

15. Zveza med E in V

Vsebina: povezava med električno poljsko jakostjo in potencialom, smer polja v smeri padanja potenciala, gradient polja, izračun gradienta v različnih koordinatnih sistemih.

Če poznamo porazdelitev električnega polja v prostoru, lahko z integracijo polja izračunamo potencial v poljubni točki:

$$V(T) = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Vprašajmo se, ali lahko tudi iz znane porazdelitve potenciala določimo električno polje? Odgovor je seveda pritrdilen, uporabiti pa je potrebno nasprotno operacijo od integracije.¹ Najprej zapišemo diferencial potenciala kot $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$. Vzdolž ekvipotencialne ploskve je električna poljska jakost enaka nič. Torej je električna poljska jakost pravokotna na ekvipotencialne ploskve:²

$$\vec{E} = \vec{e}_n E_n = -e_n \frac{\partial V}{\partial n},$$

kjer je $\vec{e}_n$ normala na ekvipotencialno ploskev.

SLIKA: Električna poljska jakost kaže v smeri upadanja potenciala in je torej pravokotna na ekvipotencialne ravnine.

Če želimo ugotoviti velikost polja v smeri koordinat pa uporabimo parcialno odvajanje po posameznih koordinatah:

¹ Iz matematičnega priročnika lahko ugotovimo sledečo zvezo: $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) \cdot dt = f(x)$. Glede na definicijo

potenciala bi lahko pisali tudi $V(T) = - \int_{T(V=0)}^T \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{T(V=0)}^T (E_x \cdot dx + E_y \cdot dy + E_z \cdot dz)$, od koder sledi

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \text{ itd.}$$

² Simbol $\frac{\partial}{\partial x}$ je simbol za parcialen odvod po x-u. Razlika med totalnim odvodom $\frac{d}{dx}$ in parcialnim je v tem, da pri parcialnem odvodu odvajamo izraz parcialno, torej le po eni spremenljivki (v konkretnem primeru po x-u), vse ostale spremenljivke pa so v smislu odvajanja konstante.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Če združimo posamezne komponente polja v vektor električne poljske jakosti, ga v kartezičnih koordinatah zapišemo kot:

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Za cilindrični koordinatni sistem velja $\vec{E} = (E_r, E_\varphi, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \varphi}, \frac{\partial V}{\partial z}\right).$

Za sferični koordinatni sistem velja $\vec{E} = (E_r, E_\vartheta, E_\varphi) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \vartheta}, \frac{\partial V}{r \sin(\vartheta) \partial \varphi}\right).$

SLIKA: Večja gostota ekvipotencialnih ravnin pomeni večjo električno polje na tistem mestu oziroma, zgostčenost ekvipotencialnih ploskev je merilo za velikost polja.

* Enačbo $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ lahko zapišemo tudi kot $\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V$, kjer zapis v

oklepaju imenujemo operator odvajanja, ki ga imenujemo nabla in pišemo s simbolom $\vec{\nabla}$ ali pa z imenom gradient. Zvezo med potencialom in poljem lahko torej zapišemo kot $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\text{grad}(V)$. Gre torej za operator, ki skalarnemu polju priredi vektorsko na tak način, da kaže v smeri zmanjšanja potenciala, po velikosti pa je enak (krajevni) hitrosti spreminjanja polja.

Primer: Električni potencial v prostoru je določen z enačbo $V(x, y, z) = 4 \frac{V}{m^2} xy - 3 \frac{V}{m^2} z^2$.

Določimo električno poljsko jakost iz potenciala v poljubni točki prostora ter v točki T(1m, 2 m, 3 m).

Izračun:

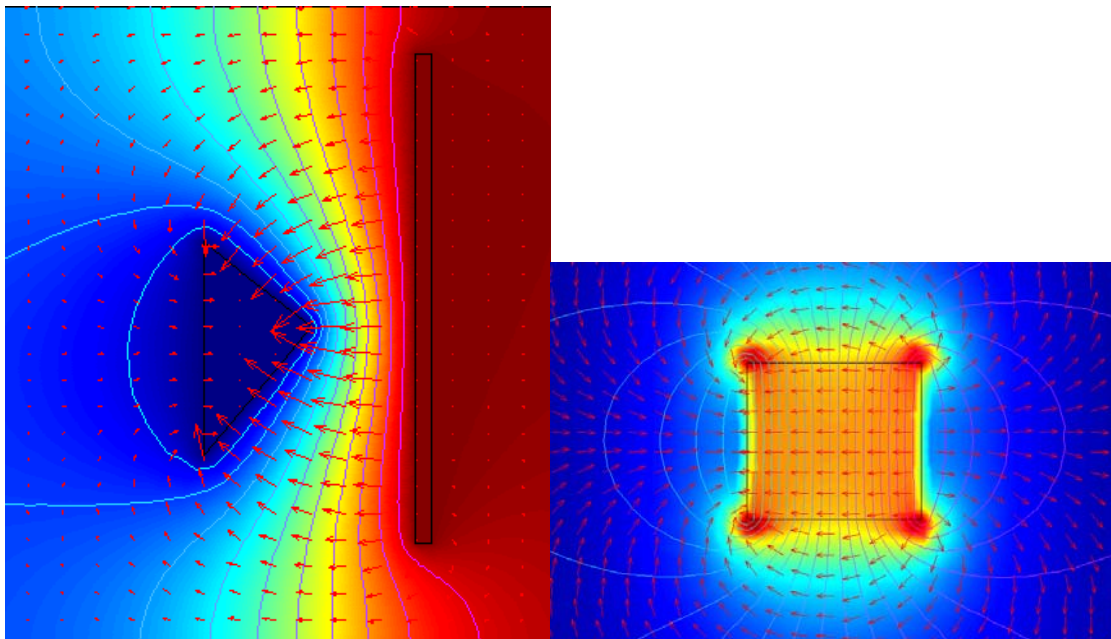
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -4 \frac{V}{m^2} y$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -4 \frac{V}{m^2} x$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -(-2 \cdot 3 \frac{V}{m^2} z) = 6 \frac{V}{m^2} z$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \underline{\underline{\left(-4y, -4x, 6z \right) \frac{V}{m^2}}}$$

$$\vec{E}(1 \text{ m}, 2 \text{ m}, 3 \text{ m}) = \underline{\underline{\left(-8, -4, 18 \right) \frac{V}{m}}}.$$



SLIKA: Električna poljska jakost kaže smer in hitrost upadanja potenciala. Primera polja klinaste elektrode ob ravni elektrodi in polja med ravnima ploščama. Na levi sliki so polje vektorjev polja prikazane še ekvipotencialne ravnine ter potencial v barvni lestvici. Na desni sliki pa so zaradi lažjega opazovanja vektorji polja normirani, velikost polja pa prikazuje barvna lestvica. Poleg tega so prikazane ekvipotencialne ravnine.