

10. Električna poljska jakost porazdeljenih nabojev

Vsebina: polje točkastega naboja, dela celotnega naboja in polje porazdeljenih nabojev.

Polje točkastega naboja.

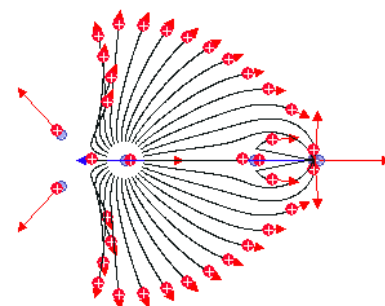
Spoznali smo že definicijo električne poljske jakosti ter enačbo za izračun polja v okolici osamljenega točkastega naboja ($\vec{r}$ je vektor od točke, kjer se nahaja naboj Q do točke, kjer določamo polje).

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Polje točkastega naboja

SLIKA: Polje v okolici točkastega naboja.

Nadalje smo ugotovili, da je število presežkov nabojev pogosto zelo veliko, kar pomeni, da se že ob manjšem drgnjenju dveh teles prenese med telesi milijone in milijone elektronov. Da bi izračunali električno poljsko jakost, ki jo povzročajo ti naboji, bi potrebovali mnogo računanja, saj bi z upoštevanjem superpozicije lahko izračunali prispevek polja vsakega naboja posebej in vplive sešteli. Tak način računanja bi bil zelo zamuden in nepraktičen, čeprav v pedagoške namene lahko uporabljamo tudi tak postopek. Tipičen primer je program JaCoB (jacob.fe.uni-lj.si), ki računa silo med naboji in jih dinamično pomika v smeri rezultantne sile. Tak način izračunavanja se pogosto uporablja tudi v raziskavah osnovnih delcev, kjer pa se upošteva tudi lastnosti trkanja delcev. Te metode imenujemo metode Monte Carlo.



SLIKA: Primer izračuna in prikazovanja sil med naboji s programom JaCoB.

Polje porazdeljenih nabojev.

Pri izračunu električne poljske jakosti porazdeljenih nabojev lahko predpostavimo, da je zaradi velikega števila nabojev le-ta porazdeljen zvezno. Spoznali smo že možnost predstavitve porazdelitve nabojev kot volumsko, površinsko ali linijsko gostoto nabojev. Da bi dobili ustrezen izraz za izračun polja, ki ga povzročajo tovrstne porazdelitve nabojev, se najprej poslužimo ideje, da če velja za polje točkastega naboja izraz $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, potem

lahko trdimo, da bo to veljalo tudi za neko malo količino naboja ΔQ , ki se nahaja na majhnem prostoru (majhnem v primerjavi z razdaljo r). V tem smislu bi za del celotnega naboja lahko določili polje, ki ga povzroča:

$$\Delta\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

SLIKA: Polje, ki ga povzroča del celotnega naboja.

S procesom limitiranja diferenčnih vrednosti dobimo izraz za diferencial polja, ki ga povzroča diferencial naboja:

$$d\vec{E} = \vec{e}_r \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Vpliv vseh delnih vrednosti oz. diferencialov naboja seštejemo superpozicijo, ki v zveznem prostoru predstavlja integracijo:

$$\vec{E} = \int_{\text{po vseh Q-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r. \text{ Izraz za izračun polja porazdeljenih nabojev}$$

SLIKA: Integracija prispevkov diferencialov naboja za izračun električne poljske jakosti.

Teoretično lahko na ta način določimo električno poljsko jakost za poljubno porazdelitev naboja. Praktično pa smo omejeni s primeri, ko je zapisan integral še analitično rešljiv. V nasprotnem primeru nam preostane numerična integracija vplivov posameznih majhnih delov

$$\text{celotnega naboja: } \vec{E} = \sum \Delta\vec{E}_i = \sum_i \vec{e}_{r_i} \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}.^1$$

Postopek za določitev polja porazdeljenih nabojev.

Zapišimo postopek, po katerem določimo električno poljsko jakost za porazdeljene naboje z

uporabo enačbe $\vec{E} = \int_{\text{po vseh Q-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, kjer je $\vec{r}$ vektor od mesta diferenciala naboja dQ do

mesta, v katerem računamo električno poljsko jakost, $\vec{e}_r$ je enotski vektor vektorja $\vec{r}$.

- 1) Naboji, ki povzročajo polje so porazdeljeni po volumnu, površini ali liniji. V tem smislu bo diferencial naboja enak $dQ = \rho dV$, $dQ = \sigma dA$ ali $dQ = q dl$.
- 2) Da bi natančneje določili diferencial volumna, površine ali razdalje, moramo našo naelektreno strukturo umestiti v določen koordinatni sistem. Če bo struktura na kateri se nahaja naboj v obliki žice, bo najbolj primerna uporaba cilindričnega koordinatnega sistema, če bo naboj v volumnu krogle bo primeren sferični K.S., itd.

¹ V praksi imamo na razpolago še nekaj drugih možnih načinov reševanja, ki jih bomo omenili v nadaljevanju.

- 3) Glede na izbran koordinatni sistem določimo ustrezen diferencial naboja. Na primer, če se naboj spreminja vzdolž palice, postavljene v osi X, bo $d\vec{l} = \vec{e}_x dx$ in $dQ = q dx$. Če se naboj nahaja na površini valja, bo potrebno uporabiti izraz $dQ = \sigma dA$, pri čemer bo $dA = r d\phi dz$, itd.
- 4) Postaviti moramo diferencial naboja na neko poljubno mesto na strukturi in določiti vektor r kot funkcijo koordinat. Vektor r je vektor od mesta diferenciala naboja dQ do točke, kjer želimo izračunati polje.
- 5) Zapišemo integral ter določimo meje integracije. Meje integracije so določene s koordinatami, ki zajamejo celoten naboj.
- 6) Rešimo integral.

Primeri: Poiščimo električno poljsko jakost v okolici naelektrenih preprostih struktur, kot so naelektrena premica, daljica, naelektren prstan, naelektrena ravnina.

Polje naelektrene premice (prema elektrina):

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Polje naelektrene daljice: (položene vzdolž Z osi):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\vec{e}_r (\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)) + \vec{e}_z (\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)) \right]$$

Polje v osi naelektrenega obroča (polmer obroča = a):

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{qaz}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

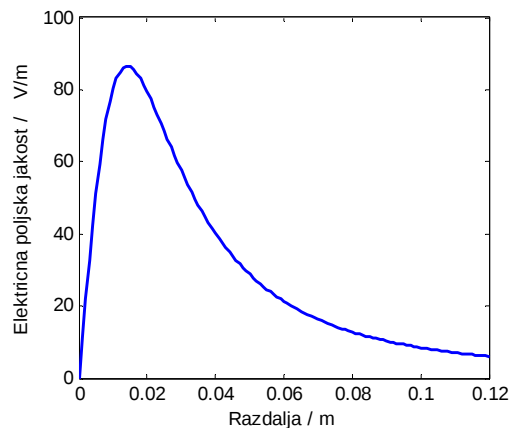
Polje v središču naelektrenega prstana ($z = 0$):

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{q}{2\epsilon_0 a}$$

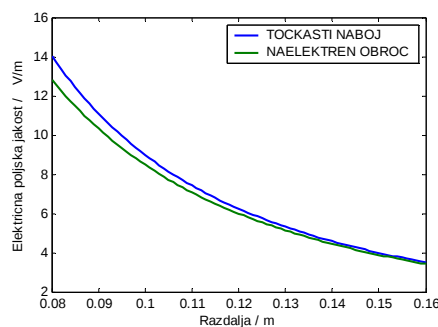
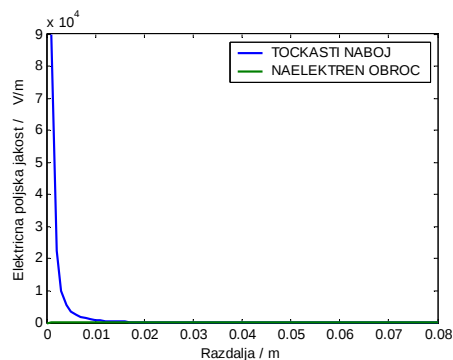
Polje naelektrene ravnine (normala v smeri osi Z):

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

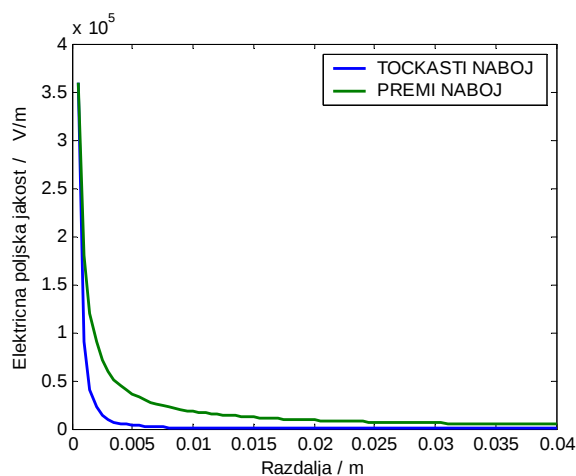
Primeri



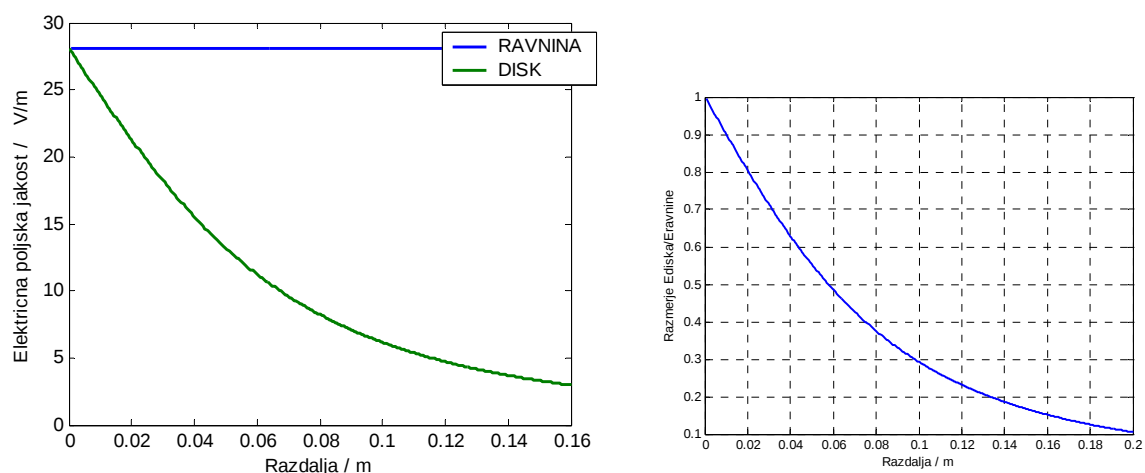
SLIKA: Polje v osi naelektrenega obroča. Polmer obroča je 2 cm, na njem je enakomerno (linijsko) porazdeljen naboj 0,1 nC.



SLIKA: Primerjava med poljem v oddaljenosti od točkastega naboja in v osi naelektrenega obroča. Oba imata enako velik naboj (0,1 nC, polmer prstana je 2 cm). Levo: polje v bližini obroča. Desno: polje v oddaljenosti od obroča. V oddaljenosti od prstana postane izraz $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ enakovreden izrazu $\vec{E} = \vec{e}_z \frac{q \cdot a \cdot z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$, v bližini obroča (razdalja manjša od nekaj polmerov obroča) pa je razlika velika (polja naelektrenega obroča na sliki levo ne vidimo, ker je bistveno manjši od polja točkastega naboja).



SLIKA: Primerjava med poljem točkastega in premega naboja. Polje točkastega naboja upada s kvadratom razdalje ($1/r^2$), polje premega pa z razdaljo ($1/r$).



SLIKA: Primerjava med poljem naelektrenega diska in neskončne ravnine z enako velikim površinskim nabojem. Polmer diska je 8 cm. Desna slika kaže razmerje med poljem diska in poljem ravnine. Tik ob površini je izračun ustrezen, na razdalji polmera diska pa je polje diska 38 % polja ravnine.