12. Delo in potencialna energija

Vsebina: Delo kot integral sile na poti, delo električne sile, delo po zaključeni poti, potencialna energija, potencialna energija sistema nabojev, delo kot razlika potencialnih energij.

V srednješolski fiziki je veljalo, da je delo enako produktu sile in dolžine poti, torej, če vzdolž poti dolžine l deluje sila F, le ta opravi delo $A = F \cdot l$. Če torej potiskamo voziček v smeri poti dolžine 5 m s silo 100 N opravimo delo 500 N·m ali 500 J. Kaj pa, če voziček potiskamo s silo 100 N v smeri, ki je pod kotom 60^0 na smer poti? V tem primeru moramo upoštevati le tisto komponento sile, ki deluje v smeri poti. Delo je torej $A = F \cdot l \cdot \cos(\alpha)$=100 N·5m·cos($60^0$) = 250 J. Ugotovimo, da je za izračun dela primerna uporaba skalarnega produkta $\boxed{A = \vec{F} \cdot \vec{l}}$.

SLIKA: Premikanje vozička s kostantno silo a) v smeri poti in b) pod kotom 30^0 na smer poti.

Kaj pa drugi del sile, ki tudi nastopa pri premiku? Ta sila je usmerjena pravokotno na smer poti in ima za posledico trenje po ploskvi - ne prispeva pa k delu. V smislu definicije dela, torej kot produktu poti in sile v smeri te poti. V tem smislu je potrebno razlikovati pojem besede delo, kot ga smatramo v vsakdanu. Če primemo in pri miru držimo težko košaro v smislu definicije dela ne opravimo nič dela, čeprav moramo v to naše početje vložiti določen napor (delo). Bolj ustrezno bi naš napor ovrednotili s pojmom energije. Ta energija izhaja iz energije, ki se troši v naših mišicah nekaj pa je gre prav gotovo tudi v toploto - potenje.
In koliko energije potrebujemo za premik na poti 5 m? En del te energije je očitno delo 250 J, ki se odraža v spremembi kinetične energije vozička, drug del energije pa potrebujemo za premagovanje sile trenja. Za točen izračun bi torej morali poznati še energijo, ki se porabi pri trenju vozička s podlago.

Delo po poljubni poti in velikosti sile. Kaj pa če sila ni konstantna na poti in poleg tega ne deluje vedno v isti smeri glede na pot? Potem lahko zapišemo delo le za en mali (diferenčni) odsek, da dobimo tisti del sile, ki deluje v smeri poti pa uporabimo skalarni produkt. Diferenčni del sile na poti Δl je torej $\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{l}$. Z limitiranjem dobimo iz diferenc diferencial: $\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$, celotno delo pa je seveda integracija po poti od začetne točke do končne točke:

$$\boxed{A = \int \mathrm{d}A = \int_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}.$$

SLIKA: Delo sil po poljubni poti.

Delo električne sile. Kako pa izračunamo delo električnih sil (A_e) na naboje? Na popolnoma enak način. Upoštevamo, da je sila na naboj v električnem polju enaka $\vec{F} = Q\vec{E}$, torej bo delo za premik naboja v električnem polju iz točke T_1 v točko T_2 enako

$$\boxed{A_e = A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = Q\int_{T_1}^{T_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}.$$

Primer: Vzemimo dva pozitivna naboja oddaljena za d = 1 cm z množino naboja Q = 10 nC. Koliko dela opravi naboj (zunanji vir) za premik na polovično razdaljo?
Izračun: naboja postavimo vzdolž X osi, levega v izhodišče k.s., desnega pa za razdaljo d v smeri X osi. Izračunali bomo delo, potrebno za premik desnega naboja v levo. Da bi lahko izračunali delo, moramo desni naboj postaviti na neko poljubo mesto vzdolž X osi, oddaljeno za razdaljo x od levega naboja. Polje na mestu desnega naboja je $\vec{E} = \vec{e}_x \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$, $\mathrm{d}\vec{l}$ pa je usmerjen v smeri – X osi*.

SLIKA: Premik desnega naboja v smeri levega naboja.

$$A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = Q\int_{x_1=d}^{x_2=d/2} \vec{e}_x \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cdot(\vec{e}_x \mathrm{d}x) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)_d^{d/2} =$$

$$= -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d/2}-\frac{1}{d}\right) = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \cong -9\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\left(10\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\right)^2 10^2\,\mathrm{m}^{-1} = \underline{\underline{-9\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}}}$$

Dobljen rezultat je negativen, kar pomeni, da bi bila za premik potrebna neka zunanja sila (A_z), ki bi opravila to delo. Veljati torej mora:

$$\boxed{A_z + A_e = 0}.$$

* Kljub temu, da je *dl* usmerjen v smeri –X osi ni njegova vrednost $-\vec{e}_x \mathrm{d}x$, pač pa $\mathrm{d}\vec{l} = -\vec{e}_x(x-(x+\mathrm{d}x)) = \vec{e}_x$.

Primer: Določimo delo za premik desnega naboja v desno za $d/2$. Rezultat je

$$A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{d}^{3d/2} \vec{e}_x \frac{QQ}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cdot(\vec{e}_x \mathrm{d}x) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)_d^{3d/2} =$$

$$= -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3d/2}-\frac{1}{d}\right) = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(\frac{2}{3}-1\right) = 9\cdot 10^9\cdot\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}(10\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C})^2\cdot\frac{1}{3}10^2\,\mathrm{m}^{-1} = \underline{\underline{3\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}}}$$

Rezultat je pozitiven, saj polje opravi delo 30 μJ: delec se premakne v drugo točko pod vplivom električne sile. Zakaj je rezultat mnogo manjši kot v prejšnjem primeru?

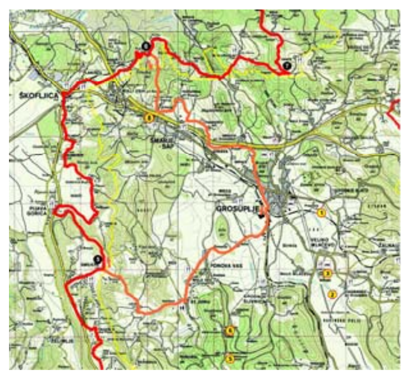
SLIKA: Premik desnega naboja stran od levega.

Delo po poljubni poti.

Kolikšno pa bi bilo delo, če bi ga opravili po drugi poti? Izračunajmo delo za enak premik kot v prejšnjem primeru le po drugi poti. Izberimo to pot tako, da bo šla najprej v smeri kota za 45^0, nato v smeri radija do $r = 2{,}5$ cm in nato nazaj za kot 45^0 do končne točke.

Ugotovimo lahko, da je v smeri kota ($\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_\varphi r\mathrm{d}\varphi$) polje enako nič, saj je polje v vsaki točki usmerjeno radialno. Torej je produkt integracije $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ v smeri kota enak nič in je rezultat enak kot prej.

Ker je rezultat integracije polja neodvisen od poti lahko vzamemo dve poljubni poti in zapišemo $\int_{L_1} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$.



Pri kolesarjenju pogosto končamo na istem mestu kot smo začeli. Če bi šlo za delo električnih sil, bi bilo na (po definiciji) na koncu delo enako nič. Kako pa je z energijo?

SLIKA: Delo od točke T_1 do točke T_2 po poti L_1 in poti L_2 je enako.

Delo po zaključeni poti.

Ker velja $\int_{L_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$, integracija v nasprotni smeri pa spremeni predznak integralu $\int_{-L_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{L_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{L_1} \vec{E}\cdot d\vec{l}$, lahko pišemo

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{L_1+(-L_2)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{-L_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{L_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0\,.$$

Prišli smo do pomembnega rezultata, da je **krivuljni integral električne poljske jakosti po poljubni zaključeni poti (zanki) enak nič**[*]:

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}.$$

POTENCIALNA ENERGIJA

SLIKA: S premagovanjem sile težnosti pridobivamo (gravitacijsko) potencialno energijo. Na sliki je primer profila pete etape kolesarske poti po okolici Grosupelj, ki je primerna za tiste, ki žele neposredno spoznavati povezavo med delom in energijo ter zakonitosti integralov po zaključeni poti. Vir: http://www.grosuplje.si.

Potencialna energija ali delo pri prenosu naboja v neskončnost (kjer je polje enako nič). Določimo še delo, če bi enega od nabojev iz prejšnjega primera pustili v neskončnost. Opravljeno delo bi bilo:

$$A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = Q\int_{r_1}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot(\vec{e}_r \mathrm{d}r) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_1}^{\infty} =$$
$$= -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r_1}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

[*] Pri tem je potrebno biti previden, saj smo doslej obravnavali le elektrostatično polje, torej tako, ki se s časom ne spreminja. Zgornji zapis je torej **točen le za elektrostatične polje**. Ko bomo obravnavali dinamično polje bomo ugotovili, da je potrebno zgornji zapis spremeniti – dopolniti.

SLIKA: Delo pri prenosu naboja od točke T do neskončnosti.

Lahko rečemo, da je imel sistem (naboj) pred prenosom v neskončnost določeno energijo, ki se je nato porabila za prenos. Ta (potencialna) energija je ravno enaka delu, potrebnem za premik naboja v neskončnost. Če uporabimo simbol W za zapis električne potencialne energije, velja

$$\boxed{W(T) = A_e(T \to T_\infty)}$$

Delo, potrebno za prenos naboja *Q* od neke točke *T* do neskončnosti je enako električni potencialni energiji tega naboja v točki *T*.

Primer: Določite elektrostatično potencialno energijo sistema dveh nabojev velikosti 10 nC oddaljenih za 1 cm.

Izračun: Izračun smo že opravili, saj je ta energija enaka delu polja za premik enega od nabojev od začetne lege do neskončnosti:

$$W_e = A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} == -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \underline{\underline{9\,\mu\mathrm{J}}}\,.$$

Komentar: na tem mestu lahko vpeljemo tudi koncept električnega potenciala.

Potencialna energija sistema nabojev. Kolikšna pa je energija sistema, če imamo več nabojev? Postopamo tako, kot da bi imeli najprej na mestu naboj[*] Q_1, nato na svoje mesto oddaljeno od Q_1 za r_{12} pripeljemo iz neskončnosti naboj Q_2. Za to je potrebno delo $A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$, da pripeljemo poleg še naboj Q_3 potrebujemo delo $\frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$. Energija sistema treh nabojev bo torej $\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$. V nadaljevanju bomo ta rezultat prikazali še nekoliko drugače.

SLIKA: Sistem treh nabojev z označenimi naboji in razdaljami med naboji.

[*] Za postavitev naboja Q_1 na določeno mesto ne potrebujemo nobenega dela, saj imamo predhodno sistem brez nabojev in torej brez polja. V nadaljevanju pa seveda vsi nadaljnji naboji prispevajo k polju – delu.

Delo kot razlika potencialnih energij sistema. Imamo sistem nabojev porazdeljenih po prostoru in torej določeno električno potencialno energijo. Sedaj premaknemo enega od nabojev iz izhodiščnega mesta T_1 na drugo mesto (T_2) in pri tem opravimo določeno (pozitivno ali negativno) delo. Če je to delo pozitivno, je delo opravilo elektrostatično polje, energija sistema pa je po premiku manjša kot pred premikom. V nasprotnem primeru (delo negativno) mora delo opraviti neka zunanja sila, kar pomeni, da je končna energija sistema večja kot pred premikom. **Delo potrebno za premik naboja od T_1 do T_2 je enako razliki potencialnih energij sistema nabojev pred in po premiku**:

$$\boxed{A(T_1 \to T_2) = W(T_1) - W(T_2)}$$

SLIKA: Delo je enako razliki potencialnih energij sistema pred premikom in po premiku.

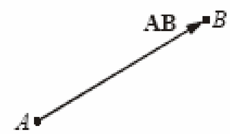
Vprašanja za obnovo:

1. **Zapišite enačbo za izračun dela po poljubni poti in razložite pomen skalarnega produkta.**
2. **Kako izračunamo delo električnih sil?**
3. **Kaj pomeni pozitivno delo in kaj negativno delo električnih sil?**
4. **Koliko je integral polja po zaključni poti?**
5. **Kakšna je povezava med delom električnih sil in električno potencialno energijo?**
6. **Kako izračunamo potencialno energijo sistema nabojev?**

Primer iz kolokvija 6.12.204

5. Koliko dela opravi homogeno električno polje jakosti $\mathbf{E} = (-20, 10, 30)\ \mathrm{kV/m}$ pri premiku točkaste elektrine množine $Q = 1\ \mu\mathrm{C}$ od točke $A(10\ \mathrm{cm}, 10\ \mathrm{cm}, 40\ \mathrm{cm})$ do točke $B(0\ \mathrm{cm}, 30\ \mathrm{cm}, 50\ \mathrm{cm})$?

5. Delo W, ki ga opravi polje pri premiku točkaste elektrine množine $Q = 1\ \mu\mathrm{C}$ od točke A do točke B je sorazmerno napetosti U_{AB} med tema točkama: $W = QU_{AB}$. Ta napetost je enaka krivuljnemu integralu vektorja električne poljske jakosti po neki krivulji med tema točkama. Ker je polje homogeno, je vektor $\bar{E}$ konstanta v tem integralu in ga zato lahko izpostavimo pred integral:



$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \int_A^B \mathrm{d}\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{AB} = (-20, 10, 30)\ \mathrm{kV/m} \cdot (0-10, 30-10, 50-40)\ \mathrm{cm} = \boxed{7000\ \mathrm{V}}$$

$$W = 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{3}\ \mathrm{J} = \boxed{7\ \mathrm{mJ}}$$