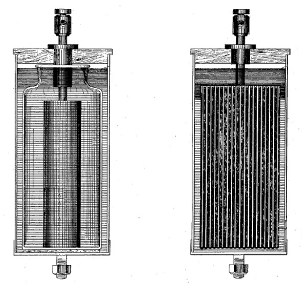
20. Kapacitivnost

Vsebina poglavja: definicija kapacitivnosti, kondenzator, merjenje in računanje kapacitivnosti, kapacitivnost osnovnih struktur, zaporedna in vzporedna vezava kondenzatorjev, analiza vezij s poljubno vezavo kondenzatorjev.

V prejšnjem poglavju smo že spoznali **sorazmerje med količino naboja med dvema prevodnima telesoma in napetostjo med njima**. **Faktor sorazmernosti imenujemo kapacitivnost.** Ali z drugimi besedami: večanje napetosti med prevodnima telesoma povzroči sorazmerno povečanje naboja. V matematični obliki pa to zapišemo kot

$Q = C\left(V_A - V_B\right)$ oziroma $\boxed{Q = CU}$, od koder je $\boxed{C = \dfrac{Q}{U}}$

SLIKA: Kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma.



Kondenzator, ki ga je patentiral Nikola Tesla leta 1896, US567818.
http://en.wikipedia.org/wiki/Capacitor

Kondenzator kot koncentriran element. Simbol in enota za kapacitivnost.

Dve poljubni prevodni telesi lahko prikažemo kot električni sistem, ki ga imenujemo kondenzator. Kljub temu, da iz srednješolske fizike (elektrotehnike) že poznamo simbol za kondenzator, ga omenimo še enkrat. Simbol za kondenzator sta torej dve vzporedni enako dolgi daljici, prečno na vodnika, razmaknjeni za malo razdaljo. Če je med telesoma priključimo napetost U, se bo na telesu priključenem na + sponko vira nakopičil naboj $+Q$, na telesu priključenem na negativno sponko pa naboj $-Q$. Velja zveza $\pm Q = CU$. C imenujemo kapacitivnost sistema, sistem, ki »shranjuje« naboj pa kondenzator. Enota za kapacitivnost je farad (F), v čast pomembnemu znanstveniku in raziskovalcu Michaelu Faraday-u. Pogosto tudi enoto za dielektričnost vakuuma ε_0 označujemo z enoto F/m.

Zanimivo je to, da na prvi pogled na kapacitivnost med dvema telesoma vpliva napetost in naboj na telesih, v resnici pa ni tako. **Kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma v zraku je odvisna le od geometrijskih značilnosti teles (oblike teles in postavitve)**.

SLIKA: Simbol za kondenzator.

*** Merjenje kapacitivnosti.**
Kako bi določili kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma? Eksperimentalno bi to lahko naredili tako, da bi ti dve telesi naelektrili z znanim nabojem in izmerili napetost, ki se pojavi med telesoma. Kapacitivnost bi določili iz razmerja $C = \frac{Q}{U}$.

Preprosti univerzalni merilni inštrumenti določajo kapacitivnost s pomočjo znanega tokovnega vira in merjenjem (časovne spremembe) napetosti. Iz kontinuitetne enačbe $i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ in $Q = CU$ dobimo $i = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$. Pri elektrenju s konstantnim tokom je sprememba napetosti v določenem času sorazmerna $1/C$. V primeru idealnega kondezatorja narašča napetost linearno. Take meritve so lahko zelo nenatančne v primeru, ko kondenzator ni idealen (kar pogosto drži). Težave povzročajo predvsem uporovne lastnosti kondenzatorjev.
Nekoliko izpopolnjen način upošteva še uporovne lastnosti kondenzatorja. V tem primeru napetost ne narašča linearno, pač pa eksponentno. Iz eksponentnega naraščanja se določi časovna konstanta in upošteva pri izračunu kapacitivnosti. Seveda je potrebno kondenzator pred meritvijo razelektriti. To lahko naredimo tako, da ga izpraznemo preko upora ali pa nanj priključimo izmenični tokovni signal. Več informacij najdete na spletnih straneh[*].

Za natančnejše meritve se uporablja izmeničen vir, pogosto tudi v kombinaciji z mostičnim vezjem. Več o tem v naslednjem semestru.

Računanje kapacitivnosti.
V principu smo že doslej sproti opozarjali na kapacitivnost, ko smo izračunavali napetost med naelektrenima telesoma in je bila le-ta sorazmerna naboju: $U = Q\frac{1}{C}$. Matematično torej določimo kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma tako, da predpostavimo, da sta telesi naelektreni z nabojema $+Q$ in $-Q$ ter izračunamo napetost med njima. Kapacitivnost pa je enaka kvocientu naboja in izračunane napetosti: $C = \frac{Q}{U}$.

(Pogosto za računanje kapacitivnosti uporabljamo numerične metode, kjer izračunamo polje in potencial v prostoru med objektoma. V takem primeru uporabimo lahko za izračun kapacitivnosti tudi izraz za električno energijo, shranjeno v kondenzatorju. Več v nadaljevanju.)

[*] Več o meritvah kapacitivnosti: http://www.mobilehandsetdesignline.com/howto/192300586
http://www.repairfaq.org/REPAIR/F_captest.html#CAPTEST_004

Kapacitivnosti osnovnih struktur.

Uporabili bomo ugotovitve iz poglavja o potencialu in napetosti osnovnih struktur in določili kapacitivnosti. Poiskati moramo le povezavo med U in Q pri različnih strukturah.

Kapacitivnost zračnega ploščatega kondenzatorja.

$U = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$ oziroma $U = \frac{QA}{\varepsilon_0} d$, kjer je A površina ene plošče, d pa razdalja med njima. Kapacitivnost je

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}.$$ KAPACITIVNOST PLOŠČNEGA ZRAČNEGA KONDENZATORJA

Dobili smo enačbo, ki jo poznamo že iz srednješolske fizike (elektrotehnike).

Kapacitivnost zračnega koaksialnega kabla

$U = \int_{r_n}^{r_0} \vec{E} \cdot \vec{e}_r \mathrm{d}r = \int_{r_n}^{r_0} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r \mathrm{d}r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_n}$, kjer je r_n polmer žile, r_0 pa notranji polmer oklopa. Kapacitivnost je

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{ql}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{r_0}{r_n}}}.$$ KAPACITIVNOST ZRAČNEGA KOAKSIALNEGA KABLA

Kapacitivnost zračnega sferičnega kondenzatorja

Napetost med sferama s polmeroma r_n in r_z je

$U = \int_{r_n}^{r_z} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_n}^{r_z} \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{r_n}^{r_z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right)$. Kapacitivnost je torej

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right)}}.$$ KAPACITIVNOST ZRAČNEGA SFERIČNEGA KONDENZATORJA

Iz zgornje enačbe lahko določimo še **kapacitivnost osamljene prevodne krogle**, ki je $(r_z \to \infty)$:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 r_n}.$$ KAPACITIVNOST OSAMLJENE PREVODNE KROGLE

Kapacitivnost med valjem in zemljo

Z zanemaritvijo ekscentričnosti smo dobili zvezo med napetostjo in linijsko gostoto naboja: $U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{d - r_0}{r_0} \right)$. Kapacitivnost je:

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=\frac{ql}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}}.$$

KAPACITIVNOST MED PREVODNIM VALJEM IN ZEMLJO

d je razdalja med geometrijskima središčema dveh valjev. Tistega nad zemljo in prezrcaljenega. Če se torej valj nahaja na višini h nad zemljo bo $d/2=h+r_0$ in enačbo za izračun kapacitivnosti med prevodnim valjem nad zemljo lahko zapišemo tudi v obliki:

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=\frac{ql}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{2h+r_0}{r_0}\right)}}.$$

SLIKA: Prevodni valj nad zemljo.

Kapacitivnost med dvema valjema

Napetost med dvema valjema je 2x večja kot med valjem in zemljo: $U=\frac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$, torej bo kapacitivnost med valjema (ob zanemaritvi ekscentričnosti):

$$\boxed{C=\frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}}.$$

KAPACITIVNOST MED PREVODNIMA VALJEMA

SLIKA: Dva prevodna valja.

Kondenzatorska vezja

Zaporedna vezava kondenzatorjev.
Narišimo sliko zaporedno vezanih več kondenzatorjev. Med skrajnima sponkama je napetost U, torej bo na pozitivni sponki naboj $+Q$, na negativni pa $-Q$, zveza med njima pa je $Q=CU$. Tudi na vsakem posameznem zaporedno vezanem kondenzatorju bo enako velik naboj, saj bo med dvema sosednjima kondenzatorjema prišlo le do prerazporeditve naboja. Na plošči kondenzatorja, ki je bliže negativni sponki vira, se bo nakopičil negativen naboj (-Q), na drugi plošči kondenzatorja pa hkrati pozitiven naboj. Hkrati bo prišlo do prerazporeditve naboja tudi na ostalih zaporedno vezanih kondenzatorjih. Torej velja: $Q_1=Q_2=.....Q_n=Q$. Celotna napetost bo vsota posameznih padcev napetosti: $U=U_1+U_2+\cdot\cdot U_n$, kar lahko izrazimo z nabojem in kapacitivnostjo kondenzatorjev $U=\frac{Q}{C}=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}+...\frac{Q}{C_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{Q}{C_i}$. Če enačbo delimo z nabojem Q, dobimo:

$$\boxed{\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+...\frac{1}{C_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}}$$ KAPACITIVNOST ZAPOREDNO VEZANIH KONDENZATORJEV

SLIKA: Zaporedna vezava kondenzatorjev.

Primer: Določite nadomestno kapacitivnost zaporedne vezave treh kondenzatorjev: 1 nF, 2 nF in 5 nF.

Izračun: $\frac{1}{C}=\frac{1}{1\,\text{nF}}+\frac{1}{2\,\text{nF}}+\frac{1}{5\,\text{nF}}=\frac{10+5+2}{10\,\text{nF}}=\frac{17}{10\,\text{nF}}$, $C=\frac{10}{17}\,\text{nF}\cong\underline{\underline{0{,}588\,\text{nF}}}$.

Velja si zapomniti, da je nadomestna kapacitivnost zaporedno vezanih kondenzatorjev vedno manjša od vsake posamezne kapacitivnosti. V konkretnem primeru je najmanjša 1 nF, torej bo skupna gotovo manjša od 1 nF. Kako si to razložimo? Preprosto iz ugotovitve, da je kapacitivnost razmerje med nabojem in napetostjo. Več kot je kondenzatorjev vezanih zaporedno, večji je skupni padec napetosti, obenem pa se naboj ne spreminja. Števec torej ostaja enako velik, imenovalec pa se veča in posledično se manjša kapacitivnost.

Vzporedna vezava kondenzatorjev.
Pri vzporedni vezavi kondenzatorjev je na vseh kondenzatorjih enaka napetost, naboj pa je sorazmeren kapacitivnosti vsakega posebej:

$Q=CU=Q_1+Q_2+\cdots+Q_n=C_1U+C_2U+\cdot\cdot+C_nU=\left(C_1+C_2+\cdot\cdot+C_n\right)U$, torej bo

$$\boxed{C=C_1+C_2+\cdot\cdot+C_n=\sum_{i=1}^{n}C_i}.$$ KAPACITIVNOST VZPOREDNO VEZANIH KONDENZATORJEV

SLIKA: Vzporedna vezava kondenzatorjev.

Primer: Med dvema ravnima vzporednima ploščama površine 100 cm^2 je razdalja 2 cm.
a) Določite kapacitivnost med ploščama.
b) Za koliko se kapacitivnost poveča/zmanjša, če plošči razmaknemo za trikratno razdaljo?
c) Za koliko se kapacitivnost poveča/zmanjša, če površino plošč povečamo za trikrat?
d) Za koliko se skupna kapacitivnost poveča/zmanjša, če ploščama zaporedno priključimo še 2 enako velika kondenzatorja?

Izračun:
a) Kapacitivnost med ploščama je

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2}{0{,}02\,\mathrm{m}} = 4{,}427 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F} = \underline{\underline{4{,}427\ \mathrm{pF}}}.$$

b) Če plošči razmaknemo za 3x, se poveča razdalja d za 3x, torej bo posledično kapacitivnost 3x manjša: $C = \varepsilon_0 \dfrac{A}{3d} \cong \underline{\underline{1{,}48\ \mathrm{pF}}}$.

c) Če povečamo površino plošč za 3x, bo kapacitivnost trikrat večja: $C = \varepsilon_0 \dfrac{3A}{d} \cong \underline{\underline{13{,}3\ \mathrm{pF}}}$.

d) Če ploščama zaporedno priključimo še dva enaka kondenzatorja, bo skupna kapacitivnost 3x manjša: $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_1} = \dfrac{3}{C_1} \Rightarrow C = \dfrac{C_1}{3} \cong \underline{\underline{1{,}48\ \mathrm{pF}}}$. Ugotovimo, da je zaporedna vezava treh enakih kondenzatorjev ekvivalentna povečanju razdalje med ploščama enega za 3x. Hkrati je vzporedna vezava enakih kondenzatorjev ekvivalentna povečanju površine plošč enega kondenzatorja.

Preprosta kondenzatorska vezja so kar vzporedne in zaporedne vezave kondenzatorjev. V tem primeru moramo ob upoštevanju zveze $Q = CU$ vedeti le to, da je skupna (nadomestna) kapacitivnost vzporedne vezave kondenzatorjev vsota posameznih kapacitivnosti in da moramo pri zaporedni vezavi seštevati inverzne vrednosti.

Primer: Zaporedni vezavi kondenzatorjev C_1 = 1 nF in C_2 = 2 nF priključimo vzporedno še kondenzator C_3 = 2 nF. Določimo naboj na kondenzatorju C_2, če vezje priključimo na napetost 100 V.

SLIKA: Vezava kondenzatorjev.

<u>Izračun:</u> Določimo nadomestno skupno kapacitivnost, ki je $C_{12} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{1 \cdot 2}{1+2}\ \text{nF} \cong 0,67\ \text{nF}$. $C_{nad} = C_{12} + C_3 \cong 0,67\ \text{nF} + 2\ \text{nF} = 2,67\ \text{nF}$.

Naboj na Q_3 je $Q_3 = C_3 U_3 = C_3 \cdot 100\ \text{V} = 267\ \text{nC}$.

Koliko naboja pa je na Q_2?

Zaradi zaporedne vezave kondenzatorjev C_1 in C_2, je naboj na kondenzatorju C_2 enak naboju na C_1 in tudi na zaporedni skupni vezavi, torej $Q_2 = C_{12} U \cong 0,67\ \text{nF} \cdot 100\ \text{V} = \underline{\underline{67\ \text{nC}}}$.

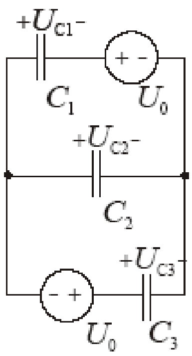
Enačbe potrebne za analizo splošnega kondenzatorskega vezja.

Kako pa bi analizirali vezje z več kondenzatorjev in virov, ko ni mogoče preprosto vzporedno in zaporedno seštevati kondenzatorje? V tem primeru je potrebno napisati sistem enačb ob upoštevanju osnovnih zakonitosti (potencialnost elektrostatičnega polja in zakon o ohranitvi naboja):

1) Vsota vseh napetosti v zaključeni zanki je enaka nič: $U_{\text{zanke}} = \sum_i U_i$.
2) Vsota nabojev v spojišču je enaka nič: $Q_{\text{spojisca}} = \sum_i Q_i$.

<u>Primer naloge iz kolokvija 11.1.2002 (VSŠ):</u>

2. Določite napetosti na kondenzatorjih!
($C_1 = 6\mu\text{F}$, $C_2 = 6\mu\text{F}$, $C_3 = 6\mu\text{F}$, $U_0 = 12$ V)



Glede na smeri napetosti lahko zapišemo dve enačbi z upoštevanjem Kirchoffovega zakona: $U_{C1} + U_0 - U_{C2} = 0$ in $U_{C2} - U_{C3} + U_0 = 0$. Poleg tega lahko zapišemo enačbo ohranitve naboja. Naboj se le prerazporeja iz ene elektrode kondenzatorja na druge. Veljati mora $Q_{C1} + Q_{C2} + Q_{C3} = 0$. To enačbo lahko izrazimo z napetostmi $C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 = 0$ in tako dobimo sistem treh enačb za tri neznane napetosti na kondenzatorjih.

V rešitvi kolokvija je uporabljen nekoliko bolj »eleganten« način z vpeljavo spojiščnega potenciala.

2. Desno spojišče vezja ozemljimo, levo spojišče se nahaja na potencialu V.

Zapišimo napetosti:

$U_{C1} = V - U_0$

$U_{C2} = V$

$U_{C3} = V + U_0$

Zapišimo vsoto nabojev v levem vozlišču:

$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$

$C_1 \cdot (V - U_0) + C_2 \cdot V + C_3 \cdot (V + U_0) = 0$

$$V = \frac{U_0 (C_1 - C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = 0\,\mathrm{V}$$

in iz nje izrazimo potencial V. Tako dobimo:

$U_{C1} = V - U_0 = -U_0 = -12\,\mathrm{V}$

$U_{C2} = V = 0\,\mathrm{V}$

$U_{C3} = V + U_0 = U_0 = 12\,\mathrm{V}$

Vprašanja za obnovo:

1. Kako je definirana kapacitivnost?
2. Od česa je odvisna kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma v zraku?
3. Kako izračunamo (določimo) kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma?
4. Ponovite izraze za kapacitivnost osnovnih struktur.
5. Nadomestna kapacitivnost zaporedne, vzporedne in kombinirane vezave.
6. Kako v splošnem analiziramo kondenzatorska vezja?