9. Koordinatni sistemi

Vsebina: kartezični, valjni (cilindrični) in krogelni (sferični) koordinatni sistem. Točka v koordinatnem sistemu. Diferencialni elementi v koordinatnih sistemih.

Zakaj uporabljati več koordinatnih sistemov (KS), če nam je kartezični koordinatni sistem (KKS) najbolj poznan in najbolj razumljiv? Odgovor je preprost: zato, ker je v določenih primerih izračun mnogo bolj preprost z izbiro drugačnega koordinatnega sistema. Na primer, če je naboj porazdeljen po površini valja. Sama po sebi se ponuja najboljša izbira za matematični opis porazdelitve naboja uporaba valjnega koordinatnega sistema, itd.

Za koordinatne sisteme, ki jih obravnavamo mi, je značilno to, da so vse ravnine med sabo pravokotne. Takim koordinatnim sistemom rečemo ortogonalni.

Kartezični koordinatni sistem (KKZ)
Točko v koordinatnem sistemu določimo s presekom treh ravnin. V KKS so to tri ravnine:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 \, . \\ z &= z_1 \end{aligned}$$

Koordinate v KKS določa trojček (x,y,z).

SLIKA: Kartezični koordinatni sistem.

Vzdolž vsake osi lahko določimo diferencial dolžine. Dobimo ga z limitiranjem malega dela dolžine: $\mathrm{d}l = \lim\limits_{\Delta L \to 0} \Delta L$. V smeri osi X je to d$x$, v smeri osi Y je d$y$ in v smeri Z je dz. V splošnem lahko **diferencial poti** v KKS zapišemo kot vektor:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{l} &= \vec{e}_x \mathrm{d}x + \vec{e}_y \mathrm{d}y + \vec{e}_z \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\vec{l} &= (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \end{aligned} .$$

Če pomnožimo vse tri diferenciale dolžine dobimo majhen – **diferencialen volumen** zapisan v obliki
$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$.
Ploskvice tega diferencialnega volumna imenujemo **diferenciali ploskev** in so $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z$ in $\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$. Pogosto jim bomo dodali še smer in sicer pravokotna na površino. To imenujemo smer **normale** na površino. Kvadratku površine $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$ bi torej pripisali smer osi Z. Velja torej:

$$\mathrm{d}\vec{A}_x = \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{x} \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}\vec{A}_y = \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{y} \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}\vec{A}_z = \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z} \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

Primeri:

Valjni (cilindrični) koordinatni sistem (CKS).
Točka je določena s presekom treh ravnin

$r = r_1$

$\varphi = \varphi_1$

$z = z_1$

Prva ravnina je plašč valja, druga je polravnina okoli Z osi, ki jo določa kot φ, tretja pa ravnina z eno vrednostjo koordinate Z. Koordinate v CKS sestavlja torej trojček (r, φ, z).

Diferencial poti je
$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_r \mathrm{d}r + \vec{e}_\varphi r \mathrm{d}\varphi + \vec{e}_z \mathrm{d}z$.

Diferenciali površine so
$\mathrm{d}\vec{A}_r = \vec{e}_r r \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z$,
$\mathrm{d}\vec{A}_\varphi = \vec{e}_\varphi \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}z$,
$\mathrm{d}\vec{A}_z = \vec{e}_z r \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r$.
Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri osi R (rotacijska simetrija), V tem primeru je diferencial v smeri osi Z določen z $\mathrm{d}A_z = 2\pi r \mathrm{d}r$

Diferencial volumna je
$\mathrm{d}V = \mathrm{d}r r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z$.

SLIKA: Valjni koordinatni sistem.

Primer: Določite ploščino diska z notranjim polmerom 1 cm in zunanjim polmerom 6 cm.
Izračun: Vzamemo diferencial površine, ki kaže v smeri osi Z in zapišemo dvojni integral

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{1\,\mathrm{cm}}^{6\,\mathrm{cm}} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{1\mathrm{cm}}^{6\mathrm{cm}} r \mathrm{d}r = 2\pi \left. \frac{r^2}{2} \right|_{1\,\mathrm{cm}}^{6\,\mathrm{cm}} = \pi \left[(6\,\mathrm{cm})^2 - (1\,\mathrm{cm})^2 \right] = \underline{\underline{35\pi\ \mathrm{cm}^2}}.$$

Primer: Po površini plašča valja višine 2 m polmera 5 cm se spreminja površinska gostota naboja z izrazom $\sigma = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mu\mathrm{C/m}$. Določimo površinsko gostoto naboja.

<u>Izračun:</u> Uporabimo zvezo $Q=\int_A \sigma \mathrm{d}A$, kar v našem primeru pomeni

$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\mathrm{m}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mu\mathrm{C/m^2}\cdot r\cdot \mathrm{d}\varphi\cdot \mathrm{d}z = 5\ \mathrm{cm}\cdot\left(-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot 2\right)_0^{2\pi}\ \mu\mathrm{C/m}\cdot 2\ \mathrm{m} =$$

$0{,}1\cdot 4\ \mu\mathrm{C} = \underline{\underline{0{,}4\,\mu\mathrm{C}}}$.

Krogelni (sferični) koordinatni sistem (SKS).

Točka je določena s presekom treh ravnin

$r = r_1$

$\vartheta = \vartheta_1$

$\varphi = \varphi_1$

Prva ravnina je plašč kroglje, druga je površina stožca (kjer je ϑ (theta) kot od Z osi navzdol), tretja pa polravnina znana iz CKS. Koordinate v SKS sestavlja torej trojček (r,ϑ,φ).

Diferencial poti je

$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_r \mathrm{d}r + \vec{e}_\vartheta r \mathrm{d}\vartheta + \vec{e}_\varphi r\sin(\vartheta)\mathrm{d}\varphi$.

Diferenciali površin so

$\mathrm{d}\vec{A}_r = \vec{e}_r r^2 \sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$,

$\mathrm{d}\vec{A}_\vartheta = \vec{e}_\vartheta r\sin(\vartheta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$,

$\mathrm{d}\vec{A}_\varphi = \vec{e}_\varphi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta$.

Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri osi R (rotacijska simetrija). V tem primeru je diferencial v smeri osi R določen z $dA_\vartheta = 4\pi r\mathrm{d}r$

Diferencial volumna je

$\mathrm{d}V = r^2\sin(\vartheta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$.

SLIKA: Krogelni koordinatni sistem.

Primer: Določimo površino krogle polmera R.

<u>Izračun:</u> Vzamemo diferencial volumna krogle $\mathrm{d}V = r^2\sin(\vartheta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$ in ga integriramo

$$V=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin(\vartheta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R\cdot\left.(-\cos(\vartheta))\right|_0^\pi\cdot\left.\varphi\right|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\frac{4\pi R^3}{3}}}.$$

WWW: Tudi pri GPS signalih se uporabljajo ustrezni koordinatni sistemi. Več: http://www.navigator.si/povezave/koordinatni_sistemi.htm

WWW: Kartezični kordinatni sistem:
http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system
Polarni koordinatni sistem: http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system