9. Koordinatni sistemi

Vsebina: kartezični, valjni (cilindrični) in krogelni (sferični) koordinatni sistem. Točka v koordinatnem sistemu. Diferencialni elementi v koordinatnih sistemih.

Zakaj uporabljati več koordinatnih sistemov (KS), če nam je kartezični koordinatni sistem (KKS) najbolj poznan in najbolj razumljiv? Odgovor je preprost: zato, ker je v določenih primerih izračun mnogo bolj preprost z izbiro drugačnega koordinatnega sistema. Na primer, če je naboj porazdeljen po površini valja. Sama po sebi se ponuja najboljša izbira za matematični opis porazdelitve naboja uporaba valjnega koordinatnega sistema, itd.

Za koordinatne sisteme, ki jih obravnavamo mi, je značilno to, da so vse ravnine med sabo pravokotne. Takim koordinatnim sistemom rečemo ortogonalni.

Kartezični koordinatni sistem (KKZ)

Točko v koordinatnem sistemu določimo s presekom treh ravnin. V KKS so to tri ravnine:

$$x = x_1$$
$$y = y_1 \; .$$
$$z = z_1$$

Koordinate v KKS določa trojček (x,y,z).

SLIKA: Kartezični koordinatni sistem.

Vzdolž vsake osi lahko določimo diferencial dolžine. Dobimo ga z limitiranjem (zmanjševanjem proti nič) majhnega dela dolžine: $\mathrm{d}l = \lim\limits_{\Delta L \to 0} \Delta L$. V smeri osi X je to d$x$, v smeri osi Y je d$y$ in v smeri Z je dz. V splošnem lahko **diferencial poti** v KKS zapišemo kot vektor:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{l} &= \vec{e}_x \mathrm{d}x + \vec{e}_y \mathrm{d}y + \vec{e}_z \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\vec{l} &= (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \end{aligned} \; .$$

Če pomnožimo vse tri diferenciale dolžine dobimo majhen – **diferencialen volumen** zapisan v obliki

$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$.

Ploskvice tega diferencialnega volumna imenujemo **diferenciali ploskev** in so $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z$ in $\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$. Pogosto jim bomo dodali še smer, ki bo pravokotna na površino. To imenujemo **smer normale** na površino. Kvadratku površine $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$ bi torej pripisali smer osi Z. Velja torej:

$$\mathrm{d}\vec{A}_x = \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{x}\, \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}\vec{A}_y = \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{y}\, \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{A}_z = \vec{\mathrm{e}}_z \,\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

SLIKA: Smer normale.

Primeri: ….

Valjni (cilindrični) koordinatni sistem (CKS).

Točka je v valjnem koordinatnem sistemu določena s presekom treh ravnin

$$r = r_1$$

$$\varphi = \varphi_1$$

$$z = z_1$$

Prva ravnina je plašč valja, druga je polravnina okoli Z osi, ki jo določa kot φ, tretja pa ravnina z eno vrednostjo koordinate Z. Koordinate v CKS sestavlja torej trojček (r, φ, z).

Diferencial poti je

$$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_r \,\mathrm{d}r + \vec{e}_\varphi r \,\mathrm{d}\varphi + \vec{e}_z \,\mathrm{d}z \,.$$

Diferenciali površine so

$$\mathrm{d}\vec{A}_r = \vec{e}_r r \,\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z \,,$$

$$\mathrm{d}\vec{A}_\varphi = \vec{e}_\varphi \,\mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}z \,,$$

$$\mathrm{d}\vec{A}_z = \vec{e}_z r \,\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r \,.$$

Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri osi R (rotacijska simetrija), V tem primeru je diferencial v smeri osi Z določen z $\mathrm{d}A_z = 2\pi r \,\mathrm{d}r$

Diferencial volumna je

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \, r \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \,.$$

SLIKA: Valjni koordinatni sistem.

Primer: Določimo ploščino diska z notranjim polmerom 1 cm in zunanjim polmerom 6 cm.
Izračun: Vzamemo diferencial površine, ki kaže v smeri osi Z in zapišemo dvojni integral

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{1\,\mathrm{cm}}^{6\,\mathrm{cm}} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{1\mathrm{cm}}^{6\mathrm{cm}} r \,\mathrm{d}r = 2\pi \left.\frac{r^2}{2}\right|_{1\,\mathrm{cm}}^{6\,\mathrm{cm}} = \pi\left[(6\,\mathrm{cm})^2 - (1\,\mathrm{cm})^2\right] = \underline{\underline{35\pi\ \mathrm{cm}^2}} \,.$$

Primer: Po površini plašča valja višine 2 m polmera 5 cm se spreminja površinska gostota naboja z izrazom $\sigma = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mu\mathrm{C/m^2}$. Določimo naboj na plašču valja.

Izračun: Uporabimo zvezo $Q = \int_A \sigma \mathrm{d}A$, kar v našem primeru pomeni

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\mathrm{m}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mu\mathrm{C/m^2}\cdot r\cdot \mathrm{d}\varphi\cdot \mathrm{d}z = 5\,\mathrm{cm}\cdot\left(-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot 2\right)_0^{2\pi}\mu\mathrm{C/m}\cdot 2\,\mathrm{m} =$$

$$0{,}1\cdot 4\,\mu\mathrm{C} = \underline{\underline{0{,}4\,\mu\mathrm{C}}}.$$

Krogelni (sferični) koordinatni sistem (SKS).

Točka je v krogelnem koordinatnem sistemu določena s presekom treh ravnin

$r = r_1$

$\vartheta = \vartheta_1$

$\varphi = \varphi_1$

Prva ravnina je plašč krogle, druga je površina stožca (kjer je ϑ (theta) kot od Z osi navzdol), tretja pa polravnina znana iz CKS. Koordinate v SKS sestavlja torej trojček (r, ϑ, φ).

Diferencial poti je

$$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_r \mathrm{d}r + \vec{e}_\vartheta r \mathrm{d}\vartheta + \vec{e}_\varphi r\sin(\vartheta)\mathrm{d}\varphi .$$

Diferenciali površin so

$$\mathrm{d}\vec{A}_r = \vec{e}_r r^2 \sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi ,$$

$$\mathrm{d}\vec{A}_\vartheta = \vec{e}_\vartheta r\sin(\vartheta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r ,$$

$$\mathrm{d}\vec{A}_\varphi = \vec{e}_\varphi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta .$$

Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri osi R (rotacijska simetrija). V tem primeru je diferencial v smeri osi R določen z $dA_\vartheta = 4\pi r\mathrm{d}r$

Diferencial volumna je

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin(\vartheta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi .$$

SLIKA: Krogelni koordinatni sistem.

Primer: Določimo ploščino krogle polmera *R*.

Izračun: Vzamemo diferencial volumna krogle $\mathrm{d}V = r^2 \sin(\vartheta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$ in ga integriramo

$$V=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin(\vartheta)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi=\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R\cdot\left.(-\cos(\vartheta))\right|_0^\pi\cdot\left.\varphi\right|_0^{2\pi}=\underline{\underline{\frac{4\pi R^3}{3}}}\,.$$

Povzetek diferencialov poti, površine in volumnov za kartezični, valjni in krogelni koordinatni sistem:

	Kartezični k.s.	Cilindrični k.s.	Sferični k.s.
$\mathrm{d}l$	$\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z$	$\mathrm{d}r, r\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}z$	$\mathrm{d}r, r\mathrm{d}\vartheta, r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi$
$\mathrm{d}A$	$\mathrm{d}x.\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x.\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}y.\mathrm{d}z$	$r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}r\mathrm{d}z$, $r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$	$r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}r$, $r\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, $r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$
$\mathrm{d}V$	$\mathrm{d}x.\mathrm{d}y.\mathrm{d}z$	$r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$	$r^2\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$

Tudi pri GPS signalih se uporabljajo ustrezni koordinatni sistemi. Več:
http://www.navigator.si/povezave/koordinatni_sistemi.htm
Kartezični kordinatni sistem: http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system
Polarni koordinatni sistem: http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system

Vprašanja za obnovo:

1. Točko v prostoru določimo s presekom treh ravnin. Katere ravnine so to v primeru kartezičnega, valjnega in krogelnega koordinatnega sistema?
2. Kako bi zapisali enačbo za izračun volumna kvadra v kartezičnem koordinatnem sistemu in kako določili naboj v njem iz poznane volumske gostote naboja?
3. Določite izraz za obseg kroga z uporabo integrala diferenciala poti po krožnici z uporabo cilindričnega koordinatnega sistema.
4. Ponovite diferenciale poti, površin in volumnov v treh obravnavanih koordinatnih sistemih.