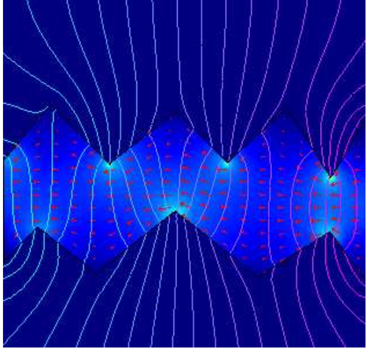


24. Časovno konstantno tokovno polje

Vsebina poglavja: Kontinuitetna enačba, gostota toka, časovno konstantno tokovno polje, tok v snovi, konventivni tok, konduktivni tok, mobilnost, Ohmov zakon v diferencialni obliki, specifična prevodnost in specifična upornost, temperaturne lastnosti, joulov zakon, mejni pogoji tokovnega polja, dualnost tokovnega in elektrostatičnega polja.

Kontinuitetna enačba.

S pojmom toka smo se srečali že v prvem poglavju, kjer smo ugotovili, da je električni tok posledica gibanja nabojev, kar lahko izrazimo tudi kot časovno spremembo količine naboja v zaključenem sistemu (kontinuitetna enačba). Po definiciji smo ga določili kot odtekanje pozitivnega naboja:

$$i(t) = -\frac{\mathrm{d}Q_+}{\mathrm{d}t}.$$

SLIKA: Prikaz definicije toka kot časovno odtekanje pozitivnega naboja.

Gostota toka.

Spomnimo se zveze med električnim pretokom in gostoto električnega pretoka. Gostoto pretoka smo označili z vektorjem D, pretok pa kot integral D-ja preko določene površine: $\int_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$. Na enak način izrazimo gostoto toka s črko J, tok pa je integral gostote toka po površini A

$$\boxed{I = \int_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}}.$$

Znotraj integrala je skalarni produkt dveh vektorjev, kar pomeni, da k toku prispeva le tista komponenta gostote toka, ki je pravokotna na površino, oziroma tista, ki je v smeri normale na površino: $\vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \vec{J}\cdot \vec{e}_n \mathrm{d}A = J_n \cdot \mathrm{d}A$.

V primeru, da se gostota toka po preseku ne spreminja in je pravokotna na ravnino preseka, lahko integral poenostavimo v $I = J\int_A dA = JA$.

Če želimo gostoto toka določiti iz toka, pa uporabimo obratno operacijo od integracije:

$\mathrm{d}I = \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$, torej bo gostota toka enaka odvodu toka po površini[1]:

[1] Ali pa: $\mathrm{d}I = \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \vec{J}\cdot \vec{e}_n \mathrm{d}A = J_n \cdot \mathrm{d}A$ torej $\vec{J} = \vec{e}_n \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A}$.

$\boxed{J = \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A}}$.

Električni tok je skalarna veličina (ima le vrednost, ne pa tudi smeri), gostota toka pa je vektorska veličina (ima tako velikost kot smer).

SLIKA: Tok in gostota toka: primerjava.

Primer: Skozi žico premera 2 mm teče tok 50 A. Kolikšna je gostota toka v žici?
Izračun: Površina preseka je $A = \pi r^2 = \pi(1\,\mathrm{mm})^2 = \pi\,\mathrm{mm}^2$, gostota toka pa je $J = \dfrac{I}{A} = \dfrac{50\ \mathrm{A}}{\pi\ \mathrm{mm}^2} \approx \underline{\underline{16\ \mathrm{A/mm}^2}}$.

Primer: Med oklopom in žilo koaksialnega kabla z notranjim polmerom 1 mm in zunanjim polmerom 3 mm je tok 1 mA. Določimo gostoto toka pri notranjem in zunanjem polmeru na dolžini 10 m.
Izračun: Zapišemo tok skozi zamišljen presek na polmeru *r*: $I = JA = J2\pi rl$, od koder je gostota toka pri polmeru *r*: $J = \dfrac{I}{2\pi rl}$.
Sledi:

$$J(r_n) = \frac{1\,\mathrm{mA}}{2\pi \cdot 1\,\mathrm{mm} \cdot 10\,\mathrm{m}} \approx \underline{\underline{16\ \mathrm{mA/m}^2}}$$

$$J(r_z) = \frac{1\,\mathrm{mA}}{2\pi \cdot 3\,\mathrm{mm} \cdot 10\,\mathrm{m}} \approx \underline{\underline{5{,}3\ \mathrm{mA/m}^2}}$$

Tokovno polje med žilo in oklopom je nehomogeno. Pri žili je gostota toka večja, kot pri oklopu.

Kontinuitetna enačba – drugič
Povedali smo že, da tok ugotavljamo kot časovno spremembo naboja v zaključenem sistemu. Če zapišemo integral gostote toka skozi zaključeno površino, mora biti ta integral v skladu s kontinuitetno enačbo ravno enak časovni spremembi naboja znotraj te zaključene površine. Kontinuitetna enačba torej »govori« o kontinuiteti naboja znotraj zaključene površine. Kopičenje ali zmanjševaje naboja v zaključeni površini je posledica električnega toka ali tudi

obratno: tok skozi zaključeno površino je posledica kopičenja ali odtekanja naboja skozi to površino. Matematično to zapišemo v obliki[1]:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\oint \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A}}.$$

Časovno konstantno tokovno polje.

Govorimo o časovnem konstantnem tokovnem polju, kjer v volumnu objetem z zaključeno površino A velja $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$ in s tem

$$\boxed{\oint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0}.$$

Zgornja enačba ne govori o tem, da ni toka v in izven zaključene površine temveč le o tem, da enaka količina toka, ki vstopa v prostor z zaključeno površino, ta prostor tudi zapušča. Recimo, da zaključeno površino razdelimo na tri dele. V prva dva dela toka vstopata (I_1 in I_2), skozi tretjega pa zapušča tok I_3. Velja $\oint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = I_1 + I_2 - I_3 = 0$. Prepoznamo 1. Kirchoffov zakon, da je vsota vseh tokov, ki vstopajo (ali izstopajo) v spojišče enaka nič: $\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$. Tok smo označili z veliko tiskano črko, ker obravnavamo le stacionarne pojave, torej take, kjer se tok s časom ne spreminja.

SLIKA: Zaključena površina s tremi toki od katerih dva vstopata, en pa izstopa iz površine. Vsota tokov v spojišče je enaka nič.

Enak pogoj kot za časovno konstantno tokovno polje smo uporabili tudi za elektrostatično polje ($\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$). Torej bodo za časovno konstantno tokovno polje veljale tudi ugotovitve iz elektrostatičnega polja:

[1] ** Pogosto to enačbo izrazimo še nekoliko drugače, pri čemer naboj izrazimo z gostoto naboja $Q = \int_V \rho \mathrm{d}V$: $\int_V \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}V = -\oint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$. Znana pa je tudi oblika te enačbe v diferencialni obliki, kjer je potrebno uporabiti operator divergence: $div\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ali tudi $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

zakon potencialnosti polja: $\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$

in

Gaussov zakon: $\oint_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\substack{prosti, \\ znotraj\ A}}$.

Podobno, kot pri zakonu o ohranitvi naboja prepoznamo 1. Kirchoffov zakon, lahko v zakonu o potencialnosti polja $\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ prepoznamo 2. Kirchoffov zakon, saj, če razdelimo zaključeno pot na več delnih poti $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \cdots + \int_{L_N} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, jih lahko nadomestimo z napetostjo med koncema delnih poti: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_1 + U_2 + \cdots + U_N = 0$ ali tudi $\sum_i U_i = 0$.

Kljub temu pa ima časovno konstanto polje določeno »komponento«, ki jo elektrostatično nima. Pri elektrostatičnem polju predpostavimo razmere, ko toka ni; niti enosmernega. Kljub temu da vemo, da je tok potreben za proces elektrenja. V teh razmerah je polje znotraj prevodnikov vedno enako nič. Drugače pa je pri tokovnem polju, ki sicer ima določene »komponente« elektrostatičnega polja, recimo ohranjeno veljavnost Gaussovega zakona in zakona o potencialnosti polja, pa pri razmerah tokovnega polja dovolimo časovno konstanten tok.

Ustreznost enačb elektrostatičnega polja, časovno konstantnega tokovnega polja in dinamičnega polja prikazuje naslednja tabela:

	Elektrostatično polje	**Tokovno polje**	**Dinamično polje**
Gaussov zakon	$\oint_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\substack{prosti, \\ znotraj\ A}}$	enako	enako
Potencialnost polja	$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$	enako	$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$
Kontinuitetna enačba	$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$ (znotraj zaključene površine) Oziroma $\rho(t) = konst$ Ali tudi $\oint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$	$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$ (znotraj zaključene površine) Oziroma $\rho(t) = konst$ Ali tudi $\oint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$	$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = i(t)$ $\rho = \rho(t)$
Tok	$i(t) = 0$	$i(t) = konst$	$i(t) = f(t)$

Tok v snovi.

Povežimo gostoto toka z lastnostmi materialov. Vemo, da nekatere snovi prevajajo tok bolje, druge pa slabše. Najbolj preprosta delitev bi bila lahko na prevodnike, ki odlično prevajajo tok in izolatorje, ki v idealnih razmerah toka ne prevajajo. Vemo pa, da imamo tudi »vmesne« materiale, ki bolj ali manj prevajajo tok.
Poiščimo zvezo med tokom in hitrostjo gibanja nabojev:
Vzemimo tok nabojev skozi presek žice A s homogeno gostoto toka. Tok v smeri naraščanja količine pozitivnega naboja zapišemo kot $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ in ga izrazimo z gostoto toka, naboj pa z gostoto naboja: $I = JA = \frac{\mathrm{d}(\rho V)}{\mathrm{d}t}$. Vzemimo tok nabojev v smeri X osi, kjer na delu volumna s konstantno volumsko gostoto naboja zapišemo: $J_x A = \rho \frac{dx}{dt} A = \rho v A$, torej je gostota toka sorazmerna gostoti (prostega) naboja in hitrosti potovanja tega naboja: $J = \rho v$. Bolj splošna oblika enačbe upošteva gostoto toka kot vektorsko veličino in je [1]

$$\boxed{\vec{J} = \rho \vec{v}}$$

Naboji se v različnih pogojih gibljejo na različne načine. V grobem razdelimo načine gibanja na konvektivni in konduktivni način.

Konvektivni tok. Gibanje nabojev je zelo odvisno od medija v katerem se naboji gibljejo. Če se naboji gibljejo v vakuumu ali razredčenemu plinu (zraku), je njihovo gibanje pospešeno, saj je sila na naboje enaka $m\vec{a} = Q\vec{E}$. V prostoru, kjer ni »večjih ovir«, se naboji gibljejo pospešeno $\vec{a} = \frac{Q\vec{E}}{m}$ in $\vec{v} = \int \vec{a}\mathrm{d}t$. Takemu načinu gibanja rečemo **konvektivno prevajanje in toku konventivni tok**.

SLIKA: Konvenktivni tok v katodni cevi.

Konduktivni tok. Če se naboji gibljejo v gostejši snovi, se ne gibljejo neovirano, pač pa trkajo z atomi snovi. Zato se njihova hitrost bistveno upočasni, kar se odraža v toplotnih

[1] ρ (ro) v enačbi predstavlja volumsko gostoto (gibajočega se) naboja. V nadaljevanju bomo enak simbol uporabili tudi za označitev specifične električne upornosti. Ne smemo zamešati njun različni pomen v enačbah.

izgubah prevodnika. Za mnogo snovi velja, da je povprečna hitrost gibanja nabojev sorazmerna električni poljski jakosti, kar zapišemo z izrazom[1]

$$\boxed{\vec{v} = \mu \vec{E}}.$$

SLIKA: Konduktivni tok v prevodniku.

Konstanto μ (mi) imenujemo **mobilnost** in je snovna lastnost (tako kot električna susceptibilnost oz. relativna dielektrična konstanta). Izpeljimo enoto za mobilnost: $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = [\mu]\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right] \;\Rightarrow\; [\mu] = \left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}\right]$.

Ohmov zakon v diferencialni obliki.

Z upoštevanjem zveze med povprečno hitrostjo gibanja nabojev in električno poljsko jakostjo, lahko gostoto toka zapišemo kot

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \mu \vec{E}$$ oziroma

$$\boxed{\vec{J} = \gamma \vec{E}},$$ OHMOV ZAKON V DIFERENCIALNI OBLIKI

kjer konstanto γ (gama) imenujemo **specifična električna prevodnost** in je enaka[1] $\gamma = \rho \mu$.

---

[1] Kako pridemo do te zveze? Vzemimo, da opazujemo let elektrona v električnem polju. Nanj deluje pospešek $\vec{a} = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e}$, torej se v času t njegova hitrost od začetne v_z poveča za $\vec{v} = \vec{v}_z + \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} t$. Ker je trkov elektrona z atomi zelo veliko, moramo za pravilno obravnavo upoštevati povprečno hitrost, kar zapišemo z izrazom <>: $\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_z \rangle + \left\langle \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} t \right\rangle$. Po trku z atomom se elektron odbije v naključno smer, zato je začetna hitrost v povprečju enaka nič, celotna povprečna hitrost pa je enaka $\langle \vec{v} \rangle = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} \langle t \rangle$. $\langle t \rangle$ je povprečni čas med trki in ga označimo s τ. Za kovine je ta velikosti 10^{-14} s, za pline pa 10^{-9} s. Povprečni hitrosti pogosto s tujko (angleško) rečemo hitrost drifta, po slovensko bi morda prevedli v hitrost odnašanja. Pišemo torej lahko $v_d = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} \tau$, od koder razpoznamo zapisano linearno zvezo med povprečno hitrostjo in električno poljsko jakostjo $\vec{v} = \mu \vec{E}$, kjer je mobilnost enaka $\mu = \frac{Q_e}{m_e} \tau$.

Dobili smo pomemben izraz, da je gostota toka v prevodnikih sorazmerna električni poljski jakosti. Tak tip toka imenujemo **konduktivni** (prevodni), ker z njim ustrezno opišemo prevajanje toka v prevodnikih. Konstanto sorazmernosti imenujemo specifična električna prevodnost (gama), celoten izraz pa kar **Ohmov zakon v diferencialni obliki**. Poglejmo zakaj:

Vzemimo pravokoten kos prevodnika dolžine *l* in preseka *A* z znano specifično prevodnostjo. Med konca prevodnika priključimo napetost. Znotraj prevodnika je homogeno električno polje, iz zveze za napetost $U = \int_0^l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ pa dobimo:

$$U = \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^l E \cdot dx = \int_0^l \frac{J}{\gamma} \mathrm{d}x = \int_0^l \frac{I}{\gamma A} \mathrm{d}x = \frac{I}{\gamma A} \int_0^l \mathrm{d}x = \frac{I}{\gamma A} l \,.$$

ali pa takole:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_A \frac{\vec{E}}{\gamma} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\gamma} \int_A \frac{U}{l} \mathrm{d}A = U \frac{A}{\gamma l}$$

SLIKA: Pravokoten kos prevodnika priključen na vir napetosti.

Če zapišemo izraz nekoliko drugače, prepoznamo Ohmov zakon v znani (integralni) obliki:

$$U = \frac{I}{\gamma A} l = I \frac{l}{\gamma A} = IR \,,$$

kjer je

$$\boxed{R = \frac{l}{\gamma A}}$$

[1] Izraz $\gamma = \rho\mu$ lahko zapišemo tudi drugače, če gostoto nabojev izrazimo s koncentracijo mobilnih elektronov *n*: $\rho = nQ_e$. Sledi $\gamma = \frac{nQ_e^2\tau}{m}$. Ta izraz sicer ne da točnih vrednosti za specifično prevodnost, saj je vendarle nekoliko poenostavljen, kljub temu pa je iz njega razvidno, da imajo snovi z večjo koncentracijo prostih elektronov večjo specifično prevodnost. Poleg tega večja masa pomeni manjšo prevodnost, kar je predvsem pomembno pri prevajanju ionov. Poleg tega se povprečni čas trkov manjša z višanjem temperature, saj tedaj atomi bolj vibrirajo in so trki v povprečju pogostejši.

električna upornost. Enoto je Ω (Ohm). Zopet lahko izpeljemo enoto za specifično prevodnost. Če je enota za upornost Ohm, potem ugotovimo, da lahko specifično prevodnost izrazimo kot $\frac{1}{\Omega\,\mathrm{m}}$, pogosto tudi kot $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ (Siemens na meter).

Iz enačbe za upornost je razvidno, da je upornost povezana z geometrijo prevodnika, enako, kot smo to ugotavljali za kapacitivnost.

Inverzno vrednost od specifične prevodnosti imenujemo **specifična upornost** (enota je Ω.m):
$\rho = \frac{1}{\gamma}$, $R = \frac{\rho l}{A}$.

Običajno je podana ena ali druga vrednost, v določenih primerih (predvsem v elektrolitih) pa mobilnost nabojev. Tu je potrebno ločiti način prevajanja v tekočinah in prevodnikih. V tekočinah prevajajo tako elektroni kot ioni (pozitivni in negativni), medtem, ko v prevodnikih prevajajo samo elektroni. Obstajajo tudi posebne snovi, ki jim rečemo polprevodniki, pri katerih lahko električne lastnosti spreminjamo z dodajanjem primesi. Kos kristala silicija je izolator, zelo slab prevodnik, ki pa lahko postane dober prevodnik, če mu dodamo primesi. To dodajanje poteka pri zelo visokih temperaturah, nad 1000°. Način prevajanja je odvisen od tipa dodanih primesi. Če je dodana snov fosfor (pri čemer se med kristalno rešetko silicija le vsake toliko vrine kakšen atom fosforja), imenujemo tak tip polprevodnika n-tip, saj vsebuje določeno število šibko vezanih elektronov, ki se lahko (dokaj) prosto gibljejo ob priključeni napetosti. Če dodamo siliciju atome bora se v kristalno rešetko silicija vrinejo atomi bora, ki ustvarijo pomanjkanje elektronov, kar imenujemo vrzel. Izkaže se, da tudi takšno pomanjkanje elektronov lahko deluje kot prevodnik.

Primer: Specifična prevodnost bakra je 5,7 10^{7} S/m. Določimo upornost ravne palice pravokotnega preseka stranic 1x2 mm^2 in dolžine 5 m.

Izračun: Uporabimo enačbo $R = \frac{l}{\gamma A}$ in določimo upornost

$$R = \frac{5\ \mathrm{m}}{5{,}7\cdot 10^{7}\ \mathrm{S/m}\cdot 2\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2} \approx \underline{\underline{44\ \mathrm{m}\Omega}}.$$

Primer: Določimo napetost koraka pri udaru strele s tokom 20 kA, če je čovek oddaljen za r_1 = 15 m stran od udara. Specifična prevodnost zemlje je 10^{-4} S/m, razdalja koraka je s = 0,8 m.

SLIKA: Prikaz udara strele in človeka r_1 = 15 m stran od strele.

Izračun: Predpostavimo homogeno porazdelitev gostote toka, ki je na radiju *r* od mesta udara strele v tla enaka $J(r)=\frac{I}{A(r)}=\frac{I}{\frac{4\pi r^2}{2}}=\frac{I}{2\pi r^2}$. Ker je gostota toka vektorska veličina, jo kot vektor zapišemo kot $\vec{J}=\vec{e}_r\frac{I}{2\pi r^2}$. Iz Ohmovega zakona sledi polje $\vec{E}=\frac{\vec{J}}{\gamma}=\vec{e}_r\frac{I}{2\pi\gamma r^2}$.

Napetost koraka je $U_{12}=\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{r_1}^{r_2}\vec{e}_r\frac{I}{2\pi\gamma r^2}\cdot\vec{e}_r\mathrm{d}r=\frac{I}{2\pi\gamma}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1+s}\right)$.

$U_{12}=\frac{I}{2\pi\gamma}\frac{s}{r_1(r_1+s)}\approx\underline{\underline{107\text{ kV}}}$.

Iz primera smo ugotovili, da lahko nastopi pri udar strele ob razkoraku do precej velike napetosti med stopaloma. Ta je lahko v določenih primerih tudi nevarna za človeka (in živali). Po preprosti enačbi za izračun še dovoljene napetosti koraka[1] $U_{koraka,\max}=\frac{200+\rho(\Omega\cdot\mathrm{m})}{\sqrt{\text{čas trajanja}}}$, ki da približno 10 kV pri izbrani specifični prevodnosti, ugotovimo, da smo pri 15 m znotraj nevarne cone. Ocenimo lahko varno razdaljo, pri čemer bomo predpostavili $r_1\gg s$ (sicer bi morali rešiti kvadratno enačbo):

$U_{koraka,\max}\approx\frac{I}{2\pi\gamma}\frac{s}{r_{1,\min}^2}\quad\Rightarrow\quad r_{1,\min}\approx\sqrt{\frac{I}{2\pi\gamma}\frac{s}{U_{koraka,\max}}}$. Za $U_{\text{koraka,max}}$ = 10 kV dobimo kritično razdaljo približno 50 m. Pri toku 1 kA je ta razdalja 16 m, pri 200 kA pa kar 160 m.
Pri manjših specifičnih upornostih tal je maksimalna (kritična) napetost koraka manjša, kljub temu pa je varnostna razdalja večja[2].

Dodatno: Izračunajmo ozemljitveno upornost, če je ozemljilo v obliki prevodne polkrogle v zemlji s specifično prevodnostjo 10^{-4} S/m. Polkrogla ima polmer 0,5 m.

SLIKA: Ozemljitvena »krogla« polmera r = 0,5 m.

Izračun: Predpostavili smo določen tok *I* v kroglo, ki povzroči med točkama T_1 in T_2 napetost $U_{12}=\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$. Napetost med površino krogle in neskončno okolico $(r_1=r_0,\, r_2\to\infty)$ bo torej $U_{0\infty}=\frac{I}{2\pi\gamma r_0}$, torej bo upornost ozemljila enaka $R=\frac{U_{0\infty}}{I}=\frac{1}{2\pi\gamma r_0}$. Za izbrane vrednosti

[1] Z.Cheng: »Calculation of step voltage near lightning current«, IEEE 2004.

je upornost ozemljila enaka 3,2 kΩ. To je kar velika vrednost za ozemljitveno upornost, ki naj bo čim manjša; v praksi se smatra kakovostna ozemljitev z upornostjo manjšo od 5 Ω. Pri izbrani specifični prevodnosti zemlje bi bil potrebni polmer krogle za 5 Ω ozemljilo kar 320 m. Kar seveda ni smiselno ozemljilo. V praksi se okoli objekta položi ozemljitvena žica ali mreža, če pa je specifična prevodnost tal večja, zadostuje tudi posebno oblikovan ozemljitveni klin. V posebnih primerih se specifično prevodnost tal lahko poveča z določenimi substancami, ki se jih vlije v področje ozemljitve in strnjene predstavljajo lokalno povečano specifično prevodnost tal. Specifične prevodnosti tal se gibljejo od vrednosti nekaj deset mS/m (močvirna tla) do 0,1 mS/m (skalna tla).

ŠE: Merjenje specifične prevodnosti tal, merjenje ozemljitvene upornosti.

Temperaturna odvisnost specifične upornosti.
V nekaterih primerih je to zaželeno (če jo na primer izkoriščamo za določanje temperature), v drugih pa je nezaželena, saj spreminja pogoje delovanja vezja, itd. Pogosto zadostuje, da uporabimo linearen zvezo, torej, da predpostavimo linearno spreminjanje specifične upornosti s temperaturo:

$$\boxed{\rho(T)=\rho(T_0)\left(1+\alpha\left(T-T_0\right)\right)}.$$

α imenujemo temperaturni koeficient, ki je običajno podan pri sobni temperaturi T_0 = 20^0. Za večino prevodnikov je temperaturni koeficient pozitiven, kar pomeni, da se specifična upornost snovi veča s temperaturo, kar pomeni, da se z višanjem temperature veča tudi upornost prevodnega kosa materiala. To lahko zapišemo kot (zgornjo enačbo množimo z l/A)

$$\boxed{R(T)=R(T_0)\left(1+\alpha\left(T-T_0\right)\right)}$$

Snovne lastnosti nekaterih prevodnikov:

SNOV	γ(S/m)	ρ(Ωm)	$\alpha(K^{-1})$
baker	$5{,}7\ 10^{7}$		0,0039
zlato	$4{,}1\ 10^{7}$		0,0034
aluminij	$3{,}5\ 10^{7}$		0,0041
silicij	$3{,}9\ 10^{-4}$		
voda	$2\ 10^{-4}$		
zemlja	10^{-5}-10^{-2}		
steklo	10^{-12}		
guma	10^{-17}		

Joulov zakon.

Je povezan s segrevanjem v snovi zaradi trkanja elektronov z atomi v snovi. Diferencial dela, ki ga opravi diferencial elektrine dQ v polju E, se pretvori v toplotno energijo

$$\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}A_e = \mathrm{d}Q\int_0^l \vec{E}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}Q \cdot U\ .$$

Moč je definirana kot (časovna) hitrost spreminjanja energije: $P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$, ki je v našem primeru

$$\boxed{P = \frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}U = IU}.$$

Dobimo že znano enačbo za moč pri enosmernih signalih:

$$\boxed{P = IU = I^2R = U^2G}.$$

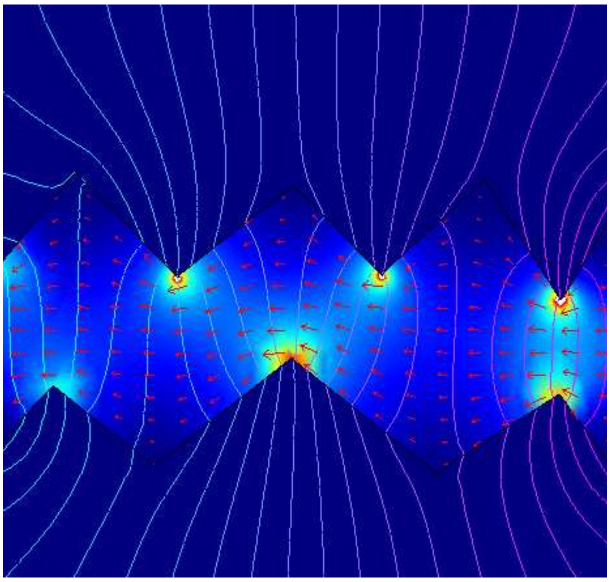
Definiramo lahko tudi **gostoto moči**, kot moč na enoto volumna. V majhnem volumnu je (diferencial) moči enak $\mathrm{d}P = p \cdot \mathrm{d}V$, kjer p imenujemo gostota moči, dV pa je diferencial volumna. Hkrati lahko diferencial moči zapišemo kot

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}I \cdot \mathrm{d}U = (J \cdot \mathrm{d}A)(E \cdot \mathrm{d}l) = (J \cdot E)\mathrm{d}V\ .$$

Gostoto moči lahko torej izrazimo kot produkt gostote toka in električne poljske jakosti, bolj natančna izpeljava pa pokaže, da je potrebno vzeti vektorski produkt obeh veličin:

$$\boxed{p = \vec{J} \cdot \vec{E}}.$$

Enota za gostoto moči je W/m^3.



Prikaz gostote moči (bolj »vroča« barva – večja moč) v lomljenemu vodniku. Vektorji kažejo gostoto toka, ki je večja ob ožinah in ostrih robovih.

Z upoštevanjem Ohmovega zakona v diferencialni obliki $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ lahko gostoto toka zapišemo tudi kot

$$\boxed{p = \gamma E^2}$$

ali kot $p = \dfrac{J^2}{\gamma}$

Celotno (izgubno) moč v prevodniku določimo kot integral gostote moči v volumnu:

$$\boxed{P = \int_V p\mathrm{d}V = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\mathrm{d}V}.$$

Ta zapis imenujemo tudi **Joulov zakon v integralni obliki.**

Mejni pogoji v tokovnem polju.

Podobno kot pri elektrostatičnem polju izhajamo iz dveh osnovnih zakonov. Iz $\oint_A \vec{J}\cdot d\vec{A}=0$ sledi (podobno kot iz $\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A}=0$), da se **ohranja normalna komponenta gostote toka**:

$$\boxed{J_{n2}=J_{n1}}.$$

Če upoštevamo Ohmov zakon v diferencialni obliki $(J=\gamma E)$, velja v primeru, da na meji ni prostih nabojev

$$\boxed{\gamma_2 E_{n2}=\gamma_1 E_{n1}}$$

SLIKA: Lom gostote toka na meji dveh medijev z različnima prevodnostima.

Iz zakona o potencialnosti polja pa sledi, da se ohranja še tangencialna komponenta električne poljske jakosti:

$$E_{t2}=E_{t1} \text{ oziroma } \boxed{\frac{J_{t2}}{\gamma_2}=\frac{J_{t1}}{\gamma_1}}$$

Z deljenjem z mejnim pogojem za tangencialno komponento polja velja

$$\boxed{\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}},$$

kjer sta kota definirana med normalo in smerjo polja. Iz enačbe ugotovimo, da je v primeru velikih razlik med specifičnimi prevodnostmi dveh materialov (recimo na meji prevodnik/izolator) tok v prevodniku neodvisno od kota gostote toka v izolatorju praktično vzporedna z mejo.

Primer: Vektor gostote toka je usmerjen pod kotom 1^0 iz izolatorja z $\gamma_i=10^{-10}$ S/m na prevodnik s specifično prevodnostjo $\gamma_p=10^7$ S/m. Določite kot odklona vektorja gostotetoka v prevodniku.

Izračun: $\frac{\tan(\alpha_p)}{\tan(1^0)}=\frac{10^7 \text{ S/m}}{10^{-10} \text{ S/m}} \Rightarrow \alpha_p \cong 90^0$. Tokovna gostota v prevodniku je praktično vzporedna s prevodnikom.

SLIKA: Gostota toka pada na mejo prevodnika pod kotom 1° na normalo.

Ker pa velja tudi Gaussov zakon v splošni obliki $\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = \sigma$, iz njega sledi pogoj za prehod normalne komponente gostote pretoka:

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma$$

Pri tem smo upoštevali, da je smer polja iz medija z indeksom 2 v medij z indeksom 1. V tej smeri kaže tudi normala na površino.

Ker sta normalni komponenti gostote toka enaki kar zapišemo kot $J_{n1} = J_{n2} = J_n$ in velja Ohmov zakon v diferencialni obliki $(J = \gamma E)$, sledi $\varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2} = \sigma$ in torej

$$\boxed{\left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\right) J_n = \sigma}.$$

Iz enačbe ugotovimo, da bo razen v posebnih pogojih (ko velja $\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$), na meji dveh dielektrikov prišlo zaradi razlike med električnimi lastnostmi materialov do presežne ploskovne gostote naboja.

Primer: Vzemimo žico sestavljeno iz kosa bakra, aluminija in bakra. Velja $\gamma_{Cu} = 5{,}6.10^7$ S/m in $\gamma_{Al} = 3{,}5\cdot 10^7$ S/m. Določimo površinsko gostoto naboja na meji, če teče skozi prevodnike tok z gostoto toka 1 A/mm^2.

Izračun: Vzemimo, da teče tok iz leve proti desni. Na meji Cu/Al bo veljalo $\sigma = \varepsilon_0\left(\frac{1}{\gamma_{Al}} - \frac{1}{\gamma_{Cu}}\right) J_n = 9{,}5\cdot 10^{-14}$ C/m^2 .Ker je specifična prevodnost aluminija manjša od specifične prevodnosti bakra (dielektričnosti pa sta enaki 1), bo na meji Cu/Al v smeri toka presežek pozitivnega naboja, na meji Al/CU pa negativnega naboja.

Nadalje lahko ugotovimo, da bo polje na površini enako $E_n = \sigma/\varepsilon_0 = \left(\frac{1}{\gamma_{Al}} - \frac{1}{\gamma_{Cu}}\right) J_n$.

Dodatno: Če si zamislimo, da je namesto aluminija vmes plast izolatorja z zelo majhno prevodnostjo $(\gamma_i << \gamma_{Cu})$, potem bo iz enačbe za površinski naboj $\sigma \cong \frac{\varepsilon_i}{\gamma_i} J_n = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_i}\gamma_i E_n = \varepsilon_i E_n$, kar je znan izraz iz elektrostatike.

SLIKA: Žica iz Cu/Al/Cu.

<u>Povzetek</u>:

- Zaradi velikih razlik v specifičnih prevodnosti med izolatorjem in prevodnikom, je pri nedirektnem vpadu gostote toka na prevodnik v prevodniku dominantna tangencialna komponenta gostote polja, v izolatorju pa normalna komponenta električnega polja.
- Na meji dveh snovi z različnimi električnimi lastnostmi pride ob prehodu toka iz enega v drug material do kopičenja pozitivnega ali negativnega naboja. Na meji izolator/prevodnik je ta naboj kar enak εE, kar je znan rezultat elektrostatike.

Dualnost tokovnega in elektrostatičnega polja.

Vzemimo dve prevodni telesi priključeni na enosmerno napetost U, med telesi je medij katerega električne lastnosti določata specifične prevodnost in relativna dielektričnost. Prevodni telesi lahko smatramo za ekvipotencialki, električno polje pa se porazdeli v skladu z zakonitostmi elektrostatičnega polja. Obstaja neposredna zveza med gostoto toka in električno poljsko jakostjo: $J = \gamma E$, pa tudi gostoto pretoka $J = \gamma E = \gamma \frac{D}{\varepsilon}$, torej so gostotne cevke za obe polji enaki. V tem smislu govorimo o dualnosti obeh polj. Če izračunamo porazdelitev električnega polja, poznamo tudi porazdelitev tokovnega polja. Torej mora obstajati tudi neka neposredna zveza med kapacitivnostjo in upornostjo med dvema telesoma:

$$RC = \frac{U}{I}\frac{Q}{U} = \frac{\int\limits_A \vec{D}\cdot d\vec{A}}{\int\limits_A \vec{J}\cdot d\vec{A}} = \frac{\varepsilon\int\limits_A \vec{E}\cdot d\vec{A}}{\gamma\int\limits_A \vec{E}\cdot d\vec{A}} = \frac{\varepsilon}{\gamma} = \rho\cdot\varepsilon$$

Ponovimo rezultat: $\boxed{RC = \rho\varepsilon}$.

Praktična uporaba tega izraza je velika. Vzemimo, da znamo izračunati kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma. Potem lahko iz kapacitivnosti zelo hitro dobimo izraz za upornost. V principu je izraz za prevodnost kar enak izrazu za kapacitivnost, le dielektričnost moramo zamenjati s specifično prevodnostjo: $G = C\frac{\gamma}{\varepsilon}$.

Primer: Med dve prevodni palici okroglega preseka polmera r_0 = 2 mm, razmaknjeni za 2 cm priključimo napetost 10 V in ju potopimo za l = 3 cm v prevodni medij. Izmerimo tok 0,2 mA. Določimo upornost med elektrodama in specifično prevodnost medija.

Izračun: V poglavju o okovinjenju ekcipotencialk smo imeli primer dveh nasprotno naelektrenih valjev, kjer smo z upoštevanjem ekscentričnosti določili napetost med valjema kot $U=\dfrac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)$, brez upoštevanja ekscentričnosti pa $U=\dfrac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{d-r_0}{r_0}\right)$. Od tod je kapacitivnost $C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{ql}{U}=\dfrac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\dfrac{d-r_0}{r_0}\right)}$. Iz pogoja dualnosti določimo prevodnost med palicama kot $G=\dfrac{\pi\gamma l}{\ln\left(\dfrac{d-r_0}{r_0}\right)}$. Specifična prevodnost dobimo kot

$$G=\frac{0,2\text{ mA}}{10\text{ V}}=20\ \mu\text{S}=\gamma\frac{\pi\cdot 0,03\text{ m}}{\ln\left(\dfrac{22\text{ mm}}{2\text{ mm}}\right)}=\gamma\cdot 39,3\cdot 10^{-3}\text{ m}$$, od koder sledi $\gamma\cong\underline{\underline{509\text{ S/m}}}$.

Realni kondenzator.

Do sedaj smo ločeno obravnavali kondenzator in upor, čeprav je v realnosti tako upor kot kondenzator element, ki ima med dvema prevodnima kontaktoma snov, katere električne lastnosti so podane z relativno dielektrično konstanto in specifično prevodnostjo. Za obravnavo realnega kondenzatorja moramo vzeti primer časovno spreminjajočega se toka, saj v enosmernih razmerah kondenzator v idealnih razmerah ne prevaja toka, v realnih pa ima določeno upornost in tok prevaja. Realni kondenzator priključimo torej na vir izmenične napetosti u_g in določimo tok skozi realni kondenzator.

SLIKA: Realni kondenzator priključen na vir napetosti u_g.

Zaokrožimo enega od kontaktov in uporabimo zakon o ohranitvi naboja

$$\oint_A J\cdot d\vec{A}=-\frac{dQ}{dt}.$$

Levi člen je enak razliki izstopnega (v kondenzator) in vstopnega toka (iz vira)

$$\oint_A \overline{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=Gu_g-i_g\ ,$$

desni pa poljskemu toku v kondenzatorju, ki je posledica časovne spremembe naboja na površini kontaktov

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(Cu_g)}{\mathrm{d}t}.$$

Velja torej

$$Gu_g-i_g=-C\frac{\mathrm{d}u_g}{\mathrm{d}t}.$$

Dobimo diferencialno enačbo (linearno, prvega reda), katere rešitev je zveza med napetostjo in tokom na kondenzatorju. Ugotovimo, da lahko tok skozi kondenzator (enak toku i_g) ločimo na dva toka, enega zaradi ohmske upornosti, drugega pa zaradi kapacitivnih lastnosti:

$$i(t)=i_g=Gu_g+C\frac{\mathrm{d}u_g}{\mathrm{d}t}.$$

Ta ločitev je seveda lahko samo modelna. Znotraj kondenzatorja je to hkratni in neločljivi pojav.

Pri obravnavi kondenzatorja smo že omenili vzporedno, pa tudi serijsko upornost, ki je pomemben podatek za kakovost kondenzatorja.

SLIKA: Nadomestna shema realnega kondenzatorja.

Primer nelinearnih uporov. (ŠE)

Vprašanja za obnovo:

1. Povezava med gostoto toka in tokom. »V obe smeri.«
2. Zapis kontinuitetne enačbe z gostoto toka.
3. Lastnosti časovno konstantnega tokovnega polja.
4. Od česa je odvisen tok v snovi?
5. Kakšna je razlika med konduktivnim in konvektivnim tokom?
6. Ohmov zakon v diferencialni obliki.
7. Kako iz Ohmovega zakona v diferencialni obliki pridemo do Ohmovega zakona v integralni obliki $U=IR$?
8. Razložite pojme mobilnost, specifična električna prevodnost, specifična električna upornost.
9. Električna upornost in prevodnost.
10. Temperaturna odvisnost specifične upornosti in prevodnosti.
11. Zapis Joulovega zakona v diferencialni in integrali obliki.
12. Mejni pogoji za normalno in tangencialno komponento toka.
13. Določitev površinske gostote naboja med dvema prevodnikoma iz Gaussovega zakona.
14. Dualnost tokovnega in elektrostatičnega polja.