polja.

Primer: Električni potencial v prostoru je določen z enačbo $V(x, y, z) = 4 \frac{V}{m^2} xy - 3 \frac{V}{m^2} z^2$. Določimo električno poljsko jakost v poljubni točki prostora ter v točki T(1 m, 2 m, 3 m).

Izračun:

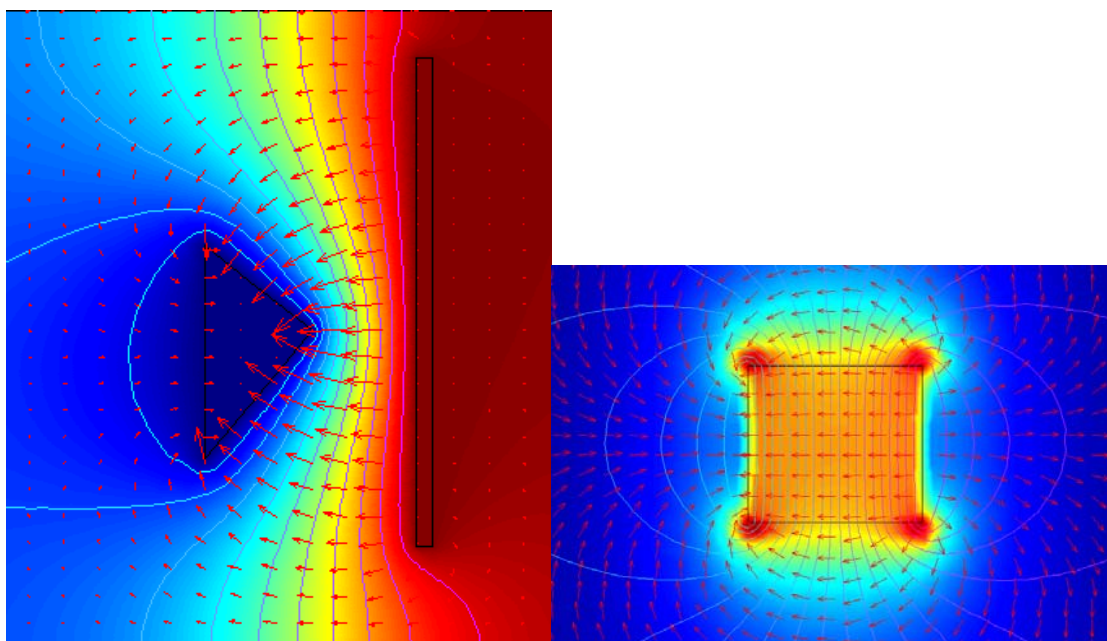
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -4 \frac{V}{m^2} y$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -4 \frac{V}{m^2} x$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -(-2 \cdot 3 \frac{V}{m^2} z) = 6 \frac{V}{m^2} z$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \underline{\underline{\left(-4y, -4x, 6z \right) \frac{V}{m^2}}}$$

$$\vec{E}(1 \text{ m}, 2 \text{ m}, 3 \text{ m}) = \underline{\underline{\left(-8, -4, 18 \right) \frac{V}{m}}}$$



SLIKA: Električna poljska jakost kaže smer in hitrost upadanja potenciala. Primera polja klinaste elektrode ob ravni elektrodi in polja med ravnima ploščama. Na levi sliki so poljg vektorjev polja prikazane še ekvipotencialne ravnine ter potencial v barvni lestvici. Na desni sliki pa so zaradi lažjega opazovanja vektorji polja normirani, velikost polja pa prikazuje barvna lestvica. Poleg tega so prikazane ekvipotencialne ravnine.

16. Gibanje nabojev v električnem polju

Vsebina poglavja: sila na naelektrjen delec v električnem polju, enačba gibanja, odklon naelektrjenega delca v električnem polju, energija delca med gibanjem, ohranitev energije, primerjava med gravitacijsko in električno silo, eksperimenti J.J. Thomsona s katodno cevjo.

Če se naboj nahaja v električnem polju in ima možnost gibanja, se giblje v skladu s silami, ki delujejo na naboj. V splošnem velja enačba gibanja

$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$, kjer pod vsoto vseh sil upoštevamo električno, mehnično, kemično silo itd. Mi

se bomo predvsem posvetili električni sili na naboje. V tem primeru gibanje naboja določimo z upoštevanjem zveze:

$$m\vec{a} = Q\vec{E}$$

Pospešek a je vektor, ki ima tri komponente, in je enak časovnemu odvodu hitrosti, ta pa časovnemu odvodu poti, torej velja $m\vec{a} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = Q\vec{E}(\vec{r}, t)$ ali na kratko $m\ddot{\vec{r}} = Q\vec{E}$. V

splošnem moramo trajektorijo gibanja delcev določiti s pomočjo reševanja sistema treh diferencialnih enačb. Pogosto pa je mogoče določiti pozicijo delca z uporabo osnovnih zvez, kar bomo prikazali kar na primeru.

Primer: V homogeno polje 2000 V/m usmerimo elektron s hitrostjo 10^6 m/s, ki vpade prečno na smer polja. Določimo odklon elektrona iz vpadne smeri po preletu polja za 1 cm.

Izračun: Elektron nadaljuje pot v smeri leta pred vpadom v polje s hitrostjo 10^6 m/s, za 1 cm poti pa potrebuje časa $t = \frac{x}{v_x} = \frac{1 \text{ cm}}{10^6 \text{ m/s}} = 10^{-8} \text{ s}$. Obenem v prečni smeri nanj deluje električna

sila in torej pospešek $a_y = \frac{Q_e \cdot E}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ V/m}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 3,52 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$, odklon v tej

smeri pa bo enak $y = \frac{a_y \cdot t^2}{2} = \frac{3,52 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2 \cdot (10^{-8} \text{ s})^2}{2} = \underline{\underline{17,58 \text{ mm}}}$.

SLIKA: Elektron prileti v električno polje in se ukloni.

Energija delca med gibanjem.

In kako je z energijo tega delca med gibanjem? Zgornjo enačbo integriramo v smeri poti in dobimo

$$\int_{T_1}^{T_2} m \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Če izvajanje poenostavimo le na gibanje v eni smeri (recimo X), se zgornja zveza poenostavi v

$$m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dv}{dt} dx = m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dx}{dt} dv = m \int_{T_1}^{T_2} v dv = Q \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ iz česar sledi } \boxed{\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Q(V(T_1) - V(T_2))}.$$

V splošnem pa bo $v^2 = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$. Če to zvezo napišemo nekoliko drugače, dobimo

$$\frac{mv_1^2}{2} + QV(T_1) = \frac{mv_2^2}{2} + QV(T_2) \text{ oziroma}$$

$$\boxed{W_{\text{kin}}(T_1) + W_{\text{pot}}(T_1) = W_{\text{kin}}(T_2) + W_{\text{pot}}(T_2)}$$

Enačbo preberemo kot: **Energija se med gibanjem ohranja, se pa pri tem pretvarja iz kinetične v potencialno ali obratno.**

Na naboj, ki se giblje v smeri polja deluje pospešek, torej sem mu povečuje hitrost in s tem kinetična energija, hkrati pa se mu zmanjšuje potencialna energija.

Primer: Elektron prileti s hitrostjo 10^6 m/s v zaviralno homogeno polje, ki ga vzpostavimo z napetostjo med vzporednima elektrodama oddaljenima za 10 cm. Določimo potrebno napetost med elektrodama, da se bo delec ustavil na polovici razdalje med elektrodama.

Izračun: Na začetku bo imel elektron le kinetično energijo $\frac{mv_1^2}{2}$, potencialna energija pa je enaka nič. Ko se elektron ustavi na sredini med elektrodama, bo njegova kinetična energija enaka nič, potencialna pa bo enaka $Q \frac{U}{2}$. Potrebno napetost torej določimo iz izenačitve energij na začetku in na koncu (ko se elektron ustavi na polovici razdalje med elektrodama je njegova hitrost enaka nič):

$$\frac{mv_1^2}{2} = Q \frac{U}{2}. \text{ Sledi:}$$

$$U = \frac{mv_1^2}{Q} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (10^6 \text{ m/s})^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = \underline{\underline{5,69 \text{ V}}}.$$

Vprašanje:

Zakaj je v konkretnem primeru razdalja med elektrodama nepomembna?

Kaj se »zgodí z elektronom po ustavitvi«? Odg.: Polje ga bo pospešilo nazaj in izstopil bo iz polja z enako hitrostjo, kot je v polje vstopil.

Primerjava gravitacijske in električne sile.

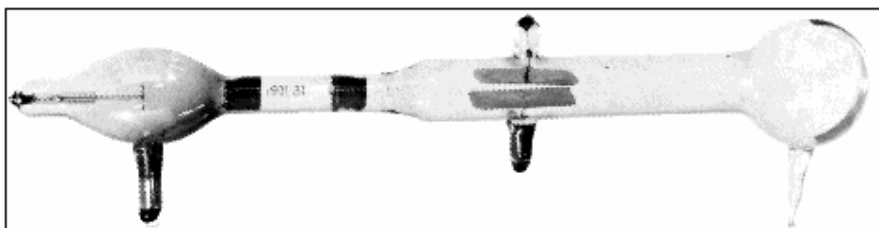
Kako velika je električna sila v primerjavi s silo gravitacije? Vzemimo kar prvi primer in primerjajmo velikost sile polja in sile gravitacije, če je elektron v polju 2 kV/m:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{Q_e E}{mg} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^3}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,8} = \underline{\underline{3,59 \cdot 10^{13}}}.$$

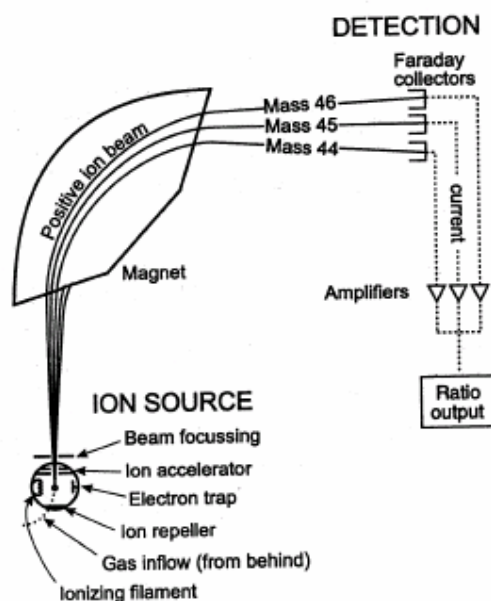
Ugotovimo, da je v tipičnih primerih (že pri majhnem električnem polju) električna sila mnogo večja od gravitacijske.

2. eksperiment Josepha Johna Thomsona (1856 - 1940).

JJ Thomson je Nobelov nagrajenec za fiziko za leto 1906. Nagrado je dobil za odkritje elektrona, kar mu uspelo z ekperimenti s katodno cevjo. V enem od teh eksperimentov je uspel odkriti, da so elektroni negativno naelektreni, saj se odklanjajo v električnem polju vzpostavljenim med dvema elektrodama, ki sta postavljeni prečno na smer leta elektrona. Za razliko od drugih raziskovalcev, ki so opravljali podobne eksperimente, je njemu leta 1897 to uspelo pokazati zato, ker je uspel zrak v katodni cevi v zadostni meri razredčiti (doseči dovolj nizek tlak), da se niso elektroni, ki jih je »izstreljeval« iz katode (katodni žarki), pred prehodom do fluorescenčnega zaslona zadeli v molekule zraka. V nadaljnjih eksperimentih je s kombinacijo delovanja električnega in magnetnega polja ugotovil razmerje med maso elektrona in njegovim nabojem. Pokazal je tudi, da ima vodik le en elektron. JJ Thomsonu pripisujemo izum masnega sprektrometra, naprave, s pomočjo katere je mogoče razpoznavati kompozicijo snovi iz razmerja med maso in nabojem (masni spekter).



SLIKA: Katodna cev, s pomočjo katere je JJ Tomson dokazal obstoj in naravo katodnih žarkov (elektronov).



SLIKA: Koncept masnega spektrometra. Vir: Wikipedia.

17. Električni dipol

Vsebina poglavja: polarizacija prevodnika (snovi) v električnem polju, električni dipolni moment, polarne in nepolarne snovi, dipol v homogenem in nehomogenem polju, potencial in polje v okolici dipola, navor na dipol.

Električni dipol je en pomembnejših elementov v teoriji električnega polja. S tem konceptom (elementom) med drugim lahko razložimo vpliv in delovanje električnega polja v snovi, kar je seveda zelo pomembno. Do sedaj smo bili sposobni ugotavljati le polje v vakuumu, kar pa v veliki meri velja tudi za zrak. Poleg tega smo ugotovili, da električnega polja v prevodnikih ni, da je lahko le na površini prevodnika. Tam je polje sorazmerno površinski gostoti naboja.

Električni dipol

Če nevtralni prevodnik postavimo v električno polje, pride v prevodniku do prerazporeditve naboja, pri čemer se elektroni premaknejo (zamaknejo) v nasprotni smeri polja. Ti zamiki potekajo toliko časa, da se v notranjosti prevodnika vzpostavi polje, ki je enako nič. Prevodni delec tako dobi enovit potencial. Presežek pozitivnega naboja lahko konceptualno združimo v pozitivni točkasti naboj, presežek negativnega pa v točkasti negativni naboj. Ta naboja sta razmaknjena za neko fiksno razdaljo, ki jo lahko opišemo z vektorjem, ki kaže od negativnega v smeri pozitivnega naboja. Električni dipol je torej definiran kot dva nasprotno-predznačena točkasta naboja razmaknjena za razdaljo d .

SLIKA: Prevodnik v električnem polju. Prerazporeditev naboja lahko ponazorimo z dvema točkastima nabojema povezanima s fiksno razdaljo, kar ponazorimo s konceptom električnega dipola.

Električni dipolni moment

imenujemo produkt naboja Q in vektorja $\vec{d}$, ki je distančni vektor od naboja $-Q$ do naboja Q in ga zapišemo s simbolom $\vec{p}$:

$$\vec{p} = Q\vec{d} \quad (* \text{ enota je Cm})$$

Velja opozoriti, da je smer vektorja $\vec{d}$ ravno nasprotna smeri polja, ki ga povzročata naboja in je torej definirana od minus naboja v smeri plus naboja.

* Pogosto, posebno v elektrokemiji, se uporablja za enoto električnega dipolnega momenta D (Debye). Velja $1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-33} \text{ C} \cdot \text{m}$. To omogoča tudi »lepše« zapise dipolnih momentov. Npr. dipolni moment vode je $p(\text{H}_2\text{O})=1,85 \text{ D}$, $p(\text{HCl})=1,08 \text{ D}$, itd.

Primer: Vzdolž daljše osi ovalnega prevodnika dolžine 5 mm se prerazporedi 10^{10} elektronov. Ponazorimo prevodnik v obliki električnega dipola in ocenimo njegov električni dipolni moment.

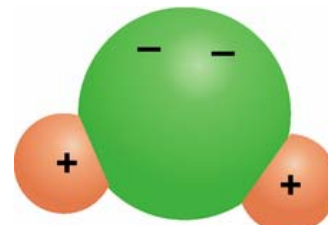
Izračun:

$$p = Qd = 10^{10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-12} \text{ C} \cdot \text{m}}}.$$

Primer: V molekuli NaCl (sol) je razdalja med Na in Cl ionom 0,6 nm. Izračunajmo električni dipolni moment molekule NaCl.

Izračun: $p = Qd = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,6 \cdot 10^{-9} \text{ m} \approx \underline{\underline{10^{-28} \text{ C} \cdot \text{m}}}$

Polarne in nepolarne molekule. Ni pa nujno potrebno, da dobimo električni dipol le pri vstavitvi prevodnika v električno polje. Določene snovi (molekule) so lahko že same po sebi take, da imajo neenakomerno porazdeljen naboj. Tipičen primer je molekula vode (H_2O), ki ima vodikova atoma razmaknjena od središčnega kisikovega za kot 105° . Zakaj ravno tak kot? Izkaže se, da ta kot omogoča minimalno energijsko stanje molekule. Zaradi nehomogene porazdelitve naboja je električni dipolski moment molekule vode $6,7 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$. Molekula vode ima torej vgrajen dipolni moment, rečemo tudi, da je **polarna** molekula (ima pozitivni in negativni pol) v nasprotju z nepolarnimi, kjer je naboj molekule porazdeljen tako, da je navzven nevtralna. Lahko pa nepolarna molekula postane bolj ali manj polarna, če jo postavimo v električno polje. Temu efektu rečemo **polarizacija**.



Neenakomerna porazdelitev pozitivnega in negativnega naboja v molekuli vode ustvari permanentni dipolni moment vode.

http://lightandmatter.com/html_books/4em/ch05/ch05.html

SLIKA: Polarna in nepolarna molekula: a) brez zunanjega električnega polja, b) v zunanjem električnem polju.

Dipol v električnem polju.

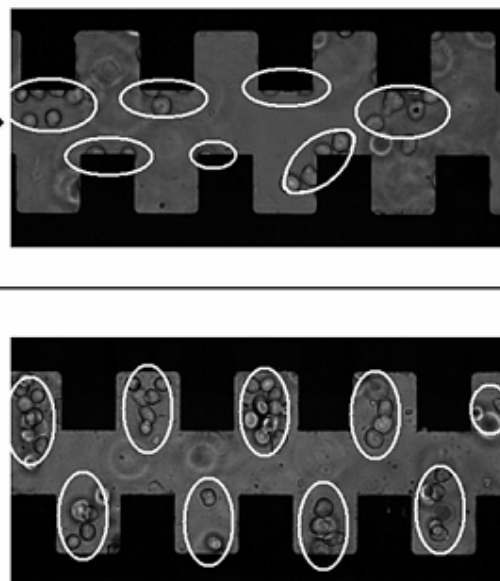
Kako se obnaša električni dipol v električnem polju? Nanj deluje električna sila, ki je enaka $\vec{F} = \vec{F}_Q + \vec{F}_{-Q} = Q \cdot \vec{E}_Q + (-Q) \cdot \vec{E}_{-Q} = Q \cdot (\vec{E}_Q - \vec{E}_{-Q})$.

SLIKA: Dipol v homogenem in nehomogenem polju.

Če je polje homogeno, je $\vec{E}_Q = \vec{E}_{-Q}$ in skupna sila na dipol je enaka nič. Deluje pa sila na oba naboja dipola v nasprotni smeri, tako, da bo delovala z navorom na dipol v taki smeri, da bi dipol usmerila v smer polja. Če pa je polje nehomogeno, na dipol deluje poleg navora tudi premikalna sila, ki je različna od nič in deluje v smeri večjega polja. Te sile so običajno zelo majhne, kljub temu pa jih je mogoče koristno izrabiti.

SLIKA: Sile na dipole usmerijo dipole v smer polja. Primer semenk v enosmernem polju velike vrednosti.

* Primer je recimo koncentriranje mikronskih in submikronskih delcev v nehomogenem električnem polju. To se uporablja predvsem za manipulacijo bioloških celic, kjer s pomočjo mikroelektronske tehnologije ustvarimo zelo majhne elektrode, ki imajo ravne in »ostre« robове. Vzpostavitev napetosti med takima dvema elektrodama vzpostavi polje med njima, ki je izrazito nehomogeno in večje v okolici ostre elektrode. Če se med elektrodama znajde delec, se polarizira, nato pa nanj deluje sila v smeri »ostre« elektrode. Še bolj pogosta pa je manipulacija nevtralnih delcev (bioloških celic) z vzpostavitev izmeničnega električnega polja. V tem primeru lahko s spreminjanjem frekvence električnega polja vplivamo na polarizabilnost molekul. Pri določeni frekvenci se ustvarja večji ali manjši dipolni moment, odvisno od tega, kako hitro so se sposobni preorientirati naboji v električnem polju. Zagotoviti je potrebno, da so električne lastnosti polarizacije delca različne od lastnosti polarizacije delca. Če je to zagotovljeno, bo delec pri določenih frekvencah vzbu jalnega signala ustvarjal dipolni moment, ki je v smeri polja, pri drugih pa dipolni moment, ki je usmerjen v nasprotno smer kot polje. S frekvenco je torej mogoče vplivati na silo na delce v smeri večjega polja ali pa v smeri manjšega polja.



Delci v električnem polju v zraku se polarizirajo, na njih deluje sila v smeri večjega polja (v smeri robov elektrodnih struktur, kot kaže zgornja slika). V primeru, da so delci v snovi, je njihov premik odvisen tudi od teh električnih lastnosti. Če se delci v polju močneje polarizirajo kot snov v katero so postavljeni, bo sila na delce delovala v smeri večjega polja. V nasprotnem primeru pa v smeri manjšega polja. Te lastnosti pa je mogoče spreminjati tudi s frekvenco izmeničnega signala, kot je bilo opravljeno v primeru na sliki. Tipični polmer celic je 10 μm .

Potencial v okolici električnega dipola.

Potencial v okolici električnega dipola ni težko določiti, saj gre za vsoto dveh potencialov, potencial od pozitivnega in negativnega naboja.

SLIKA: Električni dipol v koordinatnem sistemu.

$$V(T) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Če je razdalja med nabojema dosti manjša od razdalje do točke T, lahko smatramo, da je $r_1 r_2 \doteq r^2$ in $r_2 - r_1 \doteq d \cos(\vartheta)$. Enačbo torej lahko zapišemo v obliki

$$V(T) = \frac{Qd \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

* Pogosto se zgornjo enačbo zapiše tudi v obliki $V(T) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

Potencial v okolici dipola se manjša s kvadratom razdalje od dipola.

Električno polje dipola. Električno polje bi lahko določili iz preprostega seštevanja prispevkov obeh nabojev. Ker pa je polje vektor, bi imeli nekoliko več dela kot pri seštevanju potencialov. Bolj elegantna pot je s pomočjo gradienta polja, saj velja $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$

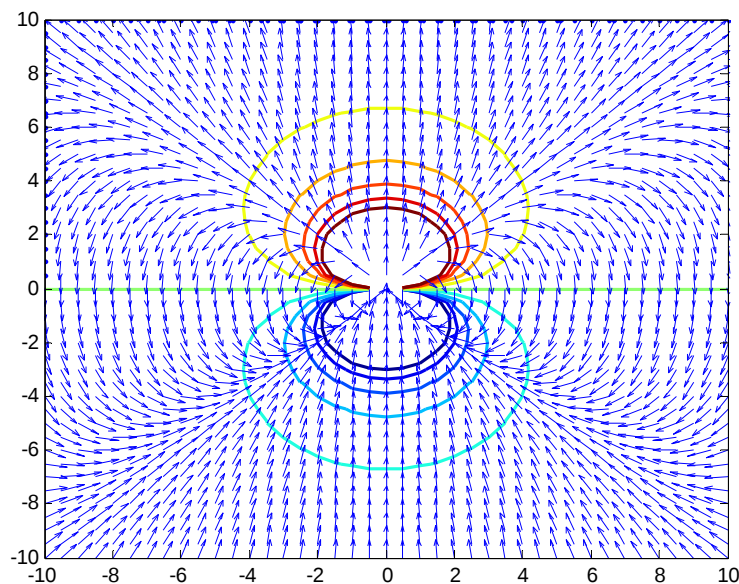
oziroma v sferičnih koordinatah $\vec{E} = (E_r, E_\vartheta, E_\varphi) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)$, torej

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p \cos(\vartheta)}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\vartheta = -\frac{\partial V}{r \partial \vartheta} = \frac{p \sin(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\varphi = 0.$$

Ugotovimo lahko, da polje v oddaljenosti od dipola upada s tretjo potenco. (To je zelo hitreje od premega in točkastega naboja)



SLIKA: Ekvipotencialne ravnine in normirani vektorji električne poljske jakosti.

SLIKA: Potencial in polje v okolici električnega dipola.

Navor na električni dipol.

Ugotovili smo že, da na električni dipol v zunanjem električnem polju deluje sila, ki želi usmeriti (zavrteti) dipol v smer polja. Kako pa bi določili navor na dipol v zunanjem električnem polju? Preprosto, po definiciji za navor[†]

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

SLIKA: Električni dipol v homogenem polju. Nanj deluje navor.

[†] Opozoriti velja, da je pri vektorskem produktu pomembno, kateri vektor nastopa prvi, saj je rezultat vektorskega produkta vektor, ki kaže smer navora (vrtenja). Pravilno dobimo smer navora tako, da vektor radija (ročice) zavrtimo v smeri sile v smeri najmanjšega kota. Velja torej $\vec{M} = \vec{e}_n r \cdot F \cdot \sin(\vartheta)$, kjer je smer normale smer, ki je pravokotna na površino, ki jo določata vektorja r in F .

Navor na pozitivni in negativni naboj je

$$\vec{M} = \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{E}_Q + \frac{-\vec{d}}{2} \times \vec{E}_{-Q} = \frac{\vec{d}}{2} \times Q\vec{E}_Q + \frac{-\vec{d}}{2} \times (-Q\vec{E}_{-Q}) = \frac{Q\vec{d}}{2} \times (\vec{E}_Q + \vec{E}_{-Q}).$$

Če upoštevamo kratko razdaljo med nabojema, lahko smatramo, da je polje na pozitivni naboj enako polju na negativni naboj (lokalno homogeno polje) in navor na dipol bo enak $\vec{M} = Q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Ponovimo rezultat: navor na dipol je enak vektorskemu produktu električnega dipolskega momenta in jakosti polja. Rezultat je vektor, ki opisuje smer vrtenja.

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Primer: Potencial se spreminja vzdolž X osi v skladu z enačbo $V = \frac{200}{x} \text{ V} \cdot \text{m}$. Pri $x = 1 \text{ cm}$ se nahaja električni dipol z momentom $\vec{p} = 10^{-6}(1, 2, 0) \text{ Cm}$. Določimo navor na dipol.

SLIKA: Električno polje in dipol v polju.

Izračun: Električno polje ima le komponento v smeri X osi, ki je enaka $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{200}{x^2} \text{ V} \cdot \text{m}$. Pri $x = 1 \text{ cm}$ je polje enako $E_x = -\frac{200}{1 \text{ cm}^2} \text{ V} \cdot \text{m} = -2 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$, navor pa je $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = (1, 2, 0)10^{-6} \text{ C/m} \times \left(-2 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}, 0, 0\right) = \underline{\underline{(0, 0, 4) \text{ N} \cdot \text{m}}}$.

* Način izračunavanja sile na dipol iz spremembe električne energije.

Podobno, kot smo poiskali zvezo med potencialom in električno poljsko jakostjo kot

$V(T) = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ lahko najdemo tudi povezavo med energijo in silo, saj velja

$$W(T) = \int_T^{T(W=0)} \vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{F} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right).$$

Ta način je pogosto uporabljen tudi pri numeričnemu izračunavanju, kjer izračunamo porazdelitev polja, potenciala in energije s pomočjo računalnika. Za izračun sile je potrebno izračun opraviti 2x, vsakič na tak način, da rahlo zamaknemo strukturo (v našem primeru dipol) za neko majhno razdaljo in vsakič izračunamo polje in energijo. Silo pa nato izračunamo kot diferenco

$$\vec{F} \cong -\left(\frac{\Delta W}{\Delta x}, \frac{\Delta W}{\Delta y}, \frac{\Delta W}{\Delta z}\right).$$

*** Izračunavanje sile na dipol iz spremembe električne poljske jakosti.** Postavimo dipol vzdolž in v smeri X osi. Na naboj $-Q$ deluje polje E_x in torej sila $-Q \cdot E_x$ na naboj $+Q$, ki je od $-Q$ oddaljen za razdaljo dx , pa polje $E_x + dx$ oziroma $E_x + \frac{dE_x}{dx} dx$, sila pa bo $Q \left(E_x + \frac{dE_x}{dx} dx \right)$. Če je polje nehomogeno, se bosta polji razlikovali, torej bo na dipol delovala rezultančna sila v smeri osi X, ki bo enaka $Q \left(\frac{dE_x}{dx} dx \right)$, kar lahko pišemo tudi kot

$F_x = Q dx \frac{dE_x}{dx} = p \frac{dE_x}{dx}$, kjer smo $Q \cdot dx$ zapisali z dipolnim momentom p . Enačba, ki smo jo zapisali velja le, če dipol leži vzdolž X osi in nanj deluje polje v smeri X osi. V splošnem je potrebno upoštevati možnost, da je dipol usmerjen poljubno. Torej bo potrebno silo na dipol v smeri osi X izračunati kot

$$F_x = p_x \cdot \frac{dE_x}{dx} + p_y \cdot \frac{dE_x}{dy} + p_z \cdot \frac{dE_x}{dz} \text{ in na enak način tudi sili v smeri osi Y in Z.}$$

Energija rotacije dipola. $W = \int \vec{M} \cdot d\alpha = \dots - \vec{p} \cdot \vec{E}$.

Vprašanja za obnovo:

1. Kaj je električni dipol?
2. Kako je definiran električni dipolni moment?
3. Kaj je razlika med polarnimi in nepolarnimi snovmi?
4. Kako se »obnaša« električni dipol, če je postavljen v zunanje homogeno ali nehomogeno električno polje?
5. Potencial v okolici električnega dipola. Skicirajte ekvipotencialke, zapišite enačbo.
6. Električna poljska jakost električnega dipola. S katero potenco upada?
7. Navor na električni dipol.

WWW:

Splošno: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/dipolecon.html#c1>

Elektrokardiogram: www.upscale.utoronto.ca/1YearLab/EKG.pdf

Sevanje dipola: http://ocw.mit.edu/ans7870/8/8.02T/f04/visualizations/light/01-DipoleRadiation/01-Dipole_320.html

Elektroforeza in dielektroforeza:

<http://www.ibmm-microtech.co.uk/microeng/dielectrophoresis/science.php>

LCD materiali: <http://www.kth.se/fakulteter/TFY/kmf/lcd/lcd~1.htm>



18. Okovinjje ekvipotencialnih ravnin

Vsebina poglavja: polje med okovinjenimi ekvipotencialkami, potencial v okolici dveh premih nabojev, ekvipotencialne ravnine v okolici dveh premih nabojev, dva prevodna valja priključena na napetostni vir, ekscentričnost.

Polje med okovinjenimi ekvipotencialnimi ravninami.

Ekvipotencialna ravnina povezuje točke z enako vrednostjo potenciala. Ugotovili smo, da je površina prevodnika ekvipotencialna ploskev. Celo več, celoten prevodnik je na istem potencialu. Običajno rišemo ekvipotencialne ploskve tako, da je med sosednjimi enaka potencialna razlika (napetost). Hitreje, kot se krajevno spreminja potencial, večja je električna poljska jakost. Zgoščenost ekvipotencialnih ravnin nam torej nakazuje zvečanost električne poljske jakosti na tem mestu. Velja seveda tudi obratno: Večje polje ima posledično bolj zgoščene ekvipotencialne ploskve na tem območju.

Sedaj se vprašamo: ali se razmere (porazdelitev polja in potenciala) med dvema ekvipotencialnima ploskvama spremeni, če ekvipotencialni ravnini okovinimo, pri čemer okovinjena ekvipotencialka ohrani vrednost potenciala ekvipotencialke?

Odgovor je NE, porazdelitev polja med okovinjenima ekvipotencialnima ravninama se ne spremeni, saj je kovina sama kot prevodnik tudi ekvipotencialna ravnina in če ohrani potencial ekvipotencialke, se razmere ne spremenijo.

SLIKA: Porazdelitev ekvipotencialk in okovinjje ekvipotencialke. Razmere med ekvipotencialkama se ne spremenijo.

Sistem dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev.

En najpomembnejših primerov, ki ima tudi precejšnjo praktično uporabo sledi iz okovinjenja ekvipotencialnih ravnin sistema dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev. Torej sistema dveh vzporednih tankih enakomerno naelektrenih žic.

Potencial v okolici ene same preme elektrine je

$$V(T) = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_T^{T(V=0)} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \Bigg|_T^{T(V=0)}.$$

Ugotovimo lahko, da zaidemo v težave, če vzamemo, da je točka, kjer je potencial enak nič v neskončnosti, saj iz enačbe sledi $\ln(\infty) = \infty$. Torej bi bil potencial v neskončnosti neskončen. Problem je v tem, da imamo pri enem samem premem nabojju opravka z enim samim

neskončno razsežnim električno nezaključenim sistemom, kar pa v realnosti ni možno. Nekaj, kar v realnosti ni možno, pogosto tudi v teoriji ne da smiselne rezultate. Temu problemu se ognemo tako, da obravnavamo sistem dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev, razmaknjen za razdaljo s .

SLIKA: Dva prema naboja vzdolž X osi.

Vzemimo, da sta naboja položena na X osi simetrično na Y os in potekata vzdolž Z osi. (Glej sliko). Potencial v točki T , ki je od naboja q_1 oddaljena za r_1 in od naboja q_2 za razdaljo r_2 , je sedaj vsota prispevkov obeh nabojev:

$$V(T) = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \Big|_{r_1}^{T(V=0)} + \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \Big|_{r_2}^{T(V=0)} = -\frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_1) - \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) + \frac{(q_1 + q_2)}{2\pi\epsilon_0} \ln(T(V=0)),$$

Če velja $q_1 = -q_2 = q$ je tretji člen v gornji enačbi enak nič in potencial enak

$$V(T) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 - \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Potencial v točki T v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev bo torej enak

$$V(T) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

Sedaj lahko ugotovimo, da je potencial enak nič v neskončnosti (kjer je $r_1 = r_2$), pa tudi vzdolž Y osi (pri $x = 0$).

Ekvipotencialne ravnine so krožnice.

Poskušajmo določiti ekvipotencialne ravnine sistema dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev. To pomeni, da iščemo točke, kjer je $\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = V_{ep}$ oziroma $\frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{V_{ep} 2\pi\epsilon_0}{q}} = k$, kjer je V_{ep} potencial ekvipotencialke.

Če upoštevamo, da je $r_2^2 = (x-s)^2 + y^2$ in $r_1^2 = (x+s)^2 + y^2$ dobimo

$\frac{(x-s)^2 + y^2}{(x+s)^2 + y^2} = k^2$ in $(x-s)^2 + y^2 = k^2((x+s)^2 + y^2)$. Po preureditvi lahko enačbo spravimo v obliko

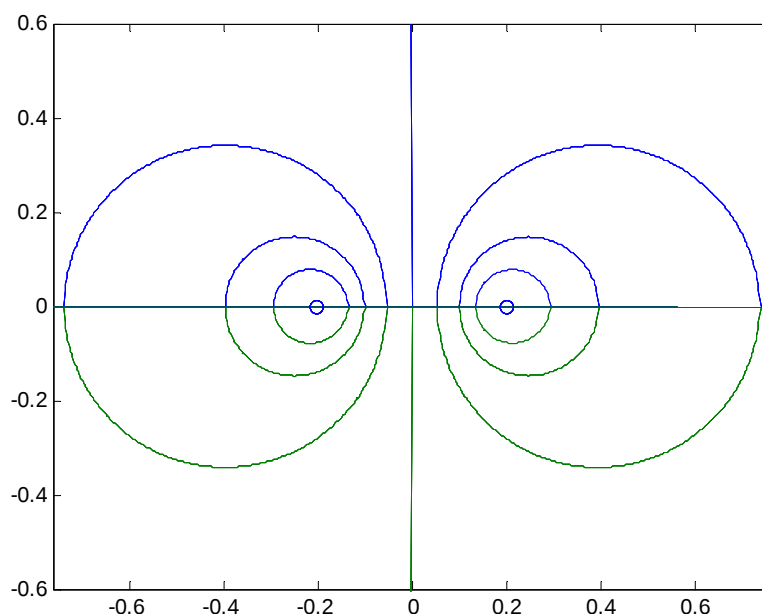
$(x-p)^2 + y^2 = r^2$, kar je **enačba za krog polmera r zamaknjen v X osi za p** . S primerjavo enačb dobimo

$$p = -\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}s \text{ in } r = \frac{2k}{|k^2 - 1|}s \text{ ter } s^2 = p^2 - r^2.$$

Primer: Poiščimo potek ekvipotencialne ravnine s potencialom $V = 300$ V za prema naboja $q = \pm 10$ nC/m, ki sta razmaknjena za 0,4 m.

Izračun:

Določimo konstante $s = 0,2$ m, $k = e^{\frac{V_{ep} - 2\pi\epsilon_0}{q}} \approx 5,31$, sledi $p = -0,215$ m in $r = 0,078$ m. Torej, središče ekvipotencialke se nahaja 0,215 m stran od središčne točke med nabojema, polmer ekvipotencialke pa je 7,8 cm. Pozitivni naboj je od centra ekvipotencialke oddaljen za 1,5 cm, kar tudi imenujemo ekscentričnost.



SLIKA: Ekvipotencialne ravnine izračunane pri vrednostih potenciala $V = -300$ V, -200 V, -100 V, 0 V, 100 V, 200 V, 300 V, za prema naboja $q = \pm 10$ nC/m.

```
% ekvipot_2preme.m
q=10e-9; s=0.2;
eps0=8.854e-12;

Veq=[-300,-200,-100,0.001,100,200, 300];
%Veq=[300];
for i=1:length(Veq)
k=exp(Veq(i)*2*pi*eps0/q);
p=-(k^2+1)/(k^2-1)*s;
r=sqrt(p^2-s^2);

x=-5*s:0.01*s:5*s;
lx=length(x);
y=sqrt(ones(1,lx)*r^2-(x-ones(1,lx)*p).^2);
plot(x,y,x,-y); plot(x,y,x,y);
axis([-3*s 3*s -3*s 3*s]); axis equal;
plot(-s,0,'o');plot(s,0,'o')
hold on
end
```

Dva valja enakega polmera priključena na vir napetosti.

Namen vsega tega izvajanja ni bil samo določitev ekvipotencialnih ravnin dveh premih nabojev. Šele z okovinjjenjem ekvipotencialk dobimo strukture, ki so tudi v realnosti zanimive. Ugotovili smo, da so ekvipotencialke za sistem dveh premih nabojev krogi oziroma plašči valjev, kar pomeni, da je mogoče **z okovinjjenjem ekvipotencialk izračunati polje in potencial v okolici dveh naelektrenih valjev s pomočjo sistema dveh premih nabojev.**

Kaj je potrebno narediti? Običajno poznamo napetost med prevodnima valjema, polmer valjev in razdaljo med valjema. Torej je potrebno iz znane napetosti in geometrije določiti lokacijo dveh nadomestnih premih nabojev in njun naboj. Ko to določimo, lahko zelo preprosto določimo tudi polje in potencial v okolici dveh naelektrenih valjev: analizo polja in potenciala v okolici dveh premih nabojev*.

Če analiziramo dve simetrični okovinjjeni ekvipotencialki (površina valja), je napetost med njima enaka dvojni vrednosti potenciala ene od njih (na sredini med valjema je potencial enak nič):

$$U = V(T_1) - V(T_2) = 2 \cdot V(T_1) = 2 \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{s + d/2 - r_0}{s - d/2 + r_0} \right), \text{ kjer je } r_0 \text{ polmer valja, } d \text{ razdalja med}$$

geometrijskima središčema valja, s pa razdalja od središča med nabojema do naboja q . V primeru okovinjena ekvipotencialnih ravnin torej upoštevamo zamik naboja glede na geometrijsko središče ekvipotencialke. Za ekvipotencialko, ki je površina valja velja $p = \frac{d}{2}$

in $r = r_0$ kar vstavimo v zvezo $s^2 = p^2 - r^2$ in s določimo kot $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}$. Iz te enačbe torej lahko določimo lego naboja, ki predstavlja v primeru dveh prevodnih valjev le navidezni naboj znotraj valja. Zamiku nabojev glede na geometrijsko središče valjev imenujemo tudi **ekscentričnost** in je podana kot $e = d/2 - s$. Z upoštevanjem zgornje enačbe je

$$e = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4r_0^2}}{2}.$$

Postopek izračunavanja je torej sledeč: Če poznamo legi in napetost med dvema prevodnima valjema, lahko lego nadomestnih premih nabojev določimo s pomočjo zveze

$$s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}, \text{ ali tudi } e = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4r_0^2}}{2}.$$

kjer je s razdalja od središča med valjema (kjer je potencial enak nič) do lege nabojev. Velikost naboja pa določimo iz enačbe za napetost

$$U = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{s + d/2 - r_0}{s - d/2 + r_0} \right).$$

Primer: Naelektrena valja polmera 4 cm sta razmaknjena za 10 cm. Med valjema je napetost 20 kV. Določimo lego in velikost navidezni nabojev.

* V resnici tega naboja ni, saj znotraj valja ni polja. Lahko pa analiziramo polje v okolici dveh valjev z določitvijo polja v okolici dveh premih nabojev. Smiselne rešitve so le v prostoru zunaj in na površini dveh valjev. Znotraj prevodnih valjev je pač polje enako nič.

Izračun: $d = 10 \text{ cm} + 2 \cdot 4 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$. $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{2}\right)^2 - 4^2} \text{ cm} \cong 8,06 \text{ cm}$.

$20 \text{ kV} = \frac{q}{\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{8,06+9-4}{8,06-9+4}\right)$ iz česar sledi $q = \underline{\underline{3,833 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}}}$.

Določimo še polje na sredini med valjema:

$$\vec{E} = \vec{e}_x \frac{q}{2\pi\epsilon_0 s} \cdot 2 = \vec{e}_x \frac{3,833 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}}{\pi \epsilon_0 8,06 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \cong \underline{\underline{171 \text{ kV/m}}}.$$

In kolikšno bi bilo za primerjavo polje med ravnima ploščama oddaljenima za 10 cm in priključenima na napetost 20 kV? $E = \frac{U}{d} = \frac{20 \text{ kV}}{0,1 \text{ m}} = 200 \text{ kV/m}$. Ugotovimo, da je polje na sredini med valjema manjše od polja enako razmaknjenih vzporednih plošč. Je pa zato večje polje na površini valjev. Določite ga sami!

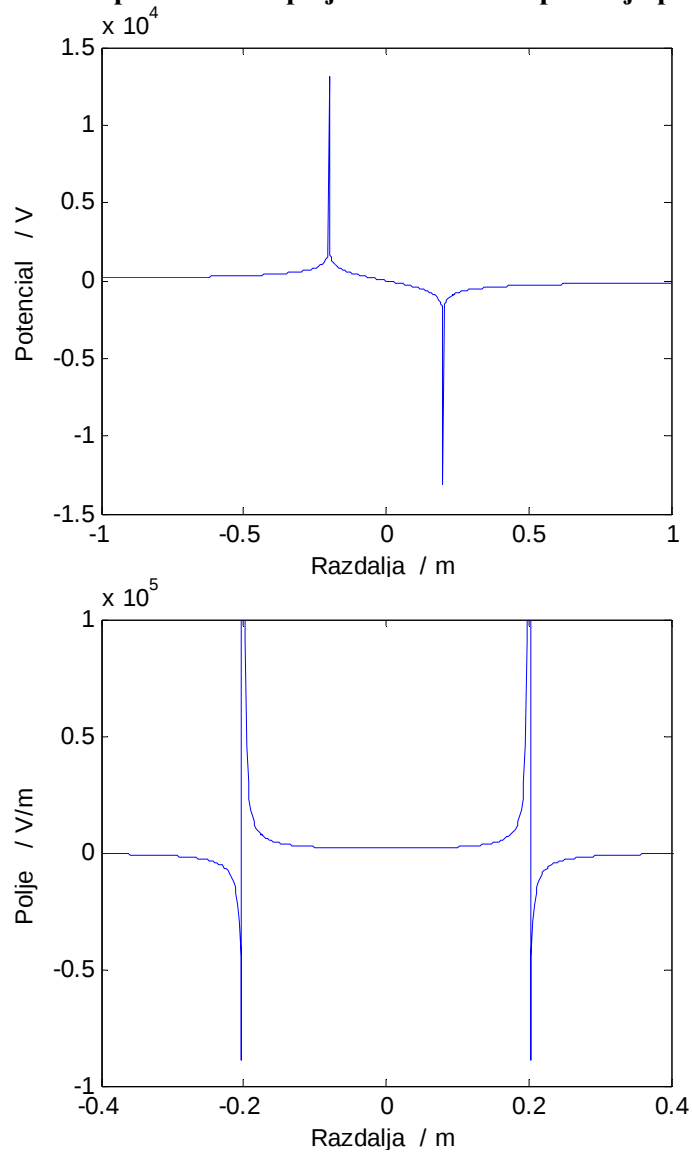
Druge strukture, ki jih lahko analiziramo z okovinjjenjem ekvipotencialk dveh premih nabojev:

- a) dva valja z različnima polmeroma
- b) en valj v drugem (koaksialni kabel z ekscentrom)
- c) valj nad prevodno ravnino – zemljo

Posebno zanimiv je tretji primer, primer valja nad zemljo. Gre namreč za pomembno strukturo, ki jo srečamo v našem vsakdanu, za elektrotehniko pa je še posebno zanimiva – za daljnovodno žico nad zemljo. To bomo obravnavali v posebnem (naslednjem) poglavju.

SLIKA: Primeri možne analize struktur izhajajočih iz okovinja ekvipotencialk nasprotno naelektrenih premih nabojev.

Izračun potenciala in polja vzdolž osi X s pomočjo programa Matlab.



```
% pot_2preme.m
q=10e-9; s=0.2;
eps0=8.854e-12;

x=-5*s:0.01*s:5*s;

r1=x+s; r2=x-s;
V=q/(pi*eps0)*log(r2./r1)

E=q/(2*pi*eps0)*(1./r1-1./r2)
plot(x,V);
xlabel('Razdalja / m');
ylabel('Potencial / V');
figure;
plot(x,E); axis([-2*s 2*s -1e5 1e5])
xlabel('Razdalja / m');
ylabel('Polje / V/m');
```

19. Metoda zrcaljenja

Vsebina poglavja: Valj nad zemljo z upoštevanjem ekscentričnosti, daljnovidna vrv nad zemljo (zanemaritev ekscentričnosti), polje in površinska gaostota naboja na površini zemlje, analiza sistema vrvi nad zemljo, kapacitivnost med vrvjo in zemljo, točkasti naboj ob ozemljeni krogli.

V prejšnjem poglavju smo ugotavljali, da so ekvipotencialne ploskve v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev krožnice oziroma plašči valjev. Ena od krožnic je tudi ravnina med nabojema, v obravnavanem primeru ravnina $x = 0$ (krožnica z neskončnim radijem). Tam je potencial enak nič. Obenem smo ugotavljali, da lahko poljubne ekvipotencialne ploskve okovinjimo in s tem ne spremenimo razmer (polja) med okovinjenimi ploskvami. Če je ena od okovinjenih ekvipotencialnih ploskev ravnina $x = 0$, lahko v tem primeru prepoznamo možnost analize vodnika nad prevodno ravnino. Običajno smatramo, da je zemlja dober prevodnik. V tem primeru lahko valje nad zemljo (npr. daljnovidne vrvi), smatramo kot valje nad prevodno ravnino. Take strukturo analiziramo na način, da naboj zrcalimo preko ravnine, kjer pa dobi nasproten predznak.



Metoda zrcaljenja se uporablja tudi v arhitekturi. Na sliki najnovejša stavba nove operne hiše v Pekingu.

SLIKA: Zrcaljenje nabojev: točkasti naboj, premi naboj, dipol, linijski naboj, površinski naboj.

Valj nad zemljo (upoštevanje ekscentričnosti).

Primer je zelo podoben prejšnjemu, le da v tem primeru okovino eno ekvipotencialko, ki ima radij r_0 in eno, ki ima neskončen radij (ravnino v osi Y kjer je potencial enak nič). Tudi ta primer lahko analiziramo z dvema nasprotno naelektrenima premima naboje. En od teh se nahaja »pod zemljo«, zato pravimo, da **analiziramo primer naelektrenega valja nad zemljo s pomočjo metode zrcaljenja. To pomeni, da moramo v primeru analize premege naboja nad zemljo za izračun postaviti še navideznega zrcalno na ravnino zemlje. Zrcalni naboj ima nasprotni predznak od tistega nad zemljo.**

SLIKA: Valj nad zemljo: okovljenje ekvipotencialke z radijem r_0 in ravnine $x = 0$.

Napetost med valjem in zemljo določimo podobno kot v prejšnjem primeru, le da je sedaj $V(T_2) = 0$ in je $U = V(T_1) - V(T_2) = V(T_1) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{s + d/2 - r_0}{s - d/2 + r_0} \right)$. Razlika v izrazu je le v »polovički«. Lego navideznega naboja določimo enako kot prej: $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}$, kjer je $d/2$ razdalja med geometrijskim središčem valja in zemljo, r_0 pa polmer valja.

Daljnovidna vrv nad zemljo (zanemaritev ekscentričnosti)

Primer: 20 m nad zemljo se nahaja daljnovidna vrv polmera 2 cm z nabojem $q = 300 \text{ nC/m}$. Določimo napetost med vrvjo in zemljo, električno poljsko jakost na površini zemlje tik nad vrvjo ter površinsko gostoto naboja na zemlji.



SLIKA: Izračun polja na površini zemlje.

Izračun: $d/2 = 20,01 \text{ m}$; $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2} = 20,0099975 \text{ cm}$. Ugotovimo lahko, da je razmak med geometrijskim središčem vrvi in lego nadomestnega naboja praktično

zanemarljiv $e = d/2 - s = (20,01 - 20,0099975)\text{cm} \cong 2,5 \cdot 10^{-6} \text{cm}$. V tem primeru lahko ekscentrično postavitev navideznega naboja zanemarimo in smatramo, da se navidezni naboj nahaja v geometrijskem središču valja (vrvi). **Za zanemaritev ekscentričnosti mora veljati, da je razdalja od vrvi do zemlje dosti večja od polmera vrvi:** $\frac{r_0}{d} \ll 1$. V praksi lahko

vzamemo $\frac{r_0}{d} \leq 0,01$. V primeru zanemaritve ekscentričnosti se poenostavi tudi izračun napetosti med vrvjo in zemljo, ki je sedaj ($d/2 \approx s$):

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right).$$

Izračunajmo napetost v konkretnem primeru

$$U = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \cdot 300 \cdot 10^{-9} \text{C/m} \cdot \ln\left(\frac{40,04 \text{ m}}{0,02 \text{ m}}\right) \cong \underline{\underline{41 \text{ kV}}}.$$

Dodatno: Določimo še polje na površini zemlje. Upoštevati je potrebno oba naboja – originalnega v središču vrvi in zrcalnega z nasprotnim predznakom. Polje na površini zemlje tik pod vrvjo je torej vsota obeh in je enako

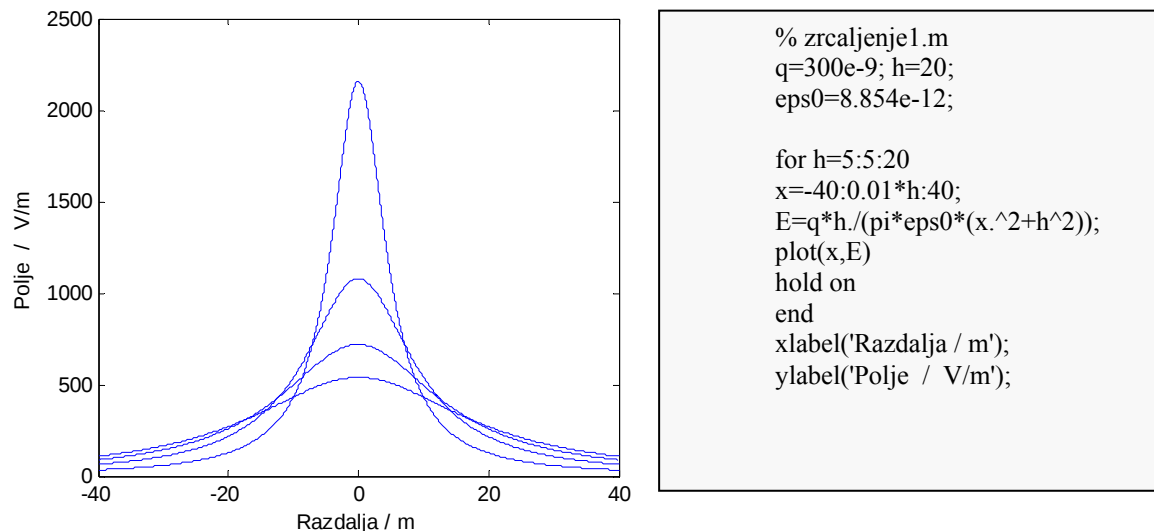
$$\vec{E} = -\vec{e}_y \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot 2 = -\vec{e}_y \frac{300 \cdot 10^{-9} \text{C/m}}{\pi\epsilon_0 20 \text{ m}} \cong \underline{\underline{-\vec{e}_y 540 \text{ V/m}}}.$$

Koliko pa je površinska gostota naboja na tem mestu? Ugotovili smo že, da je na površini prevodnika $\sigma = \epsilon_0 E_n$, torej bo $\sigma = \underline{\underline{-4,77 \cdot 10^{-9} \text{C/m}}}$.

V poljubni točki na zemlji je polje:

$$\vec{E} = -\vec{e}_y 2 \cdot E \cdot \cos(\alpha) = -2 \cdot \vec{e}_y \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + x^2}} \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} = -\vec{e}_y \frac{q \cdot h}{\pi\epsilon_0 (h^2 + x^2)}$$

To polje je največje na zemlji direktno pod vrvjo in se z oddaljenostjo manjša. Za vizualizacijo se zopet poslužimo programa Matlab.



SLIKA: Električna poljska jakost na površini zemlje za razdalje od zemlje do vrvi 5, 10, 15 in 20 m za naboj na vrvi 30 nC. Bližje kot se nahaja vrv, večje je polje tik pod vrvjo na zemlji.

Z integracijo površine pod krivuljo polja bi dobili enak rezultat za vse krivulje. Zakaj? Zato, ker je polje na površini sorazmerno gostoti naboja $\sigma = \epsilon_0 E_n$, z integracijo gostote naboja po površini pa dobimo celotni naboj, ki je po iznosu enako velik kot naboj na vrvi, le nasprotnega predznaka je. To je naboj, ki se inducira na površini zemlje kot posledica naboja na vrvi.

Izračun linijske gostote naboja za različne razdalje od zemlje do vrvi in konstantno napetostjo 40 kV:

h / m	$q / nC/m$
5	358
10	322
15	304
20	293

..

Izračun napetosti med vrvjo in zemljo za različne razdalje od zemlje do vrvi in konstantno gostoto naboja 300 nC/m:

h / m	U / kV
5	33,5
10	37,3
15	39,4
20	41

Kapacitivnost med vrvjo in zemljo.

Pri konstantni napetosti med vrvjo in zemljo se naboj na vrvi spreminja v odvisnosti od višine vrvi. Bližje kot je vrv površini zemlje, večji je njen naboj. In seveda obratno. Pri konstatnem naboju na vrvi ugotavljamo spreminjanje napetosti z višino vrvi. Zakaj je temu tako? Zato, ker bližje, kot je vrv zemlji, bolj se bodo na površini zemlje pod vrvjo zgostili (influirali) naboji nasprotnega predznaka in večja bo električna poljska jakost na zemlji. Posledično bo višja tudi napetost med zemljo in vrvjo.

SLIKA: Kapacitivnost med vrvjo in zemljo.

Med nabojem na vrvi in napetostjo med vrvjo in zemljo velja linearna zveza:

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right) \text{ oziroma } q = \frac{U 2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}.$$

Če zapišemo celotni naboj na dolžini l vrvi, dobimo $Q = ql = \frac{U 2\pi\epsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}.$

Razmerje Q/U je konstantno. To konstanto imenujemo – kapacitivnost. Kapacitivnost sistema vrvi nad zemljo je torej

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}.$$

V praksi pogosto za daljnovodne vrvi uporabljamo izraz za kapacitivnost na enoto razdalje,

$$c = C/l = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}.$$

Določimo kapacitivnost daljnovodne vrvi na enoto dolžine v našem primeru:

$$C/l = \frac{300 \text{ nC/m}}{41 \text{ kV}} \cong \underline{\underline{7,32 \text{ pF/m}}}.$$

Kapacitivnost smo izračunali iz poznane naboja in napetosti med vrvjo in zemljo. Ugotovimo lahko, da bi lahko kapacitivnost določili tudi direktno s pomočjo uokvirjene enačbe in da ni odvisna ne od napetosti ne od naboja pač pa le od geometrijskih razmer, torej od razdalje od vrvi do zemlje in njenega polmera. Kapacitivnost je torej geometrijski pojem.

Računanje polja in potenciala v okolici daljnovidnih vrvi nad zemljo.

Ugotovili smo, da običajno lahko zanemarimo vpliv ekscentričnosti, in da je napetost med vrvjo in zemljo podana z enačbo $U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$. Če imamo opravka z več daljnovidnimi vrvmi, je smiselno ugotavljati potencial posamezne vrvi, zato pogledjmo, kako je sestavljen potencial ene same vrvi:

$V = U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(d-r_0) - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0$. Običajno zanemarimo tudi r_0 v primerjavi z d in dobimo

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d}{r_0}\right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(d) - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0).$$

Prvi člen je potencial, ki ga povzroča negativni naboj na mestu pozitivnega od katerega je oddaljen za razdaljo d . Drugi člen je potencial lastnega (pozitivnega) naboja. Da ne bi pri izračunu pozabili, da se pozitivni predznak nanaša na razdaljo od negativnega naboja, lahko enačbo zapišemo tudi v obliki:

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{r_0}\right) + \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{d}\right).$$

Če je vrv več, je potrebno seveda sešteti (superpozicija) vpliv vseh na vsako vrv posebej. Če bi na primer imeli nad zemljo dve vrvi, je potencial vsake prispevek štirih vrvi: lastne in lastne zrcaljene ter sosednje in sosednje zrcaljene.

Primer (izpitna naloga 4.2.2005):

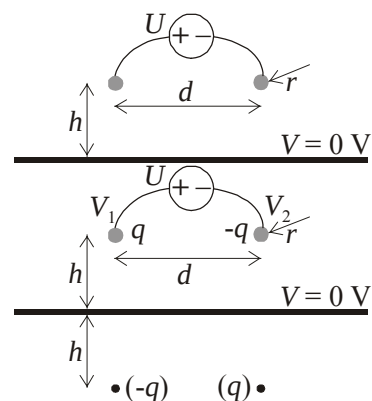
Vodnika simetričnega dvovoda dolžine 5 m ležita vzporedno nad ozemljeno prevodno ploščo. Med njiju je priključen vir napetosti $U = 400$ V. Izračunajte naboja na vodnikih. ($h = 3$ cm, $d = 6$ cm, $r = 2$ mm)

Izračun: Glede na priključitev vira sta vzdolžni gostoti nabojev na vodnikih enakih absolutnih vrednosti, vendar nasprotnih predznakov, $(\pm q)$. Polje naboja ozemljene prevodne plošče določata polji zrcalnih nabojev $(\pm q)$. Naboj $Q_{1,2} = \pm ql$ vodnikov (dolžine $l = 5$ m) določa napetost vira, ki je enaka razliki potencialov vodnikov: $U = V_1 - V_2$. Njiju zapišemo kot vsoto prispevkov dveh parov nabojev:

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{\sqrt{(2h)^2 + d^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}}$$

$$V_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{d} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(2h)^2 + d^2}}{2h} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}}{2hd} = -V_1$$

$$U = V_1 - V_2 = 2V_1 = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}} \Rightarrow Q_{1,2} = \pm ql = \pm \frac{\pi\epsilon_0 l U}{\ln(2hd/r\sqrt{(2h)^2 + d^2})} \approx 18,2 \text{ nC.}$$



Druge variante možnih izračunov:

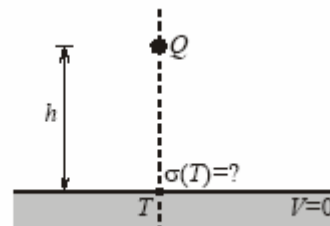
- Naboja na vrveh sta priključena na vir napetosti: v tem primeru je na eni vrvi pozitivni, na drugi pa negativni naboj enake absolutne vrednosti.
- Naboja na vrveh nista priključena na vir napetosti: v tem primeru sta naboja (lahko) različna.
- Na nevtralnemu vodniku ni naboja. Vodnika na katerem ni naboja ne zrcalimo.
- Vodnik se nahaja v homogenem polju. V tem primeru je poleg ostalih prispevkov potrebno upoštevati še potencial vrvi $E h$, kjer je h višina vrvi.
- Zrcalimo tudi točaste in druge naboje; zrcalni naboji imajo nasprotni predznak.
- Kapacitivnost med vrvema je določena s kvocientom napetosti med vrvema in naboja na vrvema.



Domača naloga: kako izračunati polje na zemlji tik ob stebru?

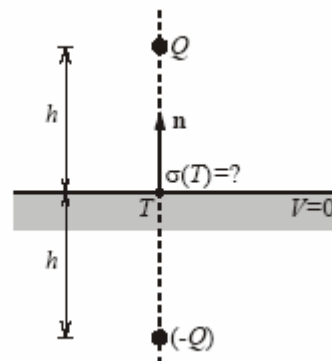
Primer, zrcaljenje točkastih nabojev: kolokvij 17.12.2002

- Točkasta elektrina množine Q se nahaja na višini h nad zemljo. Kolikšna je ploskovna gostota σ elektrine na površini zemlje v točki T , ki leži navpično pod točkasto elektrino?



- Ploskovna gostota elektrine na površini zemlje je sorazmerna normalni komponenti električne poljske jakosti tik nad površino: $\sigma(T) = \epsilon_0 E_n(T_+)$. Pri določanju poljske jakosti upoštevamo še zrcalno elektrino ($-Q$), ki v točki T_+ povzroča enako polje kot originalna elektrina Q :

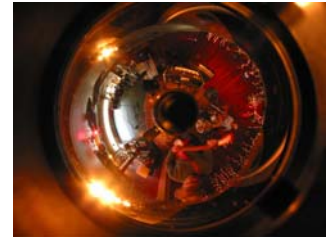
$$\vec{E}(T_+) = -2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h^2} \vec{n}; \quad \sigma(T) = \boxed{-\frac{Q}{2\pi h^2}}$$



Zrcaljenje točkastega naboja na kovinski krogli.

Vzemimo dva točkasta naboja vzdolž X osi. Potencial v točki T je

$$V(T) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$



Poiščimo točke (ekvipotencialno ravnino), kjer je potencial enak nič. Tedaj bo

$$V(T_0) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{10}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{20}} = 0 \Rightarrow \frac{R_{20}}{R_{10}} = -\frac{Q_2}{Q_1}.$$

Tudi pri razmerju dveh premih nabojev smo dobili, da je razmerje radijev konstantno, ekvipotencialne ravnine pa so bile krožnice oziroma plašči valjev. V tem primeru je ekvipotencialna ravnina krogla s polmerom R_{20} , če je $|Q_1| > |Q_2|$.

Če zapišemo potenciala v dveh točkah na krogli, določimo ekscentrično lego naboja Q_2 znotraj krogle iz $e = \frac{r_0^2}{d}$, kjer je r_0 polmer krogle, d pa razdalja od središča krogle do naboja

Q_1 . Poleg dobimo zvezo med Q_1 in Q_2 : $\frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{d}{r_0}$.

SLIKA: Dva točkasta naboja imata ekvipotencialke od katerih je ena krogla s potencialom nič. Polje v okolici naboja, ki se nahaja v bližini ozemljene krogle analiziramo s pomočjo zrcalnega naboja, ki leži ekscentrično od geometrijskega središča krogle.

Primer: Določimo silo na točkasti naboj $Q_1 = 10 \text{ nC}$, ki je oddaljen za 10 cm od prevodne ozemljene krogle polmera 8 cm.

Izračun:

$$e = \frac{r_0^2}{d} = \frac{(8 \text{ cm})^2}{10 \text{ cm} + 8 \text{ cm}} \approx \underline{\underline{3,556 \text{ cm}}}.$$

Naboj Q_2 moramo torej postaviti za 3,556 cm od središča krogle v smeri naboja Q_1 . Po velikosti pa mora biti

$$Q_2 = -Q_1 \frac{r_0}{d} = -10 \text{ nC} \cdot \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = -8 \text{ nC}.$$

Sila med nabojema (hkrati tudi sila med prevodno naelektreno kroglo in točkastim nabojem)

$$\text{je } F = \left| \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right| = \left| \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 (d - e)^2} \right| = \left| \frac{10 \text{ nC} \cdot (-8 \text{ nC})}{4\pi\epsilon_0 (10 \text{ cm} - 3,556 \text{ cm})^2} \right| \approx \underline{\underline{498 \mu\text{N}}}.$$

20. Kapacitivnost

Vsebina poglavja: definicija kapacitivnosti, kondenzator, merjenje in računanje kapacitivnosti, kapacitivnost osnovnih struktur, zaporedna in vzporedna vezava kondenzatorjev, analiza vezij s poljubno vezavo kondenzatorjev.

V prejšnjem poglavju smo že spoznali **sorazmerje med količino naboja med dvema prevodnima telesoma in napetostjo med njima**. Faktor sorazmernosti imenujemo **kapacitivnost**. Ali z drugimi besedami: večanje napetosti med telesoma povzroči sorazmerno povečanje naboja. V matematični obliki pa to zapišemo kot

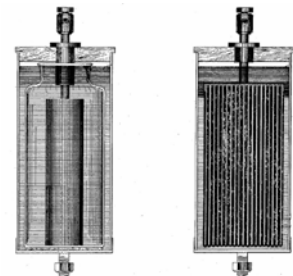
$$Q = C(V_A - V_B) \text{ oziroma } \boxed{Q = CU}, \text{ od koder je } \boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

SLIKA: Kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma.

Kondenzator kot koncentriran element. Simbol in enota za kapacitivnost.

Dve poljubni prevodni telesi lahko prikažemo kot električni sistem, ki ga imenujemo kondenzator. Kljub temu, da iz srednješolske fizike (elektrotehnike) že poznamo simbol za kondenzator, ga omenimo še enkrat. Simbol za kondenzator sta torej dve vzporedni enako dolgi daljici, prečno na vodnika, razmaknjeni za malo razdaljo. Če je med telesoma priključimo napetost U , se na telesu priključenem na + sponko vira nakopičil naboj $+Q$, na telesu priključenem na negativno sponko pa naboj $-Q$. Velja zveza $\pm Q = CU$. C imenujemo kapacitivnost sistema, sistem, ki »shranjuje« naboj pa kondenzator. Enota za kapacitivnost je $C/V = F$, v čast pomembnemu znanstveniku in raziskovalcu Michaelu Faraday-u. Pogosto tudi enoto za dielektričnost vakuumu ϵ_0 označujemo z enoto F/m .

Zanimivo je to, da na prvi pogled na kapacitivnost med dvema telesoma vpliva napetost in naboj na telesih, v resnici pa ni tako. **Kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma v zraku je odvisna le od geometrijskih značilnosti teles (oblike teles in postavitve).**



Kondenzator, ki ga je patentiral Nikola Tesla leta 1896, US567818.
<http://en.wikipedia.org/wiki/Capacitor>

SLIKA: Simbol za kondenzator.

Merjenje kapacitivnosti.

Kako bi določili kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma? Eksperimentalno bi to lahko naredili tako, da bi ti dve telesi naelektrili z znanim nabojem in izmerili napetost, ki se pojavi med telesoma. Kapacitivnost bi določili iz razmerja $C = \frac{Q}{U}$.

Preprosti univerzalni merilni inštrumenti določajo kapacitivnost s pomočjo znanega tokovnega vira in merjenjem (časovne spremembe) napetosti. Iz kontinuitetne enačbe $i = \frac{dQ}{dt}$ in $Q = CU$ dobimo $i = C \frac{dU}{dt}$. Pri elektrenju s konstantnim tokom je sprememba napetosti v določenem času sorazmerna $1/C$. V primeru idealnega kondenzatorja narašča napetost linearno. Take meritve so lahko zelo nenatančne v primeru, ko kondenzator ni idealen (kar pogosto drži).

Nekoliko izpopolnjen način upošteva še uporovne lastnosti kondenzatorja. V tem primeru napetost ne narašča linearno, pač pa eksponentno. Iz eksponentnega naraščanja se določi časovna konstanta in upošteva pri izračunu kapacitivnosti. Seveda je potrebno kondenzator pred meritvijo razelektriti. To lahko naredimo tako, da ga izpraznimo preko upora ali pa nanj priključimo izmenični tokovni signal. Več informacij najdete na spletnih straneh*.

Za natančnejše meritve se uporablja izmeničen vir, pogosto tudi v kombinaciji z mostičnim vezjem. Več o tem v naslednjem semestru, saj bomo tedaj obdelali to problematiko.

Računanje kapacitivnosti.

V principu smo že dosedaj sproti opozarjali na kapacitivnost. Ko smo izračunali napetost med naelektrenima telesoma, je bila ta sorazmerna naboju in ... $1/C$: $U = Q \frac{1}{C}$. Matematično torej določimo kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma tako, da predpostavimo, da sta telesi naelektreni z nabojema $+Q$ in $-Q$ ter izračunamo napetost med njima. Kapacitivnost pa je razmerje med nabojem in izračunano napetostjo: $C = \frac{Q}{U}$.

(Pogosto za računanje kapacitivnosti uporabljamo numerične metode, kjer izračunamo polje in potencial v prostoru med objektoma. V takem primeru uporabimo lahko za izračun kapacitivnosti tudi izraz za električno energijo, shranjeno v kondenzatorju. Več v nadaljevanju.)

* Več o meritvah kapacitivnosti: <http://www.mobilehandsetdesignline.com/howto/192300586>
http://www.repairfaq.org/REPAIR/F_capttest.html#CAPTEST_004

Kapacitivnosti osnovnih struktur.

Uporabili bomo ugotovitve iz poglavja o potencialu in napetosti osnovnih struktur in določili kapacitivnosti.

Kapacitivnost zračnega ploščatega kondenzatorja.

$U = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$ oziroma $U = \frac{QA}{\epsilon_0} d$, kjer je A površina ene plošče, d pa razdalja med njima.

Kapacitivnost je

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad \text{KAPACITIVNOST PLOŠČNEGA ZRAČNEGA KONDENZATORJA}$$

Dobili smo enačbo, ki jo poznamo že iz srednješolske fizike (elektrotehnike).

Kapacitivnost zračnega koaksialnega kabla

$U = \int_{r_n}^{r_0} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_n}^{r_0} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_n}$, kjer je r_n polmer žile, r_0 pa notranji polmer oklopa. Kapacitivnost je

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{ql}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_0}{r_n}}. \quad \text{KAPACITIVNOST ZRAČNEGA KOAKSIALNEGA KABLA}$$

Kapacitivnost zračnega sferičnega kondenzatorja

Napetost med sferama s polmeroma r_n in r_z je

$U = \int_{r_n}^{r_z} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_n}^{r_z} \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_n}^{r_z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right)$. Kapacitivnost je torej

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right)}. \quad \text{KAPACITIVNOST ZRAČNEGA SFERIČNEGA KONDENZATORJA}$$

Iz zgornje enačbe lahko določimo še **kapacitivnost osamljene prevodne krogle**, ki je ($r_z \rightarrow \infty$):

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 r_n. \quad \text{KAPACITIVNOST OSAMLJENE PREVODNE KROGLE}$$

Kapacitivnost med valjem in zemljo

Z zanemaritvijo ekscentričnosti smo dobili zvezo med napetostjo in linijsko gostoto naboja:

$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d - r_0}{r_0} \right)$. Kapacitivnost je:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{ql}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$$

KAPACITIVNOST MED PREVODNIM VALJEM IN ZEMLJO

d je razdalja med geometrijskima središčema dveh valjev. Tistega nad zemljo in prezrcaljenega. Če se torej valj nahaja na višini h nad zemljo bo $\frac{d}{2} = h + r_0$ in enačbo za izračun kapacitivnosti med prevodnim valjem nad zemljo lahko zapišemo tudi v obliki:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{ql}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{2h+r_0}{r_0}\right)}$$

SLIKA: Prevodni valj nad zemljo.

Kapacitivnost med dvema valjema

Napetost med dvema valjema je 2x večja kot med valjem in zemljo: $U = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$, torej

bo kapacitivnost med valjema (ob zanemaritvi ekscentričnosti):

$$C = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$$

KAPACITIVNOST MED PREVODNIMA VALJEMA

SLIKA: Dva prevodna valja.

Kondenzatorska vezja

Zaporedna vezava kondenzatorjev.

Narišimo sliko zaporedno vezanih več kondenzatorjev. Med skrajnima sponkama je napetost U , torej bo na pozitivni sponki naboj $+Q$, na negativni pa $-Q$, zveza med njima pa je $Q = CU$. Tudi na vsakem zaporedno vezanem kondenzatorju bo enako velik naboj, saj bo med dvema sosednjima kondenzatorjema prišlo le do prerazporeditve naboja. Na plošči kondenzatorja, ki je bližje negativni sponki, se bo nakopičil negativni naboj $(-Q)$ in hkrati pozitivni naboj na drugi plošči kondenzatorja. Hkrati bo prišlo do prerazporeditve naboja tudi na ostalih zaporedno vezanih kondenzatorjih. Torej velja: $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$. Celotna napetost bo vsota posameznih padcev napetosti: $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$, kar lahko izrazimo z nabojem in kapacitivnostjo kondenzatorjev $U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{Q}{C_i}$. Če enačbo delimo z nabojem Q , dobimo:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

KAPACITIVNOST ZAPOREDNO VEZANIH KONDENZATORJEV

SLIKA: Zaporedna vezava kondenzatorjev.

Primer: Določite nadomestno kapacitivnost zaporedne vezave treh kondenzatorjev: 1 nF, 2 nF in 5 nF.

Izračun: $\frac{1}{C} = \frac{1}{1 \text{ nF}} + \frac{1}{2 \text{ nF}} + \frac{1}{5 \text{ nF}} = \frac{10+5+2}{10 \text{ nF}} = \frac{17}{10 \text{ nF}}, C = \frac{10}{17} \text{ nF} \cong \underline{\underline{0,588 \text{ nF}}}$

Velja si zapomniti, da je nadomestna kapacitivnost zaporedno vezanih kondenzatorjev vedno manjša od vsake posamezne kapacitivnosti. V konkretnem primeru je najmanjša 1 nF, torej bo skupna gotovo manjša od 1 nF. Kako si to razložimo? Preprosto iz ugotovitve, da je kapacitivnost razmerje med nabojem in napetostjo. Več kot je kondenzatorjev vezanih zaporedno, večji je skupni padec napetosti, obenem pa se naboj ne spreminja. Števec torej ostaja enako velik, imenovalac pa se večja in posledično se manjša kapacitivnost.

Vzporedna vezava kondenzatorjev. Pri vzporedni vezavi kondenzatorjev je na vseh kondenzatorjih enaka napetost, naboj pa je sorazmeren kapacitivnosti vsakega posebej:

$$Q = CU = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_1U + C_2U + \dots + C_nU = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)U, \text{ torej bo}$$

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$$

KAPACITIVNOST VZPOREDNO VEZANIH KONDENZATORJEV

SLIKA: Vzporedna vezava kondenzatorjev.

Primer: Med dvema ravnima vzporednima ploščama površine 100 cm^2 je razdalja 2 cm .

- Določite kapacitivnost med ploščama.
- Za koliko se kapacitivnost poveča/zmanjša, če plošči razmaknemo za trikratno razdaljo?
- Za koliko se kapacitivnost poveča/zmanjša, če površino plošč povečamo za trikrat?
- Za koliko se skupna kapacitivnost poveča/zmanjša, če ploščama zaporedno priključimo še 2 enako velika kondenzatorja?

Izračun:

- a) Kapacitivnost med ploščama je

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{0,02 \text{ m}} = 4,427 \cdot 10^{-12} \text{ F} = \underline{\underline{4,427 \text{ pF}}}.$$

- b) Če plošči razmaknemo za $3x$, se poveča razdalja d za $3x$, torej bo posledično kapacitivnost $3x$ manjša: $C = \epsilon_0 \frac{A}{3d} \cong \underline{\underline{1,48 \text{ pF}}}.$

- c) Če povečamo površino plošč za $3x$, bo kapacitivnost trikrat večja: $C = \epsilon_0 \frac{3A}{d} \cong \underline{\underline{13,3 \text{ pF}}}.$

- d) Če ploščama zaporedno priključimo še dva enaka kondenzatorja, bo skupna kapacitivnost $3x$ manjša: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{3}{C_1} \Rightarrow C = \frac{C_1}{3} \cong \underline{\underline{1,48 \text{ pF}}}.$ Ugotovimo, da je zaporedna vezava treh enakih kondenzatorjev ekvivalentna povečanju razdalje med ploščama enega za $3x$. Hkrati je vzporedna vezava enakih kondenzatorjev ekvivalentna povečanju površine plošč enega kondenzatorja.

Preprosta kondenzatorska vezja so kar vzporedne in zaporedne vezave kondenzatorjev. V tem primeru moramo ob upoštevanju zveze $Q = CU$ vedeti le to, da je skupna (nadomestna) kapacitivnost vzporedne vezave kondenzatorjev vsota posameznih kapacitivnosti in da moramo pri zaporedni vezavi seštevati inverzne vrednosti.

Primer: Zaporedni vezavi kondenzatorjev $C_1 = 1 \text{ nF}$ in $C_2 = 2 \text{ nF}$ priključimo vzporedno še kondenzator $C_3 = 2 \text{ nF}$. Določimo naboj na kondenzatorju C_2 , če vezje priključimo na napetost 100 V .

SLIKA: Vezava kondenzatorjev.

Izračun: Določimo nadomestno skupno kapacitivnost, ki je

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} \text{ nF} \cong 0,67 \text{ nF} . C_{nad} = C_{12} + C_3 \cong 0,67 \text{ nF} + 2 \text{ nF} = 2,67 \text{ nF} .$$

Naboj na Q_3 je $Q_3 = C_3 U_3 = C_3 \cdot 100 \text{ V} = 267 \text{ nC} .$

Koliko naboja pa je na Q_2 ?

Zaradi zaporedne vezave kondenzatorjev C_1 in C_2 , je naboj na kondenzatorju C_2 enak naboju na C_1 in tudi na zaporedni skupni vezavi, torej $Q_2 = C_{12} U \cong 0,67 \text{ nF} \cdot 100 \text{ V} = \underline{\underline{67 \text{ nC}}} .$

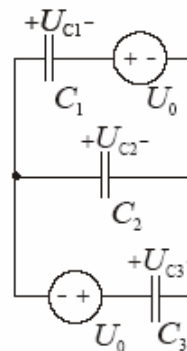
Enačbe potrebne za analizo splošnega kondenzatorskega vezja.

Kako pa bi analizirali vezje z več kondenzatorjev in virov, ko ni mogoče preprosto vzporedno in zaporedno seštevati kondenzatorje? V tem primeru je potrebno napisati sistem enačb ob upoštevanju osnovnih zakonitosti (potencialnost elektrostatičnega polja in zakon o ohranitvi naboja):

- 1) Vsota vseh napetosti v zaključeni zanki je enaka nič: $U_{zanke} = \sum_i U_i .$
- 2) Vsota nabojev v spojišču je enaka nič: $Q_{spojisca} = \sum_i Q_i .$

Primer naloge iz kolokvija 11.1.2002 (VŠŠ):

2. Določite napetosti na kondenzatorjih!
($C_1 = 6 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$, $C_3 = 6 \mu\text{F}$, $U_0 = 12 \text{ V}$)



Glede na smeri napetosti lahko zapišemo dve enačbi z upoštevanjem Kirchhoffovega zakona: $U_{C1} + U_0 - U_{C2} = 0$ in $U_{C2} - U_{C3} + U_0 = 0$. Poleg tega lahko zapišemo enačbo ohranitve naboja. Naboj se le prerazporeja iz ene elektrode kondenzatorja na druge. Veljati mora $Q_{C1} + Q_{C2} + Q_{C3} = 0$. To enačbo lahko izrazimo z napetostmi $C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 = 0$ in tako dobimo sistem treh enačb za tri neznane napetosti na kondenzatorjih.

V rešitvi kolokvija je uporabljen nekoliko bolj »eleganten« način z vpeljavo spojiščnega potenciala.

2. Desno spojišče vezja ozemljimo, levo spojišče se nahaja na potencialu V .

Zapišimo napetosti:

$$U_{C1} = V - U_0$$

$$U_{C2} = V$$

$$U_{C3} = V + U_0$$

Zapišimo vsoto nabojev v levem vozlišču:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$C_1 \cdot (V - U_0) + C_2 \cdot V + C_3 \cdot (V + U_0) = 0$$

$$V = \frac{U_0 (C_1 - C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = 0 \text{ V}$$

in iz nje izrazimo potencial V . Tako dobimo:

$$U_{C1} = V - U_0 = -U_0 = -12 \text{ V}$$

$$U_{C2} = V = 0 \text{ V}$$

$$U_{C3} = V + U_0 = U_0 = 12 \text{ V}$$

Vprašanja za obnovo:

1. Kako je definirana kapacitivnost?
2. Od česa je odvisna kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma v zraku?
3. Kako izračunamo (določimo) kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma?
4. Ponovite izraze za kapacitivnost osnovnih struktur.
5. Nadomestna kapacitivnost zaporedne, vzporedne in kombinirane vezave.
6. Kako v splošnem analiziramo kondenzatorska vezja?

21. Dielektrik v električnem polju

Vsebina poglavja: relativna dielektričnost, povečanje kapacitivnosti z uporabo dielektrika, vezan in prosti naboj, vektor polarizacije, površinska gostota vezanega naboja, električna susceptibilnost, vektor gostote električnega pretoka, povezave med E, D in P, modificiran Gaussov zakon, mejni pogoji električnega polja med dvema dielektrikoma, mejni pogoji med prevodnikom in dielektrikom.

Dielektrik vstavljen v zračni kondenzator.

Do sedaj smo imeli opravka le s prevodniki v vakuumu oziroma zraku. Kako pa vplivajo različni materiali (snovi) na električne razmere? Na primer, kaj se zgodi, ko med plošči ploščnega kondenzatorja vložimo material, ki je idealen (električni) izolator in ju priključimo na vir napetosti? Takemu materialu pogosto rečemo dielektrik in s tem poudarimo njegove dielektrične (kapacitivne) lastnosti, medtem ko izolatorjem praviloma predpisujemo uporovne lastnosti; dober izolator ima zelo veliko (specifično) upornost.

Če izmerimo kapacitivnost pred vložitvijo dielektrika in po vložitvi ugotovimo, da se kapacitivnost po vložitvi poveča:

$$\frac{C_{\text{diel}}}{C_{\text{zrak}}} = \epsilon_r \geq 1.$$

ϵ_r imenujemo **relativna dielektrična konstanta** in pove, za koliko se kapacitivnost poveča ob vstavitvi dielektrika med plošči zračnega kondenzatorja.

Kapacitivnost zračnega ploščatega kondenzatorja pred vstavitvijo dielektrika je $C_{\text{zrak}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$,

po vstavitvi pa je $C_{\text{diel}} = \epsilon_r C_{\text{zrak}} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$.

Izrazi za kapacitivnosti različnih tipov zračnih kondenzatorjev veljajo tudi v primeru, ko je namesto zraka dielektrik, le konstanto ϵ_0 nadomestimo z $\epsilon_r \cdot \epsilon_0$.

Primer: Vzemimo ploščni kondenzator s površino plošč 100 cm^2 . Med plošči stisnemo list papirja debeline 2 mm ($\epsilon_r = 2$) in 2 mm debelo gumo z $\epsilon_r = 6$. Kondenzator priključimo na napetost 100 V.

- Kolikšen je padec napetosti na plasti papirja in kolikšen na steklu?
- Kolikšno je polje v steklu in v papirju?
- Kolikšno je polje na meji med steklom in papirjem?

Izračun:

$$a) C_1 = C_{\text{papir}} = \epsilon_{r1} \epsilon_0 \frac{A}{d_1} = 2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 8,854 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

$$C_2 = C_{\text{steklo}} = \epsilon_{r2} \epsilon_0 \frac{A}{d_2} = 6 \cdot 8,854 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 3C_1 = 26,562 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$



Podvodni kabel, 420 kV.
www.nexans.com

Nadomestna kapacitivnost je

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 3C_1}{C_1 + 3C_1} = \frac{3}{4} C_1 = 6,6405 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \text{torej je naboj na skupni vezavi}$$

$$Q_{12} = C_{12} U = 6,6405 \text{ nC}.$$

Ta naboj je tudi enak naboju na kondenzatorju C_1 , zato je $U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 75 \text{ V}$ in $U_2 = U - U_1 = 25 \text{ V}$.

b) Električna poljska jakost v papirju je: $E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{75 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 37,5 \text{ kV/m}$, v steklu pa

$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{25 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 12,5 \text{ kV/m}.$$

c) Iz $Q_1 = Q_2$ sledi $C_1 U_1 = C_2 U_2$ oziroma $\varepsilon_{r1} \varepsilon_0 \frac{A}{d_1} \cdot E_1 d_1 = \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 \frac{A}{d_2} \cdot E_2 d_2$, od koder je

$\varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_{r2} E_2$. Polje na meji med dielektrikoma ima skok, je torej nezvezno. Polje v dielektriku z manjšo dielektričnostjo je večje od polja v dielektriku z večjo dielektričnostjo.

Kolikšno je povečanje kapacitivnosti ob vstavitvi dielektrika?

Večina plinov ima vrednosti dielektričnosti okoli 1, med 1 in 1,001 in prebojno trdnost okoli 3 MV/m, medtem, ko imajo običajni izolatorji relativne dielektričnosti med 2 in 10 in prebojne trdnosti od nekaj do nekaj sto MV/m.

Plin	relativna dielektričnost brez enot	prebojna trdnost MV/m
vodik	1,00027	2
suh zrak	1,00058	3
CO ₂	1,00099	2,9

Tekočine in izolatorji	relativna dielektričnost	prebojna trdnost v MV/m
papir	2,3	20
etanol	3,7	16
voda (destilirana)	81	
olje	2-5	
guma	3	
silicij	11	

Fizikalna razlaga spremembe kapacitivnosti ob uporabi dielektrika.

1) Ploščni kondenzator naelektren s prostim nabojem med ploščama

Vzemimo, da imamo med elektrodama ploščnega kondenzatorja prosti naboj, torej $\pm Q_{\text{prosti}}$.

Med plošči vstavimo dielektrik. Pozitivni in negativni naboji na ploščah delujejo s silo na naboje v dielektriku tako, da se le ti prerazporedijo. To prerazporeditev nabojev lahko ponazorimo z modelom dipola. Dipoli se usmerijo v smer polja (navor $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ je enak nič, ko sta vektorja vzporedna), pri čemer je potrebno upoštevati, da so negativni poli dielektrika bližje pozitivni elektrodi. Polje med ploščama je vsota prispevkov vseh nabojev, tistih na ploščah kondenzatorja in ločenih nabojev (dipolov) v dielektriku med ploščama.

Dipoli so nanizani v verigi, kjer se minus pol enega dipola kompenzira s plus polom naslednjega dipola. Tako lahko smatramo, da se **znotraj dielektrika kompenzirajo naboji dipolov, ostane pa na površini nekompenziran naboj, ki pa je nasprotnega predznaka kot prosti naboj na plošči**. Ti nekompenzirani (**vezani**) naboji povzročajo polje, ki je nasprotno usmerjeno od polja, ki je povzročil polarizacijo. Zato se polje med ploščama ob vstavitvi dielektrika pri konstantnem naboju zmanjša. Posledično se **zmanjša tudi napetost**

med ploščama $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Ker pa je kapacitivnost določena kot $C = \frac{Q}{U}$, se ob zmanjšanju

napetosti med ploščama in konstantnem prostem naboju na ploščama kapacitivnost poveča.

Ob vložitvi dielektrika med naelektreni plošči pri konstantnem (prostem) naboju bo torej:

$$C \uparrow = \frac{Q}{U \downarrow}$$

SLIKA: Naboj na ploščah kondenzatorja polarizira snov med ploščama, kar prikažemo s kreiranjem dipolov.

2) Ploščni kondenzator pri priključenih fiksni napetosti med ploščama

Kako pa razložimo enako povečanje kapacitivnosti pri vložitvi dielektrika med plošči zračnega kondenzatorja ob **konstantni napetosti**? Tudi v tem primeru si zamislimo, da se na elektrodah zaradi napetosti nakopiči določen naboj. Ko pa vstavimo dielektrik, polje, vzpostavljeno med ploščama povzroči polarizacijo dielektrika. Zopet tako, da so negativni naboji dielektrika v povprečju bližje pozitivnim nabojem na plošči.

Ti polarizirani naboji bi ob ohranjeni količini naboja na ploščama povzročili zmanjšanje polja in zmanjšanje napetosti med ploščama. Ker pa je zunanja napetost vsiljena, priteče ob fiksni napetosti na elektrodi dodaten naboj, ki kompenzira polariziran naboj. Tudi v tem primeru se torej poveča kapacitivnost, saj se poveča količina prostega naboja na ploščah kondenzatorja.

Ob vložitvi dielektrika pri konstantni napetosti bo:

$$C \uparrow = \frac{Q \uparrow}{U}$$

SLIKA: Povečanje kapacitivnosti ob vložitvi dielektrika v zračni kondenzator na konstantni napetosti.

Vpeljava koncepta vektorja polarizacije.

Električni dipolni moment smo že spoznali. Definiran je kot $\vec{p} = Q\vec{d}$. Ugotovili smo, da na dipol v polju deluje navor $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$. V dielektriku, ki ga postavimo v polje se ustvarijo in usmerijo dipoli. Vpeljemo pojem **vektorja polarizacije, ki je določen kot prostorska gostota dipolskih momentov**:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta v} = \frac{d\vec{p}}{dv}.$$

Enota za vektor polarizacije je $\frac{C \cdot m}{m^3} = \frac{C}{m^2}$.

Zakaj vpeljati nov vektor? Zopet imamo problem, da je sicer smiselno vpliv polja na dielektrik ponazoriti z množico dipolov, ker pa je v snovi zelo veliko molekul in torej veliko dipolov, je potrebno njihovo skupno delovanje predstaviti na primeren način. Vektor polarizacije je torej makroskopski model in ponazarja povprečno delovanje velike množice dipolnih momentov v majhnem volumnu. Na podoben način smo se lotili tudi obravnave naboja: s konceptom gostote naboja.

Površinska gostota polariziranega naboja.

Vzemimo primer enakomerno polariziranega valja površine A . Na površini je vezan (polariziran) naboj velikosti $Q_p = P \cdot A$. V primeru, da smer vektorja polarizacije ni v smeri normale na površino je potrebno upoštevati le normalno komponento vektorja polarizacije $Q_p = P_n \cdot A$, če pa tudi ni enakomerno porazdeljen polariziran naboj pa $Q_p = \int_A \vec{P} \cdot d\vec{A}$.

Enako kot o gostoti prostega površinskega naboja lahko »govorimo« tudi o **gostoti polariziranega (vezanega) površinskega naboja**, ki je enaka kar normalni komponenti vektorja polarizacije na površini:

$$\sigma_p = P_n$$

SLIKA: Polariziran naboj v volumnu. Na površini je normalna komponenta vektorja polarizacije neka gostoti površinskega polariziranega (vezanega) naboja.

Polariziran (vezan) naboj po zaključeni površini dobimo z integracijo normalne komponente vektorja polaritacije po celotni površini: $Q_{P,zunaj A} = \oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A}$. Ker ta naboj ni nujno enak nič, ostane ob polarizaciji znotraj zaključene površine površinski polariziran naboj, ki je enak

$$Q_{P,znotraj} = -\oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A}.$$

Ta naboj je potrebno razlikovati od naboja, ki se »prosto« giblje po prevodni površini, saj je ta naboj vezan v snovi. Lahko se giblje vendar le omejeno, kolikor se pač lahko giblje dipol.

Povezava med E in P. Električna susceptibilnost.

Ko dielektrik postavimo v polje se naboji v snovi prerazporedijo - **polarizirajo**. Ta prerazporeditev je lahko večja ali manjša, odvisno od lastnosti materiala. Prerazporeditev naboja predstavimo z modelom električnih dipolov oziroma njihove gostote z vektorjem polarizacije P . Za mnogo snovi velja, da povečanje polja povzroči sorazmerno povečanje polarizacije, kar matematično zapišemo kot:

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}.$$

Spomnimo se, kaj je $\epsilon_0 E$. Na površini polprevodnika je bil $\epsilon_0 E$ enak površinski gostoti naboja. Konstanto χ (chi) imenujemo **električna susceptibilnost** in »govori« o odzivnosti snovi na električno polje. Je brezdimenzijska konstanta. V vakuumu je torej χ enaka nič, saj tedaj ni polariziranega naboja.

Dielektrik imenujemo **linearen**, če susceptibilnost ni odvisna od velikosti polja (napetosti), **homogen**, če je neodvisen od pozicije in **izotropen**^{*}, če je neodvisen od smeri polja.

Vektor gostote električnega pretoka - D.

Vzemimo, da imamo zunanje električno polje E_0 , ki ga vzpostavimo z zunanjimi viri. V tako polje vstavimo dielektrik. Dielektrik se polarizira, kar ponazorimo z vektorjem polarizacije oziroma z prerazporeditvijo polariziranih nabojev in povzročijo dodatno polje E_P . To polje običajno deluje v nasprotni smeri polja, ki je povzročilo polarizacijo in zato se sumarno polje zmanjša.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P$$

SLIKA: Superpozicija zunanjega polja in polja polariziranih nabojev.

^{*} **Anizotropen material** ima različno dielektričnost (susceptibilnost) v različnih smereh. V tem primeru bo polarizacija v vsaki smeri drugačna. Polarizacija v smeri X osi bo torej enaka

$P_x = \epsilon_0 \chi_{xx} E_x + \epsilon_0 \chi_{xy} E_y + \epsilon_0 \chi_{xz} E_z$. Podobno zapišemo za ostale smeri. V tem primeru susceptibilnost ni več skalarna količina, pač pa jo moramo predstaviti kot tenzor (v obliki matrike).

Poglejmo, ali lahko upoštevamo Gaussov zakon in druge že znane ugotovitve. Spoznali smo že potencialnost elektrostaticnega polja: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, pa tudi Gaussov zakon $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$.

Prvi integral je po zaključeni poti, drugi pa po zaključeni površini. Q je naboj, ki je zaobjet z integracijo. Prvi se ne spremeni tudi, če gre del poti skozi dielektrik, medtem, ko se drugi spremeni, saj je potrebno upoštevati, da z integracijo polja po zaključeni površini ne zajamemo le prosti naboj pač pa tudi ujetega, polariziranega. Ugotovili smo že, da je količina tega ujetega naboja po zaključeni površini enaka $Q_{P, \text{znotraj}} = -\oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A}$, torej moramo Gaussov

zakon zapisati v obliki

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{prosti, znotraj } A}}{\epsilon_0} + \frac{Q_{P, \text{znotraj } A}}{\epsilon_0},$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$\oint_A \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} + \oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj } A}$$

$$\oint_A (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj } A}$$

Zgodovina elektrotehnike je doprinesla še eno veličino (lahko smatramo tudi dvopomensko), ki v osnovi izhaja iz gornjega zapisa. J.C. Maxwell je namreč vpeljal vektor D , ki ga imenujemo **vektor gostote električnega pretoka** in je definiran kot

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Enota vektorja D je C/m^2 , enako kot gostota naboja na površini prevodnika. V osnovi je vektor D na površini enak površinski gostoti naboja, je pa za razliko od površinskega naboja definiran tudi povsod po volumnu.

S pomočjo tega vektorja lahko zapišemo zgornjo enačbo v obliki

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj } A},$$

ki ga lahko imenujemo **modificiran Gaussov zakon**. Z besedami bi rekli, da je pretok vektorja D skozi zaključeno površino enak zaobjemu prostemu naboju. Odlika tega zapisa je predvsem ta, da je zapis neodvisen od vplivov snovi na vektor D . Ta vektor je izključno odvisen od lege prostih nabojev, to pa so tisti, ki jih običajno vzpostavimo z zunanjim poljem. S tem si bistveno olajšamo upoštevanje vplivov dielektrika.

Zveza med D in E.

Združimo enačbi $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ in $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ in dobimo

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

Ponovimo pomembno zvezo med E in D:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E},$$

kjer ϵ_r imenujemo **relativna dielektrična konstanta**.

Povezava med električno susceptibilnostjo in relativno dielektrično konstanto je preprosta:

$$\epsilon_r = 1 + \chi.$$

Zveza med D in P.

Če smo ugotovili enostavno zvezo med D in E, velja seveda tudi enostavna zveza med D in P,

saj velja $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E} = \frac{(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{D}}{\epsilon_r \epsilon_0}$, torej $\vec{P} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \vec{D}$.

Primer: Vzemimo ploščni kondenzator površine plošč 100 cm^2 in ga priključimo na napetost 20 V. Vmes stisnimo 2 mm debel list papirja z relativno dielektrično konstanto 2. Določimo naboj na površini, površinsko gostoto naboja, vektor gostote pretoka, vektor polarizacije, električno poljsko jakost in kapacitivnost.

Izračun: Izračuna se lahko lotimo na več načinov. Običajni postopek je tak, da najprej določimo D, ki ni odvisen od snovi, potem E, nato U, itd.. V ploščnem kondenzatorju velja:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj}} \Rightarrow DA = \sigma A \Rightarrow D = \sigma$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

$$U = \int_0^d E dx = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} d,$$

od koder sledi: $E = \frac{U}{d} = \frac{20 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 10 \text{ kV/m}$, $D = \epsilon_r \epsilon_0 E = 177,08 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$,

$$\sigma = D = 177,08 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2, P = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} D = \frac{2-1}{2} D = \frac{D}{2} = 88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2.$$

Sigma, ki smo jo izračunali je gostota površinskega naboja. D je enak sigmi, vendar je D definiran povsod v prostoru, sigma pa le na površini. Ker obravnavamo primer ploščnega kondenzatorja je D povsod enako velik. Ker je normalna komponenta P-ja na površini enaka površinski gostoti polariziranega naboja, je $\sigma_p = P = 88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$. Prostega naboja na površini plošče je 2x več od polariziranega površinskega naboja, torej, vsaki drugi naboj prosti naboj ima svoj nasprotni – polariziran naboj. Pri dielektrikih z veliko relativno dielektričnostjo bo P kar enak D.

SLIKA: Plošni kondenzator z dielektrikom.

Pri konstantni napetosti je polje v dielektriku neodvisno od dielektrika in je enako $E = \frac{U}{d} = \frac{20 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 10 \text{ kV/m}$. Zato pa bo v primerjavi z zrakom potrebna gostota naboja, ki bo vzdrževala to polje v dielektriku večja kot v primeru, če med ploščama ni dielektrika (je le zrak), saj velja $E = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \epsilon_r \epsilon_0 E = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{U}{d}$. Ko bomo vstavili dielektrik, se bo površinska gostota naboja povečala za 2x: od $88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$ na $177,08 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$. Razlika je ravno posledica polarizacije, ki na površini dielektrika vzpostavi površinsko gostoto polariziranega naboja (nasprotnega predznaka kot prosti naboj) velikosti $88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$.

Če pa imamo konstantno gostoto naboja, se bo polje po vložitvi dielektrika med plošči zmanjšalo za ϵ_r : $E = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0}$, torej na 5 kV/m. To pomeni, da se bo zmanjšala tudi napetost in sicer na 10 V.

Primer: Nekoliko drugačne pa bodo razmere, če bomo med plošči kondenzatorja vstavili dielektrik, ki bo le delno zapolnil vmesni prostor. Vzemimo, da v zračni kondenzator, ki je priključen na napetost 20 V in ima 2 mm razdalje med ploščama potisnemo 1 mm debel kos papirja.

SLIKA: Plošni kondenzator z dvema dielektrikoma.

Izračun: D bo neodvisen od dielektrikov in bo povsod konstanten. Spremenilo pa se bo polje, ki bo $E = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0}$ v dielektriku (papirju) in $E = \frac{D}{\epsilon_0}$ v zraku. Da bi določili vrednosti polja moramo zapisati še napetost, ki bo

$$U = \int_0^d E dx = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} d_1 + \frac{D}{\epsilon_0} d_2 = D \left(\frac{d_1}{\epsilon_r \epsilon_0} + \frac{d_2}{\epsilon_0} \right)$$

$$D = \frac{U}{\left(\frac{d_1}{\epsilon_r \epsilon_0} + \frac{d_2}{\epsilon_0} \right)} = \frac{20 \text{ V}}{\frac{1 \text{ mm}}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} = 118,053 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

Toliko je tudi površinska gostota naboja. Električno polje je torej $E = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = 6,667 \text{ kV/m}$ v

dielektriku (papirju), v zraku pa je 2x večje: $13,33 \text{ kV/m}$.

Gostota polariziranega površinskega naboja na meji med papirjem in ploščo in papirjem in zrakom je enaka $D/2$.

Reševanje primera s pomočjo kapacitivnosti:

$$U = Q \left(\frac{d_1}{A \epsilon_r \epsilon_0} + \frac{d_2}{A \epsilon_0} \right) = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right). \text{ Iz te zveze lahko določimo naboj na površini, iz}$$

znanega naboja napetost na papirju in v zraku: $U_1 = \frac{Q}{C_1}$ in $U_2 = \frac{Q}{C_2}$. Nato iz znanih napetosti

$$\text{določimo polji: } E_1 = \frac{U_1}{d_1} \text{ in } E_2 = \frac{U_2}{d_2}.$$

Na meji med dvema dielektrikoma, v našem primeru med papirjem in zrakom je skokovit prehod polja. Ker je D enak v obeh medijih bo veljalo:

$\epsilon_r \epsilon_0 E_1 = \epsilon_r \epsilon_0 E_2$. To je mejni pogoj za prehod med dvema dielektrikoma, ki velja splošno, vendar le za tisto komponento polja, ki je pravokotna na mejo.

Primer: Vzemimo primer dvoplastnega koaksialnega kabla, ki ga želimo dimenzionirati za delovanje na napetosti 20 kV. Prva, notranja plast je iz gume z relativno dielektričnostjo 3,2, druga pa iz polistirena z $\epsilon_r = 2,6$. Prebojna trdnost gume je 25 kV/mm, polistirena pa 20 kV/mm. Koaksialni kabel polmera žile 4 mm želimo dimenzionirati tako, da maksimalno polje v dielektrikih ne preseže 25% prebojne trdnosti. Določiti moramo debelino obeh dielektrikov, torej radij do plasti polistirena r_p in zunanji radij r_z .

Izračun:

Pri vzpostavljeni napetosti 20 kV imamo na žili $+q$ naboj, na oklopu pa $-q$. Da bi določili polje v enem in drugem dielektriku, se poslužimo Gaussovega stavka za vektor D , ki je neodvisen od dielektrikov. Za poljubni radij med notranjim in zunanjim dobimo

$$D(r) = \frac{q}{2\pi r} \text{ oziroma } \vec{D} = \vec{e}_r D(r) = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi r}. \text{ Polje v dielektrikih dobimo iz zveze } \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r \epsilon_0},$$

torej bo polje v plasti gume

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_{rg} \epsilon_0} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi \epsilon_{rg} \epsilon_0 r},$$

v plasti polistirena pa

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_{rp} \epsilon_0} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi \epsilon_{rp} \epsilon_0 r}.$$

Maksimalno polje v gumi ne sme preseči 25% prebojne trdnosti, kar zapišemo kot

$$E_{\max, \text{guma}} = 25\% E_{\text{preb, guma}} = 0,25 \cdot 25 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 6,25 \cdot 10^6 \text{ V/m},$$

za polistiren pa bo veljalo

$$E_{\max, \text{poli}} = 25\% E_{\text{preb, poli}} = 0,25 \cdot 20 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 5 \cdot 10^6 \text{ V/m}.$$

Polje bo maksimalno pri čim manjšem radiju, torej pri

$$E_{\max, \text{guma}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_{rg}\epsilon_0 r_n} = 6,25 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

in

$$E_{\max, \text{poli}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_{rp}\epsilon_0 r_p} = 5 \cdot 10^6 \text{ V/m}.$$

Če enačbi delimo, lahko določimo r_p :

$$r_p = \frac{\epsilon_{rg}}{\epsilon_{rp}} \cdot r_n \cdot \frac{6,25}{5} = \underline{\underline{0,62 \text{ cm}}}.$$

Lahko tudi določimo linijsko gostoto naboja, ki bo $q = 2\pi\epsilon_{rg}\epsilon_0 r_n \cdot 6,25 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$.

Preostane nam še, da določimo potrebno debelino plasti polistirena, za kar pa potrebujemo še eno enačbo, ki jo dobimo iz enačbe za napetost. Integrirati je potrebno polje od notranjega do zunanega radija, pri čemer pa se polje spremeni med dvema dielektrikoma. Zato je potrebno ločiti integral v dva, enako, kot da bi zapisali celotno napetost kot vsoto padcev napetosti v gumi in v polistirenu. Tako dobimo

$$U = \int_{r_n}^{r_z} \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_{\text{gume}} + U_{\text{poli}} = \int_{r_n}^{r_p} \vec{E}_{\text{gume}} \cdot d\vec{l} + \int_{r_p}^{r_z} \vec{E}_{\text{poli}} \cdot d\vec{l}$$

$$U = \int_{r_n}^{r_p} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_{rg}\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr + \int_{r_p}^{r_z} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_{rp}\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr =$$

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_{rg}\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_p}{r_n}\right) + \frac{q}{2\pi\epsilon_{rp}\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_z}{r_p}\right)$$

V gornji enačbi je edina neznanka zunanji polmer, ki jo določimo z vstavitvijo vrednosti in dobimo 0,77 cm.

SLIKA: Dvoplastni koaksialni kabel.

Mejni pogoji.

Posredno smo z obravnavo polja v dveh stikajočih se dielektrikih že spoznali. Ugotovili smo, da na meji med dvema dielektrikoma z različnima dielektričnostima pride do nezveznega prehoda (skoka) električnega polja. V tem poglavju želimo spoznati splošne zakonitosti prehoda polja iz enega medija v drugega. Izpeljemo jih iz Gaussovega zakona in zakona o potencialnosti (konzervativnosti) elektrostaticnega polja.

Mejni pogoj za normalno komponento polja.

Mejni pogoj za normalno (pravokotno) komponento dobimo iz Gaussovega zakona:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj}}$$

Zamislimo si površino med dvema dielektrikoma in kocko, katere stranice stiskamo v smeri meje. Ker moramo računati D skozi zaključeno površino (ven iz površine) bomo pisali:

$$\vec{D}_1 \cdot d\vec{A} - \vec{D}_2 \cdot d\vec{A} = \sigma_{\text{prosti}} \cdot dA \text{ ali tudi}$$

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_{\text{prosti}} \text{ ali tudi } D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{\text{prosti}} .$$

Enotski vektor kaže iz dielektrika z indeksom 2 v dielektrik z indeksom 1. Če je površinska gostota prostega naboja na meji dveh dielektrikov enaka nič, velja

$$D_{1n} = D_{2n} \text{ ali tudi } \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} .$$

Če poznamo normalno komponento polja na meji na eni strani dielektrika, z lahkoto izračunamo normalno komponento na meji v drugem dielektriku.

SLIKA: Prehod normalne komponente polja.

Mejni pogoj za tangencialno komponento polja.

Potrebujemo še mejni pogoj za komponente polja, ki so vzporedne (tangencialne) z mejo. Tu uporabimo zakon potencialnosti polja:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 . \text{ Vzemimo pravokotnik na meji dveh dielektrikov in ga stiskajmo v smeri meje.}$$

Integral polja bo imel tako le komponenti v smeri meje – tangencialni komponenti. Veljalo bo torej: $E_{1t} \cdot l - E_{2t} \cdot l = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t} .$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

SLIKA: Prehod tangencialne komponente polja.

Združimo obe enačbi v »lomni zakon«. Če na meji dveh dielektrikov ni površinskega (prostega) naboja, velja:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Če enačbi delimo med sabo, dobimo:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \tan(\alpha_1) = \frac{1}{\varepsilon_2} \tan(\alpha_2) \quad \text{ali} \quad \frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

α je vpadni kot med normalo na površino in smerjo polja.

SLIKA: »Lomni zakon« polja na meji dveh dielektrikov.

Primer: Homogeno polje 100 V/m je usmerjeno pod kotom 45° iz zraka v olje z $\varepsilon_r = 2$. Izračunajte električno poljsko jakost v olju in skicirajte vektorja polja na meji zrak-olje.

Izračun: Ohranja se tangencialna komponenta, ki bo tudi v olju enaka $E_{1t} = E_{2t} = 100 \text{ V/m} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Normalna komponenta polja v olju pa se zmanjša za $\frac{1}{2}$, saj velja

$E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n} = \frac{1}{2} E_{1n} = \frac{1}{2} 100 \text{ V/m} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Absolutna vrednost polja v olju pa je

$E_2 = \sqrt{E_{1n}^2 + E_{2t}^2} \cong \underline{\underline{79 \text{ V/m}}}$. Polje v olju se zmanjša, saj se zmanjša normalna komponenta polja, tangencialna pa ostane enaka.

SLIKA: Lom polja na meji zrak-olje.

Polje na meji dielektrika in kovine.

Poseben primer je meja dielektrik - prevodnik. Vzemimo, da označimo dielektrik z indeksom 1, prevodnik pa z 2. Predhodno smo že ugotovili, da je elektrostatično polje znotraj prevodnika enako nič: $E_2 = 0$. Ker velja $E_{1t} = E_{2t}$, bo tangencialna komponenta polja v izolatorju na meji z dielektrikom enaka nič. To pa obenem pomeni, da bo imelo polje v izolatorju na meji s prevodnikom le normalno komponento, ki bo enaka $D_{1n} - 0 = \sigma_{prosti}$ oziroma,

$$E_1 = E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_1}.$$

Prišli smo do že znane ugotovitve, da je polje na površini prevodnika pravokotno na površino in sorazmerno površinski gostoti naboja.

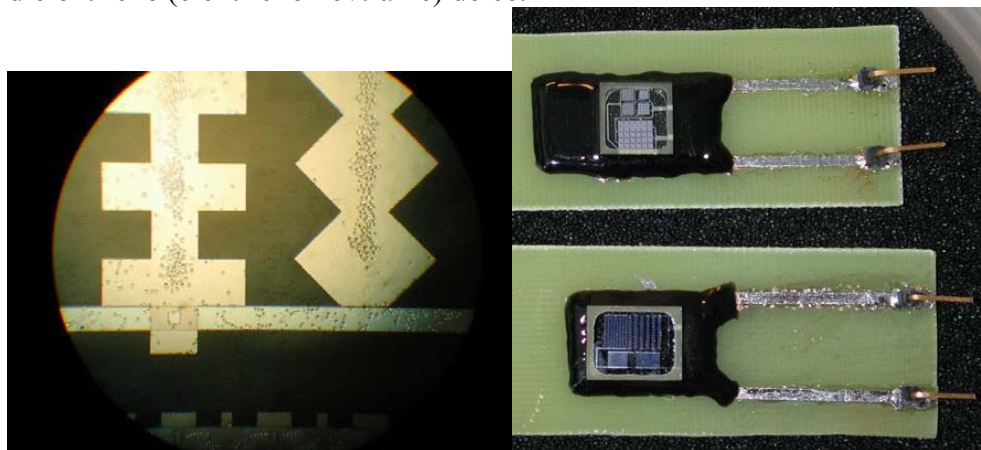
Zapišimo še enkrat tudi ploskovno silo na prevodnik: $f = \sigma \frac{\sigma}{2\epsilon}$.

SLIKA: Polje na meji izolator – kovina.

* **Sila med dielektriki.** Zanimiv je tudi primer, ko želimo izračunati silo med dvema dielektrikoma. Primer je na primer sila na nevtralne dielektrične delce v nehomogenem polju. Zaradi različne dielektričnosti delca in medija deluje na delec sila, ki jo lahko določimo z integracijo ploskovne sile na delec. Brez izpeljave zapišimo rezultat, ki bo

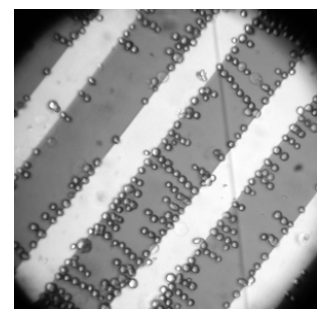
$$f = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \left(E_t^2 + \frac{D_n^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right). \text{ Smer te ploskovne sile je v smeri prostora z manjšo dielektričnostjo.}$$

Tako je mogoče dielektrične delce usmerjati z vzpostavitev električnega polja med dvema ali več elektrodami. Delci se naberejo tam, kjer je polje največje – na ostrih robovih elektrod ali pa na mestih, kjer je električno polje najmanjše. Dodatno kontrolo nad gibanjem delcev nam ponuja vzbujanje z izmeničnim signalom. Dielektrične lastnosti snovi (relativna dielektričnost) se s frekvenco signala spreminja, kar omogoča manipulacijo delcev z električnim poljem. V Laboratoriju za bioelektromagnetiko smo skupaj z Laboratorijem za mikrosenzorske strukture in Laboratorijem za biokibernetiko načrtali in izdelali strukture za manipulacijo bioloških celic s pomočjo dielektroforeze. Če je elektroforeza pojav, v katerem izkoriščamo silo na naelektrene delce, je dielektroforeza pojav, kjer izkoriščamo silo na dielektrične (električno nevtralne) delce.



SLIKA: Manipulacija bioloških celic z električnim poljem. Celice se koncentrirajo na mestu najmanjšega polja, ki je v sredini in na površini elektrod. Razdalja med elektrodama je 50 μm . Na desni sta prikazana modula z izdelanimi mikrostrukturami. Mikrostrukture so izdelane s polprevodniško tehnologijo na Pyrex steklu z dvoslojno metalizacijo.

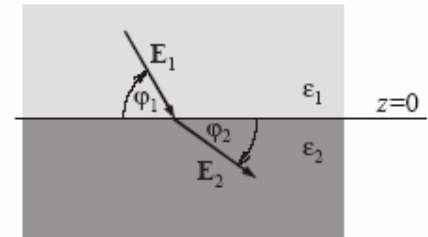
Delovanje dielektroforeze smo ugotavljali tudi pri eksperimentu s semenkami v enosmernem polju. Semenke so iz dielektrika in se usmerijo v smer polja, ker pa so v dovolj gostem mediju, se težje prosto gibljejo. Potrebovali bi še večjo silo, da bi premagali silo viskoznosti. Smo pa opazili značilnost veriženja, ki jo opazimo tudi pri celicah na mikrostrukturah. Poleg tega so pazljivi lahko opazili, da se giblje tudi olje v katerem so bile semenke. Tudi na molekule olja (dielektrik) deluje sila, ki jih premakne v smeri elektrod.



SLIKA: Veriženje celic pri pojavu dielektroforeze.

PRIMERI:**Primer kolokvijske naloge z dne 11.12.2001:**

Ravnina $z = 0$ je meja med dvema dielektrikoma, z relativnima dielektričnostima $\epsilon_{r1} = 5$ za prostor $z > 0$ in $\epsilon_{r2} = 12$ za prostor $z < 0$. V prvem prostoru je električna poljska jakost $E_1 = 10^5 \text{ V/m}$ in je usmerjena pod kotom $\varphi_1 = 60^\circ$ glede na ravnino $z = 0$. Določite velikost električne poljske jakosti v drugem prostoru in kot φ_2 , ki ga oklepa z ravnino $z = 0$.



$$\begin{array}{ll}
 E_1 = 10^5 \text{ V/m} & E_{1t} = E_1 \cos \varphi_1 = 50 \text{ kV/m} \\
 \varphi_1 = 60^\circ & E_{1n} = E_1 \sin \varphi_1 = 86,6 \text{ kV/m} \\
 \epsilon_{r1} = 5 & E_{2t} = E_2 \cos \varphi_2 \\
 \epsilon_{r2} = 12 & E_{2n} = E_2 \sin \varphi_2
 \end{array}$$

$$E_{2t} = E_{1t} = 50 \text{ kV/m}$$

$$D_{2n} = D_{1n} \rightarrow E_{2n} = E_{1n} \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} = 36,1 \text{ kV/m}$$

$$E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = 61,7 \text{ kV/m}$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{E_{2n}}{E_{2t}} \rightarrow \varphi_2 = 35,8^\circ$$

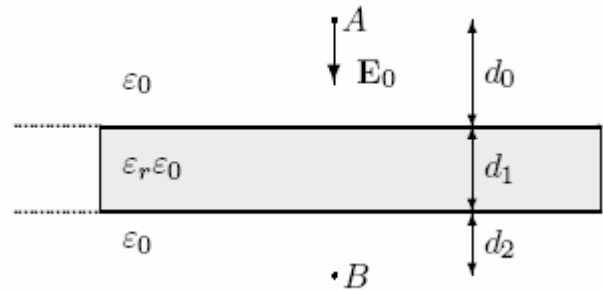
Nalogo bi lahko rešili tudi z uporabo lomnega zakona $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$, pri čemer pa bi morali paziti, da je kot alfa definiran glede na normalo in ne na mejo, torej je $\alpha_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ in

$$\tan(\alpha_2) = \tan(\alpha_1) \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \tan(30^\circ) \frac{12}{5} = 1,386, \text{ od koder je } \alpha_2 \cong 54,2^\circ \text{ in } \varphi_2 = 35,8^\circ.$$

Primer kolokvijske naloge 17.12.2003 (UNI):

Napetost med točkama A in B je 300 V. Določite navpično komponento električne poljske jakosti v praznem prostoru, če je relativna dielektričnost vmesne plasti $\epsilon_r = 8$!

Podatki: $d_0 = d_2 = 2$ cm, $d_1 = 16$ cm.



Ker je polje v vsakem od prostorov homogeno, lahko napetost med točkama A in B zapišemo kot vsoto treh prispevkov $U_{AB} = E_{0y}d_0 + E_{1y}d_1 + E_{2y}d_2$. Mejni pogoj na mejah med plastmi predpisuje $\epsilon_r E_{1y} = E_{0y} = E_{2y}$. Sledi

$$E_{0y} = \frac{U_{AB}}{d_0 + \frac{d_1}{\epsilon_r} + d_2} = \underline{\underline{5 \text{ kV/m}}}.$$

Vprašanja za obnovo:

1. Kako je definirana relativna dielektričnost in kaj pomeni?
2. Kolikšne so tipične vrednosti relativne dielektričnosti?
3. Kakšna je fizikalna razlaga spremembe kapacitivnosti ob uporabi dielektrika pri a) konstantnem naboju med ploščama kondenzatorja in b) pri konstantni napetosti med ploščama?
4. Kako je definiran vektor polarizacije?
5. Čemu je enak vektor polarizacije na površini dielektrika?
6. Kakšna je povezava med električno poljsko jakostjo in vektorjem polarizacije?
7. Kako je definiran vektor gostote električnega pretoka? Zakaj je njegova vpeljava koristna (potrebna)?
8. Kakšna je zveza med gostoto električnega pretoka in jakostjo polja?
9. Dobro prouči primere nalog.
10. Mejni pogoj za normalno komponento polja.
11. Mejni pogoj za tangencialni komponenti polja.
12. Lomni zakon.
13. Polje na meji dielektrika in kovine.

22. Energija

Vsebina poglavja: Ponovitev dela in potencialne energije, energija naboja pri preletu polja, potencialna energija sistema nabojev, električna energija v polju kondenzatorja, energija sistema porazdeljenih nabojev, gostota energije, energija pri gibalnih procesih – sila.

Ponovitev: delo električnih sil, potencialna energija, napetost in potencial.

V tem poglavju bomo ponovili določena spoznanja iz poglavja 12 (Delo in energija) in jih nadgradili s celostnim pogledom na pojem energije v elektrostatiki. V poglavju 12 smo spoznali, da je delo električnih sil potrebno za premik naboja Q iz točke T_1 v točko T_2

$$A_e = A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = Q \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Električna napetost je enaka delu, ki jo enota pozitivnega naboja (1 C) opravi pri premiku iz točke T_1 v točko T_2

$$U = \frac{A_e}{Q} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Hkrati smo ugotovili, da je potencialna energija naboja enaka delu, ki ga opravi zunanja sila pri prenosu iz oddaljenosti (kjer je njegov potencial enak nič) do mesta, kjer se nahaja. Enakovredno lahko rečemo, da je ta energija enaka delu električnih sil za premik z mesta, kjer se nahaja do neskončnosti (kjer je potencial enak nič): $W(T) = A_e(T \rightarrow T_\infty)$. Ta definicija pa je hkrati definicija potenciala, le da je definirana s potencialno energijo enote

$$\text{naboja: } V(T) = \frac{A_e(T \rightarrow \infty)}{Q} = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Potencial na razdalji r od osamljenega točkastega naboja Q je $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Da bi na

razdaljo r od naboja Q pripeljali naboj Q_2 bi torej potrebovali energijo

$$W = Q_2 V = Q_2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

SLIKA: Delo električnih sil in potencialna energija.

Energija posameznega naboja pri preletu električnega polja.

Če se v električnem polju giblje le en naboj, se njegova potencialna energija poveča ali zmanjša za $\Delta W = Q\Delta V = QU$. Tak primer je na primer gibanje elektrona v električnem polju. Če preleti elektron v smeri polja napetost 20 kV, se bo njegova kinetična energija povečala na račun zmanjšanja potencialne za $\Delta W = QU = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 20 \text{ kV} = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}$. Pogosto namesto enote Joule pri zapisu

energije delcev uporabljamo enoto elektron-volt, kjer je $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. V tem smislu je kinetična energija delca po preletu polja 20 kV enaka $20 \cdot 10^3 \text{ eV}$ ali 20 keV .

SLIKA: Energija naboja pri preletu polja.

Potencialna energija sistema točkastih nabojev.

Vzemimo, da imamo prostor brez nabojev in torej brez električnega polja. Če želimo v ta prostor prenesti naboj, moramo opraviti delo. V električnem smislu za prenos prvega naboja (Q_1) ni potrebno vložiti nič dela, saj ni nobene električne sile na ta delec. Ko pa želimo v njegovo bližino prenesti naboj Q_2 , moramo za to opraviti delo, ki bo

$$A_{1\infty} = \int_{r_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}},$$

kjer je r_{12} razdalja med nabojema Q_1 in Q_2 .

SLIKA: Elektrenje prostora z vnašanjem nabojev.

Ko prenašamo tretji naboj, mora ta premagovati dvoje sil, tako na naboj Q_1 , kot na naboj Q_2 . Torej potrebujemo opraviti delo $\frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$, kjer sta r_{12} in r_{23} razdalji med nabojema Q_1 in Q_3 ter Q_2 in Q_3 . In tako dalje. To delo se shrani v obliki potencialne energije v pozicijah delcev. Potencialna energija sistema treh nabojev je torej

$$W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}.$$

Zapišimo to vsoto nekoliko drugače:

$$W = \frac{1}{2} Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} \right) + \frac{1}{2} Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) + \frac{1}{2} Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right).$$

Ugotovimo, da so vrednosti v oklepajih enake potencialom V_1 , V_2 in V_3 , kjer je V_1 potencial na mestu naboja Q_1 , ki ga povzročata naboja Q_2 in Q_3 . Enačbo torej lahko zapišemo v obliki:

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3.$$

Očitno bi lahko za sistem n nabojev zapisali potencialno energijo v obliki:

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 + \dots + \frac{1}{2} Q_n V_n,$$

oziroma na kratko

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i,$$

kjer je V_i je potencial na mestu naboja Q_i in ga zapišemo kot vsoto:

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{Q_j}{r_{ij}},$$

kjer so r_{ij} razdalje med nabojem Q_i in Q_j .

Primer: Določimo energijo sistema treh enako velikih nabojev $Q = 20$ nC, ki se nahajajo v ogliščih enakostraničnega trikotnika stranice $a = 10$ cm.

SLIKA: Sistem treh nabojev v ogliščih enakostraničnega trikotnika.

Izračun: Ker so naboji enako veliki in simetrično razporejeni, je tudi potencial na vseh mestih nabojev enako velik. Na mestu naboja Q_1 je enak:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2}{a} + \frac{Q_3}{a} \right) = 2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}. \text{ Energija sistema bo torej}$$

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 = 3 \cdot \frac{1}{2} Q_1 V_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} Q^2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}, \text{ in številčno}$$

$$W = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \cdot \frac{3 \cdot (20 \cdot 10^{-9} \text{C})^2}{0,1 \text{ m}} = \underline{\underline{108 \mu\text{J}}}.$$

Primer: Koliko dela moramo vložiti za premik naboja iz enega oglišča v sredino med druga dva naboja?

Izračun: Vzemimo zgornji naboj (označen kot Q_3) in ga premaknimo med Q_1 in Q_2 . Delo bi lahko določili iz osnovne formule za izračun dela, torej kot $A_e = Q_2 \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, kjer je E polje na mestu naboja Q_2 . Izračunati bi morali polje na mestu naboja (kar v konkretnem

primeru ne bi bilo ravno zahtevno) in ga integrirati po poti. Še bolj enostavno pa je določiti delo iz razlike potencialnih energij sistema pred in po premiku:

$$A(T_1 \rightarrow T_2) = W(T_1) - W(T_2) = W_{\text{začetna}} - W_{\text{končna}}.$$

Energijo v začetni legi smo že določili, preostane še izračun v končni legi $W(T_2)$.

$$\begin{aligned} W(T_2) = W_{\text{končna}} &= \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 = 2 \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 = \\ &= Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a/2} \right) + \frac{1}{2} Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a/2} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a/2} \right) = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{2Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{5Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \end{aligned}$$

Energija sistema se bo po premiku očitno povečala, torej bo delo negativno. To pomeni, da ga bodo morale opraviti zunanje sile. To delo bo enako

$$A = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{5Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{2Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \underline{\underline{-72 \mu\text{J}}}.$$

Energija v polju kondenzatorja.

Tako kot smo potrebovali določeno energijo, da smo v prostor pripeljali naboje, je potrebna določena energija, da naelektrimo kondenzator. V najpreprostejši obliki si lahko kondenzator predstavljamo kar kot dve prevodni telesi. Med njiju priključimo vir napetosti in povečujemo napetost. Z večanjem napetosti med telesoma, se povečuje tudi naboj na telesoma. Pač skladno z enačbo $Q = CU$. Vzemimo sedaj (diferencialno) majhen naboj dQ in ga premaknimo iz enega telesa na drugega, pri čemer je napetost med telesoma U . Spememba energije bo enaka $dW = dQ \cdot U$. Napetost lahko izrazimo tudi z

nabojem in kapacitivnostjo, tako da je diferencial energije enak $dW = \frac{Q}{C} \cdot dQ$. Celotno

energijo, ki smo jo pridobili z elektrenjem kondenzatorja dobimo z integracijo naboja od začetnega (0), do končnega $Q_{\text{končni}}$:

$$W = \int_0^{Q_{\text{končni}}} \frac{Q}{C} \cdot dQ = \frac{Q_{\text{končni}}^2}{2C}.$$

SLIKA: Elektrenje kondenzatorja in graf povečevanja naboja na kondenzatorju z večanjem napetosti med elektrodama.

To je energija v naelektrenem kondenzatorju, ki jo lahko izkoristimo v različne namene. Ni pa nujno, da je to tudi celotna energija, ki jo lahko koristno uporabimo. Del energije se

ob razelektritvi lahko porabi tudi znotraj kondenzatorja (baterije) - na njeni notranji upornosti.

Enačbo lahko s pomočjo zveze $Q = CU$ zapišemo tudi v obliki

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}$$

Primer: Določimo energijo v zračnem ploščnem kondenzatorju kapacitivnosti 20 nF, ki je priključen na enosmerni vir napetosti 60 V. Za koliko procentov se spremeni energija shranjena v kondenzatorju, če razdaljo med ploščama razpolovimo?

Izračun: Električna energija shranjena v kondenzatorju je

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{20 \text{ nF} \cdot (60 \text{ V})^2}{2} = \underline{\underline{36 \mu\text{J}}}$$

Iz enačbe za kapacitivnost ploščnega kondenzatorja $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ ugotovimo, da zmanjšanje razdalje med ploščama za polovico predstavlja zvečanje kapacitivnosti za 2x, kar pomeni, da se bo energija povečala za 2x, na 72 mJ, torej za 100%.

Dodatno: Za koliko procentov se bo spremenila energija v kondenzatorju, če pred zmanjšanjem razdalje med ploščama kondenzatorja za polovico odklopimo kondenzator od vira napajanja?

Izračun: Sedaj se ohranja naboj, ki ga je pred odklopom $Q = CU = 20 \text{ nF} \cdot 60 \text{ V} = 1,2 \mu\text{C}$, enako pa tudi po preklopu, saj se naboj ohranja. Torej bo ob 2x večji kapacitivnosti ob premiku energija enaka $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(1,2 \mu\text{C})^2}{2 \cdot 2 \cdot 20 \text{ nF}} = \underline{\underline{18 \mu\text{J}}}$. Energija v kondenzatorju se bo

očitno zmanjšala za 2x. Zakaj? Med pozitivno in negativno naelektreno ploščo deluje sila, ki plošči privlači. Če ne bi delovale druge sile (težnosti, lepenja), bi se plošči združili, naboji bi se razelektrili in energija bi se pretvorila v drugo obliko (recimo toplotno). Torej se energija sistema manjša z zmanjševanjem razdalje med elektrodama.

Dodatno: V zračni kondenzator vstavimo dielektrik z relativno dielektrično konstanto 10. Za koliko se poveča energija v kondenzatorju pri ohranitvi priključene napetosti 60 V ali pri konstantnem naboju 1,2 μF .

Izračun: V skladu z izrazom $C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$ se kapacitivnost kondenzatorja poveča za 10x. V skladu s tem se energija v kondenzatorju pri priključeni napetosti poveča za 10x, v primeru konstantnega naboja pa se zmanjša za 10x.

Vprašanje: Kako razložimo povečanje oz. zmanjšanje energije pri vstavitvi dielektrika?

SLIKA: Energija v kondenzatorju z dielektrikom in brez dielektrika.

Dodatno: Koliko je energija v kondenzatorju, če pri priključenosti napetosti vstavimo vanj dielektrični listič debeline, ki je enaka polovici razdalje med elektrodama in ima relativno dielektričnost 6?

Izračun: Spremeni se kapacitivnost $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ in sicer tako, da imamo sedaj zaporedno vezavo dveh kapacitivnosti $C_{zraka} = \varepsilon_0 \frac{A}{d/2}$ in $C_{diel} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d/2}$, torej je $C_{diel} = 6 \cdot C_{zraka}$ in nadomestna kapacitivnost $C_{nad} = \frac{C_{diel} \cdot C_{zraka}}{C_{diel} + C_{zraka}} = \frac{6C_{zraka} \cdot C_{zraka}}{6C_{zraka} + C_{zraka}} = \frac{6}{7} C_{zraka} = \frac{6}{7} 2 \cdot C = \frac{12}{7} C$.

Kapacitivnost kondenzatorja je po vložitvi dielektrika približno 2x večja (za 12/7) od začetne kapacitivnosti. Ker je priključena napetost fiksna, bo energija po vložitvi lističa

večja od prvotne za 12/7 in bo enaka $W = \frac{\frac{12}{7} C \cdot U^2}{2} = \underline{\underline{61,71 \text{ mJ}}}$. Pred vložitvijo

dielektričnega lističa pa je bila energija v kondenzatorju 36 μJ . Zakaj se je energija povečala? Ko vstavimo dielektrik med plošči kondenzatorja, se na površini kondenzatorja poveča naboj (ki pride iz vira), ki kompenzira zmanjšanje polja v dielektriku zaradi polarizacije dielektrika.

Dodatno: Kaj pa, če pred vstavitvijo dielektrika odklopimo vir? V tem primeru se bo na ploščama kondenzatorja ohranil naboj (ne bo se povečal), kapacitivnost pa se bo povečala kot smo že izračunali – za 12/7. Energija pa se bo posledično zmanjšala, kar

sledi iz $W = \frac{Q^2}{2 \cdot \frac{12}{7} C}$, torej za 7/12.

Določitev kapacitivnosti iz energije v kondenzatorju.

Pogosto se gornji izraz uporabi tudi za določitev kapacitivnosti. Če torej znamo energijo ob znani napetosti med elektrodama v kondenzatorju določiti na nek drug način, potem

lahko izračunamo kapacitivnost iz $C = \frac{2W}{U^2}$.

Energija elektrostatičnega sistema porazdeljenih nabojev.

Poslužimo se izraza iz prejšnjega odstavka, pri čemer zamenjamo napetost U za potencial V , ki je potencial na mestu diferencialno majhnega naboja dQ :

$$dW = dQ \cdot V.$$

Z integracijo po vseh nabojih in upoštevanju potenciala na mestu teh nabojev je energija elektrostatičnega sistema enaka

$$W = \int_{\text{po vseh } Q\text{-jih}} V dQ,$$

kjer lahko pišemo tudi $dQ = \rho \cdot dV$ in

$$W = \int_V V_{el} \rho dV.$$

Nerodnost te enačbe je, da uporabljamo enak simbol za volumen in potencial. Da bi to razmejili, smo v zadnji enačbi zapisali potencial kot V_{el} .

Gostota energije in energija polja.

Do sedaj smo izračunavali električno energijo iz kapacitivnosti, naboja in napetosti. Ker je vez med napetostjo in nabojem električna poljska jakost, mora obstajati tudi povezava med energijo in jakostjo polja. Vzemimo primer naelektrene kroglice z nabojem Q , ki je na potencialu V . Električna energija, potrebna, da smo zbrali skupaj ta naboj, je enaka $W = \frac{1}{2} QV$.

SLIKA: Energija v polju naelektrene kroglice.

V tem smislu bi za postavitev dela naboja pri določenem potencialu potrebovali energijo $dW = \frac{1}{2} V dQ$. dQ lahko izrazimo z uporabo Gaussovega zakona $E \cdot dA = dQ / \epsilon_0$. Diferencial energije pa zapišemo v obliki $dW = \frac{1}{2} V (\epsilon_0 E dA)$. Poleg tega zapišemo diferencial potenciala kot $dV = E dl$, od koder lahko za diferencial energije zapišemo $dW = \frac{1}{2} E \cdot dl (\epsilon_0 E dA)$ in ker je diferencial volumna enak $dV = dA \cdot dl$ je $dW = \frac{1}{2} E \epsilon_0 E dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV$. Z integracijo po volumnu pa dobimo celotno energijo sistema:

$$W = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV$$

Izraz v integralu lahko prepoznam kot **gostoto energije** in ga tako tudi poimenujemo ter uporabimo simbol w :

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Enota je energija na volumen, torej J/m^3 .

Enačba za energijo, ki smo jo zapisali, velja za polje v vakuumu oz. zraku. Če imamo polje v dielektriku, bi do izraza za energijo prišli na podoben način, le z uporabo Gaussovega zakona za dielektrike. V tem smislu bi dobili za energijo

$$W = \int_{Vol} \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot dV,$$

za diferencial energije pa

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2.$$

Bolj splošen izraz, ki pa ga ne bomo izpeljevali je $w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ oziroma za diferencial gostote energije.

$$dw = \vec{E} \cdot d\vec{D}$$

Primer: Določimo izraz za energijo ploščnega kondenzatorja površine plošč A in razdalje med ploščama d z uporabo enačbe $W = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 dV$.

Izračun: $E = \frac{U}{d},$

$$\begin{aligned} W &= \int_{Vol} \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \int_V dV = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 V = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \frac{U^2}{d} \cdot A = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \cdot U^2 = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \end{aligned}$$

Dobimo seveda enak izraz kot smo ga že izpeljali za energijo v polju kondenzatorja. Razlika je le v tem, da znamo sedaj ugotavljati tudi energijo shranjeno v električnem polju, izraženo z gostoto električne energije, ta pa je sorazmerna kvadratu električne poljske jakosti.

Gibalni procesi – sila med na telesa.

1) Primer gibalnih procesov naelektrenih teles brez priključenega vira napetosti.

Vzemimo sistem dveh naelektrenih teles z naboji $+Q$ in $-Q$. Energija shranjena v električnem polju je enaka $W_e = \frac{QU}{2}$. Če dopustimo, da se eno od teles premakne v smeri

drugega za neko majhno razdaljo dl , pri tem opravi delo $dA = \vec{F}_e \cdot d\vec{l}$. To delo se je opravilo na račun zmanjšanja električne energije sistema, saj mora veljati, da je vsota opravljenega dela in zmanjšane električne energije enaka nič: $dW_e + dA = 0$. Če izrazimo delo le v smeri X , bo veljalo: $F_{e,x} \cdot dx = -dW_e$ in torej

$F_{e,x} = -\frac{dW_e}{dx}$. Če se razmere spreminjajo tudi v drugih smereh, je bolj korektno uporabiti parcialni odvod:

$$F_{e,x} = -\frac{\partial W_e}{\partial x}.$$

Enako lahko določimo tudi silo v drugih smereh. V splošnem je torej sila enaka

$$\vec{F}_e = \left(-\frac{\partial W_e}{\partial x}, -\frac{\partial W_e}{\partial y}, -\frac{\partial W_e}{\partial z} \right).$$

SLIKA: Sila na naelektreno telo.**2) Primer gibalnih procesov pri priključenih napetosti.**

V tem primeru je potrebno v energijsko bilanco vključiti tudi energijo, ki pride ali se vrne v vir. Torej bo spremembe energije polja in dela premika enaka spremembi energiji vira:

$$dW_e + \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = dA_g,$$

kjer smo z dA_g označili spremembo energije vira.

Če se bosta telesi ob priključenih napetosti oddaljili za majhno razdaljo, bi se med njima povečala kapacitivnost, zato se bo tudi povečal naboj med telesoma za dQ . Ta naboj bo prišel iz vira na račun opravljenega dela $dA_g = dQU$. Zaradi povečanja naboja med

telesoma se bo povečala tudi energije v polju: $dW_e = \frac{U}{2}(Q + dQ) - \frac{U}{2}dQ = \frac{U}{2}dQ$.

Velja torej:

$$\frac{U}{2}dQ + \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = dQU,$$

torej je

$$\vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \frac{dQU}{2} = dW_e \text{ od koder sledi}$$

$$\vec{F}_e = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}, \frac{\partial W_e}{\partial y}, \frac{\partial W_e}{\partial z} \right).$$

Ugotovimo lahko, da se bo ob premiku naboja v polju pri konstantni napetosti polovico dela generatorja porabilo za premik, druga polovica pa za gradnjo električnega polja. Lahko pa je tudi obratno, da vir deluje kot porabnik, torej, da dobi energijo iz gibalnega procesa, na primer, če bi se nasprotno naelektrena naboja približevala.

Silo med telesoma je najlažje določiti iz povezave med energijo in kapacitivnostjo....

Primeri iz kolokvijskih in izpitnih nalog:**Primer: Izpit (UNI) 3.12.2001**

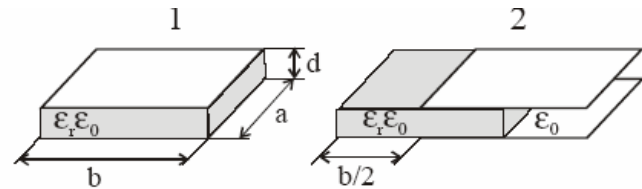
3. Med nadzemni vodnik polmera $\rho_0 = 2 \text{ cm}$ in dolžine $l = 10 \text{ km}$, ki je obešen na višini $h = 10 \text{ m}$, ter zemljo priključimo napetost $U = 150 \text{ kV}$. Kolikšna je električna energija, ki je akumulirana v električnem polju?

3.

$$W_e = \frac{qlU}{2} \quad ; \quad U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln 2h/\rho_0 \Rightarrow q = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\ln 2h/\rho_0} \quad ; \quad W_e = \frac{\pi\epsilon_0 l U^2}{\ln 2h/\rho_0} = \boxed{906 \text{ J}}$$

Primer: Kolokvij 21.1.2002.

2. Ploščati kondenzator je priključen na napetostni vir U . Za kolikšen % se spremeni elektrostatična energija shranjena v polju ploščatega kondenzatorja, če dielektrik z relativno dielektričnostjo $\epsilon_r = 2$ izvlečemo za $b/2$ (glej skico)?



2.

$$1: W_1 = \int_{V_1} w dV = \int_{V_1} \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 \int_0^b dx \int_0^a dy \int_0^d dz = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 U^2 ab}{d} \epsilon_r$$

$$2: W_2 = \int_{V_2} w dV = \int_{V_2} \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 \int_0^{b/2} dx \int_0^a dy \int_0^d dz + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 \int_{b/2}^b dx \int_0^a dy \int_0^d dz = \frac{1}{4} \frac{\epsilon_0 U^2 ab}{d} (\epsilon_r + 1)$$

Odgovor: energija se zmanjša za 25%.

Vprašanja za obnovo:

1. Kolikšna je potencialna energija naboja pri preletu električnega polja?
2. Kako izračunamo potencialno energijo sistema točkastih nabojev?
3. Kakšna je povezava med potencialno energijo in delom električnih sil?
4. Kako določimo električno energijo v kondenzatorju?
5. Kako določimo elektrostatično energijo sistema porazdeljenih nabojev?
6. Kako je določena gostota energije?
7. Izračun energije iz gostote energije.
8. Kako določimo silo med naelektrenima telesoma brez in z priključeno napetostjo?

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:

izpit, 8. marec 2005
 izpit, 4. februar 2005
 izpit, 16. januar 2007
 Izpit, 4. 6. 2007
 2. kolokvij, 17. 01. 2002
 Izpit, 02. 09. 2005
 Izpit, 20. aprila 2005
 izpit, 6. junij 2001

23. Kondenzator

Vsebina poglavja: kondenzator kot naprava za shranjevanje naboja, kot naprava za shranjevanje električne energije, pomembne lastnosti kondenzatorjev, aplikacije kondenzatorjev.

Kondenzator kot naprava za shranjevanje naboja.

Kondenzator je naprava za shranjevanje naboja. Večja kot je napetost med ploščama (elektrodama), večja količina naboja se nakopiči na elektrodah. Konstanto sorazmernosti imenujemo kapacitivnost: $Q = CU$. Večja kot je kapacitivnost, več naboja lahko shranimo.

V začetnih raziskavah električnih pojavov pojma kondenzatorja niso poznali. Naboj so ločevali z ročno gnanimi elektrostaticnimi napravami, ki so z inventivnimi načini ločevale naboje in jih običajno kopičile na dveh ločenih prevodnih kroglih. Tipični primer je Whimshurstov elektrostaticni generator. Če so bile krogle blizu, na primer ne več kot nekaj centimetrov, je ob primernih pogojih kopičenja naboja med krogla preskočila iskra. Torej je morala biti ob krogli dosežena preboja trdnost zraka. Vzemimo kar skrajni primer osamljene naelektrene krogle polmera 2 cm. Preboja trdnost bo dosežena pri elektirčni poljski jakosti 3 MV/m, od koder izračunamo naboj pri preboju $E_{\text{preb}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$ od koder sledi $Q = 133,5 \text{ nC}$. Napetost bo

tedaj $V(E_{\text{preb}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = E_{\text{preb}} r_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m} \cdot 0,02 \text{ m} = 60 \text{ kV}$. Seveda druge elektrode ne moremo imeti v neskončnosti, lahko pa je večjega polmera in dovolj daleč. Vsekakor večje napetosti od 60 KV ne moremo doseči. Določimo lahko tudi kapacitivnost v primeru, da je druga elektroda v neskončnosti $C = 4\pi\epsilon_0 r_n \approx 2,2 \text{ pF}$. To je precej mala kapacitivnost. Torej med elektrodama v obliki kovinskih krogel ne moremo shraniti večje količine naboja. Ta količina je omejena s prebojno trdnostjo. Lahko pa povečamo polmer krogle, kot smo to videli pri izgradnji Van de Graffovih generatorjev, kjer sta imeli krogle 7 MV generatorja polmera 4,6 m.

Spodaj je del tabele iz Electrical Engineering Reference Book, kjer pa so podane prebojne napetosti med dvema sferama enakega polmera. Ugotovimo, da so prebojne napetosti seveda manjše, kot smo jo izračunali teoretično.



Superkondenzator (ali ultrakondenzator) podjetja Maxwell ima kapacitivnost 3000 F in omogoča napetosti 75 V. www.maxwell.com

Table 7.5 Sphere-gap breakdown voltages (kilovolts at peak)*; BS 358:1960

Gap (mm)	Sphere diameter			
	0.02	0.0625	0.125	0.25
0.5	2.8	—	—	—
1	4.7	—	—	—
1.5	6.4	—	—	—
2	8.0	—	—	—
4	14.4	14.2	—	—
5	17.4	17.2	16.8	—
6	20.4	20.2	19.9	—
8	25.8	26.2	26.0	—
10	30.7	31.9	31.7	31.7
15	(40)	45.5	45.5	45.5
20	—	58.5	59.0	59.0
30	—	79.5	85.0	86.0
40	—	(95)	108	112
50	—	(107)	129	137
100	—	—	(195)	244
150	—	—	—	(314)

SLIKA: Insert tabelo iz Electrical Engineering Reference Book

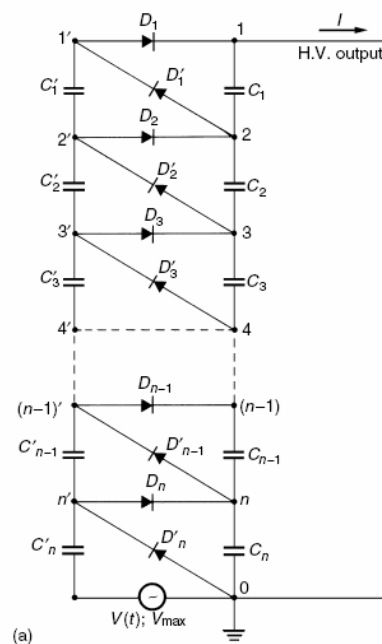
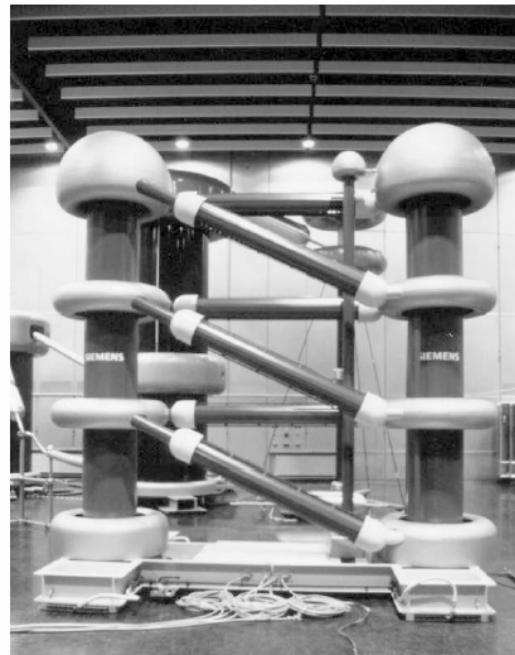


Figure 2.3 (a) Cascade circuit according to Cockcroft–Walton or Greinacher. (b) Waveform of potentials at the nodes, no load



SLIKA: Kaskadno vezje za zvišanje napetosti, tipična uporaba do 200 kV. Cockroft-Waltonov CD generator na ETH (Švica) 900kV/10mA.

Prve večje vrednosti kapacitivnosti so dosegli z uporabo steklenice, tako imenovane **Leidenske flaše**, po kraju Leiden na Nizozemskem leta 1745. Zaslužen za inovacijo »flaše« je profesor Pieter van Musschenbroek (1692 – 1791). Hkrati je do podobnih ugotovitev prišel tudi Ewald Georg von Kleist v Nemčiji. Notranjost in zunanost flaše je bila delno prekrita s prevodnikom, steklenica pa je delovala kot dielektrik. Vzemimo hipotetičen primer steklenice premera 8 cm s 3 mm debelo steno. Znotraj

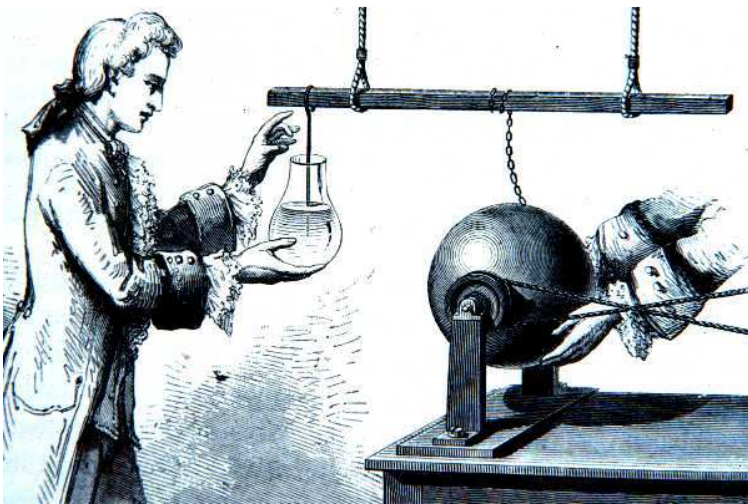


Pieter van Musschenbroek
(1692 – 1791)

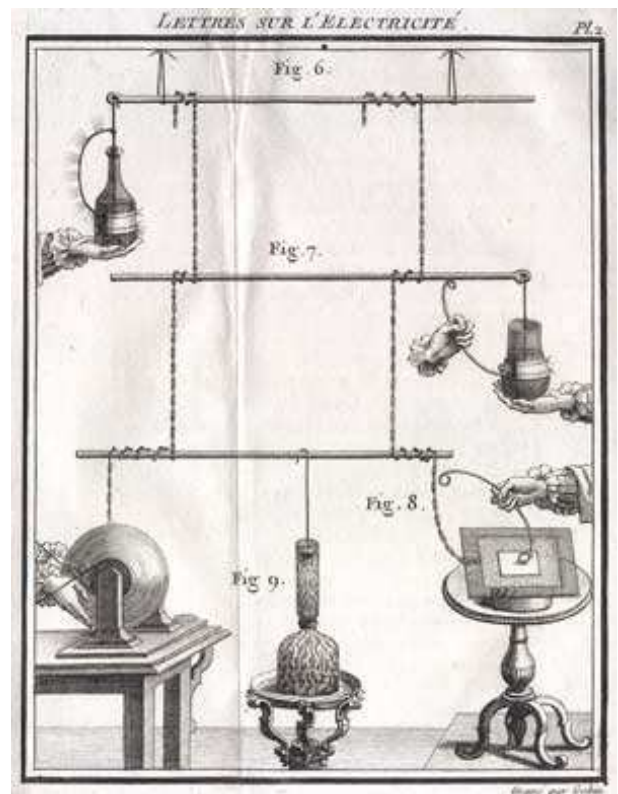
steklenice naj bo voda nalita do višine 15 cm, zunaj pa je prekrita s prevodnikom (aluminijasto folijo). Relativna dielektričnost stekla naj bo 10. Kapacitivnost flaše je

$$C \approx \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = 10 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{2\pi \cdot 0,08 \text{ m} \cdot 0,15 \text{ m}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 742 \text{ pF}.$$

V primerjavi s kapacitivnostjo kovinske kroglice je to že kar solidna kapacitivnost. To veliko odkritje je prineslo tudi nekaj več previdnosti pri uporabi. Razelektritev naboja iz flaše z dotikom namreč ni več tako »nedolžna«. Je pa doprinesla k razvoju znanosti, saj je bilo šele z Leidensko flašo mogoče nakopičiti in shranjevati večjo količino naboja. Naslednja prav tako pomembna in znamenita inovacija je bila Voltina baterija. Volta je med drugim tudi predlagal uporabo imena kondenzator. V tedanjem času sta bili to vsekakor zelo pomembni invaciji, primerljivi z današnjimi dosežki nagrajenimi z Nobelovimi nagradami.



SLIKA: Primer eksperimentov v zgodovini: Na desni preprost elektrostatični generator (ročno gnana steklena krogla, naboj se ločuje z roko, ki na eni strani trsa ob kroglo, na drugi strani pa drži prevodno verigo.



SLIKA: Prve slike uporabe Leidenske flaše.



SLIKA: Primer Leidenskih flaš. Desno elektroskop.

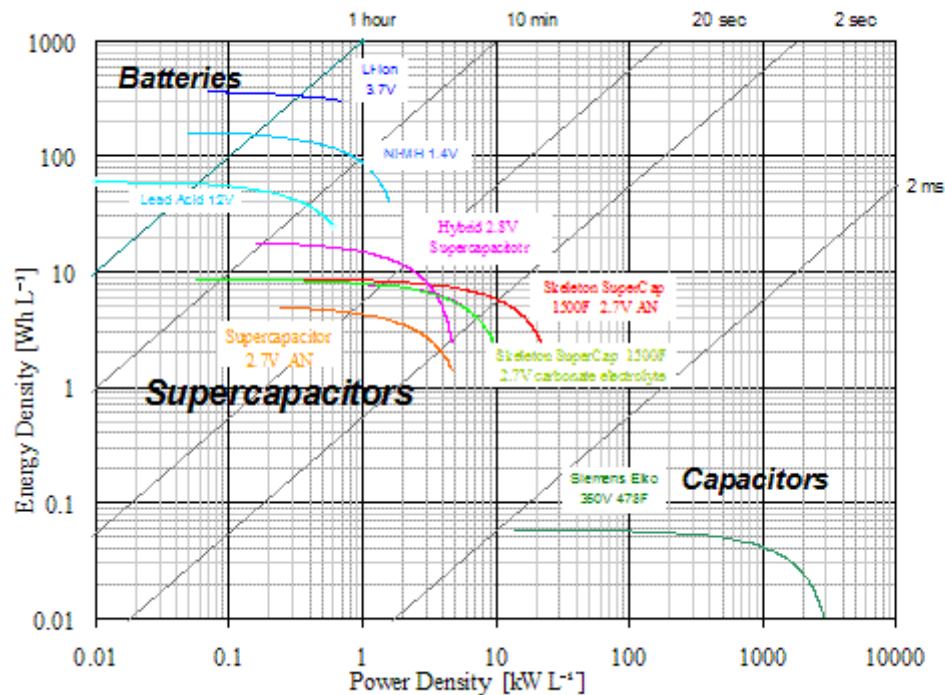
Kondenzator kot naprava za shranjevanje električne energije.

Še bolj pomembna kot količina shranjenega naboja je količina shranjene električne energije. Za električno energijo v kondenzatorju je pomemben produkt naboja in napetost med elektrodama $W = \frac{1}{2}QU$.

Vzemimo primer osamljene kovinske kroglice polmera 2 cm, ki je maksimalno naelektrena, toliko, da električno polje na površini doseže brebojno trdnost. Izračunali smo naboj 133,5 nC in napetost 60 kV. Shranjena energija bo enaka $W = \frac{QU}{2} = \frac{133,5 \text{ nC} \cdot 60 \text{ kV}}{2} = 4 \text{ mJ}$.

Vzemimo za primerjavo kondenzator povprečno velike kapacitivnosti 1 μF in nanj priključimo napetost 100V. Energija shranjena v kondenzatorju je $W = \frac{CU^2}{2} = \frac{1 \mu\text{F} \cdot (100 \text{ V})^2}{2} = 5 \text{ mJ}$. Torej je v kondenzatorju velikem za palec ali tudi dosti manj shranjeno enako veliko energije, kot med osamljeno naelektreno kroglo polmera 2 cm pri prebojni napetosti.

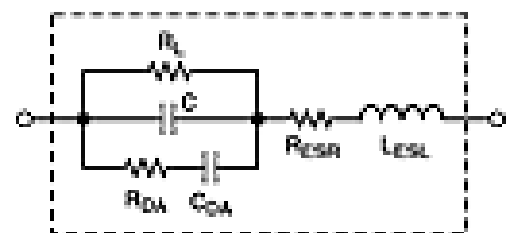
Poleg uspešnosti shranjevanja energije je pomembno tudi to, kako hitro lahko to energijo kondenzator sprazni. Na primer, elektrolitske baterije zelo uspešno shranjujejo veliko količino energije, je pa ne morejo hitro izkoristiti. Na drugi strani so elektrolitski kondenzatorji, ki so majhnih dimenzij, so nekoliko manj učinkoviti v smislu gostote shranjene energije, se pa lahko njihov shranjen naboj zelo hitro razelektri. Vez med baterijami in elektrolitskimi kondenzatorji so t.i. superkondenzatorji ali ultrakondenzatorji, ki ne omogočajo visokih napetosti, imajo pa izredno visoke kapacitivnosti (več sto faradov) in so trenutno posebno primerni za vmesno shranjevanje energije.



SLIKA: Primerjava med različnimi tipi kondenzatorjev, baterijami in superkondenzatorjem. Elektrolitski kondenzatorji omogočajo razelektritev velikih tokov vendar v zelo kratkem času. Baterije omogočajo shranjevanje velike količine energije vendar jo ne morejo zelo hitro izkoristiti. Superkondenzatorji so vez med navadnimi kondenzatorji in baterijami. Omogočajo relativno velike toke razelektritve v precej daljšem času kot navadni kondenzatorji. Vir: Skeleton Supercaps.

Pomembne lastnosti kondenzatorjev.

Kondenzatorji imajo v idealnem smislu le kapacitivne lastnosti in so idealni izolatorji. V resnici pa idealnih lastnosti ni mogoče doseči. Neidealne električne lastnosti prikažemo z nadomestno shemo realnega kondenzatorja, ki je v osnovi vzporedna vezava kondenzatorja z uporom R_P in zaporedno z induktivnostjo L_S in upornostjo R_S .



SLIKA: Nadomestna shema realnega kondenzatorja. (po Analog Devices)

Pri različnih aplikacijah je pomembna različna lastnost. Na primer, izgubna (vzporedna R_P) upornost je pomembna v aplikacijah pri izmeničnih tokih in aplikacijah, kjer je pomembno natančno shranjevanje naboja, kot na primer za integratorje ali »sample-hold« vezja ali ko jih uporabljamo pri visokih frekvencah. Elektrolitski (tantalove ali aluminijasti) kondenzatorji dosegajo visoke kapacitivnosti vendar zaradi slabe izolacije tudi velike izgubne toke, na primer 5 – 20 nA na μF . V omenjene namene je bolje uporabiti »plastične« kondenzatorje: polipropilenske ali polistirenske.

Zaporedna (ang. equivalent series resistance) upornost R_S je pomembna pri aplikacijah z velikimi tokovi, saj se na kondenzatorjih z veliko serijsko upornostjo porablja velika (izgubna) moč. Kondenzatorji z majhno R_S so iz filmov ali iz sljude (ang. mica).

Serijska induktivnost je tudi lahko problematična pri visokih frekvencah. Elektrolitski, papirni in plastični kondenzatorji niso primerni za visokofrekvenčne aplikacije, saj so večinoma sestavljeni iz dveh kovinskih plasti ločenih s plastjo dielektrika in zviti v svitke. Za visokofrekvenčne aplikacije so primerni keramični kondenzatorji.

Pomemben podatek je faktor disipacije (polnilni faktor), ki predstavlja razmerje energije, ki jo kondenzator potroši z energijo, ki jo shrani.

Dielektrična absorpcija nam pove histerezne lastnosti kondenzatorja. Torej, kako je ponovljivo elektrenje kondenzatorja brez efekta spomina.

Tipi kondenzatorjev. Dandanes so tudi kondenzatorji precej drugačni. poznamo jih veliko različnih tipov, iz različnih materialov, dimenzij, oblik z zelo različnimi električnimi (in mehanskimi) lastnostmi. Pa si jih oglejmo nekaj:

- 1) Elektrolitski kondenzatorji imajo med elektrodama elektrolite, ki omogočajo dober stik z elektrodama, visoko dielektričnost. Uporabljajo se elektrode iz aluminija z dodano tanko oksidacijsko membrano. Ta povzroči veliko kapacitivnost kondenzatorja ($C \sim \varepsilon \frac{A}{d}$), pa tudi to, da je polariziran, kar



pomeni, da ga lahko obremenimo le tako, da je ena od sponk vedno bolj pozitivna od druge. V nasprotnem primeru postane neuporaben oziroma nevaren, saj lahko eksplodira. Ti kondenzatorji so ceneni in se pogosto uporabljajo, recimo kot filtri. Ker se kondenzator lahko pokvari, če je obremenjen z višjo napetostjo kot je nazivna, je v praksi modro uporabiti kondenzator z dvakrat višjo nazivno napetostjo, kot je potrebna. Njihove prednost je predvsem velika kapacitivnost (cenenost), ki je posledica uporabe tanke izolacijske plasti dielektrika in visoka napetost določena s prebojno trdnostjo dielektrika. Pomankljivost pa je neidealna karakteristika zaradi polprevodniških lastnosti kombinacije prevodnika in oksida, relativno velika upornost, slabša visokofrekvenčna karakteristika in manjša življenska doba (v primerjavi z drugimi tipi kondenzatorjev).

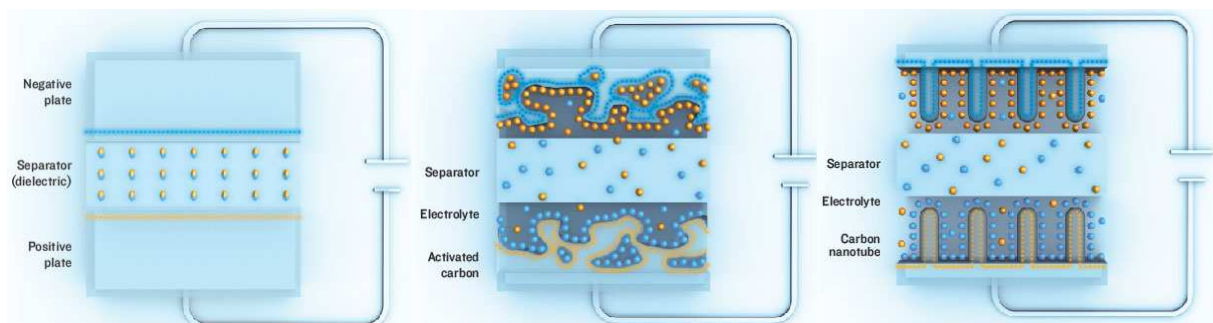


- 2) Posebni tip elektrolitskega kondenzatorja je tantalov elektrolitski kondenzator. Namesto aluminijaste elektrode ima tantalovo, oziroma iz tantalovega pentoksida. Ima boljše električne lastnosti kot »navadni« elektrolitski kondenzatorji, predvsem glede temperaturnih in frekvenčnih karakteristik. So pa nekoliko dražji kot »navadni«.
- 3) Poliesterski film: ti kondenzatorji uporabljajo kot dielektrik plast poliesterskega filma. So poceni, temperaturno stabilni in se pogosto uporabljajo.
- 4) Polipropilenski kondenzator: uporabimo, ko so zahteve po tolerancah večje. Do frekvence 100 kHz imajo zelo majhne tolerance (1%).
- 5) Polistirenski kondenzator: so izdelani kot koluti in niso primerni za visoke frekvence. So uporabni za aplikacije do nekaj sto kilohercov.
- 6) Metalizirani poliesterski: imajo boljše lastnosti od

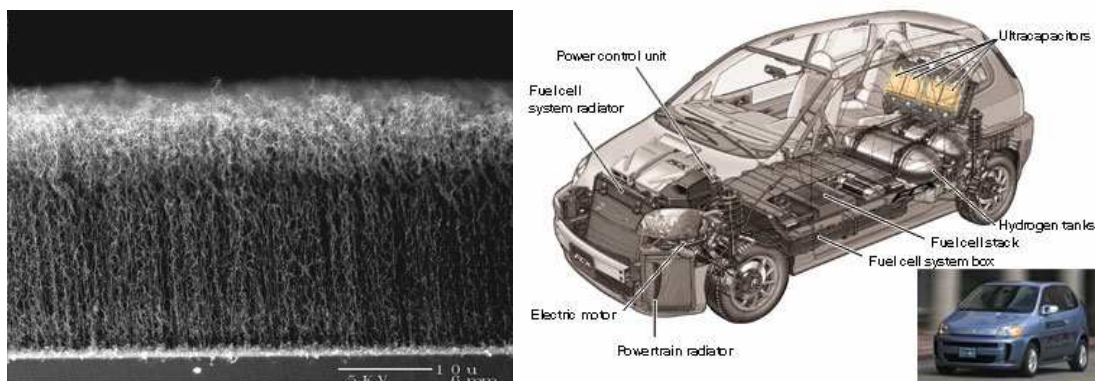


navadnih poliesterskih. So dimenzijsko majhni.

- 7) Epoksi:
- 8) Keramični: izgledajo kot mali diski in niso izdelani v zavitkih, zato imajo dobre frekvenčne karakteristike in jih uporabljamo za visokofrekvenčne aplikacije. Na primer za filtriranje visokofrekvenčnih motenj.
- 9) Nastavljivi kondenzatorji (trimerji): vsebujejo lahko keramični ali plastični dielektrik.
- 10) Nastavljivi zračni kondenzatorji: uporabljajo zrak kot dielektrik. Običajno jih najdemo v radijih.
- 11) Superkondenzatorji: imajo izrazito veliko kapacitivnost, na primer 0,47 F, kljub temu pa so majhnih dimenzij. Te lastnosti je mogoče doseči z uporabo električnega dvojnega sloja. Zapolnjujejo vrzel med baterijami, ki sicer shranjujejo velike količine naboja, ne morejo pa se hipno izprazniti in »klasičnimi« kondenzatorji, ki omogočajo hitre naelektritve in razelektritve vendar relativno majhno kapacitivnost (gostoto energije). Ultrakondenzatorji trenutno omogočajo gostote energij velikosti 30 Wh/kg, se pa ta vrednost z izboljšavo tehnologije stalno povečuje. Poleg tega v primerjavi s klasičnimi baterijami ultrakondenzatorji omogočajo zelo veliko ciklov praznjenja in polnenja in ne izgubijo svojih lastnosti niti po daljšem času izpraznitve. Za primerjavo dosežejo klasične svinčeve baterije energijsko gostoto 30 Wh/kg, litij-ionska baterija pa 120 Wh/kg. Hkrati pa je kalorična vrednost bencina 12000 Wh/kg.



SLIKA: Razlika med klasičnim tipom »ploščnega« kondenzatorja in ultrakondenzatorji je v veliki površini elektrod, ki jih pri ultrakondenzatorjih uspemo doseči s tehnologijo poroznega ogljika, v novejšem času pa z uporabo ogljikovih nanocevk. Vir: <http://www.spectrum.ieee.org/print/5636>



SLIKA: Prerez elektrode ultra-kondenzatorja, izdelanega iz ogljikovih nanocevk. Na ta način se izjemno poveča površina kondenzatorja in s tem kapacitivnost. Vir:

<http://www.spectrum.ieee.org/print/5636>.
ultrakondenzatorjev v avtu: Honda FCX.

Na desni, možnosti uporabe

CAPACITOR COMPARISON CHART

TYPE	TYPICAL DIELECTRIC ABSORPTION	ADVANTAGES	DISADVANTAGES
NPO ceramic	<0.1%	Small case size Inexpensive Good stability Wide range of values Many vendors	DA generally low, but may not be specified Limited to small values (10 nF)
Polystyrene	0.001% to 0.02%	Low inductance Inexpensive Wide range of values Good stability	Damaged by temperature > +85° C Large values High inductance
Polypropylene	0.001% to 0.02%	Low inductance Inexpensive Wide range of values Good stability	Damaged by temperature > +105° C Large values High inductance
Teflon	0.003% to 0.02%	Low inductance Good stability Operational above +125° C Wide range of values	Relatively expensive size Large values High inductance
MOS	0.01%	Good stability Small case size Operational above +125° C Low inductance	DA Limited Available only in small capacitance values
Polycarbonate	0.1%	Good stability Low inductance Wide temperature range	Large values costDA limits to 8-bit applications
Polyester	0.3% to 0.5%	Moderate stability Low inductance Wide temperature range	Large values costDA limits to 8-bit applications
Monolithic (High K)	ceramic >0.2%	Low inductance (stacked film) Wide range of values	inductancePoor Poor stability High voltage coefficient
Mica	>0.003%	Low loss at HF Low inductance Very stable Available in 1% values or better	Quite expensive Low values (<10 nF)
Aluminum electrolytic	High	Large values High currents High voltages Small size	High leakage Usually polarized Poor stability Poor accuracy
Tantalum electrolytic	High	Small case size Large values Medium inductance	Quite expensive Usually polarized Expensive Poor stability Poor accuracy

SLIKA: Primerjalna tabela lastnosti kodenatorjev. Po: Analog Devices: Ask The Applications Engineer – 21 (iz spleta)

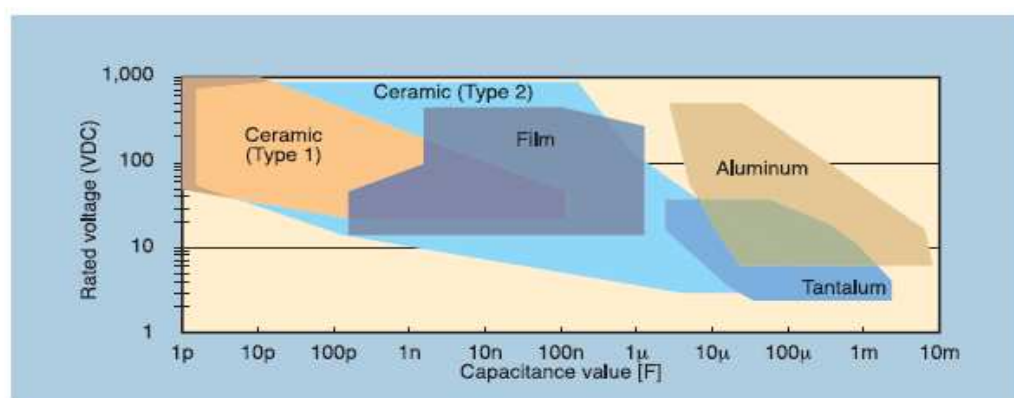


Fig. 1: Relation between capacitance value and rated voltage in each capacitor

SLIKA: različni tipi kondenzatorjev glede na zahtevano nazivno napetost. Vir: www.murata.com.

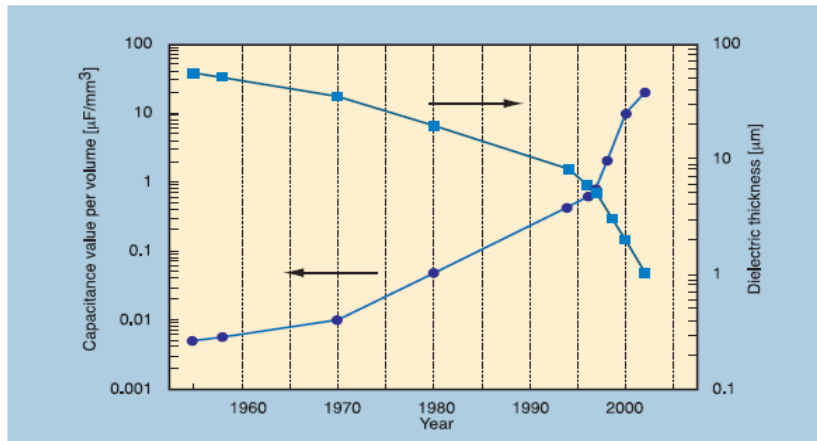


Fig. 2: Transition of capacitance value per volume and dielectric thickness

SLIKA: Primer napredovanja tehnike izdelave kondenzatorjev. Hkrati s tanjšanjem debeline dielektrika se večja kapacitivnost na enoto volumna.

Nekaj aplikacij kondenzatorjev.

- **začasno nadomeščanje** baterijskega napajanja v vezjih
- za usmerjanje v močnostnih aplikacijah
- charge-pump kasakada (zvišanje napetosti)
- glajenje signalov
- izločanje AC komponente
- izločanje DC komponente
- kompenzacija moči
- fluorescenčna osvetlitev
- filtracija signalov
- za doseganje resonančne frekvence

Uporaba kondenzatorskega principa:

- senzor razdalje (majhne razdalje)
- senzor pospeška (ADX1)
- senzor nivoja tekočine
- kondenzatorski mikrofoni
- senzorji dotika
- visokonapetostni kondenzatorji za shranjevanje energije in hitro praznjenje (pulzni laserji, elektromagnetno izstreljevanje, radar, pospeševalniki, detonatorji,



Podnapis pod fotografijo: Filtrska kompenzacija s KLV-kondenzatorji, Acroni, Jesenice

SLIKA: Kompenzacijski kondenzatorji v Acroni Jesenice. Vir:
<http://www.iskra.si/upload/Iskra%20KONDENZATORJI.pdf>

WWW: <http://www.uoguelph.ca/~antoon/gadgets/caps/caps.html>

http://www.hobby-elec.org/e_capa.htm

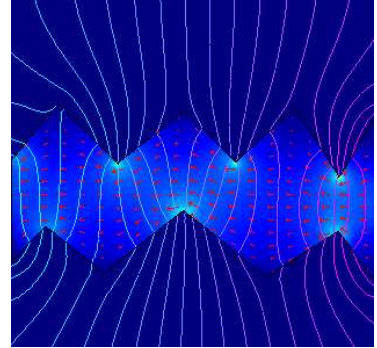
http://en.wikipedia.org/wiki/Electrolytic_capacitor

<http://en.wikipedia.org/wiki/Supercapacitor>

http://www.elna-america.com/tech_al_principles.php

http://www.maxwell.com/ultracapacitors/technical-support/white_papers.asp

<http://repositories.cdlib.org/cgi/viewcontent.cgi?article=1050&context=itsdavis>



24. Časovno konstantno tokovno polje

Vsebina poglavja: Kontinuitetna enačba, gostota toka, časovno konstantno tokovno polje, tok v snovi, konventivni tok, konduktivni tok, mobilnost, Ohmov zakon v diferencialni obliki, specifična prevodnost in specifična upornost, temperaturne lastnosti, joulov zakon, mejni pogoji tokovnega polja, dualnost tokovnega in elektrostaticnega polja.

Kontinuitetna enačba.

S pojmom toka smo se srečali že v prvem poglavju, kjer smo ugotovili, da je električni tok posledica gibanja nabojev, kar lahko izrazimo tudi kot časovno spremembo količine naboja v zaključenem sistemu (kontinuitetna enačba). Po definiciji smo ga določili kot odtekanje pozitivnega naboja:

$$i(t) = -\frac{dQ_+}{dt}.$$

SLIKA: Prikaz definicije toka kot časovno odtekanje pozitivnega naboja.

Gostota toka.

Spomnimo se zveze med električnim pretokom in gostoto električnega pretoka. Gostoto pretoka smo označili z vektorjem $\vec{D}$, pretok pa kot integral $\vec{D}$ -ja preko določene površine: $\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$. Na enak način izrazimo gostoto toka s črko J , tok pa je integral gostote toka po površini A

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

Znotraj integrala je skalarni produkt dveh vektorjev, kar pomeni, da k toku prispeva le tista komponenta gostote toka, ki je pravokotna na površino, oziroma tista, ki je v smeri normale na površino: $\vec{J} \cdot d\vec{A} = \vec{J} \cdot \vec{e}_n dA = J_n \cdot dA$.

V primeru, da se gostota toka po preseku ne spreminja in je pravokotna na ravnino preseka, lahko integral poenostavimo v $I = J \int_A dA = JA$.

Če želimo gostoto toka določiti iz toka, pa uporabimo obratno operacijo od integracije:

$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$, torej bo gostota toka enaka odvodu toka po površini¹:

¹ Ali pa: $dI = \vec{J} \cdot d\vec{A} = \vec{J} \cdot \vec{e}_n dA = J_n \cdot dA$ torej $\vec{J} = \vec{e}_n \frac{dI}{dA}$.

$$J = \frac{dI}{dA}.$$

Električni tok je skalarna veličina (ima le vrednost, ne pa tudi smeri), gostota toka pa je vektorska veličina (ima tako velikost kot smer).

SLIKA: Tok in gostota toka: primerjava.

Primer: Skozi žico premera 2 mm teče tok 50 A. Kolikšna je gostota toka v žici?

Izračun: Površina preseka je $A = \pi r^2 = \pi (1 \text{ mm})^2 = \pi \text{ mm}^2$, gostota toka pa je

$$J = \frac{I}{A} = \frac{50 \text{ A}}{\pi \text{ mm}^2} \approx \underline{\underline{16 \text{ A/mm}^2}}.$$

Primer: Med oklopom in žilo koaksialnega kabla z notranjim polmerom 1 mm in zunanjim polmerom 3 mm je tok 1 mA. Določimo gostoto toka pri notranjem in zunanjem polmeru na dolžini 10 m.

Izračun: Zapišemo tok skozi zamišljen presek na polmeru r : $I = JA = J2\pi rl$, od koder je

$$\text{gostota toka pri polmeru } r: J = \frac{I}{2\pi rl}.$$

Sledi:

$$J(r_n) = \frac{1 \text{ mA}}{2\pi \cdot 1 \text{ mm} \cdot 10 \text{ m}} \approx \underline{\underline{16 \text{ mA/m}^2}}$$

$$J(r_z) = \frac{1 \text{ mA}}{2\pi \cdot 3 \text{ mm} \cdot 10 \text{ m}} \approx \underline{\underline{5,3 \text{ mA/m}^2}}$$

Tokovno polje med žilo in oklopom je nehomogeno. Pri žili je gostota toka večja, kot pri oklopu.

Kontinuitetna enačba – drugič

Povedali smo že, da tok ugotavljamo kot časovno spremembo naboja v zaključenem sistemu. Če zapišemo integral gostote toka skozi zaključeno površino, mora biti ta integral v skladu s kontinuitetno enačbo ravno enak časovni spremembi naboja znotraj te zaključene površine. Kontinuitetna enačba torej »govori« o kontinuiteti naboja znotraj zaključene površine. Kopičenje ali zmanjševanje naboja v zaključeni površini je posledica električnega toka ali tudi

obratno: tok skozi zaključeno površino je posledica kopičenja ali odtekanja naboja skozi to površino. Matematično to zapišemo v obliki¹:

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

Časovno konstantno tokovno polje.

Govorimo o časovnem konstantnem tokovnem polju, kjer v volumnu objetem z zaključeno površino A velja $\frac{dQ}{dt} = 0$ in s tem

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0.$$

Zgornja enačba ne govori o tem, da ni toka v in izven zaključene površine temveč le o tem, da enaka količina toka, ki vstopa v prostor z zaključeno površino, ta prostor tudi zapušča. Recimo, da zaključeno površino razdelimo na tri dele. V prva dva dela toka vstopata (I_1 in I_2), skozi tretjega pa zapušča tok I_3 . Velja $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = I_1 + I_2 - I_3 = 0$. Prepoznamo 1. Kirchhoffov

zakon, da je vsota vseh tokov, ki vstopajo (ali izstopajo) v spojišče enaka nič: $\sum_{i=1}^N I_i = 0$. Tok

smo označili z veliko tiskano črko, ker obravnavamo le stacionarne pojave, torej take, kjer se tok s časom ne spreminja.

SLIKA: Zaključena površina s tremi toki od katerih dva vstopata, en pa izstopa iz površine. Vsota tokov v spojišče je enaka nič.

Enak pogoj kot za časovno konstantno tokovno polje smo uporabili tudi za elektrostatično polje ($dQ/dt = 0$). Torej bodo za časovno konstantno tokovno polje veljale tudi ugotovitve iz elektrostatičnega polja:

¹ ** Pogosto to enačbo izrazimo še nekoliko drugače, pri čemer naboj izrazimo z gostoto naboja $Q = \int_V \rho dV$:

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV = -\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}. \text{ Znana pa je tudi oblika te enačbe v diferencialni obliki, kjer je potrebno uporabiti}$$

$$\text{operator divergence: } \operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ ali tudi } \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

zakon potencialnosti polja: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

in

Gaussov zakon: $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj } A}$.

Podobno, kot pri zakonu o ohranitvi naboja prepoznamo 1. Kirchoffov zakon, lahko v zakonu o potencialnosti polja $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ prepoznamo 2. Kirchoffov zakon, saj, če razdelimo

zaključeno pot na več delnih poti $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{L_N} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, jih lahko

nadomestimo z napetostjo med koncema delnih poti: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_1 + U_2 + \dots + U_N = 0$ ali tudi

$$\sum_i U_i = 0.$$

Kljub temu pa ima časovno konstanto polje določeno »komponento«, ki jo elektrostatično nima. Pri elektrostatičnem polju predpostavimo razmere, ko toka ni; niti enosmernega. Kljub temu da vemo, da je tok potreben za proces elektrenja. V teh razmerah je polje znotraj prevodnikov vedno enako nič. Drugače pa je pri tokovnem polju, ki sicer ima določene »komponente« elektrostatičnega polja, recimo ohranjeno veljavnost Gaussovega zakona in zakona o potencialnosti polja, pa pri razmerah tokovnega polja dovolimo časovno konstanten tok.

Ustreznost enačb elektrostatičnega polja, časovno konstantnega tokovnega polja in dinamičnega polja prikazuje naslednja tabela:

	Elektrostatično polje	Tokovno polje	Dinamično polje
Gaussov zakon	$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj } A}$	enako	enako
Potencialnost polja	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	enako	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$
Kontinuitetna enačba	$\frac{dQ}{dt} = 0$ (znotraj zaključene površine) Oziroma $\rho(t) = \text{konst}$ Ali tudi $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$	$\frac{dQ}{dt} = 0$ (znotraj zaključene površine) Oziroma $\rho(t) = \text{konst}$ Ali tudi $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$	$-\frac{dQ}{dt} = i(t)$ $\rho = \rho(t)$
Tok	$i(t) = 0$	$i(t) = \text{konst}$	$i(t) = f(t)$

Tok v snovi.

Povežimo gostoto toka z lastnostmi materialov. Vemo, da nekatere snovi prevajajo tok bolje, druge pa slabše. Najbolj preprosta delitev bi bila lahko na prevodnike, ki odlično prevajajo tok in izolatorje, ki v idealnih razmerah toka ne prevajajo. Vemo pa, da imamo tudi »vmesne« materiale, ki bolj ali manj prevajajo tok.

Poiščimo zvezo med tokom in hitrostjo gibanja nabojev:

Vzemimo tok nabojev skozi presek žice A s homogeno gostoto toka. Tok v smeri naraščanja količine pozitivnega naboja zapišemo kot $I = \frac{dQ}{dt}$ in ga izrazimo z gostoto toka, naboj pa z

gostoto naboja: $I = JA = \frac{d(\rho V)}{dt}$. Vzemimo tok nabojev v smeri X osi, kjer na delu volumna s

konstantno volumsko gostoto naboja zapišemo: $J_x A = \rho \frac{dx}{dt} A = \rho v A$, torej je gostota toka sorazmerna gostoti (prostega) naboja in hitrosti potovanja tega naboja: $J = \rho v$. Bolj splošna oblika enačbe upošteva gostoto toka kot vektorsko veličino in je ¹

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

Naboji se v različnih pogojih gibljejo na različne načine. V grobem razdelimo načine gibanja na konvektivni in konduktivni način.

Konvektivni tok. Gibanje nabojev je zelo odvisno od medija v katerem se naboji gibljejo. Če se naboji gibljejo v vakuumu ali razredčenemu plinu (zraku), je njihovo gibanje pospešeno, saj je sila na naboje enaka $m\vec{a} = Q\vec{E}$. V prostoru, kjer ni »večjih ovir«, se naboji gibljejo pospešeno $\vec{a} = \frac{Q\vec{E}}{m}$ in $\vec{v} = \int \vec{a} dt$. Takemu načinu gibanja rečemo **konvektivno prevajanje in toku konvektivni tok**.

SLIKA: Konvektivni tok v katodni cevi.

Konduktivni tok. Če se naboji gibljejo v gostejši snovi, se ne gibljejo neovirano, pač pa trkajo z atomi snovi. Zato se njihova hitrost bistveno upočasni, kar se odraža v toplotnih

¹ ρ (ro) v enačbi predstavlja volumsko gostoto (gibajočega se) naboja. V nadaljevanju bomo enak simbol uporabili tudi za označitev specifične električne upornosti. Ne smemo zamešati njun različni pomen v enačbah.

izgubah prevodnika. Za mnogo snovi velja, da je povprečna hitrost gibanja nabojev sorazmerna električni poljski jakosti, kar zapišemo z izrazom¹

$$\vec{v} = \mu \vec{E}$$

SLIKA: Konduktivni tok v prevodniku.

Konstanto μ (mi) imenujemo **mobilnost** in je snovna lastnost (tako kot električna susceptibilnost oz. relativna dielektrična konstanta). Izpeljimo enoto za mobilnost:

$$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = [\mu] \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \Rightarrow [\mu] = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} \right].$$

Ohmov zakon v diferencialni obliki.

Z upoštevanjem zveze med povprečno hitrostjo gibanja nabojev in električno poljsko jakostjo, lahko gostoto toka zapišemo kot

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \mu \vec{E} \text{ oziroma}$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

OHMOV ZAKON V DIFERENCIALNI OBLIKI

kjer konstanto γ (gama) imenujemo **specifična električna prevodnost** in je enaka¹ $\gamma = \rho \mu$.

¹ Kako pridemo do te zveze? Vzemimo, da opazujemo let elektrona v električnem polju. Nanj deluje pospešek $\vec{a} = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e}$, torej se v času t njegova hitrost od začetne v_z poveča za $\vec{v} = \vec{v}_z + \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} t$. Ker je trkov elektrona z atomi zelo veliko, moramo za pravilno obravnavo upoštevati povprečno hitrost, kar zapišemo z izrazom $\langle \vec{v} \rangle$:

$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_z \rangle + \left\langle \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} t \right\rangle$. Po trku z atomom se elektron odbije v naključno smer, zato je začetna hitrost v

povprečju enaka nič, celotna povprečna hitrost pa je enaka $\langle \vec{v} \rangle = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} \langle t \rangle$. $\langle t \rangle$ je povprečni čas med trki in ga označimo s τ . Za kovine je ta velikosti 10^{-14} s, za pline pa 10^{-9} s. Povprečni hitrosti pogosto s tujko (angleško)

rečemo hitrost drifta, po slovensko bi morda prevedli v hitrost odnašanja. Pišemo torej lahko $v_d = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} \tau$, od

koder razpoznamo zapisano linearno zvezo med povprečno hitrostjo in električno poljsko jakostjo $\vec{v} = \mu \vec{E}$, kjer je mobilnost enaka $\mu = \frac{Q_e}{m_e} \tau$.

Dobili smo pomemben izraz, da je gostota toka v prevodnikih sorazmerna električni poljski jakosti. Tak tip toka imenujemo **konduktivni** (prevodni), ker z njim ustrezno opišemo prevajanje toka v prevodnikih. Konstanto sorazmernosti imenujemo specifična električna prevodnost (γ), celoten izraz pa kar **Ohmov zakon v diferencialni obliki**. Poglejmo zakaj:

Vzemimo pravokoten kos prevodnika dolžine l in preseka A z znano specifično prevodnostjo. Med konca prevodnika priključimo napetost. Znotraj prevodnika je homogeno električno

polje, iz zveze za napetost $U = \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l}$ pa dobimo:

$$U = \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^l E \cdot dx = \int_0^l \frac{J}{\gamma} dx = \int_0^l \frac{I}{\gamma A} dx = \frac{I}{\gamma A} \int_0^l dx = \frac{I}{\gamma A} l.$$

ali pa takole:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_A \frac{\vec{E}}{\gamma} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\gamma} \int_A \frac{U}{l} dA = U \frac{A}{\gamma l}$$

SLIKA: Pravokoten kos prevodnika priključen na vir napetosti.

Če zapišemo izraz nekoliko drugače, prepoznamo Ohmov zakon v znani (integralni) obliki:

$$U = \frac{I}{\gamma A} l = I \frac{l}{\gamma A} = IR,$$

kjer je

$$R = \frac{l}{\gamma A}$$

¹ Izraz $\gamma = \rho\mu$ lahko zapišemo tudi drugače, če gostoto nabojev izrazimo s koncentracijo mobilnih elektronov

n : $\rho = nQ_e$. Sledi $\gamma = \frac{nQ_e^2\tau}{m}$. Ta izraz sicer ne da točnih vrednosti za specifično prevodnost, saj je vendarle

nekoliko poenostavljen, kljub temu pa je iz njega razvidno, da imajo snovi z večjo koncentracijo prostih elektronov večjo specifično prevodnost. Poleg tega večja masa pomeni manjšo prevodnost, kar je predvsem pomembno pri prevajanju ionov. Poleg tega se povprečni čas trkov manjša z višanjem temperature, saj tedaj atomi bolj vibrirajo in so trki v povprečju pogostejši.

električna upornost. Enoto je Ω (Ohm). Zopet lahko izpeljemo enoto za specifično prevodnost. Če je enota za upornost Ohm, potem ugotovimo, da lahko specifično prevodnost izrazimo kot $\frac{1}{\Omega \text{ m}}$, pogosto tudi kot $\frac{\text{S}}{\text{m}}$ (Siemens na meter).

Iz enačbe za upornost je razvidno, da je upornost povezana z geometrijo prevodnika, enako, kot smo to ugotavljali za kapacitivnost.

Inverzno vrednost od specifične prevodnosti imenujemo **specifična upornost** (enota je $\Omega \cdot \text{m}$):

$$\rho = \frac{1}{\gamma}, \quad R = \frac{\rho l}{A}.$$

Običajno je podana ena ali druga vrednost, v določenih primerih (predvsem v elektrolitih) pa mobilnost nabojev. Tu je potrebno ločiti način prevajanja v tekočinah in prevodnikih. V tekočinah prevajajo tako elektroni kot ioni (pozitivni in negativni), medtem, ko v prevodnikih prevajajo samo elektroni. Obstajajo tudi posebne snovi, ki jim rečemo polprevodniki, pri katerih lahko električne lastnosti spreminjamo z dodajanjem primesi. Kos kristala silicija je izolator, zelo slab prevodnik, ki pa lahko postane dober prevodnik, če mu dodamo primesi. To dodajanje poteka pri zelo visokih temperaturah, nad 1000° . Način prevajanja je odvisen od tipa dodanih primesi. Če je dodana snov fosfor (pri čemer se med kristalno rešetko silicija le vsake toliko vrine kakšen atom fosforja), imenujemo tak tip polprevodnika n-tip, saj vsebuje določeno število šibko vezanih elektronov, ki se lahko (dokaj) prosto gibljejo ob priključeni napetosti. Če dodamo siliciju atome bora se v kristalno rešetko silicija vrinejo atomi bora, ki ustvarijo pomanjkanje elektronov, kar imenujemo vrzel. Izkazuje se, da tudi takšno pomanjkanje elektronov lahko deluje kot prevodnik.

Primer: Specifična prevodnost bakra je $5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$. Določimo upornost ravne palice pravokotnega preseka stranic $1 \times 2 \text{ mm}^2$ in dolžine 5 m.

Izračun: Uporabimo enačbo $R = \frac{l}{\gamma A}$ in določimo upornost

$$R = \frac{5 \text{ m}}{5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} \approx \underline{\underline{44 \text{ m}\Omega}}.$$

Primer: Določimo napetost koraka pri udaru strele s tokom 20 kA, če je človek oddaljen za $r_1 = 15 \text{ m}$ stran od udara. Specifična prevodnost zemlje je 10^{-4} S/m , razdalja koraka je $s = 0,8 \text{ m}$.

SLIKA: Prikaz udara strele in človeka $r_1 = 15 \text{ m}$ stran od strele.

Izračun: Predpostavimo homogeno porazdelitev gostote toka, ki je na radiju r od mesta udara strele v tla enaka $J(r) = \frac{I}{A(r)} = \frac{I}{\frac{4\pi r^2}{2}} = \frac{I}{2\pi r^2}$. Ker je gostota toka vektorska veličina, jo kot

vektor zapišemo kot $\vec{J} = \vec{e}_r \frac{I}{2\pi r^2}$. Iz Ohmovega zakona sledi polje $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} = \vec{e}_r \frac{I}{2\pi \gamma r^2}$.

Napetost koraka je $U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{e}_r \frac{I}{2\pi \gamma r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{I}{2\pi \gamma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi \gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + s} \right)$.

$$U_{12} = \frac{I}{2\pi \gamma} \frac{s}{r_1(r_1 + s)} \approx \underline{\underline{107 \text{ kV}}}.$$

Iz primera smo ugotovili, da lahko nastopi pri udar strele ob razkoraku do precej velike napetosti med stopaloma. Ta je lahko v določenih primerih tudi nevarna za človeka (in živali).

Po preprosti enačbi za izračun še dovoljene napetosti koraka¹ $U_{koraka, \max} = \frac{200 + \rho(\Omega \cdot \text{m})}{\sqrt{\text{čas trajanja}}}$, ki da

približno 10 kV pri izbrani specifični prevodnosti, ugotovimo, da smo pri 15 m znotraj nevarne cone. Ocenimo lahko varno razdaljo, pri čemer bomo predpostavili $r_1 \gg s$ (sicer bi morali rešiti kvadratno enačbo):

$$U_{koraka, \max} \approx \frac{I}{2\pi \gamma} \frac{s}{r_{1, \min}^2} \Rightarrow r_{1, \min} \approx \sqrt{\frac{I}{2\pi \gamma} \frac{s}{U_{koraka, \max}}}. \text{ Za } U_{koraka, \max} = 10 \text{ kV dobimo kritično}$$

razdaljo približno 50 m. Pri toku 1 kA je ta razdalja 16 m, pri 200 kA pa kar 160 m.

Pri manjših specifičnih upornostih tal je maksimalna (kritična) napetost koraka manjša, kljub temu pa je varnostna razdalja večja².

Dodatno: Izračunajmo ozemljitveno upornost, če je ozemljilo v obliki prevodne polkrogle v zemlji s specifično prevodnostjo 10^{-4} S/m . Polkrogla ima polmer 0,5 m.

SLIKA: Ozemljitvena »krogla« polmera $r = 0,5 \text{ m}$.

Izračun: Predpostavili smo določen tok I v kroglo, ki povzroči med točkama T_1 in T_2 napetost

$U_{12} = \frac{I}{2\pi \gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$. Napetost med površino krogle in neskončno okolico ($r_1 = r_0$, $r_2 \rightarrow \infty$) bo

torej $U_{0\infty} = \frac{I}{2\pi \gamma r_0}$, torej bo upornost ozemljila enaka $R = \frac{U_{0\infty}}{I} = \frac{1}{2\pi \gamma r_0}$. Za izbrane vrednosti

¹ Z.Cheng: »Calculation of step voltage near lightning current«, IEEE 2004.

je upornost ozemljila enaka 3,2 k Ω . To je kar velika vrednost za ozemljitveno upornost, ki naj bo čim manjša; v praksi se smatra kakovostna ozemljitev z upornostjo manjšo od 5 Ω . Pri izbrani specifični prevodnosti zemlje bi bil potreben polmer krogle za 5 Ω ozemljilo kar 320 m. Kar seveda ni smiselno ozemljilo. V praksi se okoli objekta položi ozemljitvena žica ali mreža, če pa je specifična prevodnost tal večja, zadostuje tudi posebno oblikovan ozemljitveni klin. V posebnih primerih se specifično prevodnost tal lahko poveča z določenimi substancami, ki se jih vlije v področje ozemljitve in strnjene predstavljajo lokalno povečano specifično prevodnost tal. Specifične prevodnosti tal se gibljejo od vrednosti nekaj deset mS/m (močvirna tla) do 0,1 mS/m (skalna tla).

ŠE: Merjenje specifične prevodnosti tal, merjenje ozemljitvene upornosti.

Temperaturna odvisnost specifične upornosti.

V nekaterih primerih je to zaželeno (če jo na primer izkoriščamo za določanje temperature), v drugih pa je nezaželena, saj spreminja pogoje delovanja vezja, itd. Pogosto zadostuje, da uporabimo linearen zvezo, torej, da predpostavimo linearno spreminjanje specifične upornosti s temperaturo:

$$\rho(T) = \rho(T_0)(1 + \alpha(T - T_0)).$$

α imenujemo temperaturni koeficient, ki je običajno podan pri sobni temperaturi $T_0 = 20^0$. Za večino prevodnikov je temperaturni koeficient pozitiven, kar pomeni, da se specifična upornost snovi veča s temperaturo, kar pomeni, da se z višanjem temperature veča tudi upornost prevodnega kosa materiala. To lahko zapišemo kot (zgornjo enačbo množimo z l/A)

$$R(T) = R(T_0)(1 + \alpha(T - T_0))$$

Snovne lastnosti nekaterih prevodnikov:

SNOV	γ (S/m)	ρ (Ω m)	α (K^{-1})
baker	$5,7 \cdot 10^7$		0,0039
zlato	$4,1 \cdot 10^7$		0,0034
aluminij	$3,5 \cdot 10^7$		0,0041
silicij	$3,9 \cdot 10^{-4}$		
voda	$2 \cdot 10^{-4}$		
zemlja	10^{-5} - 10^{-2}		
steklo	10^{-12}		
guma	10^{-17}		

Joulov zakon.

Je povezan s segrevanjem v snovi zaradi trkanja elektronov z atomi v snovi. Diferencial dela, ki ga opravi diferencial elektrine dQ v polju E , se pretvori v toplotno energijo

$$dW_t = dA_e = dQ \int_0^l \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = dQ \cdot U.$$

Moč je definirana kot (časovna) hitrost spreminjanja energije: $P = \frac{dW}{dt}$, ki je v našem primeru

$$P = \frac{dW_t}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = IU.$$

Dobimo že znano enačbo za moč pri enosmernih signalih:

$$P = IU = I^2 R = U^2 G.$$

Definiramo lahko tudi **gostoto moči**, kot moč na enoto volumna. V majhnem volumnu je (diferencial) moči enak $dP = p \cdot dV$, kjer p imenujemo gostota moči, dV pa je diferencial volumna. Hkrati lahko diferencial moči zapišemo kot

$$dP = dI \cdot dU = (J \cdot dA)(E \cdot dl) = (J \cdot E) dV.$$

Gostoto moči lahko torej izrazimo kot produkt gostote toka in električne poljske jakosti, bolj natančna izpeljava pa pokaže, da je potrebno vzeti vektorski produkt obeh veličin:

$$p = \vec{J} \cdot \vec{E}.$$

Enota za gostoto moči je W/m^3 .

Z upoštevanjem Ohmovega zakona v diferencialni obliki $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ lahko gostoto toka zapišemo tudi kot

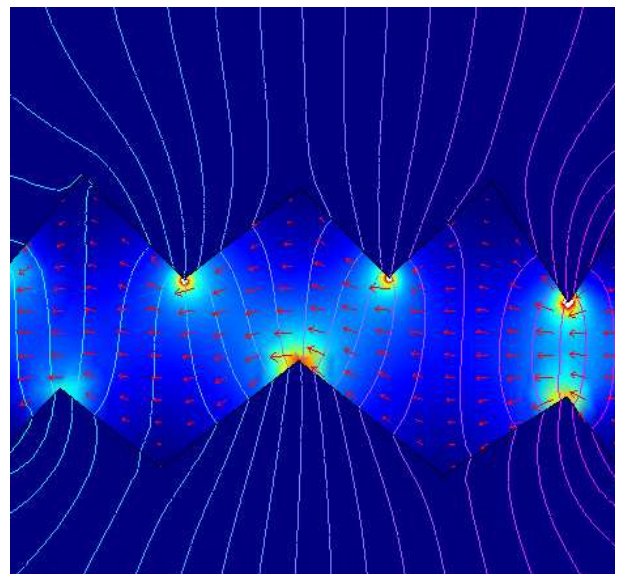
$$p = \gamma E^2$$

$$\text{ali kot } p = \frac{J^2}{\gamma}$$

Celotno (izgubno) moč v prevodniku določimo kot integral gostote moči v volumnu:

$$P = \int_V p dV = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV.$$

Ta zapis imenujemo tudi **Joulov zakon v integralni obliki**.



Prikaz gostote moči (bolj »vroča« barva – večja moč) v lomljenemu vodniku. Vektorji kažejo gostoto toka, ki je večja ob ožinah in ostrih robovih.

Mejni pogoji v tokovnem polju.

Podobno kot pri elektrostatičnem polju izhajamo iz dveh osnovnih zakonov. Iz $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$ sledi (podobno kot iz $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$), da se **ohranja normalna komponenta gostote toka**:

$$J_{n2} = J_{n1}.$$

Če upoštevamo Ohmov zakon v diferencialni obliki ($J = \gamma E$), velja v primeru, da na meji ni prostih nabojev

$$\gamma_2 E_{n2} = \gamma_1 E_{n1}$$

SLIKA: Lom gostote toka na meji dveh medijev z različnima prevodnostima.

Iz zakona o potencialnosti polja pa sledi, da se ohranja še tangencialna komponenta električne poljske jakosti:

$$E_{t2} = E_{t1} \text{ oziroma } \frac{J_{t2}}{\gamma_2} = \frac{J_{t1}}{\gamma_1}$$

Z deljenjem z mejnim pogojem za tangencialno komponento polja velja

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

kjer sta kota definirana med normalo in smerjo polja. Iz enačbe ugotovimo, da je v primeru velikih razlik med specifičnimi prevodnostmi dveh materialov (recimo na meji prevodnik/izolator) tok v prevodniku neodvisno od kota gostote toka v izolatorju praktično vzporedna z mejo.

Primer: Vektor gostote toka je usmerjen pod kotom 1° iz izolatorja z $\gamma_i = 10^{-10} \text{ S/m}$ na prevodnik s specifično prevodnostjo $\gamma_p = 10^7 \text{ S/m}$. Določite kot odklona vektorja gostote toka v prevodniku.

Izračun: $\frac{\tan(\alpha_p)}{\tan(1^\circ)} = \frac{10^7 \text{ S/m}}{10^{-10} \text{ S/m}} \Rightarrow \alpha_p \cong 90^\circ$. Tokovna gostota v prevodniku je praktično vzporedna s prevodnikom.

SLIKA: Gostota toka pada na mejo prevodnika pod kotom 1° na normalo.

Ker pa velja tudi Gaussov zakon v splošni obliki $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \sigma$, iz njega sledi pogoj za prehod normalne komponente gostote pretoka:

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma$$

Pri tem smo upoštevali, da je smer polja iz medija z indeksom 2 v medij z indeksom 1. V tej smeri kaže tudi normala na površino.

Ker sta normalni komponenti gostote toka enaki kar zapišemo kot $J_{n1} = J_{n2} = J_n$ in velja Ohmov zakon v diferencialni obliki ($J = \gamma E$), sledi $\varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2} = \sigma$ in torej

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \right) J_n = \sigma.$$

Iz enačbe ugotovimo, da bo razen v posebnih pogojih (ko velja $\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$), na meji dveh dielektrikov prišlo zaradi razlike med električnimi lastnostmi materialov do presežne ploskovne gostote naboja.

Primer: Vzemimo žico sestavljeno iz kosa bakra, aluminija in bakra. Velja $\gamma_{Cu} = 5,6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ in $\gamma_{Al} = 3,5 \cdot 10^7 \text{ S/m}$. Določimo površinsko gostoto naboja na meji, če teče skozi prevodnike tok z gostoto toka 1 A/mm^2 .

Izračun: Vzemimo, da teče tok iz leve proti desni. Na meji Cu/Al bo veljalo

$\sigma = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\gamma_{Al}} - \frac{1}{\gamma_{Cu}} \right) J_n = 9,5 \cdot 10^{-14} \text{ C/m}^2$. Ker je specifična prevodnost aluminija manjša od specifične prevodnosti bakra (dielektričnosti pa sta enaki 1), bo na meji Cu/Al v smeri toka presežek pozitivnega naboja, na meji Al/CU pa negativnega naboja.

Nadalje lahko ugotovimo, da bo polje na površini enako $E_n = \sigma / \varepsilon_0 = \left(\frac{1}{\gamma_{Al}} - \frac{1}{\gamma_{Cu}} \right) J_n$.

Dodatno: Če si zamislimo, da je namesto aluminija vmes plast izolatorja z zelo majhno prevodnostjo ($\gamma_i \ll \gamma_{Cu}$), potem bo iz enačbe za površinski naboj

$\sigma \cong \frac{\varepsilon_i}{\gamma_i} J_n = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_i} \gamma_i E_n = \varepsilon_i E_n$, kar je znan izraz iz elektrostatike.

SLIKA: Žica iz Cu/Al/Cu.**Povzetek:**

- Zaradi velikih razlik v specifičnih prevodnosti med izolatorjem in prevodnikom, je pri nedirektnem vpadu gostote toka na prevodnik v prevodniku dominantna tangencialna komponenta gostote polja, v izolatorju pa normalna komponenta električnega polja.
- Na meji dveh snovi z različnimi električnimi lastnostmi pride ob prehodu toka iz enega v drug material do kopičenja pozitivnega ali negativnega naboja. Na meji izolator/prevodnik je ta naboj kar enak ϵE , kar je znan rezultat elektrostatike.

Dualnost tokovnega in elektrostatičnega polja.

Vzemimo dve prevodni telesi priključeni na enosmerno napetost U , med telesoma je medij katerega električne lastnosti določata specifične prevodnost in relativna dielektričnost. Prevodni telesi lahko smatramo za ekvipotencialki, električno polje pa se porazdeli v skladu z zakonitostmi elektrostatičnega polja. Obstaja neposredna zveza med gostoto toka in električno

poljsko jakostjo: $J = \gamma E$, pa tudi gostoto pretoka $J = \gamma E = \gamma \frac{D}{\epsilon}$, torej so gostotne cevke za

obe polji enaki. V tem smislu govorimo o dualnosti obeh polj. Če izračunamo porazdelitev električnega polja, poznamo tudi porazdelitev tokovnega polja. Torej mora obstajati tudi neka neposredna zveza med kapacitivnostjo in upornostjo med dvema telesoma:

$$RC = \frac{U}{I} \frac{Q}{U} = \frac{\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}} = \frac{\epsilon \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\gamma \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}} = \frac{\epsilon}{\gamma} = \rho \cdot \epsilon$$

Ponovimo rezultat: **$RC = \rho \epsilon$** .

Praktična uporaba tega izraza je velika. Vzemimo, da znamo izračunati kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma. Potem lahko iz kapacitivnosti zelo hitro dobimo izraz za upornost. V principu je izraz za prevodnost kar enak izrazu za kapacitivnost, le dielektričnost moramo zamenjati s specifično prevodnostjo: $G = C \frac{\gamma}{\epsilon}$.

Primer: Med dve prevodni palici okroglega preseka polmera $r_0 = 2$ mm, razmaknjeni za 2 cm priključimo napetost 10 V in ju potopimo za $l = 3$ cm v prevodni medij. Izmerimo tok 0,2 mA. Določimo upornost med elektrodama in specifično prevodnost medija.

Izračun: V poglavju o okovinjenju ekvipotencialk smo imeli primer dveh nasprotno naelektrenih valjev, kjer smo z upoštevanjem ekscentričnosti določili napetost med valjema

kot $U = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)$, brez upoštevanja ekscentričnosti pa $U = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$. Od

tod je kapacitivnost $C = \frac{Q}{U} = \frac{ql}{U} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$. Iz pogoja dualnosti določimo prevodnost med

palicama kot $G = \frac{\pi\gamma l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$. Specifična prevodnost dobimo kot

$$G = \frac{0,2 \text{ mA}}{10 \text{ V}} = 20 \text{ } \mu\text{S} = \gamma \frac{\pi \cdot 0,03 \text{ m}}{\ln\left(\frac{22 \text{ mm}}{2 \text{ mm}}\right)} = \gamma \cdot 39,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \text{ od koder sledi } \gamma \cong \underline{\underline{509 \text{ S/m}}}.$$

Realni kondenzator.

Do sedaj smo ločeno obravnavali kondenzator in upor, čeprav je v realnosti tako upor kot kondenzator element, ki ima med dvema prevodnima kontaktoma snov, katere električne lastnosti so podane z relativno dielektrično konstanto in specifično prevodnostjo. Za obravnavo realnega kondenzatorja moramo vzeti primer časovno spreminjajočega se toka, saj v enosmernih razmerah kondenzator v idealnih razmerah ne prevaja toka, v realnih pa ima določeno upornost in tok prevaja. Realni kondenzator priključimo torej na vir izmenične napetosti u_g in določimo tok skozi realni kondenzator.

SLIKA: Realni kondenzator priključen na vir napetosti u_g .

Zaokrožimo enega od kontaktov in uporabimo zakon o ohranitvi naboja

$$\oint_A \mathbf{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt}.$$

Levi člen je enak razliki izstopnega (v kondenzator) in vstopnega toka (iz vira)

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = Gu_g - i_g,$$

desni pa poljskemu toku v kondenzatorju, ki je posledica časovne spremembe naboja na površini kontaktov

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d(Cu_g)}{dt}.$$

Velja torej

$$Gu_g - i_g = -C \frac{du_g}{dt}.$$

Dobimo diferencialno enačbo (linearno, prvega reda), katere rešitev je zveza med napetostjo in tokom na kondenzatorju. Ugotovimo, da lahko tok skozi kondenzator (enak toku i_g) ločimo na dva toka, enega zaradi ohmske upornosti, drugega pa zaradi kapacitivnih lastnosti:

$$i(t) = i_g = Gu_g + C \frac{du_g}{dt}.$$

Ta ločitev je seveda lahko samo modelna. Znotraj kondenzatorja je to hkratni in neločljivi pojav.

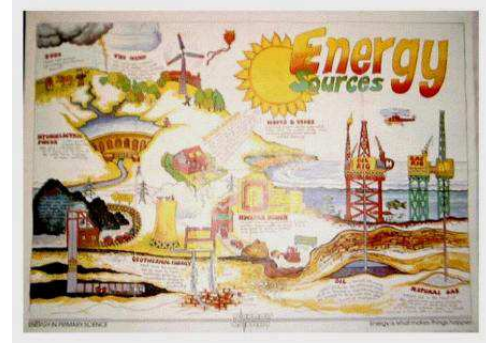
Pri obravnavi kondenzatorja smo že omenili vzporedno, pa tudi serijsko upornost, ki je pomemben podatek za kakovost kondenzatorja.

SLIKA: Nadomestna shema realnega kondenzatorja.

Primer nelinearnih uporov. (ŠE)

Vprašanja za obnovo:

1. Povezava med gostoto toka in tokom. »V obe smeri.«
2. Zapis kontinuitetne enačbe z gostoto toka.
3. Lastnosti časovno konstantnega tokovnega polja.
4. Od česa je odvisen tok v snovi?
5. Kakšna je razlika med konduktivnim in konvektivnim tokom?
6. Ohmov zakon v diferencialni obliki.
7. Kako iz Ohmovega zakona v diferencialni obliki pridemo do Ohmovega zakona v integralni obliki $U = IR$?
8. Razložite pojme mobilnost, specifična električna prevodnost, specifična električna upornost.
9. Električna upornost in prevodnost.
10. Temperaturna odvisnost specifične upornosti in prevodnosti.
11. Zapis Joulovega zakona v diferencialni in integralni obliki.
12. Mejni pogoji za normalno in tangencialno komponento toka.
13. Določitev površinske gostote naboja med dvema prevodnikoma iz Gaussovega zakona.
14. Dualnost tokovnega in elektrostaticnega polja.



25. Viri napetosti

Vsebina poglavja: elektromotorna sila, generatorska napetost, električni tokokrog, baterije, sončna celica.

Generatorska sila.

Do sedaj smo se ukvarjali le z učinki električnega polja, ne pa tudi z načinom, kako sploh ustrezno matematično opisati ločevanje naboja in generiranje napetosti. Vzemimo na primer naelektren kondenzator, ki ima ločene pozitivne in negativne naboje. Smer elektrostaticnega polja je od + nabojev proti – nabojem, tako v notranjosti, kot v zunanosti kondenzatorja.

SLIKA: Naelektren kondenzator z ločenimi naboji in elektrostaticnim poljem v notranjosti in zunanosti.

Če bi upoštevali le elektrostaticno polje (E_{es}) za katero velja, da je delo električnih sil po zaključeni poti enako nič $\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = 0$, ugotovimo, da to polje ne more biti generatorsko,

da to polje ni sposobno ločevanja nabojev, pač pa le združevanja. Torej mora biti neka druga sila, ki omogoča ločevanje nabojev nasprotnega predznaka. Tej sili rečemo **generatorska ali razdvajalna sila**. V angleškem jeziku se pogosto uporablja izraz **electromotive force**, poslovenjeno bi ji rekli elektromotorna ali elektrogeneratorska sila.

Označimo jo z $\vec{F}_g$, pripadajoče električno polje pa $\vec{E}_g = \frac{\vec{F}_g}{Q}$. Vzemimo, da znotraj

kondenzatorja deluje generatorska sila, ki je sposobna razdvajanja nabojev. Hkrati, ko deluje generatorska sila in razdvaja naboje, se vzpostavlja tudi elektrostaticna sila, ki pa je usmerjena v nasprotno smer. Na elektrodah se ustvarja akumulacija naboja, ki je v ravnovesju taka, da je $\vec{E}_g + \vec{E}_{es} = 0$.

SLIKA: V kondenzatorju (bateriji) deluje generatorska sila, ki razdvaja naboje in jih »nalaga« na elektrodi.

Generatorska napetost.

Poglejmo, koliko integral $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$, če je $\vec{E}$ sumarna električna poljska jakost, ki vključuje

tako generatorsko kot elektrostatično silo. L_1 naj bo pot znotraj, L_2 pa zunaj kondenzatorja pri čemer naj bo L_2 usmerjena v nasprotno smer. Za elektrostatično polje velja

$$\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1-L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{L_1} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l}.$$

Ker pa električno polje v kondenzatorju ni le elektrostatične narave, velja

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} (\vec{E}_{es} + \vec{E}_g) \cdot d\vec{l} + \int_{-L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1-L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} + \int_{L_1} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = -U_g,$$

$$\text{torej velja tudi } \int_{L_1} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = U_g.$$

Ali drugače: Znotraj kondenzatorja je elektrostatično polje (v stacionarnem stanju) enako veliko a nasprotno usmerjeno generatorskemu in je torej $\int_{L_1} (\vec{E}_{es} + \vec{E}_g) \cdot d\vec{l} = 0$, preostane

$$\text{del } \int_{L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = U_g.$$

Generatorska napetost je usmerjena od + naboja proti – naboju, enako kot elektrostatično polje in nasprotno smeri generatorskega polja.

Povzetek: Integral $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$, ki ne vsebuje le elektrostatične električne poljske jakosti, pač

pa tudi sile drugega izvora, ni nujno enak nič, pač pa neki napetosti, ki ji rečemo generatorska napetost $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -U_g$.

V naslednjem semestru (OE2) bomo ugotovili, da je ta integral različen od nič tudi v primeru časovno spreminjajočega se magnetnega polja skozi zanko.

Tokokrog.

Zaključimo generator v tokokrog s ploščnim kondenzatorjem s presekom A , razmakom med ploščama l in specifično prevodnostjo γ . Ponovno pogledamo, kako lahko razdelamo integral $\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = 0$. Integral razdelimo na pot znotraj vira in preko kondenzatorja s

prevodnim materialom. Ker je sedaj zaradi toka v tokokrogu $\vec{E}_{es} + \vec{E}_g \neq 0$, bo znotraj

generatorja $\int_{L_1} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = U_g - \int_{L_1} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = U_g - \int_{L_1} \frac{\vec{J}_g}{\gamma_g} \cdot d\vec{l}$. Enako velja za integral znotraj

prevodnika $\int_{L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \frac{\vec{J}_{es}}{\gamma_R} \cdot d\vec{l}$.

Če predpostavimo homogeno polje v preseku A tako za generatorski medij, kot za breme, dobimo:

$$\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = U_g - \int_{L_1} \frac{I/A}{\gamma_g} \cdot dl - \int_{L_2} \frac{I/A}{\gamma_R} \cdot dl = U_g - I \frac{l}{\gamma_g A} - I \frac{l}{\gamma_R A} = 0.$$

Prvi člen je generatorska napetost, drugi člen predstavlja padec napetosti na notranji upornosti vira, tretji pa padec napetosti na bremenskem prevodniku (uporu):

$$U_g - IR_g - IR_R = 0.$$

Ugotovimo, da je ločevanje med generatorsko upornostjo in napetostjo mogoče le modelno, v realnosti pa sta ta dva elementa vezij integrirana v eni strukturi.

SLIKA: Tokokrog iz generatorskega in bremenskega dela.

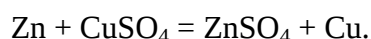
** Baterije.

Tak princip generacije naboja si lahko predstavljamo v bateriji (akumulatorju), kjer ločevanje naboja nastopa zaradi elektro-kemijskih reakcij.

Zn/Cu baterija. Vzemimo primer dveh elektrod, ene iz cinka (Zn) in druge iz bakra (Cu). Če med elektrodi vlijemo tekočino, ki ji rečemo elektrolit, med elektrodama zaradi elektrokemijske reakcije nastane t.i. galvanski člen. Če je elektrolit žveplena kislina H_2SO_4 , le ta v vodi disociira (tvorijo se ioni) na ione H^+ in SO_4^{2-} . H^+ ioni se nabirajo na bakrovi elektrodi, kjer tvorijo presežek pozitivnega naboja. Ioni SO_4^{2-} se nabirajo na cinkovi elektrodi, tam tvorijo cinkov sulfat in presežek negativnega naboja. Na Cu elektrodi se tvori presežek pozitivnega naboja. Vzpostavi se napetost, ki jo lahko izkoristimo kot generatorski vir napetosti. Ob priključitvi bremena (upora) na baterijo, v priključnih žicah steče tok (elektronov), ki zmanjšuje količino generiranega naboja. Elektrokemijska reakcija nadomešča porabo naboja dokler je v elektrolitu dovolj ionov ali dokler se cinkova elektroda ne iztroši.¹

SLIKA: a) Baterija iz bakrene in cinkove elektrode v elektrolitu iz razredčene žveplene kisline. b) Tok ob kratkem stiku elektrod.

Kemijsko bi lahko reakcijo zapisali



¹ Priznati je potrebno, da se napetost med dvema različnima kovinama pojavi že brez delovanja elektrolita, torej pri neposrednem stiku dveh kovin. Ta napetost je posledica različnih izstopnih del različnih kovin in je med drugim temperaturno odvisna. Zato stik dveh različnih kovinskih materialov izkoristimo kot senzor temperature. Tak spoj pa ne more delovati kot generator toka, razen v primeru, da na tak spoj delujemo z zunanjo silo. Na primer, da spoj segrevamo ali ohlajamo.

Vodikovi ioni imajo pomanjkanje elektrona, ki priteče iz tokokroga na bakrovo elektrodo (priključnih žic) kot električni tok. Vodikov ion pridobi iz bakrene elektrode elektron in se izloči iz elektrolita. temu procesu rečemo redukcija. Na cinkovi elektrodi se vrši oksidacija (izločanje presežnih prostih elektronov) pri čemer nastaja cinkov sulfat, ki se useda na dnu posode.

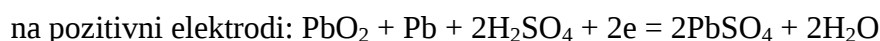
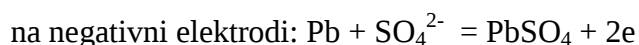
Faraday je z eksperimenti ugotovil, da je količina snovi, ki se nabere na elektrodah (v našem primeru baker) sorazmerna toku, ki steče skozi priključne žice. Količina elektrike, ki je potrebna za en ekvivalent kemične akcije (ki ustreza kemični reakciji potrebni za izločitev 1g vodika iz kisline) je enaka enemu Faradayju, kar ustreza naboju 96494 amperskih sekund. Za zgornjo reakcijo v kateri sta udeležena ena enota cinka in ena enota bakra ustreza generacija naboja 2 F ali 193 988 C.

Poskuse s podobno baterijo je prvi delal Alessandro Volta v Italiji, ki se po njem imenuje Voltova celica ali Voltin člen. Kovinske elektrode imajo negativen potencial glede na raztopino. Da bi jih lahko primerjali med seboj, jih primerjamo s potencialom t.i. referenčne elektrode, ki je iz platine z dodatki vodika. Tako primerjane elektrodne napetosti so za različne materiale sledeče:

zlato	1,5 V
platina	1,2 V
srebro	0,8 V
ogljje	0,74 V
baker	0,34 V
železo	-0,44 V
cink	-0,76 V
aluminij	-1,67 V

Če torej sestavimo t.i. galvanski člen iz elektrode iz bakra in cinka, bo med njima napetost $0,34 \text{ V} - (-0,76 \text{ V}) = 1,2 \text{ V}$.

Svinčeva baterija - akumulator. Druga znana baterija je svinčeva baterija, v kateri imamo dve elektrodi, ena iz svinca, druga pa iz svinčevega dioksida. Kot elektrolit nastopa razredčena žveplena kislina. Elektroda iz svinčevega dioksida ima za dobra 2 V višjo napetost od svinčeve. Z vezavo šestih takih celic zagotovimo baterijo z 12 - 14 V izhodno napetostjo (avtomobilski akumulator). Reakcija, ki poteka je sledeča:

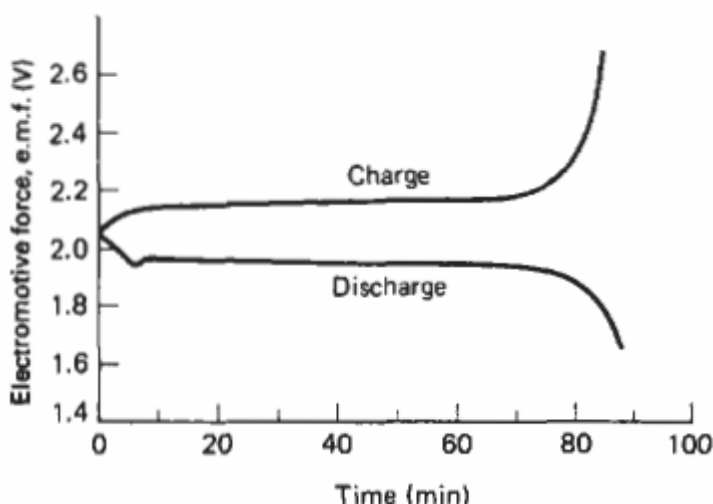


Na obeh elektrodah nastaja svinčev sulfat, kar pomeni, da je ob popolni razelektritvi napetost med elektrodama enaka nič. Kot vemo, je mogoče te tipe baterij ponovno naelektriti, pri čemer s tokom ustvarimo generacijo svinca na eni in svinčevega dioksida na drugi elektrodi. Proces je torej reverzibilen.



SLIKA: Baterija iz svinčeve elektrode in iz elektrode iz svinčevega dioksida.

Zanimivo je to, da se med razelektritvijo manjša, med naelektritvijo pa večja koncentracija kisline, medtem ko ostane napetost celice več ali manj konstanta. V tem smislu nam merjenje napetosti na akumulatorju ne predstavlja posebno natančnega merila »polnosti«.



SLIKA: Karakteristika naelektritve in razelektritve baterije (napetost – čas). Vir: T.R. Crompton: Battery reference book, Newnes, 2000.

Svinčene baterije so verjetno še vedno najbolj razširjene. Predvsem se uporabljajo v avtomobilski industriji. Njihova prednost pred ostalimi je nizka cena, visoka napetost na celico in »dobra« življenska doba (mnogokratno polnjenje). Slabosti pa velika teža, slabe nizko-temperaturne lastnosti in ne sme biti v stanju razelektritve za daljše obdobje.

V prodaji so tudi t.i. zaprti tip akumulatorjev (suhi), katerih prednost je, da jim ni potrebno dolivati elektrolita / destilirane vode. Pri standardnih svinčenih baterijah namreč lahko posebno pri koncu elektritve ali pri prekomerni naelektritvi pride do elektrolize žveplene kisline pri čemer se kreirata kisik in vodik, kar v končni konsekvenci lahko škodno vpliva na karakteristiko baterije. Novi tipi baterij omogočajo, da generiran kisik in vodik tvorita vodo. Pri razelektritvi ima svinčeva »celica« določeno notranjo upornost; standardni tip D ima pri napetosti celice 2 V notranjo upornost 10 mΩ.

Nikelj – kadmijeve baterije (Ni-Cd) so mehansko trdne in imajo dolgo življensko dobo. Imajo tudi dobro nizkotemperaturno karakteristiko in so hermetično zaprte. Imajo pa višjo ceno kot svinčene ali nikel-cinkove baterije. V grobem jih po izdelavi delimo na dva tipa: celice z debelimi ploščami v katerih je aktiven material stisnjen v perforiran metalni trak v

obliki žepkov ali tubusov, in na celice s sintranimi ploščami v katerih je aktivni material deponiran v porozne reže metala. Posebno slednje imajo majhno notranjo upornost in sposobnost velike obremenitve. Uporabljajo se na primer v biomedicinskih napravah, igračkah, itd. Vsebujejo toksične substance.

Nikelj – metal – hidridne baterije. Omogočajo večjo gostoto energije (energija na kilogram teže) vendar manjše število ponovnih polnenj kot nikel-kadmijeve baterije. Uporaba: mobilne naprave.

Litijeve-ionske baterije. Hiter razvoj, saj omogočajo zelo velike gostote energije in majhno težo. Uporaba: mobilni telefoni in prenosni računalniki. Litij je najlažji element od kovin, ima velik elektrokemijski potencial in omogoča največjo gostoto energije. Metalne litijeve baterije so se izkazale kot nevarne, saj se pri večkratnih polnjenjih slabša temperaturna karakteristika (stabilnost) litijeve elektrode. Ta tip so nadomestile litij – ionske baterije, ki so bolj varne: Prvo jih je komercialno začel izdelovati Sony leta 1991. Običajno je ena elektroda (anoda) iz grafita, druga (katoda) pa iz kobalta ali magnezija. Elektrolit je iz litijeve soli ([LiPF₆](#), [LiBF₄](#), or [LiClO₄](#)). Ena celica ima tipično napetost 3,6 V. Čas polnenja je tipično 3h. Komercialne Li-ionske baterije vsebujejo zaščitne elemente, na primer FET, ki odklopi baterijo, če je napetost višja od 4,3 V in varovalko, ki odklopi tok, če temperatura celice naraste na temperaturo višjo od 90°. Poleg tega ima še varovalo, ki permanentno odklopi celico, če se poveča pritisk v notranjosti celice nad določeno vrednost. Tipična »življenska doba« Li-ionskih baterij je 300 – 500 ciklov polnenja in praznenja ali dveletni od dneva proizvodnje. (Vir: Wiki in www.cadex.com).

	Nickel-cadmium	Nickel-metal-hydride	Lead-acid sealed	Lithium-ion cobalt	Lithium-ion manganese	Lithium-ion phosphate
Gravimetric Energy Density (Wh/kg)	45-80	60-120	30-50	150 - 190	100 - 135	90 - 120
Internal Resistance in mΩ	100 to 200 ¹ 6V pack	200 to 300 ¹ 6V pack	<100 ¹ 12V pack	150 - 300 ¹ pack 100 -130 per cell	25 – 75 ² per cell	25 – 50 ² per cell
Cycle Life (to 80% of initial capacity)	1500 ²	300 to 500 ^{3,4}	200 to 300 ³	300 - 500 ³	Better than 300 – 500 ⁴	>1000 lab conditions
Fast Charge Time	1 h typical	2 to 4 h	8 to 16 h	1.5 - 3 h	1 h or less	1 h or less
Overcharge Tolerance	moderate	low	high	Low. Cannot tolerate trickle charge.		
Self-discharge / Month (room temperature)	20% ⁵	30% ⁵	5%	<10% ⁵		
Cell Voltage Nominal Average	1.25V ⁷	1.25V ⁷	2V	3.6V 3.7V ⁶	Nominal 3.6V Average 3.8V ⁶	3.3V
Load Current peak best result	20C 1C	5C 0.5C or lower	5C ⁹ 0.2C	<3C 1C or lower	>30C 10C or lower	>30C 10C or lower
Operating Temperature ¹⁰ (discharge only)	-40 to 60°C	-20 to 60°C	-20 to 60°C	-20 to 60°C		
Maintenance Requirement	30 to 60 days	60 to 90 days	3 to 6 months ¹¹	not required		
Safety	Thermally stable, fuse recommended	Thermally stable, fuse recommended	Thermally stable	Protection circuit mandatory; stable to 150°C	Protection circuit recommended; stable to 250°C	Protection circuit recommended; stable to 250°C
Commercial use since	1950	1990	1970	1991	1996	2006
Toxicity	Highly toxic, harmful to environment	Relatively low toxicity, should be recycled	Toxic lead and acids, harmful to environment	Low toxicity, can be disposed in small quantities		

SLIKA: Primerjava baterij po gostoti energije, notranji upornosti, času polnenja, itd. Vir: www.cadex.com

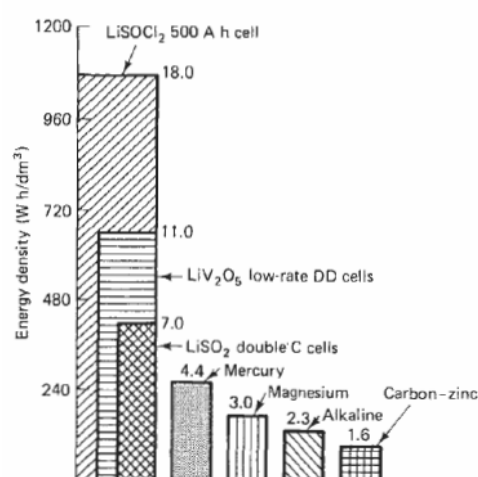
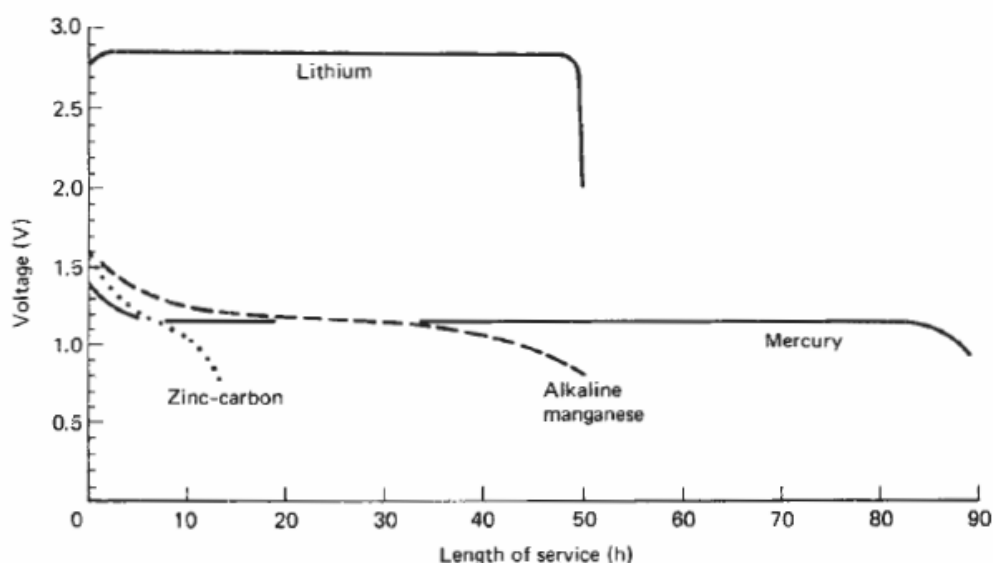


Figure 9.1 Comparison of energy density of lithium cells and other types of cell (Courtesy of Honeywell)

SLIKA: Primerjava prednosti Litijevih baterij pred ostalimi glede na gostoto energije. Vir: T.R. Crompton: Battery reference book, Newnes, 2000.



SLIKA: Napetostne karakteristike $V(t)$ razčnih tipov baterij. Vir: T.R. Crompton: Battery reference book, Newnes, 2000.

Galvani in Volta. Zanimiva je zgodba nastanka Voltinovega izuma, ki je povezana s poskusi Luigija Galvanjija, Voltinega sonarodnjaka, ki je presenečeno ugotavljal, da mrtvi žabji kraki reagirajo na dotik s kovino, kar je razlagal z živalsko elektriko. Volta je tej teoriji nasprotoval in dokazal, da je to posledica zunanje generirane napetosti, kar je tudi dokazal z uporabo elektrike shranjene v Leidenski flaši ali pa z bimetalom, torej s stikom dveh različnih kovinskih materialov. Dandanes vemo, da smo tudi ljudje sestavljeni iz celic, ki za svoje delovanje uporabljajo elektrokemijske principe in da je prenašanje signalov živčnih celic električne narave. Torej je imel delno Galvani prav, obstaja živalska elektrika, le da je bila njegova interpretacija napačna. V njegovem primeru je bil rezultat trzljaja električni sunek, ki je bil zunanje (ekstrinzično) in ne notranje kreiran. Voltini eksperimenti in dognanja so mu prinesli pomembna priznanja (nagrada Royal Society leta 1791, Copleyjeva nagrada leta 1794) in veliko slavo. Raziskave je nadaljeval v smeri povečanja napetosti, ki je bila zelo šibka (manj kot 1 V) in jo je bilo težko zaznati s tedaj najpopolnejšimi elektrometri. Uspelo mu je z zaporedno povezavo šalčk z elektrolitom in bimetalnimi elektrodami. Povezal je diske iz cinka in srebra ter vmes dodal šibko kislino ali slano vodo in dobil Voltino kaskado, pri kateri se je napetost na skrajnih koncih povečevala v sorazmerju s številom uporabljenih členov. Zgodovinsko je morda zanimivo, da je njegovo delo močno podprl Napolenon, ki mu je podelil naziv vitez (Conte) in dal



SLIKA: Voltine šalčke z elektrolitom in različnima elektrodama ter Voltina kaskada.

penzijo. Hkrati je Napoleon, ki se je zavedal pomena novih odkritij razpisal nagrado 60000 frankov za vsakogar, ki bi dosegel podobne dosežke kot Franklin in Volta. Leta 1881 na prvem internacionalnem električnem (elektrotehničnem) kongresu v Parizu, so v čast Volti po njemu poimenovali enoto za napetost.

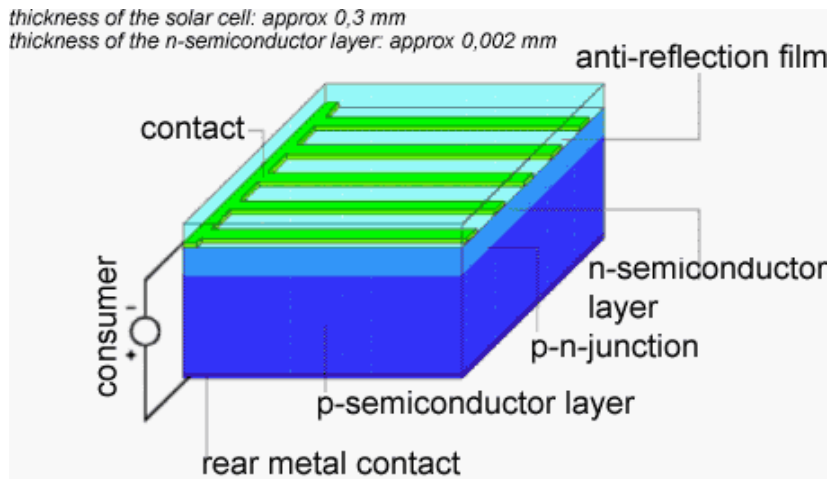
Obstaja mnogo načinov generiranja električne napetosti. Poleg baterij je najbolj pomemben princip uporabe generacija izmenične napetosti z elektrodinamskim načinom, ki pa ga bomo bolj natančno spoznali pri predmetu OE2.



SLIKA: Volta na »starem« bankovcu za 10000 lir.

**** Sončna celica.**

Osnovni princip delovanja sončne celice je generacija parov elektron - vrzel pod vplivom visoko energijskih sončnih žarkov. Vrzel predstavlja pomanjkanje elektronov v dopiranem polprevodniškem materialu oziroma nezaključene vezi med atomi polprevodnika in dopanta. Vrzel se obnaša ekvivalentno pozitivnemu naboju in lahko potuje po polprevodniku, če nanj deluje električna sila. Njeno potovanje pa je počasnejše, kot potovanje prostih elektronov (rečemo, da je mobilnost vrzeli manjša od mobilnosti vrzeli). Poleg tega je v polprevodnikih potrebno upoštevati tok, ki je posledica krajevne razlike v koncentracijah nabojev, tako elektronov kot vrzeli. Ravno ta tok povzroči, da pri stiku dveh polprevodnikov različnega tipa pride do prerazporeditve naboja in s tem do vgrajenega električnega polja.



SLIKA: Sončna celica sestavljena iz polprevodniškega pn spoja. Na površini je antirefleksni sloj, ki povečuje absorpcijo svetlobne energije. Vir: internet.

Čisti, nedopiran, polprevodniški material (recimo Si ali Ge) je izolator. Njegova specifična prevodnost je zelo majhna. Če pa ga dopiramo z določenimi atomi, recimo fosforja ali bora, se ti atomi vgradijo v kristalno strukturo silicija. Dopiranje se vrši na zelo visoki temperaturi (čez 1000°C). Z dopiranjem vnesemo v kristalno strukturo silicija atome (primesi), ki s sosednjimi atomi silicija tvorijo nezaključene vezi, kar v končni obliki pomeni, da je v primeru vgrajenega atoma fosforja na mestu fosforja višek elektrona, ki je zelo šibko vezan na atom in je praktično prosto gibljiv. Na ta način lahko s kontrolo množine (koncentracije) dopiranih atomov uravnavamo prevodnost polprevodniškega materiala. Tak tip polprevodnika imenujemo n (negative) tip. Kljub določeni koncentraciji prostih (šibko vezanih) elektronov v snovi, pa je ta material še vedno električno nevtralen. Če podobno dopiramo silicij z atomi bora, tvori atom bora z okoliškimi vezmi silicija nezaključeno vez, kar predstavlja pomanjkanje elektrona oziroma vrzel. Tak tip polprevodnika imenujemo p (positive) tip. Tudi tak tip polprevodnika je prevoden, le da je mobilnost vrzeli manjša kot mobilnost elektronov. Zanimiv pa je stik dveh polprevodnikov različnega tipa. Ob stiku se tvori t.i. pn spoj. Tu pride zaradi izenačenja potenciala na meji do prerazporeditve nabojev, kar pomeni, da postane del prevodnika na meji brez nosilcev naboja in s tem ne več nevtralen. Ostane vezan naboj, ki ustvari vgrajeno električno polje. To polje kaže od n-tipa proti p-tipu polprevodnika. To vgrajeno polje se veča z večanjem t.i. zaporne napetosti, torej tedaj, ko je na zunanji sponki n-tipa bolj pozitiven potencial kot na zunanji sponki p-tipu polprevodnika. V tem primeru skozi prevodnik teče le majhen, zaporni tok. V nasprotnem primeru pa zunanja napetost povzroči zmanjšanje vgrajenega polja in poveča prevodno progo. Ko zunanji vir vgrajeno polje (pri pn diodi iz Si pri cca. 0,7 V) izniči postane pn spoj prevoden in tok hitro (eksponentno) naraste. pn dioda je tipičen nelinearen element.

Kot smo že omenili je za delovanje sončne celice pomembna generacija parov elektron-vrzel. Če ta generacija nastopi v osiromašenem področju (kjer je vgrajeno polje), to polje potegne elektrone v nasprotni smeri polja, vrzeli (pozitivni naboj) pa v smeri polja. Ti naboji predstavljajo zmanjšanje vgrajenega polja vendar obenem presežek negativnih nabojev v n-tipu in presežek vrzeli v p-tipu polprevodnika. Povzročijo neravnotežje, ki ga lahko zmanjšamo, če tako diodo kratko sklenemo ali pa, če nanjo priključimo določeno breme. Skozi breme steče tok, ki povzroči ponovno vzpostavitev ravnotežja. Če je fotogeneracija konstantna, je konstanten tudi tok, ki teče skozi priključeno breme. Dobili smo generator toka. Več toka bomo seveda dobili če bo večja generacija parov elektron-

vrzel, kar lahko omogočimo tako z izboljšanjem materialov kot z večjo površino celice, ki je izpostavljena soncu. Osnovni princip je ta, da je potrebno povečati osiromašeno področje, kjer je vgrajeno polje in omogočiti, da v to področje »zaide« čim več fotonov sončne svetlobe. Ena od idej je, da se med p in n tipom polprevodnika obdrži nedopiran (intrinzični) tip silicija, v katerem je osiromašeno področje zelo veliko. Težava, ki jo je potrebno upoštevati je ta, da se sončna svetloba v polprevodnikih tipa Si ali Ge zelo hitro absorbira, torej že v površinskem sloju. Kar pomeni, da je potrebno osiromašeno področje zagotoviti zelo blizu površine. Itd...

Običajno je tako, da je najvažnejše razmerje med ceno celico in sposobnostjo generacije električnega toka in ne med izkoristkom celice. Ceneje kot iz čistega silicija je izdelovanje sončnih celic iz amorfnega silicija ali polisilicija. V Sloveniji je začelo izdelovati panele s sončnimi celicami podjetje Biosol.

Osnove elektrotehnike 1, VSŠ

Osnovna izpitna vprašanja za ustni izpit (Križaj)

1. Enosmerna vezja

1. Kirchhoffova zakona: enačbi, katere lastnosti polja popisujeta, razlaga, uporaba.
2. Vezave Ohmskih uporov, nadomestna upornost: izpeljava, primeri.
3. Viri električnega toka: definicija, idealni, realni, UI karakteristika realnega vira, delovna točka.
4. Moč: izračun iz napetosti, toka, upornosti, izračun dela iz moči, moč na bremenu priključenem na realni vir, izkoristek, maksimalna moč na bremenu.
5. Merilni inštrumenti: notranja upornost, razširitev merilnega območja.
6. Analiza vezij: graf, drevo, veja, spojišče,
7. Neposredna uporaba Kirchhoffovih zakonov pri analizi električnih vezij: definicija, graf, drevo, veja, spojišče, neodvisne enačbe, matrični zapis, primer.
8. Metoda spojiščnih potencialov pri analizi električnih vezij.
9. Metoda zanjnih tokov pri analizi električnih vezij.
10. Metoda superpozicije.
11. Theveninov teorem ali teorem nadomestnega napetostnega vira: definicija, razlaga, primer.
12. Nortonov teorem ali teorem nadomestnega tokovnega vira: definicija, razlaga, primer.
13. Tellegenov teorem.

2. Elektrostatično polje

1. Zakon o ohranitvi naboja.
2. Tok kot časovna sprememba količine naboja (kontinuitetna enačba)
3. Povezava med tokom in nabojem (izračun toka pri znani časovni spremembi množine naboja in izračun množine naboja pri znani časovni spremembi toka)
4. Sila na točkaste naboje – Coulombov zakon: velikost sile, smer, dielektričnost vakuumu, odbojna in privlačna sila.
5. Električna poljska jakost: definicija, izpopolnjena definicija z limito, superpozicija.
6. Porazdelitve nabojev: linijska ali vzdolžna, površinska, volumska. povezava med nabojem in gostoto naboja.
7. Električna poljska jakost porazdeljenih nabojev.: izraz in princip uporabe.
8. Enačbe za polje v okolici točkastega naboja, naelektrene premice (preme elektrine), naelektrene daljice, v središču naelektrenega obroča, v osi naelektrenega obroča, naelektrene ravnine.
9. Gaussov zakon: razlaga in primeri. Izvornost električnega polja.
10. Delo in potencialna energija elektrostatičnega polja: definicija za izračun dela iz sile, pomen skalarnega produkta pri izračunu, delo električne sile in delo zunanje sile, delo po zaključeni poti, delo pri prenosu naboja do neskončnosti, povezava med delom in potencialno energijo.
11. Potencial: definicija in primer izračuna, potencial sistema točkastih nabojev, potencial v okolici porazdeljenih nabojev, potencial kot skalarno polje, ekvipotencialne ravnine.
12. Električna napetost: definicija, povezava med napetostjo in potencialom. Potencialnost polja (Kirchhoffov zakon).
13. Osnovni primeri izračuna potenciala, napetosti, polja in kapacitivnosti za: ploščni, valjni (koaksialni) in krogelni (sferični) kondenzator.
14. Prevodnik v električnem polju: polje znotraj prevodnika, potencial na površini prevodnika, elektrostatična indukcija, polje v votlini prevodnika, Faradayeva kletka, okovinenje ekvipotencialk, električno polje na površini prevodnika.

15. Zveza med poljem in potencialom: povezava v »obe smeri«. Primeri izračunov polja iz znane porazdelitve potenciala.
16. Gibanje nabojev v električnem polju: sila, pospešek, hitrost, energija, smer leta, kinetična in potencialna energija naboja.
17. Električni dipol: dipolni moment, dipol v homogenem in nehomogenem polju, potencial in polje v okolici dipola, navor na električni dipol.
18. Okovinjene ekvipotencialnih ravnin: primer dveh premih nabojev, dva naelektrena valja z in brez upoštevanja ekscentričnosti.
19. Metoda zrcaljenja: zrcaljenje različnih naelektrenih teles, izračun polja na zemlji, sistem daljnovodnih vrvi, zrcaljenje točkastega naboja na ozemljeni kovinski krogli.
20. Kapacitivnost: definicija, izrazi za kapacitivnost osnovnih struktur. Zaporedna in vzporedna vezava kondenzatorjev.
21. Kondenzatorska vezja: princip računanja.
22. Dielektrik v električnem polju: razlaga spremembe kapacitivnosti ob vložitvi dielektričnega lističa pri konstantni napetosti med ploščama ali pri konstantnem naboju na ploščama kondenzatorja.
23. Vektor polarizacije, površinska gostota polariziranega naboja, povezava med E in P , električna susceptibilnost.
24. Gostota električnega pretoka: definicija, povezava med D , E in P , povezava med D in E .
25. Modificiran Gaussov zakon.
26. Mejni pogoji: z upoštevanjem in brez upoštevanja prostega površinskega naboja, »lomni zakon«.
27. Energija: energija posameznega naboja pri preletu naboja v polju, energija sistema nabojev, povezava med delom in energijo sistema, energija v polju kondenzatorja, gostota energije in povezava med silo in energijo.

3. Časovno konstantno tokovno polje

1. Gostota toka.
2. Definicija časovno konstantnega polja.
3. 1. in 2. Kirchoffov zakon iz integralnih enačb
4. Konduktivni in konvektivni tok.
5. Ohmov zakon v diferencialni obliki in prehod v integralno obliko.
6. Specifična prevodnost in upornost, upornost pri homogeni gostoti v prevodniku, temperaturna odvisnost specifične upornosti.
7. Joulov zakon.
8. Mejni pogoji v tokovnem polju
9. Dualnost tokovnega in elektrostaticnega polja: primer uporabe.
10. Vir napetosti: elektrostaticno polje in generatorska sila.