

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I



2008

ENOSMERNNA VEZJA

DEJAN KRIŽAJ

Spoštovani študenti!

Pred vami je skripta, ki jo lahko uporabljate za lažje spremljanje predavanj pri predmetu Osnove elektrotehnike 1 na visokošolskem študiju na Fakulteti za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani. Sestavljena je kot zbirka mojih priprav na predavanja.

Skripta večinoma ne vsebuje slikovnega materiala, razen v posebnih primerih. Je pa v njej rezerviran določen prostor, kjer lahko narišete ustrezno sliko, ki ste jo že narisali na predavanjih. Na ta način si lahko z nekoliko lastne aktivnosti pripravite literaturo, primerno za pripravo na izpit.

Skripta je neke vrste delovni zvezek. Vsebuje teorijo, primere, napotke za obnavljanje znanja, dodatne naloge, poleg tega pa še usmerja k uporabi spleta za dopolnjevanje znanja.

Poleg »standardnega« teksta z razlagami osnovnih električnih pojavov in pojmov ter njihovega matematičnega zapisa sem dodal nekaj primerov uporabe Matlaba za izračun in vizualizacijo polja. Več primerov si lahko ogledate na spletni strani na <http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE/OE.html>. Predlagam, da tudi sami poskusite uporabiti Matlab ali pa kakšen soroden program. Na spletu so na voljo tudi brezplačni programi, ki tudi omogočajo zelo kakovostno delo. Poglejte na primer možnosti programov FreeMat (http://freemat.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page) ali Octave (www.gnu.org/software/octave).

Poleg analitične obravnave smo uporabili tudi programe za numeričen izračun električnega polja. Ta je posebno primeren za vizualizacijo polja, je pa tudi pogost način dela v praksi. V delu je uporabljen komercialen programski paket Femlab (www.comsol.com), za študentsko delo pa so primerni tudi drugi nekomercialni programi (npr. Quickfield ali Maxwell SV).

Pri predmetu OE1 imate možnost izdelati seminarsko nalogo. To ni obveznost, se pa uspešno izvedena seminarska naloga upošteva pri končni oceni (izpitu). Primeri možnih nalog so na strani <http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE/OE.html>, lahko pa predlagate tudi svojo.

Na spletni strani <http://torina.fe.uni-lj.si/oe/> se nahaja osnovna stran predmetov OE1 in OE2, kjer najdete tudi povezave na zbirko rešenih izpitnih in kolokvijskih nalog, ki so izdatno opremljene z rešitvami. To je gradivo, ki vam ga toplo priporočam kot študijsko gradivo, predvsem kot priprava za pisni del izpita in kolokvije.

Za boljšo komunikacijo s študenti in med študenti se poslužujte Foruma, ki smo ga odprli posebno v ta namen: <http://torina.fe.uni-lj.si/~oe/forum/>

Poleg te skripte obstaja veliko knjižnega gradiva, ki je primeren kot študijsko gradivo. Krajši spisek je na strani <http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE>.

Pa še to: verjetno ste se za študij elektrotehnike odločili zato, ker vas to področje zanima. Če boste iz tega izhajali, ste na pravi poti. Predmet Osnove elektrotehnike I vam bo dal znanja s katerimi boste razumeli osnovne koncepte, ki jih uporabljamo za razlago in seveda izkoriščanje električnih pojavov.

Uspešen študij,

Dejan Križaj, 2008

VSEBINA

1. NABOJ, TOK in NAPETOST
2. ELEKTRIČNI VIRI, OSNOVNA VEZJA IN MERILNI INŠTRUMENTI
3. MOČ
4. ANALIZA VEZIJ
5. STAVKI (TEOREMI)

1. Naboj, tok in napetost

Vsebina poglavja: naboj, napetost, tok, upornost, Kirchoffova zakona, Ohmov zakon

Predmet OE 1 je razdeljen na dva dela. V prvem delu obravnavamo enosmerna električna vezja, v drugem pa osnove električnega polja v stacionarnem stanju – elektrostatično polje.

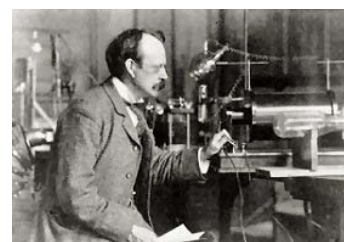
Stacionarno stanje. Kaj je to stacionarno stanje? To je stanje, ko ni več časovnih sprememb sistema. Če bi na primer pogledali napetost na kondenzatorju, bi ta morala biti ves čas nespremenjena – konstantna – stacionarna. Če se določena veličina časovno spreminja, govorimo o dinamiki oziroma o dinamičnem stanju. Dokler imamo opravka s stacionarnim stanjem, je mogoče električno polje obravnavati ločeno od magnetnega. Takšna analiza je pogosto lažja, kar je tudi razlog, da jo obravnavamo najprej. Poleg tega je tak način obravnave tudi pogosto opravičljiv. Posebej obravnavamo tudi primere, ko sistem preide iz enega stacionarnega stanja v drugo. Takemu pojavu pravimo prehodni pojav.

Naše spoznavanje elektrike bo temeljilo torej na postopnosti. Od bolj preprostih konceptov do bolj zahtevnih. V tem smislu bomo začeli z obravnavo enosmernih električnih vezij. Razlog je zopet v tem, da je za obravnavo električnega polja potrebno razumevanje integralnega in infinitezimalnega računa (integralov in odvodov), za kar potrebujemo nekoliko matematičnega predznanja.

Osnovne veličine – naboj, napetost, tok, upornost. Vse te veličine so vam že znane in ste jih navajeni uporabljati. V smislu eksaktne definicije pa so ti koncepti včasih manj preprosti, kot bi morda pričakovali. Na primer napetost, ki je definirana kot delo, ki ga opravijo električne sile pri premiku enote naboja (1 C) od enega do drugega mesta. V primeru napetosti kondenzatorja (ali baterije), sta ti dve mesti ravno zunanji priključni sponki. Tok pa je definiran s silo med dvema vzporednima tankima vodnikoma oddaljenima za 1 m . Bolj natančne definicije osnovnih enot si preberite v prilogi Uradnega lista Evropske unije, ki je priložen na koncu teksta ali pa ga najdete na strani.

Atomi. Zavedati se moramo, da so električni pojavi vezani na lastnost naše narave, ki je sestavljena iz atomov, ti pa iz jedra iz protonov, neutronov in oblaka elektronov. Elektroni in protoni imajo lastnost, ki ji rečemo naboj. Elektroni imajo negativni naboj, protoni pa pozitivnega. To je seveda naš (človeški) koncept, ki ga je prvi vpeljal Benjamin Franklin, ki je ene naboje poimenoval pozitivne, druge pa negativne. Čisto lahko bi se lahko Franklin odločil tudi za obratno pojmovanje.

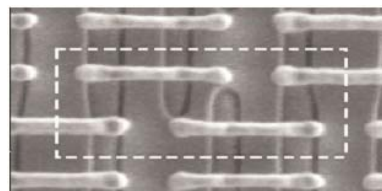
WWW: B. Franklin je znameniti Američan. Poiščite več informacij o njegovem življenju, delu in raziskavah, ki jih je opravil v elektrotehniški znanosti.



Joseph John Thomson, profesor fizike na univerzi Cambridge, je leta 1897 v eksperimentih s katodno cevjo opazil delce (elektrone), ki so bili negativni in 2000 krat lažji od atoma vodika.

Prevodniki, polprevodniki, izolatorji. Dokler ima atom enako število pozitivnih in negativnih nabojev je nevtralen. Atomi so običajno vezani med seboj in tvorijo zelo različne tvorbe. V kovinah so atomi, ki običajno tvorijo vezi, pri katerih je del elektronov zelo šibko vezan na jedro in se z lahkoto od jedra odcepi in se »prosto« giblje po materialu. Zato za kovine smatramo, da so dobri prevodniki. Nasprotni primer so izolatorji. Pri izolatorjih ni prostih ali pa je zelo malo prostih elektronov, ki lahko delujejo kot nosilci toka. Zato so

izolatorji slabi prevodniki električnega toka. Poseben primer predstavljajo polprevodniki. Že ime samo pove, da so njihove lastnosti nekaj vmes med prevodniki in izolatorji. Čisti polprevodniki so običajno izolatorji (npr. silicij ali germanij). Če pa jim vstavimo primesi (npr. z mikrotehnološkim procesom dopiranja), postanejo te snovi bolj prevodne. Prevodnost teh snovi torej lahko spreminjamo. Na tak način realiziramo polprevodniške elemente, ki jih poznamo kot diode, tranzistorje katere lahko integriramo v mikroelektronske komponente (integrirana vezja)*. Poseben primer so še superprevodniki, snovi, ki pri določeni temperaturi izgubijo uporovne lastnosti.



Intelova 65 nm tehnologija SRAM spominskih celic. Na mm² je nekaj 10 milijonov takih tranzistorjev.

WWW: Na spletu poiščite informacije o najboljših prevodnikih in dobrih izolatorjih. Kolikšna je trenutna največja gostota polprevodniških elementov na sodobnih čipih? Iz kakšnih materialov so sestavljeni superprevodniki, kje se jih uporablja v praksi?

Naboj (elektrina)

Vsi naboji prispevajo k električnim pojavom. V tem smislu bi morali v principu upoštevati pri analizi vse naboje v atomu, molekuli, snovi, tako elektrone kot nevtrone. V praksi pa je pogosto dovolj, da se osredotočimo le na vplive presežkov nabojev, saj je njihov vpliv na električne pojave največji. Omenili smo že enoto naboja 1 C (Coulomb). Najmanjša vrednost naboja je naboj elektrona, ki je približno $1,602 \cdot 10^{-19}$ C in ker je ta naboj negativen, moramo upoštevati še negativen predznak. 1 C je torej mnogo elektronov. Koliko? $1/1,602 \cdot 10^{-19} \cong 6,25 \cdot 10^{18}$. To pa je veliko delcev in da bi obravnavali vsakega posebej je praktično neizvedljivo. Bolj pogosto obravnavamo naboje v smislu njihove koncentracije oziroma gostote porazdelitve.



Benjamin Franklin (1706-1790) je bil izjemen politik (pisec ameriške ustave) pa tudi znanstvenik. Prvi je ločil naboje na pozitivne in negativne, izumil izraze baterija, naboj, prevodnik, pozitivni in negativni naboj itd. Najbolj znan (in tudi nevaren) je njegov dokaz, da je strela električen pojav z eksperimentom z zmajem, ki se ob dežju namoči in postane prevoden. Ob strelah se del toka razelektritve prenese preko zmaja na zemljo. Iz teh raziskav sledi njegov izum strelovoda.

Zakon o ohranitvi naboja

Kako pa nastaja naboj? Ugotovitve kažejo, da naboj niti ne more iz nič nastati niti se ga ne da izničiti. To dejstvo opišemo kot zakon o ohranitvi naboja, ki je fundamentalen zakon. Pravi, da je v izoliranem sistemu vsota vseh nabojev konstantna.

* Gordon E. Moore, soustanovitelj podjetja Intel, je že leta 1965 zapisal znamenito ugotovitev, da se gostota tranzistorjev na integriranem vezju večja eksponentno s časom – vsaki dve leti se približno podvoji. V podjetju Intel so leta 2007 prikazali zmožnost proizvajati tranzistorje velikosti 45 nm na 300 mm veliki silicijevi rezini. (http://en.wikipedia.org/wiki/Moore's_law).

$$\sum_i Q_i \Big|_{\substack{\text{znotraj} \\ \text{izoliranega} \\ \text{sistema}}} = konst$$

Če je konstanta (vsota nabojev) pozitivna, govorimo o presežku pozitivnih nabojev, če je negativna o presežku negativnih nabojev, če pa je enaka nič je sistem nevtralen (ima enako število pozitivnih in negativnih nabojev). Pri vseh prej omenjenih primerih razelektritve in naelektritve gre torej za prerazporejanje naboja, ne more pa naboj nastati »iz nič« niti ne more »izginiti«. V tem smislu lahko rečemo, da je neuničljiv. Fizikalno – matematično rečemo, da je relativistična invarianta, je količina, ki se ne spremeni tudi če se sistem giblje s hitrostjo blizu svetlobne. (To pa ne drži za maso, ki se ob velikih hitrostih spreminja v skladu z znano povezavo med maso in energijo delcev (Einstein). Torej za maso ne moremo trditi, da velja zakon o ohranitvi mase. Ta velja le, če so hitrosti sistema majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Kar pa zelo pogosto drži.)

Primer: Vzemimo izoliran sistem v katerem imamo tri telesa. Dve nevtralni, na enem pa je presežek pozitivnega naboja 10 mC. Ob stiku teh treh teles se prenese 5 mC na eno, 2 mC pa na drugo telo. Koliko naboja je ostalo na prvotno naelektrenem telesu?

V skladu z zakonom o ohranitvi naboja mora veljati

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 10 \text{ mC},$$

tako pred stikom teles kot po stiku. Po stiku teles je $Q_2 = 5 \text{ mC}$, $Q_3 = 2 \text{ mC}$ iz česar sledi

$$Q_1 = 10 \text{ mC} - (Q_2 + Q_3) = 3 \text{ mC}.$$

V neposredni povezavi z zakonom o ohranitvi naboja je tudi kontinuitetna enačba, ki opisuje povezavo med električnim tokom in nabojem.

Električni tok (kontinuitetna enačba)

Nosilci električnega toka so naboji, rečemo jim lahko tudi elektrine. Če ti mirujejo, električnega toka ni. Tako kot ni vodnega toka, če je jez zajezen. Če pa jez odpremo, da lahko voda steče po strugi ali po cevi na lopatice turbine, pa seveda govorimo o vodnem toku. Tako je tudi pri elektriki. Če nabojem omogočimo, da se »pretakajo« iz enega mesta na drugo, lahko govorimo o električnem toku. Če je časovna sprememba količine naboja večja, to pomeni, da je v tem času tekel večji tok. Matematično to na simbolni način lahko zapišemo kot:

$$\text{kot: TOK} = \frac{\text{sprememba naboja}}{\text{sprememba časa}}, \text{ oziroma } i = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \text{ kjer } \Delta Q \text{ predstavlja}$$

spremembo količine naboja v časovnem intervalu Δt . Če se sprememba naboja spreminja zelo hitro, je potrebno časovne intervale Δt vzeti zelo male, v idealnem tako majhne, da gre

$\Delta t \rightarrow 0$. V tem primeru dobimo bolj splošno definicijo toka v obliki $i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, kar pa v

matematiki predstavlja definicijo odvoda. Električni tok lahko torej definiramo kot odvod naboja po času, kar zapišemo kot

$$i = \frac{dQ}{dt}.$$

Predznak toka

Po dogovoru je s pozitivnim predznakom definiran tok, ki je v smeri »opazovanega« naboja (v smeri pritekanja naboja):

$$i_{\text{v smeri pritekanja}} = + \frac{dQ}{dt}$$

Če je tok vezan na smer stran od opazovanega naboja, je potrebno uporabiti negativni predznak (v smeri odtekanja naboja):

$$i_{\text{v smeri odtekanja}} = - \frac{dQ}{dt}$$

Gre seveda za isti tok, le da ga enkrat določamo glede na naboj na eni, drugič pa drugi strani glede na smer toka.

SLIKA: Razlaga predznaka pri zvezi med nabojem in tokom.

Primer: Naboj na pozitivni sponki akumulatorja je konstanten – se ne spreminja s časom. Kolikšen je električni tok, ki izhaja iz sponke? Matematično lahko zapišemo, da je naboj na pozitivni sponki enak $Q(t) = Q_0$. Iz osnov matematike vemo, da je odvod konstante enak nič, torej bo ta tok seveda enak nič. Kaj pa, če recimo na akumulator priključimo žarnico in se naboj na pozitivni sponki akumulatorja manjša linearno, npr. v 10 sekundah za 12 C? Matematično to zapišemo kot $Q(t) = Q_0 - \frac{12\text{C}}{10\text{s}}t$. V tem primeru skozi žarnico (stran od

pozitivne sponke) teče električni tok, ki je $i = -\frac{dQ}{dt} = -\left(-\frac{12\text{C}}{10\text{s}}\right) = \underline{\underline{1,2\text{C/s}}}$. Ker vemo, da je

enota za tok A(mpere), je rezultat torej 1,2 A. Ponovno vidimo, da velja 1 C = 1 A.s.

Vprašanje: Kaj pomeni pozitivni predznak toka?

Odgovor: To, da s pozitivne sponke odteka pozitivni naboj s »hitrostjo« 1,2 C/s, oziroma bolje - s tokom 1,2 A.

Vprašanje: Kakšen pa je v resnici način gibanja nabojev v prevodnikih?

Odgovor: Ker smo že ugotovili, da v prevodniku prevajajo elektroni, pomeni, da gre v resnici za prenos elektronov preko žarnice v smeri pozitivne sponke, kjer smo imeli prej višek pozitivnih nabojev oziroma pomanjkanje elektronov.

Vprašanje: Ali steče tok skozi žarnico šele tedaj, ko do nje pridejo elektroni iz kondenzatorja?

Odgovor: poišcite ga sami ...

Primer: Ob naelektritvi se naboj na pozitivni elektrodi kondenzatorja spreminja kot $Q(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{10\text{s}}}\right)\text{mC}$. Določimo tok naelektritve, če smer toka označimo v smeri pozitivne elektrode.

Izračun: Glede na označitev moramo uporabiti enačbo

$$i = i_{\text{v smeri elektrode}} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5\left(1 - e^{-\frac{t}{10\text{s}}}\right)\text{mC}\right) = 5e^{-\frac{t}{10\text{s}}}\text{mC} \cdot \left(-\frac{1}{10\text{s}}\right) = 0,5e^{-\frac{t}{10\text{s}}}\text{mA}.$$

Pozitivni rezultat pomeni, da teče v smeri pozitivne elektrode pozitivni naboj.

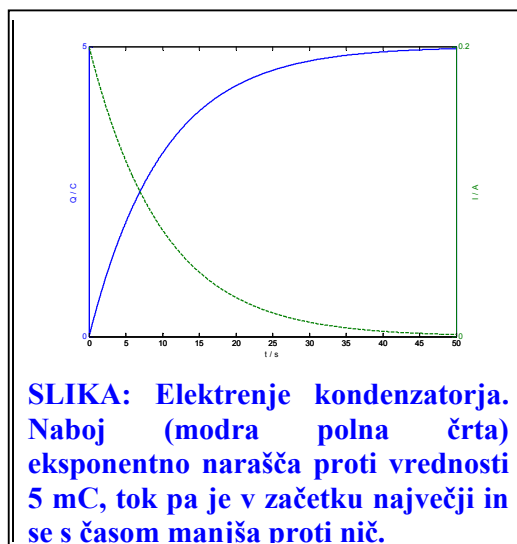
Naboj kot integral toka

Kaj pa obratno? Če poznamo tok, koliko naboja se »pretaka«? Gornjo enačbo je potrebno »predelati«, kar naredimo tako, da na obeh straneh enačbe množimo z dt in dobimo

$idt = dQ$. Sedaj le še integriramo obe strani in dobimo

$$Q(t) = \int_{t_0}^t idt$$

Z besedami: naboj je integral toka po času..



Primer: Ob času $t = 0$ s priklopimo akumulator na elektren s 500 C na breme. Iz pozitivne sponke akumulatorja teče v vezje konstanten tok 0,2 A. Koliko naboja je na pozitivni sponki akumulatorja ob času $t = 10$ minut?

Izračun: $Q(t = 10 \text{ min}) = \int_{t_0}^t (0,2 \text{ A}) dt = 0,2 \text{ A} \cdot (t - t_0) = 0,2 \text{ A} \cdot 10 \text{ min} = 0,2 \text{ A} \cdot 10 \cdot 60 \text{ s} = \underline{\underline{120 \text{ A} \cdot \text{s}}}$

V času 10 minut je skozi presek žice prešlo 120 As oziroma 120 C naboja. Na pozitivni sponki ga je torej ostalo še 380 C.

Konstanten tok

Ob konstantnem toku velja linearna zveza med nabojem in tokom

$$Q = \int_0^T I_0 \cdot dt = I_0 \int_0^T dt = I_0 T$$

To zvezo poznamo že iz srednješolske fizike: naboj je produkt toka in časa. Ugotovimo lahko omejeno veljavnost zapisa $Q = It$, saj velja le za konstantne toke.

Električna napetost

Na eni od sponk našega akumulatorja imamo pozitivni naboj, na drugi pa negativni. Rečemo lahko, da je naš akumulator nabit ali bolje naelektren, med sponkama akumulatorja pa je določena napetost. Napetost nam torej na nek način govori o naelektrenosti v prostoru. Oziroma, o energiji, ki smo jo vložili (ali se je vložila) v elektrenje. Ta napetost še nič ne pove o tem, kolikšno zalogo nabojev imamo na naših dveh sponkah, pač pa le o tem, koliko energije na enoto naboja smo vložili v to, da smo ločili naboje (če pri tem nismo imeli drugih izgub (npr. toplotnih)). Zveza med nabojem, ki ga ločujemo in napetostjo je pogosto linearna, kar lahko zapišemo kot $Q = CU$. Konstanta C ni nič drugega, kot prav gotovo že slišan pojem kapacitivnost. Toda, kot smo že dejali, v prvem delu predmeta se bomo ukvarjali z elementi enosmernih električnih vezij. Enota za napetost je V (Volt).

Ohmov zakon

Za bremena, ki jih bomo obravnavali pri analizi enosmernih vezjih velja linearna zveza (sorazmerje) med tokom in napetostjo. Večja kot je napetost na bremenu, večji tok teče skozi breme. Matematično to zapišemo kot

$$U = RI$$

Ohmov zakon

, kjer R ni nič drugega kot upornost. Enota za upornost je Ω (Ohm). Ta »zakon« pogosto imenujemo tudi **Ohmov zakon**, kar pa moramo upoštevati z zadržkom. Zvezo med napetostjo in tokom na določenem elementu vedno lahko poiščemo, ni pa vedno linearna. V elektrotehniki pogosto uporabljamo elemente, kot so diode in tranzistorji. Pri teh ravno izkoriščamo njihove nelinearne lastnosti med tokom in napetostjo za usmerjanje, ojačanje, ipd. Ohmov zakon v smislu linearne zveze med tokom in napetostjo je omejen na tiste elemente, kjer pač velja linearnost– to pa so linearni upori, ki jih bomo uporabljali pri analizi enosmernih vezij.*

Analogno izrazu upornost lahko uporabimo tudi izraz prevodnost. Velja $G = 1/R$. Enota za prevodnost je S (Siemens). »Ohmov« zakon bi tako lahko pisali tudi

$$I = GU \quad \text{ali} \quad U = I/G$$

SLIKA: Simbol za upor, grafično prikazana linearna zveza med tokom in napetostjo.

SLIKA: Simbol za nelinearni element – diodo in prikazana nelinearna zveza med napetostjo in tokom diode.

Označevanje smeri tokov in napetosti. Tako za napetost kot za tok določimo smer. Na viru označimo smer napetosti od sponke plus proti sponki minus, na bremenu pa lahko smer toka ali napetosti določimo poljubno. Ne pa tudi obeh. Smer toka na bremenu določa tudi smer napetosti in obratno ($U = IR$).



SLIKA: Označevanje smeri tokov in napetosti na virih in bremenu.

* Omejenost Ohmovega zakona ne sme zmanjšati njegovega zgodovinskega in praktičnega pomena. Kar se tiče zgodovine elektrike se je potrebno zavedati, da so bili sprva pojmi kot so naboj, tok in napetost še popolnoma nejasni in so različni raziskovalci preizkušali različne pojme. Ohm je na tem področju razjasnil razlike med napetostjo in tokom. Poleg tega seveda zvezo med tokom in napetostjo v elektrotehniki zelo pogosto uporabljamo in je za enostavne upore pogosto upravičena linearna zveza.

KIRCHOFFOVA ZAKONA

1. Kirchhoffov zakon. Oglejmo si najprej primer vodnega toka iz vodnega zbiralnika. Ta tok preusmerimo v dve strugi, en del toka pa še pronica v tla. Če seštejemo vse odtekajoče toke morajo biti ti seveda enaki pritekajočemu. Enako velja za električni tok. Vsota odtekajočih tokov v neko spojišče (vozlišče) mora biti enaka vsoti vseh pritekajočih tokov. Glede na to, da označujemo smer toka s pozitivnim ali negativnim predznakom, v smislu 1. Kirchhoffovega zakona to pogosto zapišemo kot

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0$$

oziroma z besedami: **vsota vseh (N) tokov v spojišču je enaka nič.** Dogovoriti se moramo le še kdaj je tok pozitiven. Kot pozitiven tok lahko označimo tistega, ki priteka v ali odteka iz spojišča. Važno je le, da smo pri obravnavi konsistentni.



Vsota vseh tokov: delta reke Nil.

Primer: V spojišče so povezani štiri vodniki. Po prvem priteka tok 4 A, po drugem odteka tok 2 A in v tretjem priteka tok 1 A. Določimo tok v četrtem vodniku.

SLIKA: Vsota tokov v spojišču mora biti enaka nič: 1 KZ.

2. Kirchhoffov zakon. Vzemimo akumulator in ga priključimo na dve bremenima, ki sta zaporedno vezani. Kako se razporedijo napetosti med bremenoma? Najprej lahko ugotovimo, da se v skladu z »Ohmovim zakonom« porazdeli padec napetosti na dva padca napetosti in to v skladu (sorazmerju) z njunima upornostima: $U_1 = R_1 I$ in $U_2 = R_2 I$, vsota teh dveh napetosti pa je priključena napetost: $U = U_1 + U_2$. Lahko pa pišemo tudi kot $U - U_1 - U_2 = 0$. Če si to ogledamo na sliki, ugotovimo, da smo zapisali, da je vsota vseh napetosti v zanki enaka nič, pri čemer je seveda potrebno seštevati padce napetosti v izbrani smeri. To pa velja tudi splošno, neodvisno od števila virov in bremen v zanki. Temu pravilu pravimo 2. Kirchhoffov zakon in ga v splošnem (za M elementov vezja v zanki) zapišemo kot



W. Kandinsky

$$\sum_{i=1}^M U_i = 0.$$

In z besedami: **vsota padcev napetosti v (zaključeni !) zanki je enaka nič.**

SLIKA: Idealni napetostni generator in vzporedno vezani dve bremeni. Po 2. Kirchoffovem zakonu mora veljati, da je vsota vseh padcev napetosti v zanki enaka nič.

Vprašanja za obnovo:

- 1) Kaj je razlika med stacionarnim in dinamičnim stanjem?
- 1) Kaj »pravi« zakon o ohranitvi naboja?
- 2) Kakšna je zveza med tokom in nabojem – kontinuitetna enačba?
- 3) Kdaj velja $i = +\frac{dQ}{dt}$ in kdaj $i = -\frac{dQ}{dt}$?
- 4) V katerem primeru lahko korektno uporabimo zvezo $Q = it$?
- 5) Povezava med tokom in napetostjo.
- 6) Zapišite in razložite 1. in 2. Kirchoffov zakon.

2. Električni viri, osnovna vezja in merilni inštrumenti

Vsebina poglavja: idealni in realni napetostni in tokovni vir, osnovni elementi vezij (zaporedna in vzporedna vezava uporov, napetostni in tokovni delilnik, mostično vezje, potenciometer), temperaturna odvisnost uporov, nelinearni elementi, ampermeter, voltmeter, ohmmeter, vatmeter, fizikalne veličine, označevanje, enote.

ELEKTRIČNI VIRI

Idealni tokovni in napetostni vir. S prerazporeditvijo nabojev realiziramo električne vire. Ločimo dva vira tipa virov: napetostne vire in tokovne vire. Idealni napetostni vir je tak, ki zagotavlja na svojih sponkah konstantno napetost neodvisno od obremenitve. To je napetost odprtih sponk, včasih ji rečemo tudi napetost prostega teka. Matematično to zapišemo kot $U = U_0$.

SLIKA: Simbol za idealni napetostni vir, napetost odprtih sponk in karakteristika vira.

Idealni tokovni vir pa je tak, ki na svojih zunanjih sponkah zagotavlja tok, ki je neodvisen od priključitve bremena. Matematično: $I = I_0$. V primeru, da sponke takega vira kar kratko sklenemo, bo tekel tok kratkega stika, kar predstavlja tudi nazivni tok tega vira.

SLIKA: Simbol za idealni tokovni vir, tok kratkega stika in karakteristika vira.

Problem predstavitve (uporabe) idealnih virov je v tem, da je tok kratkega stika pri napetostnem viru neskončen (ker je notranja upornost idealnega vira enaka nič), prav tako je neskončna napetost na odprtih sponkah idealnega tokovnega vira (notranja upornost takega vira je neskončna). Zato je bolj korektno upoštevati še notranjo upornost tako tokovnega kot napetostnega vira. Za tak vir uporabimo izraz realen vir, kljub temu, da je v realnosti lahko električna karakteristika pravega vira še bolj zapletena.

Realni napetostni vir. Govorili smo že o idealnem napetostnem viru, za katerega smo rekli, da ima napetost na zunanjih sponkah konstantno in neodvisno od priključenega bremena. Takih virov seveda ni, če na slab napetostni vir priključimo preveliko breme (v resnici je to breme z majhno notranjo upornostjo), se na zunanjih sponkah vira napetost »sesede«. Vsak vir ima namreč določeno notranjo upornost in ob priključitvi vira na breme steče tok, ki povzroči padec napetosti na bremenu, pa tudi na notranji upornosti vira. Kar tudi pomeni, da na zunanjih sponkah vira nimamo več napetosti odprtih sponk pač pa neko manjšo napetost, ki je zmanjšana za padec napetosti na notranji upornosti vira. Poglejmo si razmere matematično in grafično:

SLIKA: realni napetostni vir.

Realni napetostni vir ponazorimo z zaporedno vezavo idealnega napetostnega vira in upora. Če na priključnih sponkah ni priključeno breme, je seveda tok enak nič in padca napetosti na upornosti vira ni. Napetost na priključnih sponkah je enaka napetosti odprtih sponk: $U = U_g = U_o$. Če pa priključimo breme, se napetost na priključnih sponkah zmanjša za padec napetosti na notranji upornosti generatorja: $U = U_g - IR_g$. To enačbo lahko prikažemo tudi grafično in ji rečemo *karakteristika vira*. Na X osi (abscisi) označimo napetost, na Y osi (ordinati) pa tok. Enačba predstavlja enačbo premice, ki jo najlažje določimo v točkah, kjer premica seka X in Y os, napetostno in tokovno os. Ko je tok enak nič, je $U = U_o = U_g$, to je stanje **odprtih sponk**. Ko pa je napetost enaka nič, je $I = U_g / R_g$. To pa je stanje **kratkega stika**. Med točkama kratkega stika in napetostjo odprtih sponk mora potekati premica, ki ji rečemo **karakteristika realnega vira**.

Samo karakteristika vira še ne zadostuje za določitev napetosti na bremenu. Potrebujemo še karakteristiko bremena. Ta je preprosta, saj ko na priključne sponke priključimo breme, je na bremenu napetost U in velja: $U = R_b I$. Če narišemo še to enačbo v diagram, tudi ta predstavlja enačbo premice. Ena točka je v koordinatnem izhodišču, drugo pa določimo tako, da za določeno izbrano vrednost toka (napetosti) izračunamo vrednost napetosti (toka) in vrišemo še drugo točko ter potegnemo premico. Naklon premice predstavlja upornost. Velik naklon predstavlja majhno upornost, majhen naklon pa veliko upornost. Premici imata presečišče, ki ga imenujemo **delovna točka**. To je namreč točka, ki ponazarja »delovno« stanje vezja. Odčitamo lahko tok in napetost delovne točke. To je tok, ki teče skozi breme, napetost pa je napetost na bremenu. Ta način določanja delovne točke imenujemo *grafičen način*.

Določimo delovno točko še matematično. To naredimo tako, da združimo enačbi bremena in vira. Dobimo $R_b I = U_g - IR_g$. Tok v vezju bo torej $I = \frac{U_g}{R_g + R_b}$, napetost na bremenu pa

$U = \frac{U_g}{R_g + R_b} R_b$. To sta tudi tok in napetost v delovni točki, ki jih odčitamo tudi grafično.

Primer: Na 9 V baterijo z notranjo upornostjo $1\ \Omega$ priključimo breme z upornostjo $5\ \Omega$. Določite napetost in tok na bremenu grafično in analitično.

Izračun:
$$I = \frac{U_g}{R_g + R_b} = \frac{9\text{ V}}{1\ \Omega + 5\ \Omega} = 1,5\text{ A}, \quad U = 1,5\text{ A} \cdot 5\ \Omega = 7,5\text{ V}.$$

Realni tokovni vir. Je sestavljen iz idealnega tokovnega vira s tokom I_g in vzporedno vezane upornosti R_g . Če ni priključenega bremena, je na zunanjih sponkah napetost enaka $U = R_g I_g$. Če je na zunanji sponki priključeno breme (upor R_b), se tok skozi breme zmanjša za tok skozi upornost vira: $I = I_g - U / R_g$. Ta enačba predstavlja karakteristiko realnega tokovnega vira, ki jo prav tako lahko grafično prikažemo. Pri kratkem stiku je napetost na bremenu enaka nič, tok pa je kar tok idealnega tokovnega vira in ga imenujemo tudi tok kratkega stika: $I(U=0) = I_k = I_g$, pri odprtih sponkah pa je tok I enak nič, napetost pa napetost odprtih sponk $U_o = I_g R_g$. Če karakteristiko narišemo kot U - I diagram, dobimo zopet premico. V presečišču s karakteristiko bremena pa delovno točko.

SLIKA: Realni tokovni vir.

Ugotovimo lahko, da se **karakteristika realnega tokovnega vira lahko prilega karakteristiki realnega napetostnega vira. V tem smislu sta to dva ekvivalentna vira.** Če primerjamo karakteristiki ugotovimo, da bo analogija veljala tedaj, ko bo $U_g = I_g R_g$.

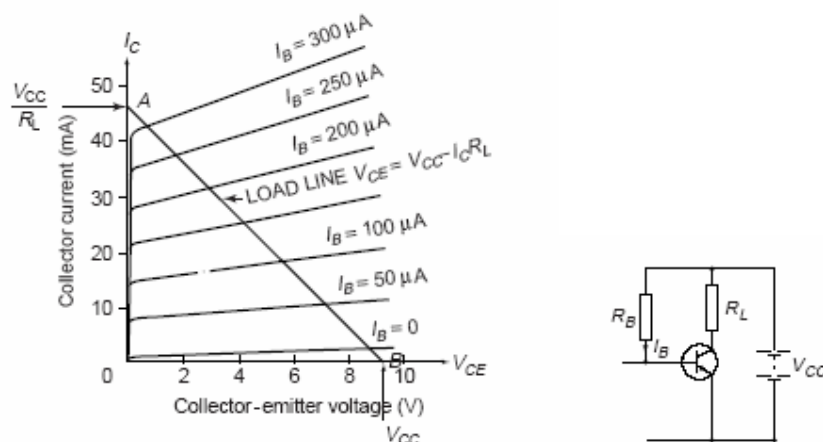
Vprašanje: Kdaj torej govorimo o napetostnem in kdaj o tokovnem viru? Ko imamo vir z zelo veliko notranjo upornostjo nam le ta zagotavlja konstanten tok (dokler je upornost bremena dosti manjša od notranje upornosti vira, če pa je notranja upornost vira zelo majhna, nam to na zunanjih sponkah zagotavlja konstantno napetost.

Vzporedna in zaporedna vezava virov. Enako kot upore, lahko zaporedno vežemo tudi napetostne vire in s tem dosežemo višjo skupno napetost na zunanjih sponkah. To je tudi običajno narejeno pri mnogih elektronskih aparatih, kjer je na primer za delovanje naprave pri 6 V potrebno povezati zaporedno štiri 1,5 V baterije.

Podobno lahko z vzporedno vezavo tokovnih virov dosežemo vir z večjim nazivnim tokom

SLIKA: Zaporedna vezava napetostnih virov in vzporedna vezava tokovnih virov.

Nelinearno breme. Grafični način je posebno primeren tedaj, ko je breme nelinearno. Ko je napetost na sponkah bremena neka nelinearna funkcija toka skozi breme. Na primer $U = kI^2$. Tak primer je na primer dioda, element, ki ima nizko upornost pri pozitivnih in zelo visoko pri negativnih napetostih (ali obratno, odvisno od priključitve). Pri diodi je v prevodni smeri tok eksponentno odvisen od napetosti: $I = I_0 e^{kU}$, v zaporni smeri pa je tok majhen, do določene napetosti, kjer pride do preboja. Ob preboju tok skozi diodo močno naraste in lahko pride do trajne poškodbe ali uničenja elementa. Delovno točko določimo grafično, tako, da določimo točko preseka nelinearne karakteristike bremena in linearne karakteristike realnega vira.



SLIKA: Primer določanja delovne točke pri tranzistorski vezavi. Nelinearne so karakteristike tranzistorja, ki so prikazane za različne vrednosti baznega toka. (samo informativno)

OSNOVNA ELEKTRIČNA VEZJA

1. Zaporedna vezava uporov.

Pogosto upore nizamo zaporedno. Če so priključeni na vir napetosti, se napetost porazdeli na posamezne upore: $U = U_1 + U_2 + \dots + U_N = \sum_{i=1}^N U_i$. Ker pa skozi vse teče skupen tok, velja

$$U = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_N = I(R_1 + R_2 + \dots + R_N) = I \sum_{i=1}^N R_i = IR_{nad}$$

Nadomestna upornost zaporedno vezanih uporov je seštevek posameznih upornosti:

$$R_{nad} = \sum_{i=1}^N R_i.$$

SLIKA: Zaporedna vezava uporov.

Primer: Določimo nadomestno upornost zaporedne vezave uporov 30 Ω , 100 Ω in 1 k Ω .

Izračun: $R_{nad} = 1130 \Omega$.

2. Vzporedna vezava uporov.

Upore vežemo vzporedno kadar želimo tok razdeliti v več vej. Skupni tok je torej $I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$. Če so vzporedno vezani upori priključeni na vir, je na vseh uporih skupna

napetost. Dobimo $I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_N} = U \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} = \frac{U}{R_{nad}}$. Vzporedno vezane upore lahko torej

nadomestimo z nadomestno upornostjo, za katero velja $\frac{1}{R_{nad}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$. Če to izrazimo s

prevodnostmi dobimo $G_{nad} = \sum_{i=1}^N G_i$. Pri vzporedni vezavi uporov tvorimo torej nadomestno upornost s seštevanjem njihovih prevodnosti, pri zaporednih pa upornosti.

SLIKA: Vzporedno vezane upornosti.

Primer: Določimo nadomestno upornost vzporedne vezave uporov 30 Ω , 100 Ω in 1 k Ω .

Izračun: $G_{nad} = 1/30 \text{ S} + 1/100 \text{ S} + 1/1000 \text{ S} = 0,044 \text{ S}$, kar ustreza $R_{nad} = 22,556 \Omega$.

3. Napetostni delilnik.

Upošteva oba Kirchoffova zakona in zveze med napetostjo in tokom (Ohmovim zakonom) lahko analiziramo poljubno enosmerno vezje. Potrebno je pač zapisati zadostno število enačb za neznane toke v vejah vezja in rešiti linearni sistem enačb. V kratkem si bomo podrobneje ogledali metode za reševanje (analizo) vezij, ki nam omogočajo sistematičen pristop k reševanju.

SLIKA: Napetostni delilnik. Zanima nas napetost na uporu R_2 .

V skadu z 2. K.Z velja $U - U_1 - U_2 = 0$. Z upoštevanjem Ohmovega zakona $U_1 = R_1 I$ in $U_2 = R_2 I$ dobimo $I = \frac{U}{R_1 + R_2}$, od koder je $U_2 = IR_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Dobili smo rešitev, ki je v elektrotehniki zelo pogosto uporabljena. Napetost moramo pogosto zmanjšati oziroma »deliti«. Takemu preprostemu načinu rečemo **delilnik napetosti**, enačbo pa si velja vtisniti v spomin. Ponovimo končni rezultat:

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Primer: Vzemimo, da imamo podano breme z določeno zahtevano bremensko napetostjo in močjo: $U_b/P_b = 9 \text{ V} / 30 \text{ W}$, ki ga želimo priključiti na napetost $U = 12 \text{ V}$, pri čemer je $R_2 = 10 \Omega$. Kolikšen mora biti R_1 ? Tok bremena bo $30 \text{ W} / 9 \text{ V} = 3,33 \text{ A}$, tok na uporu R_2 pa $I_2 = 9 \text{ V} / 10 \Omega = 0,9 \text{ A}$. Skupni tok je $I_1 = 4,233 \text{ A}$. Zapišemo $12 \text{ V} = I_1 R_1 + 9 \text{ V}$ od koder sledi $R_1 = 0,7087 \Omega$. Nekoliko bolj zapleteno je, če imamo določeno breme R_1 in želimo poiskati pravo vrednost R_2 . Poiščite rešitev sami ali si jo preberite v ARS, Elektrotehnika 2.

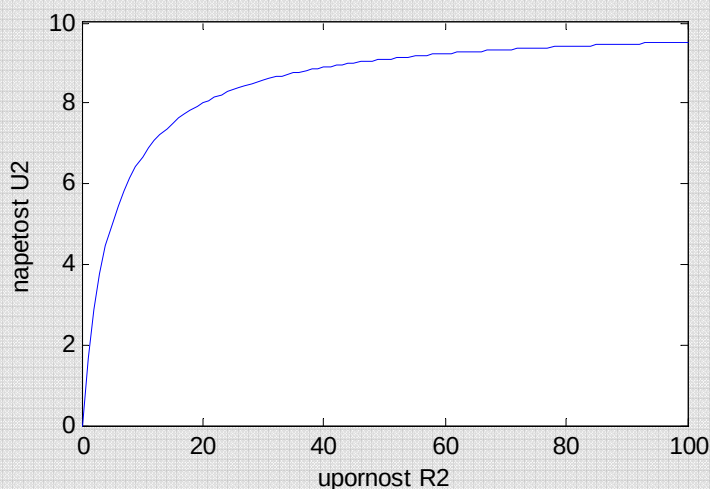
Poleg matematične oblike je zelo pomembno, da si predstavljamo odvisnost napetosti na uporu od vrednosti uporov tudi grafično. Očitno napetost na uporu R_2 ni linearno odvisna od vrednosti upornosti R_2 . Kako bi si lahko skicirali potek odvisnosti napetosti na R_2 od upornosti R_2 ? Tako, da poskušamo poenostaviti enačbo z razmislekom, kakšna bi bila oblika enačbe za zelo majhne R_2 in zelo velike R_2 :

- pri R_2 , ki so mnogo manjši od R_1 (matematično $R_2 \ll R_1$) bo R_2 zanemarljivo velik v primerjavi z R_1 in bo enačba približno enaka $U_2 \approx U \frac{R_2}{R_1}$. Pri majhnih vrednostih R_2 bo torej napetost na R_2 linearno odvisna od velikosti R_2 .
- pri R_2 , ki so mnogo večji od R_1 (matematično $R_2 \gg R_1$) bo R_1 zanemarljivo velik v primerjavi z R_2 in bo enačba približno enaka $U_2 \approx U \frac{R_2}{R_2} = U$. Pri velikih vrednostih R_2 bo torej vsa napetost generatorja na uporu R_2 .

Pomagajmo si izrisati grafično odvisnost napetosti $U_2(R_2)$ z računalnikom. Programov, ki jih lahko v ta namen uporabimo je zelo veliko. Načeloma ni pomembno katerega uporabimo, sta pa se v (elektro)tehniki uveljavila predvsem dva profesionalna programa: Matlab in Mathematica. Poglejmo si, kako bi uporabili program Matlab.

V ukazni vrstici programa vpišemo naslednje vrstice:

```
U=10 % izbrana napetost generatorja
R1=5 % izbrana upornost R1
R2=0:1:100 % tvorimo vrednosti uporov R2 od 0 po 1 do 100
U2=U*R2./(R1+R2) % enacba za izracun napetosti na R2 (deljenje z ./ )
plot(R2,U2) % ukaz za izris grafa U2(R2)
xlabel('upornost R2') % zapis osi X
ylabel('napetost U2') % zapis osi Y
```



SLIKA: Sprememba napetosti na bremenu v odvisnosti od upora R_2 .

4. Tokovni delilnik.

Podobno kot napetostni delilnik, pogosta v elektrotehniki uporabljamo tudi **tokovni delilnik**.

SLIKA: Tokovni delilnik. Zanima nas tok skozi upor R_2 .

Imamo dva vzporedno vezana upora s skupnim tokom I . Zanima nas tok skozi upor R_2 : Velja: $I = I_1 + I_2$, kjer sta $I_1 = U / R_1$ in $I_2 = U / R_2$. Dobimo

$I = U / R_1 + U / R_2 = U (1 / R_1 + 1 / R_2) = U \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$. Napetost je torej $U = I \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, tok skozi

upor R_2 pa $I_2 = U / R_2 = I \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$. Končni rezultat je podoben (vendar ne

enak) kot pri napetostnem delilniku. Zaradi pogoste uporabe si ga tudi velja zapomniti. Zato ga ponovimo:

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Samostojno delo: Izrišite potek vrednosti $I_2(R_2)$.

5. Napetostni delilnik s potenciometrom.

a) brez upoštevanja bremenske upornosti

Poznamo več različnih tipov potenciometrov, tu bomo obravnavali le linearne, take, katerih spremembo upornosti lahko zapišemo kot $R_x = \frac{x}{l} R$, kjer je R upornost potenciometra med skrajnima legama, l dolžina prevodne proge, x pa dolžinski del, katerega upornost je R_x (glej sliko). Če potenciometer priključimo na vir napetosti U_g , je napetost na upor R_x enaka

$$U_x = IR_x = \frac{U_g}{R} R_x. \text{ Z upoštevanjem zveze } R_x = \frac{x}{l} R \text{ pa dobimo}$$

$$U_x = \frac{U_g}{R} R_x = \frac{U_g}{R} \frac{x}{l} R = \frac{x}{l} U_g.$$

Napetost na upor R_x se linearno spreminja z lego drsnika.

SLIKA: Priključen potenciometer in graf napetosti na drsniku linearnega potenciometra.

b) z upoštevanjem bremenske upornosti

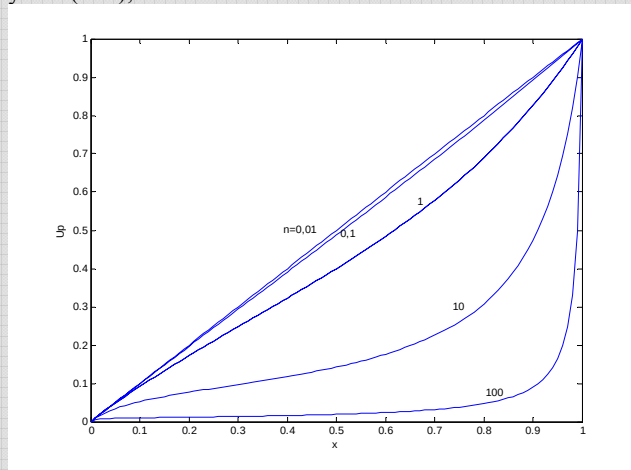
Če upoštevamo še priključitev bremena na upor R_x , velja

$$\frac{U - U_x}{R_{l-x}} = \frac{U_x}{R_x} + \frac{U_x}{R_b}. \text{ Po preureditvi dobimo (preverite še sami) } U_x = U \frac{x}{x(1-x/l)n + l}, \text{ kjer je}$$

$$n = R / R_b.$$

Izrišimo nekaj krivulj vrednosti U_p za različna razmerja $n = R / R_b$. Vzemimo $U = 1$ in spreminjajmo x od 0 do 1 ($l=1$) in izrišimo vrednosti Ux za vrednosti $n = 0,01, 0,1, 1, 10$ in 100 . Matlabovi ukazi so

```
x=0:0.01:1;
for n=[0.01,0.1,1,10,100] % zanka za 5 različnih vrednosti n
    Ux=x./(1+x.*(1-x)*n)
    plot(x,Ux)
    hold on % ohrani graf
end
xlabel('x');
ylabel('Ux');
```



SLIKA: Različne vrednosti U_x pri razmerjih $n = 0,01, 0,1, 1, 10, 100$. Večjo linearnost se doseže pri $n \ll 1$, torej tedaj, ko je bremenska upornost dosti večja od upornosti uporavnega delilnika.

WWW: Raziščite različne tipe potenciometrov, način izdelave in njihovo uporabo.

6. Mostično vezje.

SLIKA: Mostično vezje.

Eno zelo pogosto v praksi uporabljenih vezij je t.i. mostično vezje, ki ga pogosto imenujemo tudi **Wheatstonov** mostič. Zakaj most? Zato, ker premostimo dva napetostna delilnika in merimo napetost med upori. Zgradimo ga iz napetostnega delilnika z uporoma R_1 in R_2 ter delilnika z uporoma R_3 in R_4 . Napetost na uporu R_2 je $U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, na R_4 pa

$U_4 = U \frac{R_4}{R_3 + R_4}$. Mostično napetost dobimo z uporabo 2 K.Z:

$$U_{\text{most}} = U_2 - U_4 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} - U \frac{R_4}{R_3 + R_4} = U \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right).$$

Zanimiva situacija nastopi, ko je mostična napetost enaka nič. Tedaj rečemo, da je mostič *uravnotežen*, pri čemer mora veljati: $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$. Sledi $R_2(R_3 + R_4) = R_4(R_1 + R_2)$ oziroma $R_2R_3 = R_4R_1$, kar bolj

pogosto zapišemo v obliki $\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$.

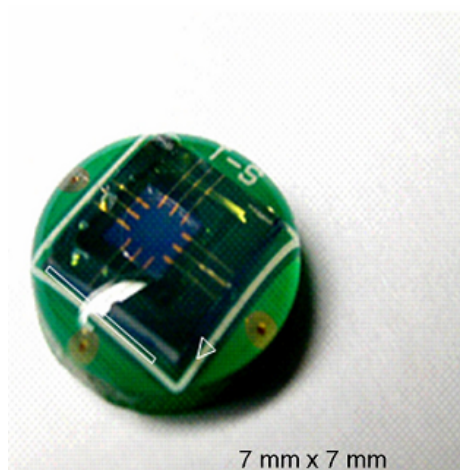
Mostična vezja se v praksi zelo pogosto uporabljajo. Zelo pogosta uporaba mostiča je pri iskanju (merjenju) neznane upornosti, katero lahko zelo natančno določimo tako, da spreminjamo eno (ali več) vrednosti upora(ov) toliko časa, dokler ni napetost U_{most} enaka nič.

Potem je upornost enostavno določljiva iz gornje enačbe, npr: $R_2 = R_1 \frac{R_4}{R_3}$.

Wheatstonovo mostično vezavo ne uporabljamo le v enosmernih razmerah pa tudi pri izmeničnih signalih. Poznamo različne tipe mostičev, npr. Wienov, Owenov, Maxwellov, itd.

WWW: Poiščite na spletu primere uporabe Wheatstoneovega mostiča.

<http://www.crocodile-clips.com/absorb/AP5/sample/020202.html>



7 mm x 7 mm

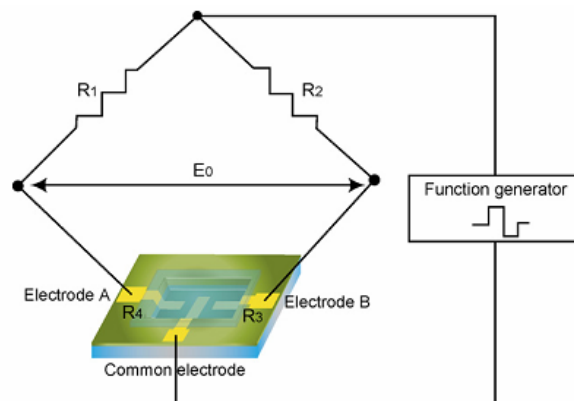
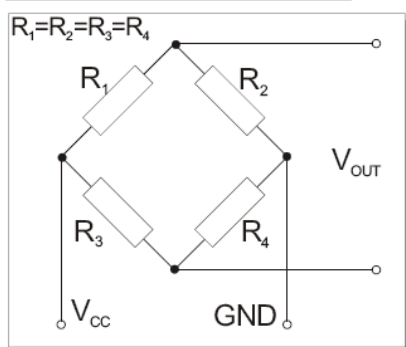
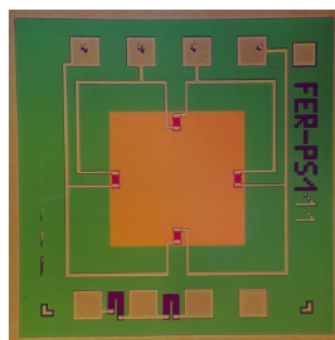


Fig. 10. The AC signal circuit to measure the output voltage of the fabricated tilt sensor.

SCHEMATIC DIAGRAM



SENSOR LAYOUT



SLIKA: Primer uporabe principa Wheatstonovega mostiča: Zgoraj mikromehansko izdelan senzor naklona. Vir: An optimized MEMS-based electrolytic tilt sensor. Jung et al.: Sensors and Actuators A139 (2007) stran 23–30. Spodaj: polprevodniški senzor tlaka. Vir: produkt Laboratorija za mikrosenzorske strukture in elektroniko na Fakulteti za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani.

7. Transformacija zvezda – trikot.

Pogosto se srečamo z vezavo uporov v obliko, ki ji rečemo trikot, saj so trije upori nameščeni v obliki trikotnika. Druga oblika vezave pa je taka, da so trije upori vezani v skupno spojišče – taki vezavi pravimo vezava v zvezdo. Pogosto si za lažjo analizo vezij pomagamo s transformacijo vezave trikot v zvezdo in obratno. Če imamo v vezavi zvezda tri spojišča z upori R_1 , R_2 in R_3 , potem ob transformaciji dobimo vezavo trikot z upori R_{12} , R_{23} in R_{32} , katerih vrednosti so

$$R_{12} = \frac{R^2}{R_3} \quad R_{23} = \frac{R^2}{R_1} \quad \text{in} \quad R_{31} = \frac{R^2}{R_2},$$

pri čemer je $R^2 = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$.

SLIKA: Transformacija vezja oblike zvezda v obliko trikot.

Zapišimo še obratno pot: če želimo iz vezave trikot preiti v vezavo zvezda, bomo upore določili iz

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \text{ podobno pa tudi } R_2 \text{ in } R_3.^*$$

Temperaturne lastnosti uporov.

Ko skozi upor teče tok, se nosilci naboja (v uporih običajno elektroni) ne gibljejo premočrtno od ene do druge sponke, pač pa »trkajo« z atomi v snovi. Kljub trkanju z atomi prevodnika pa se pod vplivom priključene napetosti (električnega polja) v povprečju gibljejo v eni smeri: elektroni v smeri pozitivne sponke. V tem smislu se gibljejo z neko povprečno hitrostjo (rečemo tudi hitrost drifta), ki pa je odvisna od temperature. Pri višji temperaturi je namreč nihanje atomov večje in s tem tudi število trkov, torej se povprečna hitrost nabojev zmanjša. S tem se tudi zmanjša tok, posredno pa se poveča električna upornost. Meritve pokažejo, da se temperaturna odvisnost upornosti spreminja skoraj linearno s temperaturo, kar lahko zapišemo v obliki

$$R(T) = aT + b,$$

kjer sta a in b konstanti, ki ju moramo določiti z meritvijo. Običajno nas zanima sprememba upornosti glede na temperaturo okolice (20°C), kjer bo $R(T_{20}) = aT_{20} + b$. Če enačbi odštejemo, dobimo

$$R(T) = R(T_{20}) \left(1 + \alpha \frac{T - T_{20}}{R(T_{20})} \right). \text{ Vpeljemo konstanto } \alpha, \text{ ki jo imenujemo temperaturni koeficient}$$

in pišemo

$$R(T) = R(T_{20}) (1 + \alpha (T - T_{20})).$$

SLIKA: Temperaturna odvisnost upornosti.

Tipične vrednosti temperaturnih koeficientov so (v K^{-1}):

Železo 0,006

Aluminij 0.0041

Baker 0,0039

* Poskusite sami izpeljati te enačbe. Pot je ta, da mora biti nadomestna upornost med dvema sponkama enaka v obeh vezavah. Veljati mora: $R_1 + R_3 = R_{12} \parallel (R_{31} + R_{23})$, $R_2 + R_3 = R_{23} \parallel (R_{12} + R_{13})$ in še ena zveza za $R_1 + R_2$, ki jo zapišite sami. Nato seštejte prvo in tretjo enačbo ter odštejte drugo in dobili boste enačbo za R_1 .

Konstantan 0,00003

Vse zapisane vrednosti koeficientov so pozitivne, torej bo upornost železa, aluminija, bakra in konstantana večja pri višjih temperaturah. Okrajšava za pozitivni temperaturni koeficient je PTK, za negativnega pa NTK (ang. PTC in NTC).

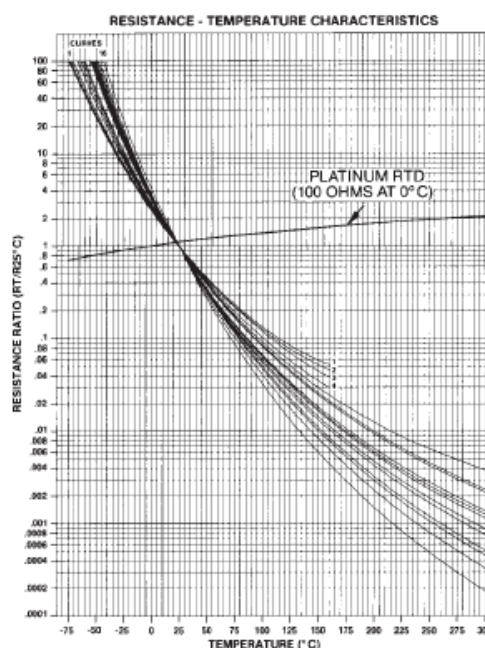
SLIKA: Pozitivni in negativni koeficient upora.

Primer: Kolikšna je upornost bakrene žice pri 80°C , če je njena upornost pri upornost pri 20°C enaka $10\ \Omega$.

Izračun:

$$R(80^{\circ}\text{C}) = 10\ \Omega (1 + 0,0039\ \text{K}^{-1} \cdot 60\ \text{K}) = 12,34\ \Omega.$$

Obstaja vrsta elementov, katerim se upornost izrazito spreminja s temperaturo. Tem elementom pravimo termistorji (ang. thermistor = thermal resistor). Njihova uporaba v elektrotehniki je zelo pogosta, od merjenja temperature do kompenzacije temperaturnih lastnosti drugih elementov v vezju, regulacija ampliture, napetosti, alarm, ...



SLIKA: Upornost NTC termistorja se manjša z višanjem temperature. Za primerjavo je na sliki prikazana tudi odvisnost upornosti platine od temperature. Vir: katalog firme Murata.

Nelinearni elementi. Linearni element je samo poenostavitev, ki nam olajša analizo vezij. V osnovi so vsi elementi vsaj do določene mere nelinearni. Za upore navadno smatramo, da so linearni, čeprav poznamo tudi vrsto nelinearnih uporov. Najbolj znan nelinearni element je prav gotovo dioda. Dioda je običajno izdelana iz polprevodniškega materiala, ki omogoča prevajanje v eni smeri, v drugi pa ne. To povzroči izrazito nelinearno karakteristiko, ki jo v elektrotehniki s pridom uporabljamo. Bolj zapleteni so tranzistorji, ki so elementi z najmanj tremi kontakti od katerih je en običajno namenjen za kontrolo prevajanja toka med drugima kontaktoma.

Pogosto se uporablja grafičen način za določanje delovne točke tudi pri uporabi nelinearnih elementov. Če si zamislimo, da priključimo nelinearen element na sponki v vezju, lahko posebej narišemo karakteristiko vezja brez priključenega elementa in dodamo karakteristiko nelinearnega elementa. V presečišču je delovna točka. Pogosto rišemo grafično karakteristiko

nelinearnega elementa za več parametrov, na primer pri bipolarnem tranzistorju za različne bazne toke, pri MOS tranzistorju za različne vrednosti napetosti vrat itd.

Kirchoffova zakona sta splošno veljavna, tudi za vezja z nelinearnimi elementi. Večji problem je pri izračunavanju, saj je sistem linearnih enačb dosti lažje rešiti od nelinearnega. Pri slednjem se moramo poslužiti numeričnih metod, pa še v tem primeru ni uspeh zagotovljen.

Merilni inštrumenti.

Poznamo vrsto merilnih inštrumentov, ki nam omogočajo meritve električnih veličin: voltmeter, ampermeter, ohmeter, vatmeter in drugi. Običajno so bili ti inštrumenti analogni in so bili zasnovani na osnovnih principih lastnosti električnega polja. Večinoma so uporabljali vrtljive tuljavice. Sodobni inštrumenti so večinoma digitalni, izdelani z uporabo elektronskih elementov. Največji problem merilnih inštrumentov je njihova omejena točnost merjenja, ki je pogosto določena s ceno naprave. Omejeno točnost naprav je potrebno upoštevati pri natančnejših meritvah. S problemi merjenja se ukvarja posebno področje elektrotehnike – metrologija.

WWW: Kako je označena točnost določenega inštrumenta? Kaj pomeni razred 1, ...?

Voltmeter. Voltmeter je inštrument za merjenje napetosti. Simbol je krog s črko V v sredini kroga. Idealni voltmeter bi bil tak, ki bi ga priključili med merilni sponki in se razmere v vezju ne bi spremenile. V resnici ima vsak voltmeter določeno notranjo upornost, ki je velika, ni pa neskončna. Zamislimo si, da merimo napetost odprtih sponk. S priključitvijo voltmetra bomo spremenili razmere v vezju, saj bo skozi voltmeter stekel določen tok, ki pri odprtih sponkah ne bi.

WWW: Poiščite informacije o prvih ampermetrih in voltmetrih. Poskušajte razumeti princip delovanja. Kolikšna je tipična notranja upornost voltmetra in ampermetra?

SLIKA: Voltmeter: priključitev, razlika med idealnim in realnim voltmetrom.

Razširitev merilnega območja voltmetra je mogoča z dodanim preduporom, ki ga vežemo **zaporedno** voltmetru. S tem izvedemo že omenjen napetostni delilnik.

Primer: Vzemimo, da voltmeter meri do 5 V (merilno območje), želimo pa meriti do 100 V, pri čemer je notranja upornost voltmetra 100 kΩ. Določimo predupor tako, da bo voltmeter kazal 5 V tedaj, ko bo na zaporedno vezavo voltmetra in predupora priključena napetost 100 V.

Izračun: $100\text{ V} = IR_p + 5\text{ V}; I = \frac{5\text{ V}}{100\text{ k}\Omega} \Rightarrow R_p = 1900\text{ k}\Omega = 1,9\text{ M}\Omega.$

SLIKA: Povečanje (razširitev) merilnega območja voltmetra.

Ampermeter. Ampermeter je inštrument za merjenje toka. Umestimo ga v vejo, v kateri želimo meriti tok. Simbol za ampermeter je krogec s črko A v sredini kroga. Tudi ampermeter ni idealen inštrument. V idealnih razmerah naj bi bila notranja upornost ampermetra čim manjša, torej taka, ki ne bi povzročila dodatnega padca napetosti na inštrumentu. V resnici ima neko malo notranjo upornost.

SLIKA: Ampermeter, priključitev

Prav tako kot voltmetru, lahko tudi ampermetru povečamo merilno območje, vendar sedaj tako, da upor vezemo vzporedno z ampermetrom, ki ga imenujemo tudi soupor ali kar po angleško »šant« (ang. shunt). S tem del toka, ki bi ga sicer meril ampermeter preusmerimo v vzporedno vejo.

Primer: Želimo meriti tok 30 A, pri čemer nam inštrument kaže največ 10 A. Notranja upornost ampermetra v tem merilnem območju je $0,2 \Omega$. Določimo upornost soupora.

Izračun: Ker ampermeter meri največ 10 A, moramo predvideti, da bi pri toku 30 A v vzporedni veji tekel tok 20 A. Napetost na ampermetru pri 10 A je 2 V, ta napetost mora biti tudi na souporu v vzporedni veji. Veljati mora torej $R_s = \frac{2V}{20A} = 0,1 \Omega$.

Vprašanje: Kako realiziramo tako male vrednosti souporov?

SLIKA: Razširitev merilnega območja ampermetra s souporom.

Vatmeter je inštrument za merjenje moči. Ima dva para sponk. Z enim parom merimo napetost, z drugim pa tok. Simbol je krogec s črko W. Odčitek vatmetra bi bil ob upoštevanju neidealnosti vatmetra različen glede na priključitev sponk. Zakaj?

SLIKA: Priključitev vatmetra.

Ohmmeter. Je naprava za merjenje upornosti. V osnovi je inštrument, ki pri znani vzbujaalni napetosti meri tok skozi breme in iz razmerja določi upornost bremena.

Univerzalni inštrument običajno vključuje tako ampermeter, voltmeter kot ohmeter, običajno pa je z njim mogoče meriti tudi kapacitivnosti, določene parametre nelinearnih elementov (tranzistorjev, diod), induktivnosti, pogosto pa tudi omogočajo priklop določenih senzorjev (temperature, svetilnosti), brezkontaktno merjenje toka (s tokovnimi kleščami) in tudi priklop na računalnik za sprotno odčitavanje in kasnejšo analizo podatkov.

Fizikalne veličine (količine), merske enote in pisanje enačb.

V (elektro)tehniki običajno govorimo o veličinah, fiziki pa raje uporabljajo termin količina. Veličina je recimo napetost, tok, čas, temperatura itd. Za vsako veličino uporabljamo določen simbol, običajno eno črko abecede, pogosto tudi grške. Simbol za napetost je U , za tok I , temperaturo T itd. Opazili ste že, da pišemo simbole za veličine poševno. To pa zato, da jih ločimo od merskih enot, kratko kar enot, ki jih pišemo pokončno. Kot primer zapišimo $U = 5\text{ V}$. Med številsko vrednostjo in enoto je presledek. Mersko enoto predstavimo z imenom in simbolom. Ime enote za napetost je volt, simbol pa V.

V svetu se je uveljavil sistem merskih enot, ki ga s kratico imenujemo SI. Obsega sedem osnovnih enot in vrsto izpeljanih. Osnovne enote so kilogram (kg), meter (m), sekunda (s), amper (A), kelvin (K), kandela (cd), mol (mol), radian (rad) in steradian (sr). Izpeljane enote pa so na primer m/s za hitrost itd.

Druge merske enote. Pogosto v literaturi zasledimo uporabo drugih merskih enot, kot smo jih navajeni. Pogosto so posledica uporabe drugega merskega sistema (npr. CGS –centimeter-gram-sekunda), kjer se na primer namesto enote tesla za gostoto magnetnega polja uporablja enota gauss. V konkretnem primeru je pretvorba direktna $1\text{ T} = 10^4\text{ gaussa}$.

Označevanje: V elektrotehniki pogosto uporabljamo predpone k merskim enotam. To je potrebno zato, ker je red velikosti veličin zelo različen. Kapacitivnosti so pogosto reda mikro, nano ali piko faradov (μF , nF , pF), uporabljajo se napetosti se od mikro voltov do mega voltov itd. Zveze nam prikazuje preglednica:

vrednost	ime	predpona
10^{-12}	piko	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	mikro	μ
10^{-3}	mili	m
10^3	kilo	k
10^6	mega	M
10^9	giga	G
10^{12}	tera	T

Vprašanja za obnovo:

- 1) Razložite Ohmov zakon. Kakšne so omejitve tega zakona?
- 2) Razložite idealni in realni napetostni vir matematično in grafično (I-U karakteristika).
- 3) Razložite idealni in realni tokovni vir matematično in grafično (I-U karakteristika).
- 4) Kaj je delovna točka, kako jo določimo?
- 5) 1. in 2. Kirchoffov zakon.
- 6) Tokovni in napetostni delilnik.
- 7) Zaporedna in vzporedna vezava uporov.
- 8) Voltmeter. Razširjanje merilnega območja s preduporom.
- 9) Ampermeter. Razširjanje merilnega območja s souporom.
- 10) Temperaturne lastnosti uporov.

WWW: V tekstu smo uporabili izraze coulomb, amper, volt, vat. Po komu se te enote imenujejo in kakšne zasluge imajo ti ljudje za razvoj elektrotehniške znanosti? Poskušajte najti tudi definicijo za vsako enoto.

WWW: Poiščite na internetu strani, ki uporabljajo napetostni ali tokovni delilnik v konkretni aplikaciji in opišite osnovni princip delovanja.

WWW: Kako je J.P. Joule prišel do svojih ugotovitev o toploti, ki je proporcionalna kvadratu toka?

Samostojno delo: Napišite program, ki bo zrisal karakteristiko vira in karakteristiko bremena. Izrišite več karakteristik bremena na isto sliko. Kako se spreminja delovna točka?

WWW: Preverite svoje znanje na spletu:

<http://www.physics.uoguelph.ca/tutorials/ohm/Q.ohm.quizzes.html>

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog

Izpit, 10. marec 2006 (naloga 5)

Izpit, 20. aprila 2005 (naloga 1)

Izpit, 28. 01. 2005 (naloga 4)

3. Moč

Vsebina poglavja: definicija moči, delo, moč na bremenu, maksimalna moč, izkoristek.

Moč (simbol P) je definirana kot produkt napetosti in toka:

$$P = UI$$

V primeru, da se moč troši na linearnem upor (na katerem velja $U = RI$), z upoštevanjem Ohmovega zakona dobimo*:

$$P = RI^2 \text{ ali } P = U^2 / R.$$

Enota za moč je W (Watt).

Moč je merilo za intenzivnost dela, ki ga opravljajo električne sile. Obstaja torej neposredna zveza med močjo in delom,

$$A = \int P dt. \quad (\text{in tudi } P = \frac{dA}{dt})$$

Če je moč časovno konstantna, velja $A = P \int dt = PT$, kjer je T čas opravljanja dela.

Primer: Ko priključimo breme (npr. avtomobilsko žarnico) na enosmerni vir napetosti 12 V teče skozenj tok 2 A. Določimo moč na bremenu, upornost bremena in energijo, ki se sprosti na bremenu v času 10 minut.

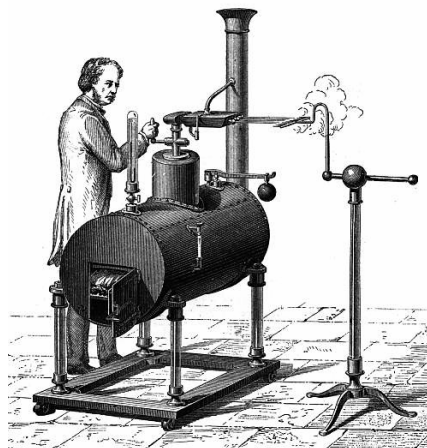
Izračun: Moč je $P = UI = 12 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 24 \text{ W}$. Upornost je $R = P / I^2 = 24 \text{ W} / (2 \text{ A})^2 = 6 \Omega$. Energija je $A = W = PT = 24 \text{ W} \cdot 10 \cdot 60 \text{ s} = 14400 \text{ J} = 14,4 \text{ kJ}$.

Vprašanje: Ali gre vsa ta energija v toploto (segrevanje)? Vsekakor en del, drugi del pa gre v svetlobno energijo. (Žarnice z žarilno nitko nimajo ravno velikega izkoristka, običajno med 10 in 20 % celotne moči).

WWW: Naštejte nekaj različnih tipov žarnic. Opiši njihov princip delovanja. Preverite izkoristke različnih tipov žarnic.

Moč na bremenu. Oglejmo si, kako se moč spreminja na spremenljivem bremenskem upor, ki ga priključimo na realni napetostni vir. Veljati mora

$$P_b = R_b I^2 = R_b \left(\frac{U_g}{R_b + R_g} \right)^2.$$



En prvih industrijskih generatorjev elektrike je bil zasnovan na ločevanju naboja s trenjem, ki ga uparjene kaplice »nanašajo« na prevodne ščetke. Izumitelj William George Armstrong, leta 1841.

* Te zveze pogosto imenujemo kar Joulov zakon, saj je James P. Joule leta 1841 prvi prišel do ugotovitve, da je sproščena toplota v prevodniku proporcionalna kvadratu toka, ki teče skozi vodnik.

To ni ravno preprosta funkcija, saj R_b nastopa 2x, tako v števcu, kot v imenovalcu. Poskusimo iz enačbe razbrati, kako se moč na upor upor spreminja s spreminjanjem bremenske upornosti. Iz enačbe razberemo dve skrajnosti: ko je bremenski upor enak nič, bo moč enaka nič, ko je bremenski upor zelo velik bo veljalo $P \approx \frac{U_g^2}{R_b}$. Ta moč se bo z večanjem očitno zmanjševala proti nič. Vmes bo imela funkcija (moč) nek maksimum.

SLIKA: Moč na bremenu R_b , ki je priključeno na realni napetostni vir. Levo: breme na realnem napetostnem viru, desno: prikaz moči na bremenu.

Primer: Določimo moč na bremenu $10\ \Omega$, ki ga priključimo na realni napetostni vir $12\ V$ z notranjo upornostjo $2\ \Omega$.

Izračun: $P = 10\ \Omega \left(\frac{12V}{2\ \Omega + 10\ \Omega} \right)^2 = 10\ W$.

Vprašanje: Ali lahko to moč dosežemo tudi pri kakšni drugi upornosti?

Odgovor je pritrdilen: če enačbo zapišemo tako, da iščemo neznano upornost bremena pri znani moči, dobimo:

$$10(2 + R_b)^2 = 12^2 R_b, \text{ kar je kvadratna enačba, ki je s preureditvijo enaka}$$

$$10R_b^2 - 104R_b + 40 = 0$$

(Pri zapisu v matematično obliko smo zaradi preglednosti opustili pisanje enot. Ko določimo rešitev moramo pravilno enoto dopisati!)

Rešitvi kvadratne enačbe sta dve: že znanih $10\ \Omega$, pa tudi $0,4\ \Omega$.

Preprosti ukazi s programom Matlab za izračun in prikaz moči na bremenu:
 $R_b = 0:0.1:50$ % tvorimo niz vrednosti R_b od 0 do 50 s korakom 0,1

$U_g = 12$

$R_g = 2$

$P = R_b \cdot U_g^2 / (R_g + R_b)^2$ % Izračun moči

`plot(Rb,P)` % izris

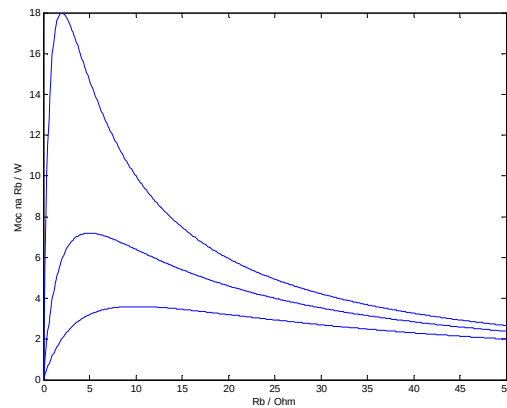
`xlabel('Rb / Ohm')`

`ylabel('Moc na Rb / W')`

% če želimo zrisati za več različnih vrednosti, zapišemo enačbe v datoteko in jo večkrat poženemo s spremenjeno vrednostjo R_g , pri čemer za risanje na isti graf dodamo ukaz

`hold on`

SLIKA: Prikaz moči za različne vrednosti notranje upornosti generatorja (2 Ω , 5 Ω in 10 Ω).



Maksimalna moč na bremenu. Vzemimo primer bremena priključenega na realni napetostni vir in se vprašajmo, kdaj je na bremenu največja moč. Grafična določitev je seveda enostavna, matematično pa jo določimo pri pogoju, da mora biti naklon premice na funkcijo moči enak nič (vzporeden z X osjo). Ker naklon premice dobimo z odvajanjem, moramo maksimalno moč iskati pri pogoju

$\frac{dP}{dR_b} = 0$. Ugotovimo, da z odvajanjem dobimo pogoj, da mora biti za maksimalno moč na

bremenu upornost bremena enaka notranji upornosti vira*:

$$R_b = R_g.$$

Kolikšna bo tedaj moč? Vstavimo pogoj ($R_b = R_g$) v enačbo za moč in dobimo:

$$P_{b,max} = \frac{U_g^2}{4R_b}.$$

Primer: Določimo še maksimalno moč iz prejšnjega primera. To bo tedaj, ko bo $R_b = R_g = 2 \Omega$, moč pa bo tedaj $P_{max} = \frac{(12V)^2}{4 \cdot 2\Omega} = 18W$. Rešitev se seveda sklada z odčitkom maksimalne moči, ki jo poiščemo na grafu.

$$* \frac{dP}{dR_b} = \left(\frac{U_g}{R_g + R_b} \right)^2 + 2 \left(\frac{U_g^2}{R_g + R_b} \right) (-1) \frac{R_b}{(R_g + R_b)^2} = 0$$

$$\frac{dP}{dR_b} = \left(\frac{U_g}{R_g + R_b} \right)^2 \left(1 - \frac{2R_b}{R_g + R_b} \right) = 0 \Rightarrow R_b = R_g$$

Izkoristek bremena. V smislu zakona o ohranitvi energije se del energije virov prenese na breme, drugi del pa lahko smatramo kot izgubna energija:

$$W_{vhodna} = W_{izhodna} + W_{izgubna}.$$

Izkoristek lahko definiramo kot kvocient izhodne in vhodne energije

$$\eta = \frac{W_{izhodna}}{W_{vhodna}}.$$

Ker pa je energija pri enosmernih vezjih sorazmerna moči $W = PT$, lahko definiramo izkoristek tudi kot kvocient moči na bremenu in moči vira (virov):

$$\eta = \frac{P_b}{P_g}$$

Izkoristek pogosto zapišemo v procentih, torej kot

$$\eta = \frac{P_b}{P_g} \cdot 100\%.$$

SLIKA: Vhodna energija se prenese (transformira) na izhodno in izgubno.

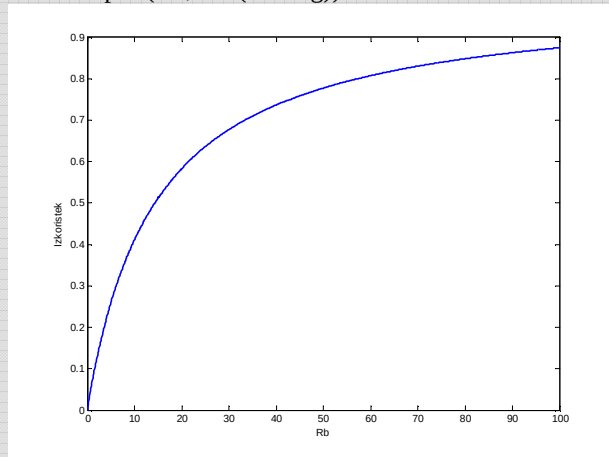
Kako se spreminja izkoristek vezja pri bremenu, priključenem na realni napetostni vir?

Izkoristek opisuje enačba

$$\eta = \frac{P_b}{P_g} = \frac{I^2 R_b}{I^2 (R_b + R_g)} = \frac{R_b}{R_b + R_g}.$$

Pri majhnih bremenskih upornostih gre izkoristek proti nič, pri velikih pa proti vrednosti 1 (100%). (glej sliko)

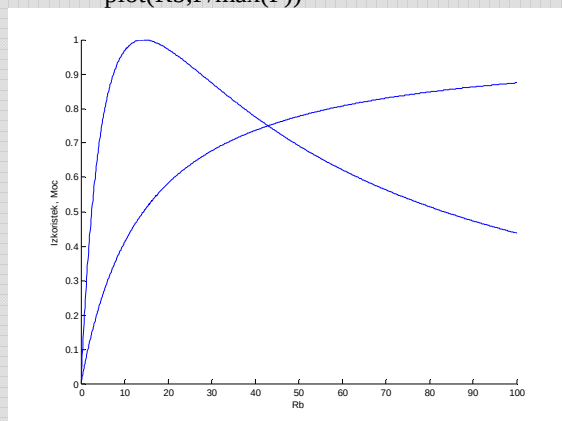
Primer z Matlabom:
 Rg=14.32
 Rb=0:0.1:100
 plot(Rb,Rb./(Rb+Rg))



SLIKA: Povečevanje izkoristka z večanjem bremenske upornosti.

Kakšna pa je razlika med izkoristkom in maksimalno močjo na bremenu?

Dodajmo še spremembo moči z ukazi
 hold on
 P=Rb./(Rb+Rg).^2
 plot(Rb,P/max(P))



SLIKA: Izkoristek vezja in moč na bremenu.

Ugotovimo, da je izkoristek vezja nekaj drugega kot maksimalna moč na bremenu. Največji izkoristek dosežemo pri čim večji upornosti bremena, vendar je tedaj moč na bremenu majhna v primerjavi z maksimalno. Pri maksimalni moči pa je izkoristek vezja ravno 50%.

Kako določimo izkoristek povezanih sistemov?

Če imamo dva zaporedno vezana sistema, lahko izkoristek določimo kot

$$\eta = \frac{P_{izh(2)}}{P_{vh(1)}} = \frac{P_{izh(2)}}{P_{vh(1)}} \cdot \frac{P_{iz(1)}}{P_{vh(2)}} = \eta_1 \eta_2,$$

torej kot produkt posameznih izkoristkov.

Samostojno delo: napišite računalniški program, ki izriše več različnih krivulj na isti graf tako, da uporabite zanko znotraj katere npr. povečujete vrednost upornosti generatorja.

Vprašanja za obnovo:

- 1) Kako je definirana moč? Zapiši zveze tudi z upoštevanjem Ohmovega zakona.
- 2) Kakšna je povezava med močjo in delom?
- 3) Kako se spreminja moč na bremenu, ki je priključen na realni napetostni vir?
- 4) Ali lahko enako moč dosežemo pri dveh različnih upornostih?
- 5) Kdaj bo moč na bremenu, ki je priključeno na realni napetostni vir maksimalna? Pri kateri upornosti? Kolikšna bo tedaj moč?
- 6) Ohmeter, Watmeter, univerzalni inštrument.

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:

kolokvij, 26.11.2003 (naloge 1)
kolokvij, 5. december 2006 (nalogi 4, 5)
kolokvij, 2. 12. 2004 (naloge 2)
Izpit, 29. 01. 2002 (naloge 4)
Izpit, 10. marec 2006 (naloge 4)
Izpit, 20. aprila 2005 (naloge 2)
Izpit, 28. 01. 2005 (naloge 5)
izpit, 26. januar 2007 (naloge 5)
Izpit, 4. 6. 2007 (naloge 4)

4. Analiza vezij

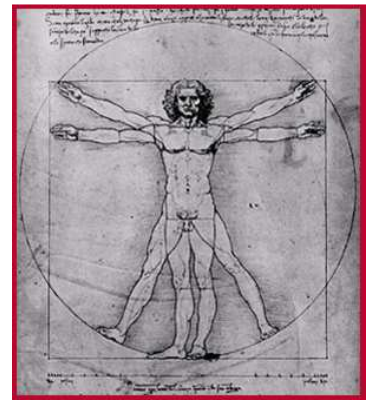
Vsebina poglavja: metoda Kirchoffovih zakonov, metoda zančnih tokov, metoda spojiščnih potencialov.

Spoznali smo že oba Kirchoffova zakona in zvezo med tokom in napetostjo na upor. Zaradi pomembnosti velja ponoviti:

1. KZ: $\sum_{i=1}^N I_i = 0$ v spojišču

2. KZ: $\sum_{i=1}^M U_i = 0$ v zanki

Ohmov zakon: $U = RI$ (povezuje U in I)



Leonardo da Vinci, 1442:
analiza človeškega torza
Galleria del'Accademia,
Benetke

S pomočjo teh zvez lahko analiziramo (določimo tok in napetost na poljubnem elementu vezja) poljubno vezje. Le zapisati moramo ustrezno število enačb in rešiti sistem enačb. Spoznali pa bomo tudi metode, ki nam omogočajo analizo vezij z manjšim številom enačb.

Najbolj tipične metode reševanja (analize) vezij so:

- 1) Metoda Kirchoffovih zakonov
- 2) Metoda zančnih tokov
- 3) Metoda spojiščnih potencialov

1. Metoda Kirchoffovih zakonov (metoda vejnih tokov)

Je najosnovnejša metoda, ki se (kot že ime pove) poslužuje uporabe Kirchoffovih zakonov.

Način reševanja bomo prikazali na konkretnem primeru. Najprej moramo označiti smeri tokov v vsaki veji. Ta označitev je lahko poljubna, potrebno pa se je zavedati (kot smo že omenili!), da smer toka (skozi upor) določa tudi smer napetosti. Za lažjo analizo bomo označili tudi spojišča vezja ter tri zanke. Toka v veji s tokovnim virom nismo posebej označili, saj ta tok lahko enačimo kar s tokom tokovnega generatorja.

Zapišemo lahko štiri enačbe z uporabo 1 KZ:

spojišče (0): $-I_4 - I_3 - I_5 = 0$

spojišče (1): $I_g + I_1 + I_4 = 0$

spojišče (2): $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$

spojišče (3): $-I_2 - I_g + I_5 = 0$

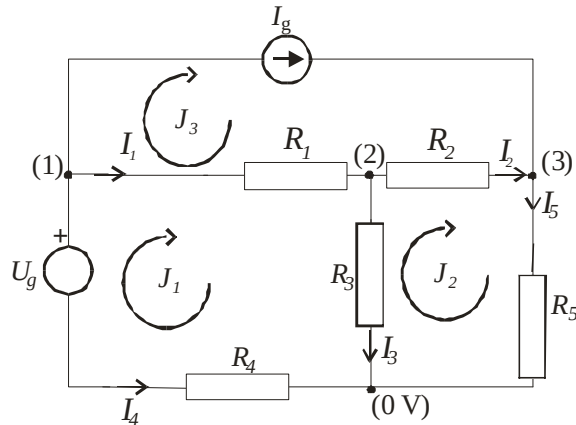
In dve enačbi po 2 KZ:

zanka (J_1): $-U_g + I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0$

zanka (J_2): $-I_3 R_3 + I_2 R_2 + I_5 R_5 = 0$

Za zanko J_3 ne zapišemo enačbe saj ni potrebna. Zančni tok J_3 je znan in kar enak (vsiljenem) toku tokovnega generatorja.

Poglejmo število neznank in število enačb, ki smo jih zapisali. Število neznank je enako številu neznanih vejskih tokov, torej 5. Število enačb, ki smo jih zapisali pa je 6. Ena od enačb je torej odveč, je redundančna. Izkaže se, da je odveč ena od enačb po 1 KZ. Izločimo lahko torej poljubno spojiščno enačbo*.



SLIKA: Primer vezja: $U_g = 10 \text{ V}$, $I_g = 2 \text{ A}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$, $R_5 = 40 \Omega$.

Reševanje takega sistema enačb zahteva sistematičen pristop. Pomagamo si lahko s teorijo grafov, kjer najprej narišemo t.i. **graf vezja**, označimo **drevo vezja** in **dopolnilne veje (kite)**. Graf vezja narišemo kot vezje, v katerem ostanejo le veje vezja. Drevo vezja sestavimo iz vej vezja, s katerimi moramo doseči vsa spojišča vezja, pri tem pa ne smemo zaključiti nobene zanke. Veje, ki jih nismo uporabili za tvorjenje drevesa, so dopolnilne veje in jih dorišemo s črtkanimi črtami[†].

SLIKA: Graf vezja, drevo vezja in dopolnilne veje – kite.

Število enačb, ki jih moramo zapisati po 1 KZ je torej enako $N - 1$, kjer je N številu spojišč, število enačb po 2 KZ pa je enako številu dopolnilnih vej. V našem primeru bomo potrebovali $4 - 1 = 3$ spojiščne enačbe in 2 zankni enačbi.

Sistem enačb se reši tako, da se jih uredi v matrično obliko: (upoštevali bomo spojiščne enačbe od (1) do (3)). Npr., prvo spojiščno enačbo (1) bi zapisali v obliki

* Seštejte spojiščne enačbe (1), (2) in (3) ter množite z -1. Dobili boste spojiščno enačbo (0).

[†] Vezje, ki ga obravnavamo je nekoliko specifično, ker v eni veji vsebuje idealni tokovni vir. V smislu analize vezij (teorije grafov) take veje ne moremo smatrati kot dopolnilne veje. Za te je značilno, da vsebujejo elemente s končno notranjo upornostjo.

$$1 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + 1 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 = -I_g,$$

drugo v obliki

$$-1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 = 0$$

itd. Koeficiente prepišemo v matriko in dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ 0 \\ I_g \\ U_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Potrebno je le še vstaviti vrednosti in rešiti matrični sistem enačb. V te namene pogosto uporabimo računalniške programe.

Sistem enačb rešimo s programom Matlab. Tvoriti moramo matriko A in vektor b ter rešiti sistem enačb tipa $Ax=b$. Rešitev dobimo z Matlabovim ukazom $x=A \backslash b$.

```
>> A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;20,0,10,-1,0;0,5,-10,0,40]
```

```
A =
```

```
1 0 0 1 0
-1 1 1 0 0
0 -1 0 0 1
20 0 10 -1 0
0 5 -10 0 40
```

```
>>b=[ -2; 0 ;2 ;10 ;0];
```

```
>> x=A\b
```

```
x = -0.2243 -1.4953 1.2710 -1.7757 0.5047
```

Vejski toki so torej $I_1 = -0,2243 \text{ A}$, $I_2 = -1,42953 \text{ A}$ itd.

2. Metoda zančnih tokov

Je metoda, s pomočjo katere lahko zmanjšamo sistem enačb, saj je število potrebnih zančnih enačb kar enako številu dopolnilnih vej, kar v konkretnem primer pomeni 2 enačbi.

Zančne toke tvorimo iz vejskih tako, da je ta v veji, ki ni skupna drugi (sosednji) zanki kar enak vejskemu toku, sicer pa je enak vsoti ali razliki vejskih tokov, odvisna od označitve

smeri znančnih tokov. V tem smislu za analizirano vezje velja zveza med znančnimi in vejskimi toki:

$$J_1 = -I_4$$

$$J_2 = I_5$$

$$J_3 = I_g$$

in

$$I_3 = J_1 - J_2$$

$$I_2 = J_2 - J_3$$

Če vejske toke izražene z znančnimi vstavimo v napetostni enačbi po 2 K.Z., dobimo sistem znančnih enačb. Običajno je lažje napisati enačbe tako, da sproti upoštevamo padce napetosti v zanki:

$$\text{zanka } (J_1): -U_g + (J_1 - J_3)R_1 + (J_1 - J_2)R_3 - J_1R_4 = 0$$

$$\text{zanka } (J_2): (J_2 - J_1)R_3 + (J_2 - J_3)R_2 + J_2R_5 = 0$$

$$\text{zanka } (J_3): J_3 = I_g$$

Dobimo sistem treh enačb za tri neznane toke. V osnovi le sistem dveh, saj je tretja že določena: $J_3 = I_g = 2 \text{ A}$.

Obstaja še drug pristop k tvorjenju sistema enačb, ki seveda privede do ekvivalentnega zapisa enačb. Pri tem pristopu najprej upoštevamo tok zanke in vse padce napetosti v zanki, ki jih ta tok povzroča. Nato ustrezno prištejemo ali odštejemo še prispevke ostalih znančnih tokov.

Primer:

$$J_1(R_1 + R_3 + R_4) - J_3R_1 - J_2R_3 - U_g = 0$$

$$J_2(R_2 + R_3 + R_5) - J_1R_3 - J_3R_2 = 0$$

Reševanje sistema dveh enačb: Vstavimo vrednosti in dobimo:

$$J_1 31 - 2 \cdot 20 - J_2 10 - 10 = 0$$

$$J_2 55 - J_1 10 - 2 \cdot 5 = 0$$

Enačbi z dvema neznankama preprosto rešimo tudi tako, da iz ene enačbe izrazimo eno od spremenljivk in jo vstavimo v drugo enačbo. Npr. iz 1. enačbe izrazimo J_2 in dobimo $J_2 = 0,1(J_1 31 - 50)$. Sedaj to vstavimo v drugo enačbo in dobimo $0,1(J_1 31 - 50) 55 - J_1 10 = 10$ in iz nje rezultat.

Drugma možnost je zopet uporaba programa Matlab.

Matlab: Reševanje s pomočjo programa Matlab je silno preprosto. Tvorimo matriko A in vektor b ter rešitev kot $x=A \backslash b'$. Druga možnost je $x=\text{inv}(A)*b'$. Tokrat smo nekoliko drugače zapisali vektor b (kot vrstični vektor) kot v prejšnjem primeru. Zato ga je potrebno spremeniti (transponirati) z dodatkom '.

```
A=[31, -10; -10,55]
b=[50,10]
x=A\b
>> x =    1.7757    0.5047
```

Rešitev je torej $J_1 = 1,7757 \text{ A}$ in $J_2 = 0,5047 \text{ A}$. Ugotovimo lahko, da je dobljeni tok J_1 skladen z rešitvijo, ki smo jo dobili po sistemu reševanja Kirchoffovih enačb: $J_1 = -I_4$.

3. Metoda spojiščnih potencialov

Metoda temelji na uporabi 1. KZ, po katerem zapišemo vsoto tokov v spojišče, ki mora biti enaka nič. Toke izrazimo s potenciali spojišč, razen, če je tok v veji znan, npr. tokovni generator. Označimo vsa spojišča in jim pripišemo neznane potenciale. Potencial enega spojišča lahko prosto izberemo. Ponavadi mu priredimo vrednost 0 V (ga ozemljimo). Če se v veji nahaja upor, izrazimo tok v veji s padcem napetosti na upor ($I = U / R$), napetost na upor pa z razliko potencialov spojišč. V primeru, da se v veji nahaja tudi napetostni generator, je potrebno vrednost napetosti generatorja ustrezno upoštevati (odšteti ali prišteti razliki potencialov).

Število potrebnih enačb je enako $N - 1$, kjer je N število spojišč. V primeru, ki ga obravnavamo je to $4 - 1 = 3$.

Reševanje konkretnega primera: V smislu sistematičnega pristopa bomo predpostavili, da vsi tokovi izhajajo iz spojišča (čeprav smo jih originalno označili drugače).

Spojišče (1): Tok v tej veji določimo iz padca napetosti na upor R_4 . Napetost na tem upor pa je razlika potencialov spojišč (1) in (0). Ker smo spojišče (0) ozemljili, potencial spojišča (1) pa je V_1 , je tudi napetost med spojiščema enaka V_1 . Napetost na upor R_4 je manjša od V_1 za padec napetosti na napetostnem viru, torej je enaka $V_1 - U_g$, tok skozi upor R_4 pa je

$\frac{V_1 - U_g}{R_4}$. Na podoben način določimo ostale toke. Za spojišče (1) dobimo

$$\frac{V_1 - U_g}{R_4} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} + I_g = 0,$$

za spojišče (2)

$$\frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_3} + \frac{V_2 - V_3}{R_2} = 0$$

in za spojišče (3)

$$-I_g + \frac{V_3 - V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_5} = 0.$$

Dobimo sistem treh enačb za tri neznane potenciale. Vstavimo vrednosti in rešimo sistem enačb:

$$\frac{V_1 - 10}{1} + \frac{V_1 - V_2}{20} + 2 = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{20} + \frac{V_2}{10} + \frac{V_2 - V_3}{5} = 0$$

$$-2 + \frac{V_3 - V_2}{5} + \frac{V_3}{40} = 0$$

oziroma

$$V_1 \left(1 + \frac{1}{20} \right) - V_2 \frac{1}{20} = -2$$

$$-V_1 \frac{1}{10} + V_2 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) - V_3 \frac{1}{5} = 0$$

$$-V_2 \frac{1}{5} + V_3 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{40} \right) = 2$$

%Uporaba Matlaba:

```
>> A=[1+1/20,-1/20,0;-1/20,1/10+1/20+1/5,-1/5;0,-1/5,1/5+1/40]
```

```
A =
```

```
1.0500 -0.0500 0
-0.0500 0.3500 -0.2000
0 -0.2000 0.2250
```

```
>> b=[-2+10;0;2]
```

```
b =
```

```
8
0
2
```

```
>> V= A\b
```

```
ans = 8.2243 12.7103 20.1869
```

Potenciali spojišč izračunani s pomočjo Matlaba so: $V_1 = 8,2243$ V, $V_2 = 12,71$ V in $V_3 = 20,1869$ V.

Vejske toke določimo iz že zapisanih zvez, pri čemer pa je sedaj potrebno upoštevati predhodno izbrano smer tokov. Tako je na primer tok I_1 enak

$$\frac{V_1 - V_2}{R_2} = (8,224 - 12,71) \text{ V} / 20 \Omega = -0,2243 \text{ A}.$$

(Opozorilo: Zaradi preglednosti pisanja enačb namenoma pri vstavljanju številskih vrednosti v enačbe nismo pisali tudi enot. Enačbe smo torej spremenili v matematično obliko. Ko določimo rešitev, pripišemo ustrezne enote).

En od načinov reševanja sistema enačb je z uporabo t.i. Kramerjevega pravila*. Pri tem moramo izračunati determinante matrik. Rešitev za potencial V_1 je na primer $V_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$,

kjer je determinanta matrike A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1,05 & -0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,35 & -0,2 \\ 0 & -0,2 & 0,225 \end{vmatrix} = 1,05(0,35 \cdot 0,225 - (-0,2)(-0,2)) - (-0,05)(0,05 \cdot (-0,225) - (-0,2) \cdot 0 + 0 \cdot (0,05 \cdot (-0,2) - (0,35) \cdot 0))$$

$$\det(A) = 0,0401.$$

* Gabriel Cramer (1704 - 1752): http://en.wikipedia.org/wiki/Cramer's_rule

Determinanto $\det(A_1)$ pa dobimo tako, da prvo kolono matrike A nadomestimo z vektorjem b):

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 8 & -0,05 & 0 \\ 0 & 0,35 & -0,2 \\ 2 & -0,2 & 0,225 \end{vmatrix} = 0,330$$

$$\text{Dobimo: } V_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 8,22 \text{ V}.$$

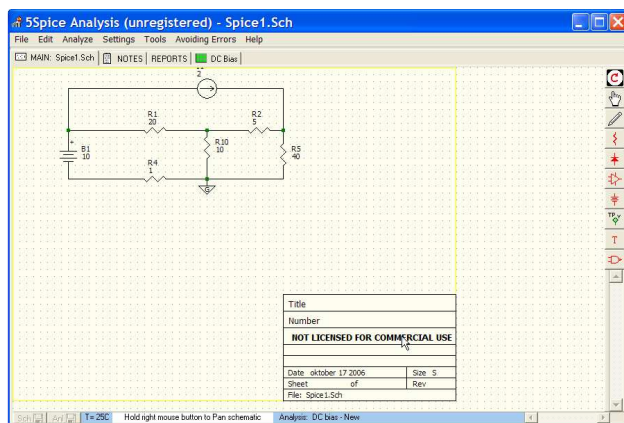
Matlab: poiščite način izračunavanja determinant s programom Matlab in rešite sistem za potencial V_2 .

* Analiza vezij s programskim orodjem.

Pri bolj kompleksnih vezjih, še posebno, ko analiziramo vezja z nelinearnimi elementi, se lahko poslužimo analize vezij s programskimi paketi. En najbolj znanih je zasnovan na Spice simulacijah*. Na spletu je mogoče dobiti vrsto programov, ki temeljijo na Spice simulaciji. Poglejmo si primer uporabe programa 5Spice, ki omogoča tudi uporabo grafični vmesnik. Ta je še posebno koristen za popolne začetnike, saj ni potrebno poznati sintakse zapisov, pač pa le nekaj osnovnih pravil. Eno od teh je, da je potrebno eno od spojišč ozemljiti.

Lista s povezavo elementov vezja, ki smo ga analizirali je (jo kreira sam program):

R4.1, R5.1, R10.2, Ground,
I1.2, B1.1, R1.2,
R1.1, R2.2, R10.1,
R2.1, I1.1, R5.2,
B1.2, R4.2,



SLIKA: Primer simulacije vezja s programom 5Spice, www.5spice.com. (pomembno pri delu s programom je to, da mora biti eno od spojišč vedno ozemljeno)

* SPICE je sicer delo univerzitetnega laboratorija (Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, ZDA), ga pa pod tem imenom poznamo tudi v profesionalnih orodjih (npr. HSPICE in PSPICE). Več: <http://en.wikipedia.org/wiki/SPICE>

Vprašanja za obnovo:

- 1) Zapišite in razložite Kirchoffova zakona. (glej tekst)
- 2) Kolikšno število enačb moramo zapisati za analizo vezja po metodi Kirchoffovih zakonov?
- 3) Kaj je to graf vezja, drevo in dopolnilne veje? Prikaži na primeru.
- 4) Kako zapišemo enačbe z uporabo metode znančnih tokov? Kolikšno je število potrebnih enačb za analizo vezja?
- 5) Kaj je to determinanta in poddeterminanta sistema, kako zapišemo sistem enačb v matrični obliki?
- 6) Na čem temelji metoda spojiščnih potencialov? Kako jo uporabimo? Kolikšno je potrebno število enačb po tej metodi?
- 7) Razložite stavek superpozicije. Ali ob izklopu vira iz vezja pustimo odprte sponke ali naredimo kratek stik?

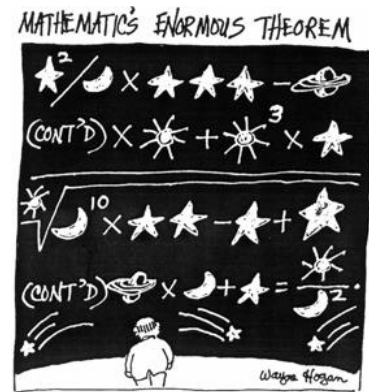
WWW: Iz spleta si naložite program 5spice in ga uporabite za analizo vezij.

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog

izpit, 10. septembra 2002 (naloge 5)
izpit, 23. januar 2003 (naloge 5)
kolokvij, 26.11.2003 (naloge 3)
izpit, 29. 01. 2002 (nalogi 3, 5)

5. Stavki (Teoremi)

Vsebina: Stavek superpozicije, stavek Thévenina in Nortona, maksimalna moč na bremenu (drugič), stavek Tellegena.



1. Stavek superpozicije

Ta stavek določa, da lahko poljubno vezje sestavljeno iz linearnih elementov z več viri poenostavimo tako, da analiziramo vezje z izmeničnim vklopom posameznih virov v vezje. Toke, ki jih izračunamo na tako poenostavljenem vezju na koncu seštejemo (superponiramo). V našem konkretnem primeru bi lahko določili toke v vejah vezja za dve poenostavljeni vezji. V prvem bi bil vklopljen le napetostni vir, v drugem pa le tokovni vir. *Izklopljen napetostni vir nadomestimo s kratkim stikom, tokovni vir pa odklopimo - odprte sponke.*

SLIKA: Vezje nadomestimo z dvema enostavnejšima vezjema. V prvem vezju obdržimo le napetostni vir, tokovnega pa izklopimo (odprte sponke), v drugem vezju pa obdržimo tokovni vir in odklopimo napetostnega (nadomestimo s kratkim stikom).

Primer: Določimo tok I_4 s pomočjo metode superpozicije.

1. vezje: Ko izklopimo tokovni vir lahko vse upornosti združimo v eno (nadomestno) tako, da zaporedno seštejemo upora R_2 in R_5 ter nato obema vzporedno še R_3 ter nato vsem še zaporedno R_1 in R_4 . Dobimo nadomestno upornost $R_{\text{nad}} = (R_2 + R_5) || R_3 + R_1 + R_4 = 29,18 \Omega$. Tok $I_{4(1)} = -10/25,44 \text{ A} = -0.3427 \text{ A}$. (Bodite pozorni na to, da je predznak toka negativen.)

2. vezje: Ko izklopimo napetostni vir, nam ostane vezje, pri katerem ne moremo preprosto seštevati upore. Zopet moramo uporabiti eno od metod za reševanje vezij. Vzemimo kar metodo zančnih tokov, ki se je za analizo konkretnega vezja izkazala kot zelo primerna in izračunajmo zančna toka. Razlika v že nastavljenih enačbah bo le ta, da sedaj nimamo napetostnega vira:

$$J_1 31 - 2 \cdot 20 - J_2 10 = 0$$

$$J_2 55 - J_1 10 - 2 \cdot 5 = 0$$

Izračun nam da vrednosti $J_1 = 1,4330 \text{ A}$ in $J_2 = 0,4424 \text{ A}$. $I_{4(2)}$ je enak $-J_1$ in bo torej enak $I_{4(2)} = -1,4330 \text{ A}$.

Na koncu seštejemo obe vrednosti in dobimo

$$I_4 = I_{4(1)} + I_{4(2)} = -0,3427 \text{ A} - 1,4330 \text{ A} = -1,7757 \text{ A}.$$

Ugotovimo lahko, da je rešitev enaka, kot smo jo dobili z uporabo metode Kirchhoffovih zakonov.

2. Stavek Thévenina

To sta pomembna stavka v elektrotehniki in se pogosto uporabljata. Théveninov stavek »pravi«, da je mogoče poljubni del linearne vezja nadomestiti z realnim napetostnim virom, torej z idealnim napetostnim virom (ki ga imenujemo Théveninov) in notranjo (Théveninovo) upornostjo.

SLIKA: Shematski prikaz Théveninovega in Nortonovega nadomestnega vira.

Kako določimo Théveninovo nadomestno napetost in upornost?

Napetost Thévenina določimo (izračunamo ali izmerimo) kot napetost odprtih sponk na mestu vezja, ki ga želimo nadomestiti, Théveninovo upornost pa kot notranjo upornost vezja, merjena (računana) s sponk, pri čemer napetostne vire v vezju kratko sklenemo (kratek stik), tokovne pa razklenemo (odprte sponke).

Matematično:

$$U_{Th} = U_o$$

$$R_{Th} = R_{notranja} \text{ pri kratko sklenjenih napetostnih virih in razklenjenih tokovnih virih.}$$

Primer: Kot primer odklopimo iz vezja iz prejšnjega poglavja upor R_3 in na njegovih sponkah vezje nadomestimo s Théveninovim nadomestnim vezjem.

Če iz vezja odklopimo upor R_3 in zapišemo zanko enačbo dobimo

$$-U_g + J(R_1 + R_2 + R_4 + R_5) - I_g(R_1 + R_2) = 0$$

Po ustavitvi vrednosti določimo zankni tok $J = 0,91 \text{ V}$, Théveninova napetost pa je

$$U_{Th} = (J - 2A)5\Omega + J40\Omega = \underline{\underline{30,91 \text{ V}}}.$$

$$\text{Upornost Thévenina je } R_{Th} = (R_1 + R_4) \parallel (R_2 + R_5) = \underline{\underline{14,32 \Omega}}.$$

Sedaj lahko tvorimo nadomestno vezje in dodamo upor R_3 ter izračunamo tok skozi upor:

$$I_3 = \frac{U_{Th}}{R_3 + R_{Th}} = 1,270 \text{ A}.$$

Drugi način določanja Théveninove nadomestne upornosti je s pomočjo toka kratkega stika med sponkama nadomestitve. Ta način pride v poštev predvsem tedaj, ko ne moremo preprosto seštevati vzporedne in zaporedne vezave uporov. S pomočjo računalnika najlažje

uporabimo kar matriko za izračun tokov po metodi Kirchoffovih zakonov pri čemer bo upornost $R_3 = 0 \Omega$. Dobimo $I_K = 2,1587 \text{ A}$ in $R_{Th} = \frac{U_{Th}}{I_K} = \frac{30,91 \text{ V}}{2,1587 \text{ A}} \doteq \underline{\underline{14,32 \Omega}}$.

Omenimo še tretjo možnost. **Upornost vezja med sponkama pri izklopljenih virih lahko dobimo tudi tako, da na sponki priključimo poljubno izbrano napetost in izračunamo tok v vezje. Iz kvocienta med napetostjo in tokom sledi upornost.** V našem konkretnem analiziranem primeru je ta način v osnovi enak prvemu načinu, saj izračunamo upornost

$$\text{Thévenina kot } R_{Th} = \frac{U_{\text{sponk}}}{I_{\text{sponk}}} = \frac{I_{\text{sponk}} \cdot (R_1 + R_4) \parallel (R_2 + R_5)}{I_{\text{sponk}}} = (R_1 + R_4) \parallel (R_2 + R_5) = \underline{\underline{14,32 \Omega}}.$$

Bi pa prišel ta način v poštev, če upornosti v vezju ne bi mogli kar preprosto seštevati.

3. Stavek Nortona

Velja podobna definicija kot za Théveninovo nadomestno vezje, le da v tem primeru lahko poljubni del linearne vezja nadomestimo z Nortonovim nadomestnim vezjem, ki je sestavljeno in idealnega tokovnega (Nortonovega) vira in vzporedne notranje upornosti.

Ker lahko vedno realni napetostni vir nadomestimo z realnim tokovnim, ta zveza velja tudi med Théveninovim in Nortonovim teoremom. V osnovi določimo tok Nortonovega vira kot tok kratkega stika, upornost Nortona pa na enak način kot upornost Thévenina. Velja torej:

$$I_N = I_K \text{ in tudi } I_N = U_{Th} / R_{Th} \text{ ter } R_N = R_{Th}.$$

Maksimalna moč na bremenu – drugič.

Théveninov stavek je posebno primeren za izračun **maksimalne moč na upor (bremenu)**. Pri analizi maksimalne moči bremena priključenega na realni napetostni vir smo ugotovili, da bo moč na bremenskem upor največja tedaj, ko bosta bremenska in generatorska upornost enaki. Da dosežemo maksimalno moč, mora biti upornost bremena torej enaka upornosti Thévenina:

$$R_{b(P_{\max})} = R_{Th},$$

maksimalna moč pa bo tedaj

$$P_{\max} = \frac{U_{Th}^2}{4R_b}.$$

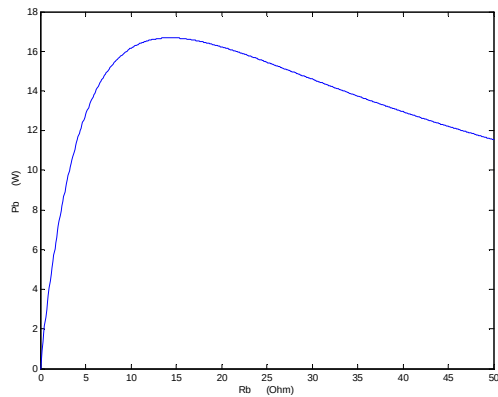
Primer: V našem vezju smo analizirali razmere moči na bremenskem upor R_3 . Tedaj bo torej $R_{b(P_{\max})} = 14,32 \Omega$, maksimalna moč pa $P_{\max} = \frac{U_{Th}^2}{4R_b} = \frac{(30,91 \text{ V})^2}{4 \cdot 14,32 \Omega} = \underline{\underline{16,68 \text{ W}}}$.

Pogosto rečemo tudi, da je v tem primeru breme **prilagojeno** na vir. To je torej tedaj, ko je na breme prenešana maksimalna moč iz vira.

Izrišimo moč na bremenu s pomočjo računalnika, pri čemer si bomo zopet pomagali s programom Matlab. Vzemimo izračunani vrednosti $U_{Th} = 30,91$ in $R_{Th} = 14,32 \Omega$ in spreminjajmo R_b od 0Ω do 50Ω in izračunajmo moč na bremenu. Z Matlabovimi ukazi:

```
Rb=0:0.1:50      % tvorimo niz vrednosti Rb od 0 do 50 s korakom 0,1
Uth=30.91
Rth=14.32
P=Rb*Uth^2./(Rth+Rb).^2 % Izracun moci
plot(Rb,P)        % izris
xlabel('Rb (Ohm)')
ylabel('Pb (W)')
```

Ugotovimo lahko, da izris ustreza našim pričakovanjem, da bo torej maksimalna moč na bremenu tedaj, ko bo upornost bremena enaka upornosti Thévenina. Ugotovimo tudi, da vrednost največje moči ustreza izračunani. Kako to ugotovimo z uporabo Matlab? Z ukazom $\max(P)$ izvemo največjo vrednost niza P, v katerem so shranjene vrednosti moči. Dobimo 16,68. Kaj pa vrednost upornosti pri maksimalni moči? Najprej ugotovimo indeks, pri katerem nastopa v nizu maksimalna moč z uporabo ukaza $i=\text{find}(P==\max(P))$, nato pa z $Rb(i)$ dobimo vrednost 14,3. Dobljena vrednost se razlikuje od točne za 0,02, kar je za pričakovati, saj smo numerično izračunavali moči le za vrednosti upornosti, ki se razlikujejo za 0,01 Ω . Namen tega pojasnjevanja je v tem, da bi vzpodbudil bralca k uporabi in raziskovanju izjemnih zmožnosti programa.



SLIKA: Moč na bremenu pri spreminjanju bremenske upornosti.

Da se prepričamo v pravilnost izračunov, lahko uberemo še eno pot. Izhajamo direktno iz izračunavanja tokov v vezju s pomočjo metode Kirchoffovih zakonov ter določimo moč na upor R_3 pri različnih vrednostih te (bremenske) upornosti. Preprosto, s pomočjo enačbe $P_3 = I_3^2 R_3$. S pomočjo računalnika lahko zelo hitro določimo maksimalno moč, tudi če formule ne poznamo. Iz že znane matrike:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ 0 \\ I_g \\ U_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

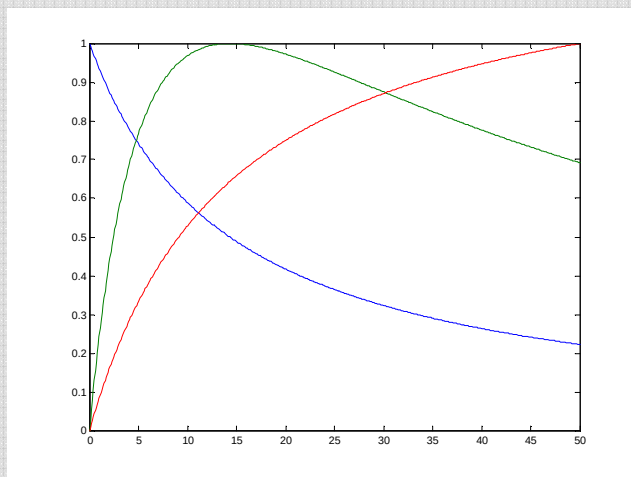
spreminjamo R_3 od 0Ω do 50Ω in izračunavajmo tokove ter moč na upor R_3 in rezultate izrišimo. Dobimo (Matlab):

```
b=[-2;0;2;10;0] % vektor znanih vrednosti / desna stran enacbe
II=[] % prazen vektor, potreben za shranjevanje izracunanih vrednosti moči
for R3=0:0.1:50 % zanka povecuje upornosti
    A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;20,0,R3,-1,0;0,5,-R3,0,40]

    I=A\b % izracun tokov za določen R3

    II=[II,I(3)] % shranjevanje vrednosti toka I3 v vektor, ki se zaporedno polni
end

R3=0:0.1:50 % vektor upornosti
P=II.^2.*R3 % izracun moci
plot(R3,P) % izris
```



SLIKA: Slika prikazuje normirane krivulje toka, napetosti in moči na upor R_3 v že znanem vezju. Sami ugotovite, katera krivulja prikazuje določeno veličino. To boste ugotovili zelo hitro, če si zamislite Théveninovo nadomestno vezje (Normiranje izvedemo tako, da poiščemo največjo vrednost v nizu (določene veličine) in delimo vse vrednosti s to vrednostjo.) Ukazi v Matlabu: $U=R_3.*II$; $plot(R3,II/\max(II),R3,P/\max(P),R3,U/\max(U))$

4. Stavek Tellegena

Stavek Tellegena pravi preprosto to, da je **moč bremen enaka moči virov**. Pri tem lahko vir deluje v generatorskem načinu (pozitivna moč) ali v bremenskem načinu (negativna moč). To zapišemo kot

$$\sum_i P_g(i) = \sum_j P_b(j).$$

V našem konkretnem primeru je moč generatorjev enaka

$$P_g = U_g(-I_4) + I_g(V_3 - V_1) = \underline{\underline{41,6822 \text{ W}}}$$

moč na bremenih pa

$$P_b = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = \underline{\underline{41,6822 \text{ W}}}.$$

Vprašanja za obnovo:

- 1) Razloži Théveninov in Nortonov stavek.
- 2) Kako določimo Théveninovo napetost in upornost?
- 3) Kako določimo Nortonov tok generatorija in upornost?
- 4) Ali velja povezava med Nortonovim in Théveninovim nadomestnim vezjem?
- 5) Kako določimo maksimalno moč na bremenu s pomočjo Thévenina?
- 6) Kdaj velja, da je breme prilagojeno na vir?
- 7) Razloži stavek Tellegena.

Osnove elektrotehnike 1, VSŠ

Osnovna izpitna vprašanja za ustni izpit (Križaj)

1. Enosmerna vezja

1. Kirchhoffova zakona: enačbi, katere lastnosti polja popisujeta, razlaga, uporaba.
2. Vezave Ohmskih uporov, nadomestna upornost: izpeljava, primeri.
3. Viri električnega toka: definicija, idealni, realni, *UI* karakteristika realnega vira, delovna točka.
4. Moč: izračun iz napetosti, toka, upornosti, izračun dela iz moči, moč na bremenu priključenem na realni vir, izkoristek, maksimalna moč na bremenu.
5. Merilni inštrumenti: notranja upornost, razširitev merilnega območja.
6. Analiza vezij: graf, drevo, veja, spojišče,
7. Neposredna uporaba Kirchhoffovih zakonov pri analizi električnih vezij: definicija, graf, drevo, veja, spojišče, neodvisne enačbe, matrični zapis, primer.
8. Metoda spojiščnih potencialov pri analizi električnih vezij.
9. Metoda zanknih tokov pri analizi električnih vezij.
10. Metoda superpozicije.
11. Theveninov teorem ali teorem nadomestnega napetostnega vira: definicija, razlaga, primer.
12. Nortonov teorem ali teorem nadomestnega tokovnega vira: definicija, razlaga, primer.
13. Tellegenov teorem.

2. Elektrostatično polje

1. Zakon o ohranitvi naboja.
2. Tok kot časovna sprememba količine naboja (kontinuitetna enačba)
3. Povezava med tokom in nabojem (izračun toka pri znani časovni spremembi množine naboja in izračun množine naboja pri znani časovni spremembi toka)
4. Sila na točkaste naboje – Coulombov zakon: velikost sile, smer, dielektričnost vakuumu, odbojna in privlačna sila.
5. Električna poljska jakost: definicija, izpopolnjena definicija z limito, superpozicija.
6. Porazdelitve nabojev: linijska ali vzdolžna, površinska, volumska. povezava med nabojem in gostoto naboja.
7. Električna poljska jakost porazdeljenih nabojev.: izraz in princip uporabe.
8. Enačbe za polje v okolici točkastega naboja, naelektrene premice (preme elektrine), naelektrene daljice, v središču naelektrenega obroča, v osi naelektrenega obroča, naelektrene ravnine.
9. Gaussov zakon: razlaga in primeri. Izvornost električnega polja.
10. Delo in potencialna energija elektrostatičnega polja: definicija za izračun dela iz sile, pomen skalarnega produkta pri izračunu, delo električne sile in delo zunanje sile, delo po zaključeni poti, delo pri prenosu naboja do neskončnosti, povezava med delom in potencialno energijo.
11. Potencial: definicija in primer izračuna, potencial sistema točkastih nabojev, potencial v okolici porazdeljenih nabojev, potencial kot skalarno polje, ekvipotencialne ravnine.
12. Električna napetost: definicija, povezava med napetostjo in potencialom. Potencialnost polja (Kirchhoffov zakon).
13. Osnovni primeri izračuna potenciala, napetosti, polja in kapacitivnosti za: ploščni, valjni (koaksialni) in krogelni (sferični) kondenzator.
14. Prevodnik v električnem polju: polje znotraj prevodnika, potencial na površini prevodnika, elektrostatična indukcija, polje v votlini prevodnika, Faradayeva kletka, okovinenje ekvipotencialk, električno polje na površini prevodnika.

15. Zveza med poljem in potencialom: povezava v »obe smeri«. Primeri izračunov polja iz znane porazdelitve potenciala.
16. Gibanje nabojev v električnem polju: sila, pospešek, hitrost, energija, smer leta, kinetična in potencialna energija naboja.
17. Električni dipol: dipolni moment, dipol v homogenem in nehomogenem polju, potencial in polje v okolici dipola, navor na električni dipol.
18. Okovinjene ekvipotencialnih ravnin: primer dveh premih nabojev, dva naelektrena valja z in brez upoštevanja ekscentričnosti.
19. Metoda zrcaljenja: zrcaljenje različnih naelektrenih teles, izračun polja na zemlji, sistem daljnovodnih vrvi, zrcaljenje točkastega naboja na ozemljeni kovinski krogli.
20. Kapacitivnost: definicija, izrazi za kapacitivnost osnovnih struktur. Zaporedna in vzporedna vezava kondenzatorjev.
21. Kondenzatorska vezja: princip računanja.
22. Dielektrik v električnem polju: razlaga spremembe kapacitivnosti ob vložitvi dielektričnega lističa pri konstantni napetosti med ploščama ali pri konstantnem naboju na ploščama kondenzatorja.
23. Vektor polarizacije, površinska gostota polariziranega naboja, povezava med E in P , električna susceptibilnost.
24. Gostota električnega pretoka: definicija, povezava med D , E in P , povezava med D in E .
25. Modificiran Gaussov zakon.
26. Mejni pogoji: z upoštevanjem in brez upoštevanja prostega površinskega naboja, »lomni zakon«.
27. Energija: energija posameznega naboja pri preletu naboja v polju, energija sistema nabojev, povezava med delom in energijo sistema, energija v polju kondenzatorja, gostota energije in povezava med silo in energijo.

3. Časovno konstantno tokovno polje

1. Gostota toka.
2. Definicija časovno konstantnega polja.
3. 1. in 2. Kirchoffov zakon iz integralnih enačb
4. Konduktivni in konvektivni tok.
5. Ohmov zakon v diferencialni obliki in prehod v integralno obliko.
6. Specifična prevodnost in upornost, upornost pri homogeni gostoti v prevodniku, temperaturna odvisnost specifične upornosti.
7. Joulov zakon.
8. Mejni pogoji v tokovnem polju
9. Dualnost tokovnega in elektrostatičnega polja: primer uporabe.
10. Vir napetosti: elektrostatično polje in generatorska sila.