21. Dielektrik v električnem polju

Vsebina poglavlja: relativna dielektričnost, povečanje kapacitivnosti z uporabo dielektrika, vezan in prosti naboj, vektor polarizacije, površinska gostota vezanega naboja, električna susceptibilnost, vektor gostote električnega pretoka, povezave med E, D in P, modificiran Gaussov zakon, mejni pogoji električnega polja med dvema dielektrikoma, mejni pogoji med prevodnikom in dielektrikom.


Podvodni kabel, 420 kV.
www.nexans.com

Dielektrik vstavljen v zračni kondenzator.
Do sedaj smo imeli opravka le s prevodniki v vakuumu oziroma zraku. Kako pa vplivajo različni materiali (snovi) na električne razmere? Na primer, kaj se zgodi, ko med plošči ploščnega kondenzatorja vložimo material, ki je idealen (električni) izolator in ju priključimo na vir napetosti? Takemu materialu pogosto rečemo dielektrik in s tem poudarimo njegove dielektrične (kapacitivne) lastnosti, medtem ko izolatorjem praviloma predpisujemo uporovne lastnosti; dober izolator ima zelo veliko (specifično) upornost.
Če izmerimo kapacitivnost pred vložitvijo dielektrika in po vložitvi ugotovimo, da se kapacitivnost po vložitvi poveča:

$$\boxed{\frac{C_{\text{diel}}}{C_{\text{zrak}}} = \varepsilon_r \geq 1}.$$

ε_r **imenujemo relativna dielektrična konstanta in pove, za koliko se kapacitivnost poveča ob vstavitvi dielektrika med plošči zračnega kondenzatorja.**

Kapacitivnost zračnega ploščatega kondenzatorja pred vstavitvijo dielektrika je $C_{\text{zrak}} = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$,

po vstavitvi pa je $C_{\text{diel}} = \varepsilon_r C_{zrak} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$.

Izrazi za kapacitivnosti različnih tipov zračnih kondenzatorjev veljajo tudi v primeru, ko je namesto zraka dielektrik, le konstanto ε_0 nadomestimo z $\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$.

Primer: Vzemimo ploščni kondenzator s površino plošč 100 cm^2. Med plošči stisnemo list papirja debeline 2 mm ($\varepsilon_r = 2$) in 2 mm debelo gumo z $\varepsilon_r = 6$. Kondenzator priključimo na napetost 100 V.

a) Kolikšen je padec napetosti na plasti papirja in kolikšen na steklu?
b) Kolikšno je polje v steklu in v papirju?
c) Kolikšno je polje na meji med steklom in papirjem?

Izračun:

a) $C_1 = C_{papir} = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0 \dfrac{A}{d_1} = 2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{F/m} \cdot \dfrac{100 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} = 8{,}854 \cdot 10^{-11}\ \text{F}$

$$C_2 = C_{steklo} = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 \frac{A}{d_2} = 6 \cdot 8{,}854 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{F/m} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} = 3C_1 = 26{,}562 \cdot 10^{-11}\ \text{F}$$

Nadomestna kapacitivnost je

$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 3C_1}{C_1 + 3C_1} = \frac{3}{4} C_1 = 6,6405 \cdot 10^{-12}\,\text{F/m}$, torej je naboj na skupni vezavi $Q_{12} = C_{12} U = 6,6405\,\text{nC}$.

Ta naboj je tudi enak naboju na kondenzatorju C_1, zato je $U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 75\,\text{V}$ in $U_2 = U - U_1 = 25\,\text{V}$.

b) Električna poljska jakost v papirju je: $E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{75\,\text{V}}{2\,\text{mm}} = 37,5\,\text{kV/m}$, v steklu pa $E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{25\,\text{V}}{2\,\text{mm}} = 12,5\,\text{kV/m}$.

c) Iz $Q_1 = Q_2$ sledi $C_1 U_1 = C_2 U_2$ oziroma $\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 \frac{A}{d_1} \cdot E_1 d_1 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 \frac{A}{d_2} \cdot E_2 d_2$, od koder je

$\varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_{r2} E_2$. Polje na meji med dielektrikoma ima skok, je torej nezvezno. Polje v dielektriku z manjšo dielektričnostjo je večje od polja v dielektriku z večjo dielektričnostjo.

Kolikšno je povečanje kapacitivnosti ob vstavitvi dielektrika?

Večina plinov ima vrednosti dielektričnosti okoli 1, med 1 in 1,001 in prebojno trdnost okoli 3 MV/m, medtem, ko imajo običajni izolatorji relativne dielektričnosti med 2 in 10 in prebojne trdnosti od nekaj do nekaj sto MV/m.

Plin	**relativna dielektričnost brez enot**	**prebojna trdnost MV/m**
vodik	1,00027	2
suh zrak	1,00058	3
CO_2	1,00099	2,9

Tekočine in izolatorji	**relativna dielektričnost**	**prebojna trdnost v MV/m**
papir	2,3	20
etanol	3,7	16
voda (destilirana)	81	
olje	2-5	
guma	3	
silicij	11	

Fizikalna razlaga spremembe kapacitivnosti ob uporabi dielektrika.

1) Ploščni kondenzator naelektren s prostim nabojem med ploščama

Vzemimo, da imamo med elektrodama ploščnega kondenzatorja prosti naboj, torej $\pm Q_{\text{prosti}}$. Med plošči vstavimo dielektrik. Pozitivni in negativni naboji na ploščah delujejo s silo na naboje v dielektriku tako, da se le ti prerazporedijo. To prerazporeditev nabojev lahko ponazorimo z modelom dipola. Dipoli se usmerijo v smer polja (navor $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ je enak nič, ko sta vektorja vzporedna), pri čemer je potrebno upoštevati, da so negativni poli dielektrika bližje pozitivni elektrodi. Polje med ploščama je vsota prispevkov vseh nabojev, tistih na ploščah kondenzatorja in ločenih nabojev (dipolov) v dielektriku med ploščama.

Dipoli so nanizani v verigi, kjer se minus pol enega dipola kompenzira s plus polom naslednjega dipola. Tako lahko smatramo, da se **znotraj dielektrika kompenzirajo naboji dipolov, ostane pa na površini nekompenziran naboj, ki pa je nasprotnega predznaka kot prosti naboj na plošči**. Ti nekompenzirani (**vezani**) naboji povzročajo polje, ki je nasprotno usmerjeno od polja, ki je povzročil polarizacijo. Zato se polje med ploščama ob vstavitvi dielektrika pri konstantnem naboju zmanjša. Posledično se **zmanjša tudi napetost med ploščama** $U = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$. Ker pa je kapacitivnost določena kot $C = \dfrac{Q}{U}$, se ob zmanjšanju napetosti med ploščama in konstantnem prostem naboju na ploščama kapacitivnost poveča.

Ob vložitvi dielektrika med naelektreni plošči pri konstantnem (prostem) naboju bo torej: $\boxed{C\uparrow = \dfrac{Q}{U\downarrow}}$.

SLIKA: Naboj na ploščah kondenzatorja polarizira snov med ploščama, kar prikažemo s kreiranjem dipolov.

2) Ploščni kondenzator pri priključeni fiksni napetosti med ploščama

Kako pa razložimo enako povečanje kapacitivnosti pri vložitvi dielektrika med plošči zračnega kondenzatorja ob **konstantni napetosti**? Tudi v tem primeru si zamislimo, da se na elektrodah zaradi napetosti nakopiči določen naboj. Ko pa vstavimo dielektrik, polje, vzpostavljeno med ploščama povzroči polarizacijo dielektrika. Zopet tako, da so negativni naboji dielektrika v povprečju bližje pozitivnim nabojem na plošči.

Ti polarizirani naboji bi ob ohranjeni količini naboja na ploščama povzročili zmanjšanje polja in zmanjšanje napetosti med ploščama. Ker pa je zunanja napetost vsiljena, priteče ob fiksni napetosti na elektrodi dodaten naboj, ki kompenzira polariziran naboj. Tudi v tem primeru se torej poveča kapacitivnost, saj se poveča količina prostega naboja na ploščah kondenzatorja.

Ob vložitvi dielektrika pri konstantni napetosti bo: $\boxed{C\uparrow = \dfrac{Q\uparrow}{U}}$.

SLIKA: Povečanje kapacitivnosti ob vložitvi dielektrika v zračni kondenzator na konstantni napetosti.

Vpeljava koncepta vektorja polarizacije.

Električni dipolni moment smo že spoznali. Definiran je kot $\vec{p} = Q\vec{d}$. Ugotovili smo, da na dipol v polju deluje navor $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$. V dielektriku, ki ga postavimo v polje se ustvarijo in usmerijo dipoli. Vpeljemo pojem **vektorja polarizacije, ki je določen kot prostorska gostota dipolskih momentov**:

$$\boxed{\vec{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta v} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}v}}.$$

Enota za vektor polarizacije je $\frac{\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$.

Zakaj vpeljati nov vektor? Zopet imamo problem, da je sicer smiselno vpliv polja na dielektrik ponazoriti z množico dipolov, ker pa je v snovi zelo veliko molekul in torej veliko dipolov, je potrebno njihovo skupno delovanje predstaviti na primeren način. Vektor polarizacije je torej makroskopski model in ponazarja povprečno delovanje velike množice dipolnih momentov v majhnem volumnu. Na podoben način smo se lotili tudi obravnave naboja: s konceptom gostote naboja.

Površinska gostota polariziranega naboja.

Vzemimo primer enakomerno polariziranega valja površine A. Na površini je vezan (polariziran) naboj velikosti $Q_P = P \cdot A$. V primeru, da smer vektorja polarizacije ni v smeri normale na površino je potrebno upoštevati le normalno komponento vektorja polarizacije $Q_P = P_\mathrm{n} \cdot A$, če pa tudi ni enakomerno porazdeljen polariziran naboj pa $Q_P = \int_A \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$.

Enako kot o gostoti prostega površinskega naboja lahko »govorimo« tudi o **gostoti polariziranega (vezanega) površinskega naboja**, ki je enaka kar normalni komponenti vektorja polarizacije na površini:

$$\boxed{\sigma_P = P_n}$$

SLIKA: Polariziran naboj v volumnu. Na površini je normalna komponenta vektorja polarizacije neka gostoti površinskega polariziranega (vezanega) naboja.

Polariziran (vezan) naboj po zaključeni površini dobimo z integracijo normalne komponente vektorja polaritacije po celotni površini: $Q_{P,\text{zunaj }A} = \oint_A \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$. Ker ta naboj ni nujno enak nič, ostane ob polarizaciji znotraj zaključene površine površinski polariziran naboj, ki je enak

$$Q_{\mathrm{P,znotraj}} = -\oint_A \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A}\ .$$

Ta naboj je potrebno razlikovati od naboja, ki se »prosto« giblje po prevodni površini, saj je ta naboj vezan v snovi. Lahko se giblje vendar le omejeno, kolikor se pač lahko giblje dipol.

Povezava med E in P. Električna susceptibilnost.
Ko dielektrik postavimo v polje se naboji v snovi prerazporedijo - **polarizirajo**. Ta prerazporeditev je lahko večja ali manjša, odvisno od lastnosti materiala. Prerazporeditev naboja predstavimo z modelom električnih dipolov oziroma njihove gostote z vektorjem polarizacije *P*. Za mnogo snovi velja, da povečanje polja povzroči sorazmerno povečanje polarizacije, kar matematično zapišemo kot:

$$\boxed{\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}}.$$

Spomnimo se, kaj je $\varepsilon_0 E$. Na površini polprevodnika je bil $\varepsilon_0 E$ enak površinski gostoti naboja. Konstanto χ (chi) imenujemo **električna susceptibilnost** in »govori« o odzivnosti snovi na električno polje. Je brezdimenzijska konstanta. V vakuumu je torej χ enaka nič, saj tedaj ni polariziranega naboja.

Dielektrik imenujemo **linearen**, če susceptibilnost ni odvisna od velikosti polja (napetosti), **homogen**, če je neodvisen od pozicije in **izotropen**[*], če je neodvisen od smeri polja.

Vektor gostote električnega pretoka - D.
Vzemimo, da imamo zunanje električno polje E_0, ki ga vzpostavimo z zunanjimi viri. V tako polje vstavimo dielektrik. Dielektrik se polarizira, kar ponazorimo z vektorjem polarizacije oziroma z prerazporeditvijo polariziranih nabojev in povzročijo dodatno polje E_P. To polje običajno deluje v nasprotni smeri polja, ki je povzročilo polarizacijo in zato se sumarno polje zmanjša.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P$$

SLIKA: Superpozicija zunanjega polja in polja polariziranih nabojev.

[*] **Anizotropen material** ima različno dielektričnost (susceptibilnost) v različnih smereh. V tem primeru bo polarizacija v vsaki smeri drugačna. Polarizacija v smeri X osi bo torej enaka $P_x = \varepsilon_0\chi_{xx}E_x + \varepsilon_0\chi_{xy}E_y + \varepsilon_0\chi_{xz}E_z$. Podobno zapišemo za ostale smeri. V tem primeru susceptibilnost ni več skalarna količina, pač pa jo moramo predstaviti kot tenzor (v obliki matrike).

Poglejmo, ali lahko upoštevamo Gaussov zakon in druge že znane ugotovitve. Spoznali smo že potencialnost elektrostatičnega polja: $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$, pa tudi Gaussov zakon $\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$. Prvi integral je po zaključeni poti, drugi pa po zaključeni površini. *Q* je naboj, ki je zaobjet z integracijo. Prvi se ne spremeni tudi, če gre del poti skozi dielektrik, medtem, ko se drugi spremeni, saj je potrebno upoštevati, da z integracijo polja po zaključeni površini ne zajamemo le prosti naboj pač pa tudi ujetega, polariziranega. Ugotovili smo že, da je količina tega ujetega naboja po zaključeni površini enaka $Q_{P,\mathrm{znotraj}} = -\oint_A \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$, torej moramo Gaussov zakon zapisati v obliki

$$\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{prosti, znotraj A}}}{\varepsilon_0} + \frac{Q_{P,\text{ znotraj A}}}{\varepsilon_0},$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$\oint_A \varepsilon_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \oint_A \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\substack{\text{prosti,}\\ \text{znotraj A}}}$$

$$\oint_A \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\substack{\text{prosti,}\\ \text{znotraj A}}}$$

Zgodovina elektrotehnike je doprinesla še eno veličino (lahko smatramo tudi dvopomensko), ki v osnovi izhaja iz gornjega zapisa. J.C. Maxwell je namreč vpeljal vektor *D*, ki ga imenujemo **vektor gostote električnega pretoka** in je definiran kot

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}.$$

Enota vektorja D je C/m^2, enako kot gostota naboja na površini prevodnika. V osnovi je vektor *D* na površini enak površinski gostoti naboja, je pa za razliko od površinskega naboja definiran tudi povsod po volumnu.

S pomočjo tega vektorja lahko zapišemo zgornjo enačbo v obliki

$$\boxed{\oint_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\substack{\text{prosti,}\\ \text{znotraj A}}}},$$

ki ga lahko imenujemo **modificiran Gaussov zakon**. Z besedami bi rekli, da je pretok vektorja D skozi zaključeno površino enak zaobjetemu prostemu naboju. Odlika tega zapisa je predvsem ta, da je zapis neodvisen od vplivov snovi na vektor **D**. Ta vektor je izključno odvisen od lege prostih nabojev, to pa so tisti, ki jih običajno vzpostavimo z zunanjim poljem. S tem si bistveno olajšamo upoštevanje vplivov dielektrika.

Zveza med D in E.
Združimo enačbi $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ in $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$ in dobimo

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}+\chi\varepsilon_0\vec{E}=(1+\chi)\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$$

Ponovimo pomembno zvezo med E in D:

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon\vec{E}},$$

kjer ε_r imenujemo **relativna dielektrična konstanta**.
Povezava med električno susceptibilnostjo in relativno dielektrično konstanto je preprosta: $\boxed{\varepsilon_r=1+\chi}$.

Zveza med D in P.
Če smo ugotovili enostavno zvezo med D in E, velja seveda tudi enostavna zveza med D in P, saj velja $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\vec{E}=\frac{(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\vec{D}}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$, torej $\vec{P}=\frac{(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r}\vec{D}$.

Primer: Vzemimo ploščni kondenzator površine plošč 100 cm^2 in ga priključimo na napetost 20 V. Vmes stisnimo 2 mm debel list papirja z relativno dielektrično konstanto 2. Določimo naboj na površini, površinsko gostoto naboja, vektor gostote pretoka, vektor polarizacije, električno poljsko jakost in kapacitivnost.
Izračun: Izračuna se lahko lotimo na več načinov. Običajni postopek je tak, da najprej določimo D, ki ni odvisen od snovi, potem E, nato U, itd.. V ploščnem kondenzatorju velja:

$$\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A}=Q_{prosti,znotraj}\Rightarrow DA=\sigma A\Rightarrow D=\sigma$$

$$E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$$

$$U=\int_0^d E\mathrm{d}x=Ed=\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}d,$$

od koder sledi: $E=\frac{U}{d}=\frac{20\text{ V}}{2\text{ mm}}=10\text{ kV/m}$, $D=\varepsilon_r\varepsilon_0E=177{,}08\cdot10^{-9}\text{ C/m}^2$, $\sigma=D=177{,}08\cdot10^{-9}\text{ C/m}^2$, $P=\frac{(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r}D=\frac{2-1}{2}D=\frac{D}{2}=88{,}54\cdot10^{-9}\text{ C/m}^2$.

Sigma, ki smo jo izračunali je gostota površinskega naboja. *D* je enak sigmi, vendar je *D* definiran povsod v prostoru, sigma pa le na površini. Ker obravnavamo primer ploščnega kondenzatorja je *D* povsod enako velik. Ker je normalna komponenta P-ja na površini enaka površinski gostoti polariziranega naboja, je $\sigma_P=P=88{,}54\cdot10^{-9}\text{ C/m}^2$. Prostega naboja na površini plošče je 2x več od polariziranega površinskega naboja, torej, vsaki drugi naboj prosti naboj ima svoj nasprotni – polariziran naboj. Pri dielektrikih z veliko relativno dielektričnostjo bo P kar enak D.

SLIKA: Ploščni kondenzator z dielektrikom.

Pri konstantni napetosti je polje v dielektriku neodvisno od dielektrika in je enako $E=\dfrac{U}{d}=\dfrac{20\ \text{V}}{2\ \text{mm}}=10\ \text{kV/m}$. Zato pa bo v primerjavi z zrakom potrebna gostota naboja, ki bo vzdrževala to polje v dielektriku večja kot v primeru, če med ploščama ni dielektrika (je le zrak), saj velja $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\Rightarrow\sigma=\varepsilon_r\varepsilon_0 E=\varepsilon_r\varepsilon_0\dfrac{U}{d}$. Ko bomo vstavili dielektrik, se bo površinska gostota naboja povečala za 2x: od $88,54\cdot10^{-9}\ \text{C/m}^2$ na $177,08\cdot10^{-9}\ \text{C/m}^2$. Razlika je ravno posledica polarizacije, ki na površini dielektrika vzpostavi površinsko gostoto polariziranega naboja (nasprotnega predznaka kot prosti naboj) velikosti $88,54\cdot10^{-9}\ \text{C/m}^2$.

Če pa imamo konstantno gostoto naboja, se bo polje po vložitvi dielektrika med plošči zmanjšalo za $\varepsilon_r : E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$, torej na 5 kV/m. To pomeni, da se bo zmanjšala tudi napetost in sicer na 10 V.

Primer: Nekoliko drugačne pa bodo razmere, če bomo med plošči kondenzatorja vstavili dielektrik, ki bo le delno zapolnil vmesni prostor. Vzemimo, da v zračni kondenzator, ki je priključen na napetost 20 V in ima 2 mm razdalje med ploščama potisnemo 1 mm debel kos papirja.

SLIKA: Ploščni kondenzator z dvema dielektrikoma.

Izračun: D bo neodvisen od dielektrikov in bo povsod konstanten. Spremenilo pa se bo polje, ki bo $E=\dfrac{D}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$ v dielektriku (papirju) in $E=\dfrac{D}{\varepsilon_0}$ v zraku. Da bi določili vrednosti polja moramo zapisati še napetost, ki bo

$$U=\int_0^d E\mathrm{d}x=\frac{D}{\varepsilon_r\varepsilon_0}d_1+\frac{D}{\varepsilon_0}d_2=D\left(\frac{d_1}{\varepsilon_r\varepsilon_0}+\frac{d_2}{\varepsilon_0}\right)$$

$$D=\frac{U}{\left(\frac{d_1}{\varepsilon_r\varepsilon_0}+\frac{d_2}{\varepsilon_0}\right)}=\frac{20\text{ V}}{\frac{1\text{ mm}}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}+1\right)}=118,053\cdot10^{-9}\text{ C/m}^2.$$

Toliko je tudi površinska gostota naboja. Električno polje je torej $E=\frac{D}{\varepsilon_r\varepsilon_0}=6,667\text{ kV/m}$ v dielektriku (papirju), v zraku pa je 2x večje: $13,33\text{ kV/m}$.
Gostota polariziranega površinskega naboja na meji med papirjem in ploščo in papirjem in zrakom je enaka D/2 .

Reševanje primera s pomočjo kapacitivnosti:
$U=Q\left(\frac{d_1}{A\varepsilon_r\varepsilon_0}+\frac{d_2}{A\varepsilon_0}\right)=Q\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)$. Iz te zveze lahko določimo naboj na površini, iz znanega naboja napetost na papirju in v zraku: $U_1=\frac{Q}{C_1}$ in $U_2=\frac{Q}{C_2}$. Nato iz znanih napetosti določimo polji: $E_1=\frac{U_1}{d_1}$ in $E_2=\frac{U_2}{d_2}$.

Na meji med dvema dielektrikoma, v našem primeru med papirjem in zrakom je skokovit prehod polja. Ker je D enak v obeh medijih bo veljalo:
$\varepsilon_{r1}\varepsilon_0E_1=\varepsilon_{r2}\varepsilon_0E_2$. To je mejni pogoj za prehod med dvema dielektrikoma, ki velja splošno, vendar le za tisto komponento polja, ki je pravokotna na mejo.

Primer: Vzemimo primer dvoplastnega koaksialnega kabla, ki ga želimo dimenzionirati za delovanje na napetosti 20 kV. Prva, notranja plast je iz gume z relativno dielektričnostjo 3,2, druga pa iz polistirena z ε_r = 2,6. Prebojna trdnost gume je 25 kV/mm, polistirena pa 20 kV/mm. Koaksialni kabel polmera žile 4 mm želimo dimenzionirati tako, da maksimalno polje v dielektrikih ne preseže 25% prebojne trdnosti. Določiti moramo debelino obeh dielektrikov, torej radij do plasti polistirena r_P in zunanji radij r_Z.
Izračun:
Pri vzpostavljeni napetosti 20 kV imamo na žili +*q* naboj, na oklopu pa –*q*. Da bi določili polje v enem in drugem dielektriku, se poslužimo Gaussovega stavka za vektor D, ki je neodvisen od dielektrikov. Za poljubni radij med notranjim in zunanjim dobimo
$D(r)=\frac{q}{2\pi r}$ oziroma $\vec{D}=\vec{e}_rD(r)=\vec{e}_r\frac{q}{2\pi r}$. Polje v dielektrikih dobimo iz zveze $\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$,
torej bo polje v plasti gume

$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_{rg}\varepsilon_0}=\vec{e}_r\frac{q}{2\pi\varepsilon_{rg}\varepsilon_0r},$$

v plasti polistirena pa

$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_{rp}\varepsilon_0}=\vec{e}_r\frac{q}{2\pi\varepsilon_{rp}\varepsilon_0r}.$$

Maksimalno polje v gumi ne sme preseči 25% prebojne trdnosti, kar zapišemo kot
$E_{\max,guma} = 25\% E_{preb,guma} = 0,25 \cdot 25 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m} = 6,25 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m}$,
za polistiren pa bo veljalo
$E_{\max,poli} = 25\% E_{preb,poli} = 0,25 \cdot 20 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m} = 5 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m}$.
Polje bo maksimalno pri čim manjšem radiju, torej pri

$$E_{\max,guma} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rg}\varepsilon_0 r_n} = 6,25 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m}$$

in

$$E_{\max,poli} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rp}\varepsilon_0 r_p} = 5 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m}\ .$$

Če enačbi delimo, lahko določimo r_p:

$$r_p = \frac{\varepsilon_{rg}}{\varepsilon_{rp}} \cdot r_n \cdot \frac{6,25}{5} = \underline{\underline{0,62\ \mathrm{cm}}}\ .$$

Lahko tudi določimo linijsko gostoto naboja, ki bo $q = 2\pi\varepsilon_{rg}\varepsilon_0 r_n \cdot 6,25 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m} = 6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C/m}$.

Preostane nam še, da določimo potrebno debelino plasti polistirena, za kar pa potrebujemo še eno enačbo, ki jo dobimo iz enačbe za napetost. Integrirati je potrebno polje od notranjega do zunanjega radija, pri čemer pa se polje spremeni med dvema dielektrikoma. Zato je potrebno ločiti integral v dva, enako, kot da bi zapisali celotno napetost kot vsoto padcev napetosti v gumi in v polistirenu. Tako dobimo

$$U = \int_{r_n}^{r_z} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = U_{gume} + U_{poli} = \int_{r_n}^{r_p} \vec{E}_{gume} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{r_p}^{r_z} \vec{E}_{poli} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$U = \int_{r_n}^{r_p} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rg}\varepsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r \mathrm{d}r + \int_{r_p}^{r_z} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rp}\varepsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r \mathrm{d}r =$$

$$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rg}\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_p}{r_n}\right) + \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rp}\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_z}{r_p}\right)$$

V gornji enačbi je edina neznanka zunanji polmer, ki jo določimo z vstavitvijoi vrednosti in dobimo 0,77 cm.

SLIKA: Dvoplastni koaksialni kabel.

Mejni pogoji.

Posredno smo z obravnavo polja v dveh stikajočih se dielektrikih že spoznali. Ugotovili smo, da na meji med dvema dielektrikoma z različnima dielektričnostima pride do nezveznega prehoda (skoka) električnega polja. V tem poglavju želimo spoznati splošne zakonitosti prehoda polja iz enega medija v drugega. Izpeljemo jih iz Gaussovega zakona in zakona o potencialnosti (konzervativnosti) elektrostatičnega polja.

Mejni pogoj za normalno komponento polja.
Mejni pogoj za normalno (pravokotno) komponento dobimo iz Gaussovega zakona:

$$\oint_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\text{prosti,znotraj}}$$

Zamislimo si površino med dvema dielektrikoma in kocko, katere stranice stiskamo v smeri meje. Ker moramo računati D skozi zaključeno površino (ven iz površine) bomo pisali:
$\vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{A} - \vec{D}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \sigma_{prosti} \cdot \mathrm{d}A$ ali tudi

$\boxed{\vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \sigma_{\text{prosti}}}$ ali tudi $D_{1\mathrm{n}} - D_{2\mathrm{n}} = \sigma_{\text{prosti}}$.
Enotski vektor kaže iz dielektrika z indeksom 2 v dielektrik z indeksom 1. Če je površinska gostoto prostega naboja na meji dveh dielektrikov enaka nič, velja
$\boxed{D_{1\mathrm{n}} = D_{2\mathrm{n}}}$ ali tudi $\varepsilon_1 E_{1\mathrm{n}} = \varepsilon_2 E_{2\mathrm{n}}$.
Če poznamo normalno komponento polja na meji na eni strani dielektrika, z lahkoto izračunamo normalno komponento na meji v drugem dielektriku.

SLIKA: Prehod normalne komponente polja.

Mejni pogoj za tangencialno komponento polja.
Potrebujemo še mejni pogoj za komponente polja, ki so vzporedne (tangencialne) z mejo. Tu uporabimo zakon potencialnosti polja:

$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$. Vzemimo pravokotnik na meji dveh dielektrikov in ga stiskajmo v smeri meje.
Integral polja bo imel tako le komponenti v smeri meje – tangencialni komponenti. Veljalo bo torej: $E_{1\mathrm{t}} \cdot l - E_{2\mathrm{t}} \cdot l = 0 \Rightarrow E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}$.

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}.$$

SLIKA: Prehod tangencialne komponente polja.

Združimo obe enačbi v »lomni zakon«. Če na meji dveh dielektrikov ni površinskega (prostega) naboja, velja:

$$E_{1t} = E_{2t}$$
$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Če enačbi delimo med sabo, dobimo:

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\tan(\alpha_1) = \frac{1}{\varepsilon_2}\tan(\alpha_2) \text{ ali } \boxed{\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

α je vpadni kot med normalo na površino in smerjo polja.

SLIKA: »Lomni zakon« polja na meji dveh dielektrikov.

Primer: Homogeno polje 100 V/m je usmerjeno pod kotom 45° iz zraka v olje z $\varepsilon_r = 2$. Izračunajte električno poljsko jakost v olju in skicirajte vektorja polja na meji zrak-olje.

Izračun: Ohranja se tangencialna komponenta, ki bo tudi v olju enaka $E_{1t} = E_{2t} = 100\ \text{V/m}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$. Normalna komponenta polja v olju pa se zmanjša za ½, saj velja $E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_{1n} = \frac{1}{2}E_{1n} = \frac{1}{2}100\ \text{V/m}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$. Absolutna vrednost polja v olju pa je $E_2 = \sqrt{E_{1n}^2 + E_{2t}^2} \cong \underline{\underline{79\ \text{V/m}}}$. Polje v olju se zmanjša, saj se zmanjša normalna komponenta polja, tangencialna pa ostane enaka.

SLIKA: Lom polja na meji zrak-olje.

Polje na meji dielektrika in kovine.
Poseben primer je meja dielektrik - prevodnik. Vzemimo, da označimo dielektrik z indeksom 1, prevodnik pa z 2. Predhodno smo že ugotovili, da je elektrostatično polje znotraj prevodnika enako nič: $E_2 = 0$. Ker velja $E_{1t} = E_{2t}$, bo tangencialna komponenta polja v izolatorju na meji z dielektrikom enaka nič. To pa obenem pomeni, da bo imelo polje v izolatorju na meji s prevodnikom le normalno komponento, ki bo enaka $D_{1n} - 0 = \sigma_{prosti}$ oziroma,

$$\boxed{E_1 = E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}}.$$

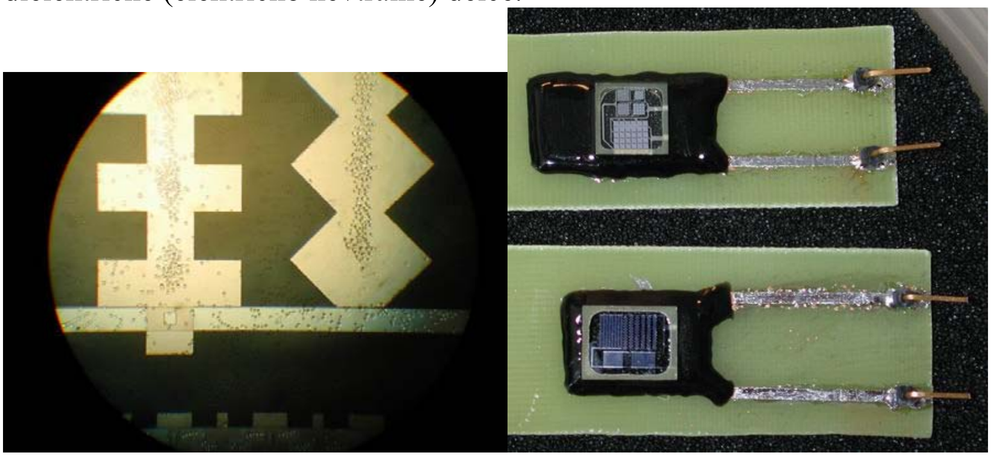
Prišli smo do že znane ugotovitve, da je polje na površini prevodnika pravokotno na površino in sorazmerno površinski gostoti naboja.

Zapišimo še enkrat tudi ploskovno silo na prevodnik: $f = \sigma \frac{\sigma}{2\varepsilon}$.

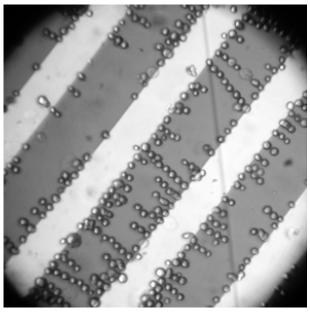
SLIKA: Polje na meji izolator – kovina.

*** Sila med dielektriki.** Zanimiv je tudi primer, ko želimo izračunati silo med dvema dielektrikoma. Primer je na primer sila na nevtralne dielektrične delce v nehomogenem polju. Zaradi različne dielektričnost delca in medija deluje na delec sila, ki jo lahko določimo z integracijo ploskovne sile na delec. Brez izpeljave zapišimo rezultat, ki bo $f = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}\left(E_t^2 + \frac{D_n^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\right)$. Smer te ploskovne sile je v smeri prostora z manjšo dielektričnostjo.

Tako je mogoče dielektrične delce usmerjati z vzpostavitvijo električnega polja med dvema ali več elektrodami. Delci se naberejo tam, kjer je polje največje – na ostrih robovih elektrod ali pa na mestih, kjer je električno polje najmanjše. Dodatno kontrolo nad gibanjem delcev nam ponuja vzbujanje z izmeničnim signalom. Dielektrične lastnosti snovi (relativna dielektričnost) se s frekvenco signala spreminja, kar omogoča manipulacijo delcev z električnim poljem. V Laboratoriju za bioelektromagnetiko smo skupaj z Laboratorijem za mikrosenzorske strukture in Laboratorijem za biokibernetiko načrtali in izdelali strukture za manipulacijo bioloških celic s pomočjo dielektroforeze. Če je elektroforeza pojav, v katerem izkoriščamo silo na naelektrene delce, je dielektroforeza pojav, kjer izkoriščamo silo na dielektrične (električno nevtralne) delce.



SLIKA: Manipulacija bioloških celic z električnim poljem. Celice se koncentrirajo na mestu najmanjšega polja, ki je v sredini in na površini elektrod. Razdalja med elektrodama je 50 μm. Na desni sta prikazana modula z izdelanimi mikrostrukturami. Mikrostrukture so izdelane s polprevodniško tehnologijo na Pyrex steklu z dvoslojno metalizacijo.



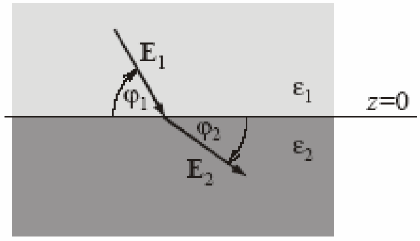
SLIKA: Veriženje celic pri pojavu dielektroforeze.

Delovanje dielektroforeze smo ugotavljali tudi pri eksperimentu s semenkami v enosmernem polju. Semenke so iz dielektrika in se usmerijo v smer polja, ker pa so v dovolj gostem mediju, se težje prosto gibljejo. Potrebovali bi še večjo silo, da bi premagali silo viskoznosti. Smo pa opazili značilnost veriženja, ki jo opazimo tudi pri celicah na mikrostrukturah. Poleg tega so pazljivi lahko opazili, da se giblje tudi olje v katerem so bile semenke. Tudi na molekule olja (dielektrik) deluje sila, ki jih premakne v smeri elektrod.

PRIMERI:

Primer kolokvijske naloge z dne 11.12.2001:

Ravnina $z = 0$ je meja med dvema dielektrikoma, z relativnima dielektričnostima $\varepsilon_{r1} = 5$ za prostor $z > 0$ in $\varepsilon_{r2} = 12$ za prostor $z < 0$. V prvem prostoru je električna poljska jakost $E_1 = 10^5$ V/m in je usmerjena pod kotom $\varphi_1 = 60°$ glede na ravnino $z = 0$. Določite velikost električne poljske jakosti v drugem prostoru in kot φ_2, ki ga oklepa z ravnino $z = 0$.



$$E_1 = 10^5 \,\mathrm{V/m} \qquad E_{1t} = E_1 \cos\varphi_1 = 50 \mathrm{kV/m}$$

$$\varphi_1 = 60^\circ \qquad E_{1n} = E_1 \sin\varphi_1 = 86,6 \mathrm{kV/m}$$

$$\varepsilon_{r1} = 5 \qquad E_{2t} = E_2 \cos\varphi_2$$

$$\varepsilon_{r2} = 12 \qquad E_{2n} = E_2 \sin\varphi_2$$

$$E_{2t} = E_{1t} = 50 \mathrm{kV/m}$$

$$D_{2n} = D_{1n} \to E_{2n} = E_{1n} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} = 36,1 \mathrm{kV/m}$$

$$\underline{E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = 61,7 \mathrm{kV/m}}$$

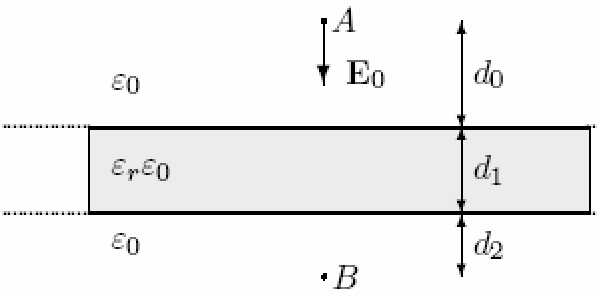
$$\underline{\tan\varphi_2 = \frac{E_{2n}}{E_{2t}} \to \varphi_2 = 35,8^\circ}$$

Nalogo bi lahko rešili tudi z uporabo lomnega zakona $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, pri čemer pa bi morali paziti, da je kot alfa definiran glede na normalo in ne na mejo, torej je $\alpha_1 = 90^0 - 60^0 = 30^0$ in

$\tan(\alpha_2) = \tan(\alpha_1)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \tan(30^0)\frac{12}{5} = 1,386$, od koder je $\alpha_2 \cong 54,2^0$ in $\varphi_2 = 35,8^0$.

Primer kolokvijske naloge 17.12.2003 (UNI):

Napetost med točkama A in B je 300 V. Določite navpično komponento električne poljske jakosti v praznem prostoru, če je relativna dielektričnost vmesne plasti $\varepsilon_r = 8$!
Podatki: $d_0 = d_2 = 2$ cm, $d_1 = 16$ cm.



Ker je polje v vsakem od prostorov homogeno, lahko napetost med točkama A in B zapišemo kot vsoto treh prispevkov $U_{AB} = E_{0y}d_0 + E_{1y}d_1 + E_{2y}d_2$. Mejni pogoj na mejah med plastmi predpisuje $\varepsilon_r E_{1y} = E_{0y} = E_{2y}$. Sledi

$$E_{0y} = \frac{U_{AB}}{d_0 + \frac{d_1}{\varepsilon_r} + d_2} = \underline{\underline{5\ \text{kV/m}}}.$$

Vprašanja za obnovo:

1. Kako je definirana relativna dielektričnost in kaj pomeni?
2. Kolikšne so tipične vrednosti relativne dielektričnosti?
3. Kakšna je fizikalna razlaga spremembe kapacitivnosti ob uporabi dielektrika pri a) konstantnem naboju med ploščama kondenzatorja in b) pri konstantni napetosti med ploščama?
4. Kako je definiran vektor polarizacije?
5. Čemu je enak vektor polarizacije na površini dielektrika?
6. Kakšna je povezava med električno poljsko jakostjo in vektorjem polarizacije?
7. Kako je definiran vektor gostote električnega pretoka? Zakaj je njegova vpeljava koristna (potrebna)?
8. Kakšna je zveza med gostoto električnega pretoka in jakostjo polja?
9. Dobro prouči primere nalog.
10. Mejni pogoj za normalno komponento polja.
11. Mejni pogoj za tangencialni komponenti polja.
12. Lomni zakon.
13. Polje na meji dielektrika in kovine.