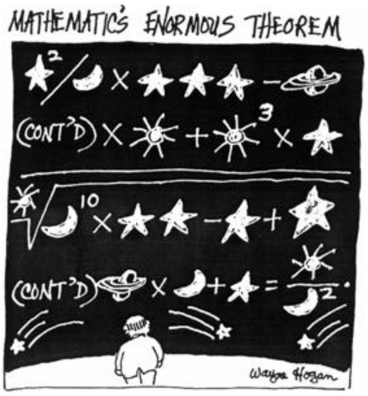
5. Stavki (Teoremi)



Vsebina: Stavek superpozicije, stavek Thévenina in Nortona, maksimalna moč na bremenu (drugič), stavek Tellegena.

1. Stavek superpozicije

Ta stavek določa, da lahko poljubno vezje sestavljeno iz linearnih elementov z več viri poenostavimo tako, da analiziramo vezje z izmeničnim vklopom posameznih virov v vezje. Toke, ki jih izračunamo na tako poenostavljenem vezju na koncu seštejemo (superponiramo). V našem konkretnem primeru bi lahko določili toke v vejah vezja za dve poenostavljeni vezji. V prvem bi bil vklopljen le napetostni vir, v drugem pa le tokovni vir. *Izklopljen napetostni vir nadomestimo s kratkim stikom, tokovni vir pa odklopimo - odprte sponke.*

SLIKA: Vezje nadomestimo z dvema enostavnejšima vezjema. V prvem vezju obdržimo le napetostni vir, tokovnega pa izklopimo (odprte sponke), v drugem vezju pa obdržimo tokovni vir in odklopimo napetostnega (nadomestimo s kratkim stikom).

Primer: Določimo tok I_4 s pomočjo metode superpozicije.

1. vezje: Ko izklopimo tokovni vir lahko vse upornosti združimo v eno (nadomestno) tako, da zaporedno seštejemo upora R_2 in R_5 ter nato obema vzporedno še R_3 ter nato vsem še zaporedno R_1 in R_4. Dobimo nadomestno upornost $R_{nad}=(R_2+R_5)||R_3+R_1+R_4=29{,}18\ \Omega$. Tok $I_{4(1)}$ = -10/25,44 A = -0.3427A. (Bodite pozorni na to, da je predznak toka negativen.)

2. vezje: Ko izklopimo napetostni vir, nam ostane vezje, pri katerem ne moremo preprosto seštevati upore. Zopet moramo uporabiti eno od metod za reševanje vezij. Vzemimo kar metodo zančnih tokov, ki se je za analizo konkretnega vezja izkazala kot zelo primerna in izračunajmo zančna toka. Razlika v že nastavljenih enačbah bo le ta, da sedaj nimamo napetostnega vira:

$$J_1 31 - 2\cdot 20 - J_2 10 = 0$$

$$J_2 55 - J_1 10 - 2\cdot 5 = 0$$

Izračun nam da vrednosti J_1 = 1,4330 A in J_2 = 0,4424 A. $I_{4(2)}$ je enak $-J_1$ in bo torej enak $I_{4(2)}$ = -1,4330 A .

Na koncu seštejemo obe vrednosti in dobimo

© DK

$I_4 = I_{4(1)} + I_{4(2)}$ = - 0,3427 A - 1,4330 A = -1.7757 A.
Ugotovimo lahko, da je rešitev enaka, kot smo jo dobili z uporabo metode Kirchoffovih zakonov.

2. Stavek Thévenina

To sta pomembna stavka v elektrotehniki in se pogosto uporabljata. Théveninov stavek »pravi«, da je mogoče poljubni del linearnega vezja nadomestiti z realnim napetostnim virom, torej z idealnim napetostnim virom (ki ga imenujemo Théveninov) in notranjo (Théveninovo) upornostjo.

SLIKA: Shematski prikaz Théveninovega in Nortonovega nadomestnega vira.

Kako določimo Théveninovo nadomestno napetost in upornost?
Napetost Thévenina določimo (izračunamo ali izmerimo) kot napetost odprtih sponk na mestu vezja, ki ga želimo nadomestiti, Théveninovo upornost pa kot notranjo upornost vezja, merjena (računana) s sponk, pri čemer napetostne vire v vezju kratko sklenemo (kratek stik), tokovne pa razklenemo (odprte sponke).
Matematično:

$\boxed{U_{\mathrm{Th}} = U_{\mathrm{o}}}$

$\boxed{R_{\mathrm{Th}} = R_{\mathrm{notranja}}}$ **pri kratko sklenjenih napetostnih virih in razklenjenih tokovnih virih.**

Primer: Kot primer odklopimo iz vezja iz prejšnjega poglavja upor R_3 in na njegovih sponkah vezje nadomestimo s Théveninovim nadomestnim vezjem.

Če iz vezja odklopimo upor R_3 in zapišemo zančno enačbo dobimo

$$-U_{\mathrm{g}} + J\left(R_1 + R_2 + R_4 + R_5\right) - I_{\mathrm{g}}\left(R_1 + R_2\right) = 0$$

Po ustavitvi vrednosti določimo zančni tok J = 0,91 V, Théveninova napetost pa je

$$U_{\mathrm{Th}} = (J - 2\mathrm{A})5\Omega + J\,40\Omega = \underline{\underline{30,91\ \mathrm{V}}}\,.$$

Upornost Thévenina je $R_{\mathrm{Th}} = (R_1 + R_4) \| (R_2 + R_5) = \underline{\underline{14,32\ \Omega}}$.

Sedaj lahko tvorimo nadomestno vezje in dodamo upor R_3 ter izračunamo tok skozi upor:

$$I_3 = \frac{U_{\mathrm{Th}}}{R_3 + R_{\mathrm{Th}}} = 1,270\ \mathrm{A}\,.$$

Drugi način določanja Théveninove nadomestne upornosti je s pomočjo toka kratkega stika med sponkama nadomestitve. Ta način pride v poštev predvsem tedaj, ko ne moremo preprosto seštevati vzporedne in zaporedne vezave uporov. S pomočjo računalnika najlaže

© DK

uporabimo kar matriko za izračun tokov po metodi Kirchoffovih zakonov pri čemer bo upornost R_3 = 0 Ω. Dobimo I_K = 2,1587 A in $R_{\text{Th}} = \frac{U_{\text{Th}}}{I_{\text{K}}} = \frac{30{,}91\,\text{V}}{14{,}32\,\text{A}} \doteq \underline{\underline{14{,}32\ \Omega}}$.

Omenimo še tretjo možnost. **Upornost vezja med sponkama pri izklopljenih virih lahko dobimo tudi tako, da na sponki priključimo poljubno izbrano napetost in izračunamo tok v vezje. Iz kvocienta med napetostjo in tokom sledi upornost.** V našem konkretnem analiziranem primeru je ta način v osnovi enak prvemu načinu, saj izračunamo upornost Thévenina kot $R_{\text{Th}} = \frac{U_{\text{sponk}}}{I_{\text{sponk}}} = \frac{I_{\text{sponk}} \cdot (R_1 + R_4) \| (R_2 + R_5)}{I_{\text{sponk}}} = (R_1 + R_4) \| (R_2 + R_5) = \underline{\underline{14{,}32\ \Omega}}$.
Bi pa prišel ta način v poštev, če upornosti v vezju ne bi mogli kar preprosto seštevati.

3. Stavek Nortona

Velja podobna definicija kot za Théveninovo nadomestno vezje, le da v tem primeru lahko poljubni del linearnega vezja nadomestimo z Nortonovim nadomestnim vezjem, ki je sestavljeno in idealnega tokovnega (Nortonovega) vira in vzporedne notranje upornosti.

Ker lahko vedno realni napetostni vir nadomestimo z realnim tokovnim, ta zveza velja tudi med Théveninovim in Nortonovim teoremom. V osnovi določimo tok Nortonovega vira kot tok kratkega stika, upornost Nortona pa na enak način kot upornost Thévenina. Velja torej:
$I_{\text{N}} = I_{\text{K}}$ in tudi $I_N = U_{\text{Th}} / R_{\text{Th}}$ ter
$R_{\text{N}} = T_{\text{Th}}$.

Maksimalna moč na bremenu – drugič.

Théveninov stavek je posebno primeren za izračun **maksimalne moč na uporu (bremenu)**. Pri analizi maksimalne moči bremena priključenega na realni napetostni vir smo ugotovili, da bo moč na bremenskem uporu največja tedaj, ko bosta bremenska in generatorska upornost enaki. Da dosežemo maksimalno moč, mora biti upornost bremena torej enaka upornosti Thévenina:

$$\boxed{R_{\text{b}(P\max)} = R_{\text{Th}}},$$

maksimalna moč pa bo tedaj

$$\boxed{P_{\max} = \frac{U_{\text{Th}}^2}{4R_{\text{b}}}}.$$

Primer: V našem vezju smo analizirali razmere moči na bremenskem uporu R_3. Tedaj bo torej $R_{\text{b}(P\max)} = 14{,}32\ \Omega$, maksimalna moč pa $P_{\max} = \frac{U_{\text{Th}}^2}{4R_{\text{b}}} = \frac{(30{,}91\text{V})^2}{4 \cdot 14{,}32\Omega} = \underline{\underline{16{,}68\ \text{W}}}$.

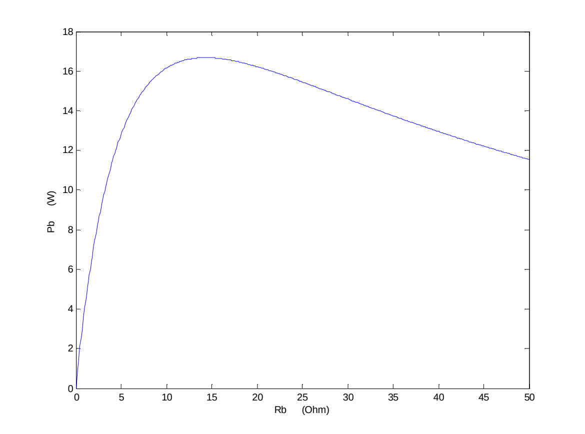
Pogosto rečemo tudi, da je v tem primeru breme **prilagojeno** na vir. To je torej tedaj, ko je na breme prenešena maksimalna moč iz vira.

© DK

Izrišimo moč na bremenu s pomočjo računalnika, pri čemer si bomo zopet pomagali s programom Matlab. Vzemimo izračunani vrednosti U_{Th} = 30,91 in R_{Th} = 14,32 Ω in spreminjajmo R_b od 0 Ω do 50 Ω in izračunajmo moč na bremenu. Z Matlabovimi ukazi:

```
Rb=0:0.1:50        % tvorimo niz vrednosti Rb od 0 do 50 s korakom 0,1
Uth=30.91
Rth=14.32
P=Rb*Uth^2./(Rth+Rb).^2    % Izracun moci
plot(Rb,P)              % izris
xlabel('Rb     (Ohm)')
ylabel('Pb     (W)')
```

Ugotovimo lahko, da izris ustreza našim pričakovanjem, da bo torej maksimalna moč na bremenu tedaj, ko bo upornost bremena enaka upornosti Thévenina. Ugotovimo tudi, da vrednost največje moči ustreza izračunani. Kako to ugotovimo z uporabo Matlaba? Z ukazom *max(P)* izvemo največjo vrednost niza P, v katerem so shranjene vrednosti moči. Dobimo 16,68. Kaj pa vrednost upornosti pri maksimalni moči? Najprej ugotovimo indeks, pri katerem nastopa v nizu maksimalna moč z uporabo ukaza *i=find(P==max(P)),* nato pa z *Rb(i)* dobimo vrednost 14,3. Dobljena vrednost se razlikuje od točne za 0,02, kar je za pričakovati, saj smo numerično izračunavali moči le za vrednosti upornosti, ki se razlikujejo za 0,01 Ω. Namen tega pojasnjevanja je v tem, da bi vzpodbudil bralca k uporabi in raziskovanju izjemnih zmožnosti programa.



SLIKA: Moč na bremenu pri spreminjanju bremenske upornosti.

Da se prepričamo v pravilnost izračunov, lahko uberemo še eno pot. Izhajajmo direktno iz izračunavanja tokov v vezju s pomočjo metode Kirchoffovih zakonov ter določimo moč na uporu R_3 pri različnih vrednostih te (bremenske) upornosti. Preprosto, s pomočjo enačbe $P_3 = I_3^2 R_3$. S pomočjo računalnika lahko zelo hitro določimo maksimalno moč, tudi če formule ne poznamo. Iz že znane matrike:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ 0 \\ I_g \\ U_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

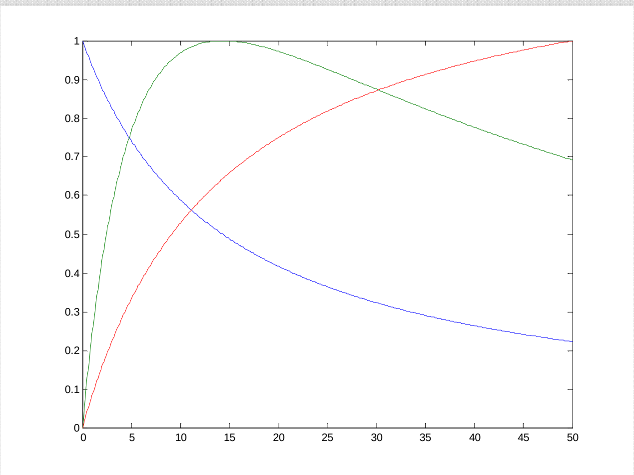
spreminjajmo R_3 od 0 Ω do 50 Ω in izračunavajmo tokove ter moč na uporu R_3 in rezultate izrišimo. Dobimo (Matlab):

```
b=[-2;0;2;10;0] % vektor znanih vrednosti / desna stran enacbe
II=[]  % prazen vektor, potreben za shranjevanje izračunanih vrednosti moči
for R3=0:0.1:50   % zanka povecuje upornosti
   A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;20,0,R3,-1,0;0,5,-R3,0,40]

   I=A\b     % izracun tokov za dolocen R3

   II=[II,I(3)]  % shranjevanje vrednosti toka I3 v vektor, ki se zaporedno polni
end

R3=0:0.1:50   % vektor upornosti
P=II.^2.*R3    % izracun moci
plot(R3,P)   % izris
```



SLIKA: Slika prikazuje normirane krivulje toka, napetosti in moči na uporu R_3 v že znanem vezju. Sami ugotovite, katera krivulja prikazuje določeno veličino. To boste ugotovili zelo hitro, če si zamislite Théveninovo nadomestno vezje (Normiranje izvedemo tako, da poiščemo največjo vrednost v nizu (določene veličine) in delimo vse vrednosti s to vrednostjo.) Ukazi v Matlabu: U=R3.*II; plot(R3,II/max(II),R3,P/max(P),R3,U/max(U))

4. Stavek Tellegena

Stavek Tellegena pravi preprosto to, da je **moč bremen enaka moči virov**. Pri tem lahko vir deluje v generatorskem načinu (pozitivna moč) ali v bremenskem načinu (negativna moč). To zapišemo kot

$$\boxed{\sum_i P_{\mathrm{g}}(i) = \sum_j P_{\mathrm{b}}(j)}.$$

V našem konkretnem primeru je moč generatorjev enaka

$$P_{\mathrm{g}} = U_{\mathrm{g}}(-I_4) + I_{\mathrm{g}}(V_3 - V_1) = \underline{\underline{41{,}6822\ \mathrm{W}}}$$

moč na bremenih pa

$$P_{\mathrm{b}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = \underline{\underline{41{,}6822\ \mathrm{W}}}.$$

Vprašanja za obnovo:

1) Razloži Théveninov in Nortonov stavek.
2) Kako določimo Théveninovo napetost in upornost?
3) Kako določimo Nortonov tok generatorija in upornost?
4) Ali velja povezava med Nortonovim in Théveninovim nadomestnim vezjem?
5) Kako določimo maksimalno moč na bremenu s pomočjo Thévenina?
6) Kdaj velja, da je breme prilagojeno na vir?
7) Razloži stavek Tellegena.

© DK