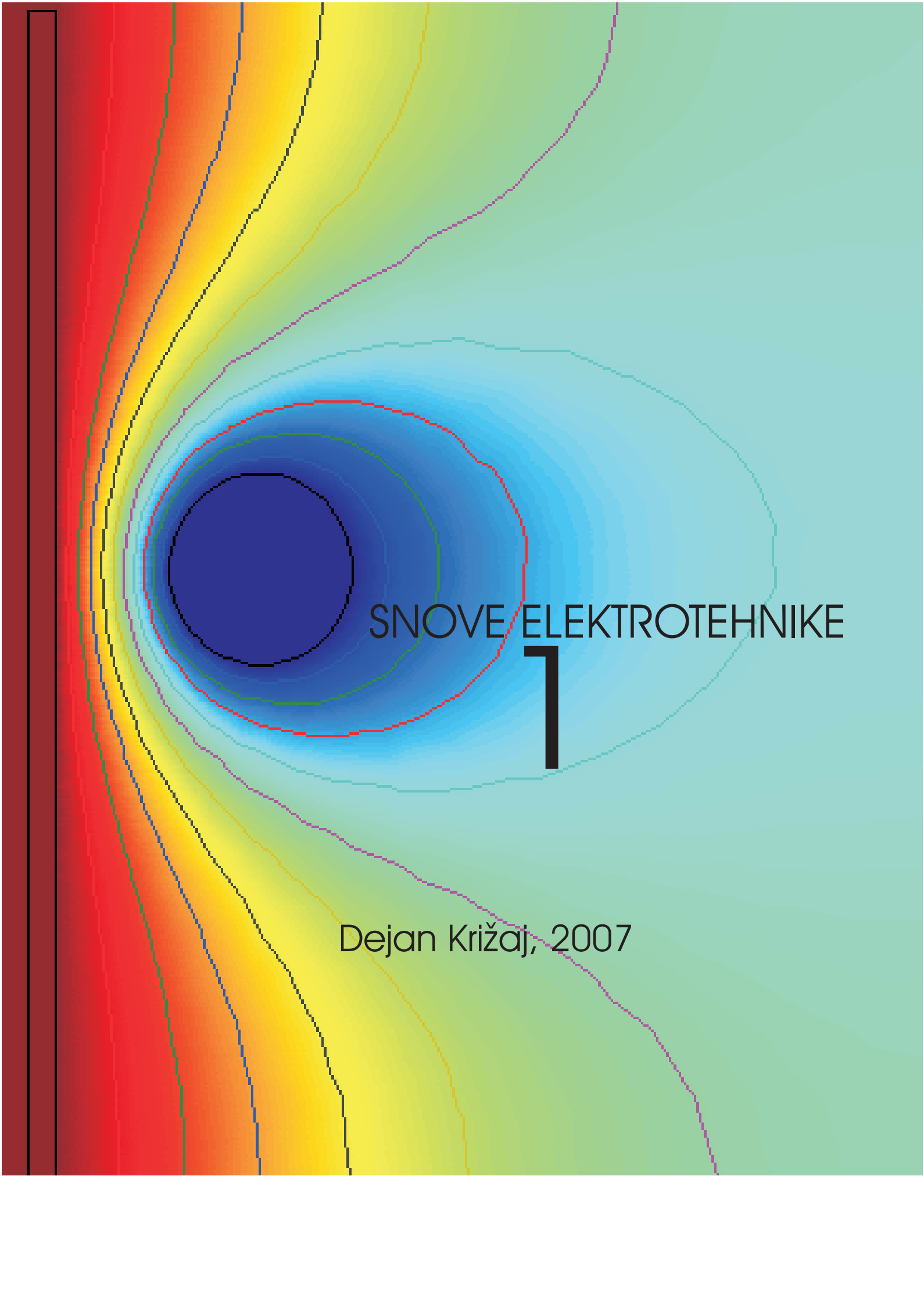


A contour plot with a color gradient from dark blue (center) to red (left edge). The plot shows concentric contour lines around a central dark blue region, with the lines becoming more widely spaced as they move towards the right. The left side of the plot is dominated by red and orange colors, indicating a high value, while the right side is light blue, indicating a low value.

SNOVE ELEKTROTEHNIKE 1

Dejan Križdaj, 2007

Spoštovani študenti!

Pred vami je skripta, ki jo lahko uporabljate za lažje spremljanje predavanj pri predmetu Osnove elektrotehnike 1 na visokošolskem študiju na Fakulteti za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani. Sestavljena je kot zbirka mojih priprav na predavanja.

Skripta večinoma ne vsebuje slikovnega materiala, razen v posebnih primerih. Je pa v skripti rezerviran določen prostor, kjer lahko narišete ustrezno sliko, ki ste jo že narisali na predavanjih. Na ta način si lahko z nekoliko lastne aktivnosti pripravite literaturo, primerno za pripravo na izpit.

Poleg »standardnega« teksta z razlagami osnovnih električnih pojavov in pojmov ter njihovega matematičnega zapisa sem dodal nekaj primerov uporabe Matlaba za izračun in vizualizacijo polja. Več primerov si lahko ogledate na moji spletni strani na <http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE/OE.html>. Predlagam, da tudi sami poskusite uporabiti Matlab ali pa kakšen soroden program. Na spletu so na voljo tudi brezplačni programi, ki tudi omogočajo zelo kakovostno delo. Poglejte na primer možnosti programov Scilab (www.scilab.org) ali Octave (www.gnu.org/software/octave).

Poleg analitične obravnave smo uporabili tudi programe za numeričen izračun električnega polja. Ta je posebno primeren za vizualizacijo polja, je pa tudi pogost način pri praktičnem delu. Uporabili smo komercialen programski paket Femlab (www.comsol.com), za študentsko delo pa so primerni tudi drugi nekomercialni programi (npr. Quickfield ali Maxwell SV), ki si jih lahko ogledate na strani <http://www.emclab.umn.edu/codes.html>.

Pri predmetu OE1 imate možnost izdelati seminarsko nalogo. To ni obveznost, se pa uspešno izvedena seminarska naloga upošteva pri končni oceni (izpitu). Primeri možnih nalog so na strani <http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE/OE.html>, lahko pa predlagate tudi svojo.

Na spletni strani <http://torina.fe.uni-lj.si/~oe/> se nahaja osnovna stran predmetov OE1 in OE2, kjer najdete tudi povezave na zbirko rešenih izpitnih in kolokvijskih nalog, ki so izdatno opremljene z rešitvami. To je gradivo, ki vam ga toplo priporočam kot študijsko gradivo.

Poleg te skripte obstaja veliko knjižnega gradiva, ki je primeren kot študijsko gradivo. Krajši spisek je na strani http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE/literatura_OE2.htm.

Dejan Križaj, 2006



Differentiation Rules Calculus I

General Formulas

1. $\frac{d}{dx} k = 0$.
2. $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$.
3. $\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$.
4. $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$.
5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$.
6. $y = f(u)$, $u = u(x)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$.

Basic Functions

1. $\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$.
2. $\frac{d}{dx} \ln |u| = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$.
3. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$.
4. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$.
5. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$.
6. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$.
7. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$.
8. $\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$.
9. $\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$.
10. $\frac{d}{dx} \ln |\sec u| = \tan u \frac{du}{dx}$.
11. $\frac{d}{dx} \ln |\sec u + \tan u| = \sec u \frac{du}{dx}$.
12. $\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$.
13. $\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$.
14. $\frac{d}{dx} \tanh u = \text{sech}^2 u \frac{du}{dx}$.
15. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$.
16. $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$.
17. $\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$.
18. $\frac{d}{dx} \sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$.
19. $\frac{d}{dx} \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$.

Integration Formulas Calculus I

General Formulas

1. $\int k \, dx = kx + C$.
2. $\int (u + v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$.
3. $\int (u - v) \, dx = \int u \, dx - \int v \, dx$.
4. $\int u \, dv = uv - \int v \, du$. (Integration by parts)
5. No “Quotient Rule”.
6. $\int f(u) \, du = \int f(u(x))u'(x) \, dx$. (Substitution)

Basic Formulas

1. $\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$; $n \neq -1$.
2. $\int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + C$.
3. $\int e^u \, du = e^u + C$.
4. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$.
5. $\int \cos u \, du = \sin u + C$.
6. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$.
7. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$.
8. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$.
9. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$.
10. $\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C$.
11. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$.
12. $\int \sinh u \, du = \cosh u + C$.
13. $\int \cosh u \, du = \sinh u + C$.
14. $\int \text{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$.
15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} \, du = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$.
16. $\int \frac{1}{a^2+u^2} \, du = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$.
17. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} \, du = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$.
18. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}} \, du = \sinh^{-1} \frac{u}{a} + C$.
19. $\int \frac{1}{a^2-u^2} \, du = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C$.



TRIGONOMETRIC FORMULAS

MATH 126: CALCULUS II

BASIC IDENTITIES

The functions $\cos(\theta)$ and $\sin(\theta)$ are defined to be the x and y coordinates of the point at an angle of θ on the unit circle. Therefore, $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, and $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$. The other trigonometric functions are defined in terms of sine and cosine:

$$\begin{aligned}\tan(\theta) &= \sin(\theta)/\cos(\theta) & \cot(\theta) &= \cos(\theta)/\sin(\theta) = 1/\tan(\theta) \\ \sec(\theta) &= 1/\cos(\theta) & \csc(\theta) &= 1/\sin(\theta)\end{aligned}$$

Dividing $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ by $\cos^2(\theta)$ or $\sin^2(\theta)$ gives $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$ and $1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$.

ADDITION FORMULAS

The following two addition formulas are fundamental:

$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B) \\ \cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)\end{aligned}$$

They can be used to prove simple identities like $\sin(\pi/2 - \theta) = \sin(\pi/2)\cos(\theta) + \cos(\pi/2)\sin(\theta) = \cos(\theta)$, or $\cos(x - \pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x)$. If we set $A = B$ in the addition formulas we get the double-angle formulas:

$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A) \quad \cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$$

The formula for $\cos(2A)$ is often rewritten by replacing $\cos^2(A)$ with $1 - \sin^2(A)$ or replacing $\sin^2(A)$ with $1 - \cos^2(A)$ to get

$$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A) \quad \cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$$

Solving for $\sin^2(A)$ and $\cos^2(A)$ yields identities important for integration:

$$\sin^2(A) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2A)) \quad \cos^2(A) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2A))$$

The addition formulas can also be combined to give other formulas important for integration:

$$\begin{aligned}\sin A \sin B &= \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ \cos A \cos B &= \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ \sin A \cos B &= \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)]\end{aligned}$$

DERIVATIVES AND INTEGRALS

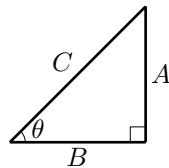
$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \cos(x) & \sec'(x) &= \sec(x)\tan(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x) & \csc'(x) &= -\csc(x)\cot(x) \\ \tan'(x) &= \sec^2(x) & \cot'(x) &= -\csc^2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sin(x) dx &= -\cos(x) + C & \int \sec(x) dx &= \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C \\ \int \cos(x) dx &= \sin(x) + C & \int \csc(x) dx &= -\ln|\csc(x) + \cot(x)| + C \\ \int \tan(x) dx &= \ln|\sec(x)| + C & \int \cot(x) dx &= -\ln|\csc(x)| + C\end{aligned}$$



Trig Functions

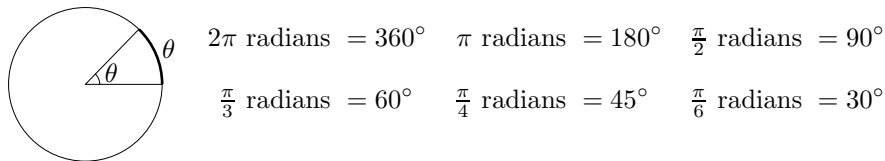
Definitions



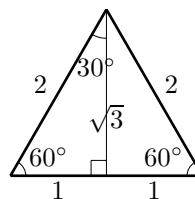
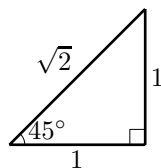
$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{A}{C} & \cos \theta &= \frac{B}{C} & \tan \theta &= \frac{A}{B} \\ \csc \theta &= \frac{C}{A} & \sec \theta &= \frac{C}{B} & \cot \theta &= \frac{B}{A} \end{aligned}$$

Radians

For use in calculus, angles are best measured in units called radians. By definition, an arc of length θ on a circle of radius one subtends an angle of θ radians at the center of the circle. Because the circumference of a circle of radius one is 2π , we have



Special Triangles



From the triangles above, we have

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
$0^\circ = 0 \text{ rad}$	0	1	0		1	
$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	1	0		1		0
$180^\circ = \pi \text{ rad}$	0	-1	0		-1	

The empty boxes mean that the trig function is undefined (i.e. $\pm\infty$) for that angle.

Trig Identities – Elementary

The following identities are all immediate consequences of the definitions at the top of the previous page

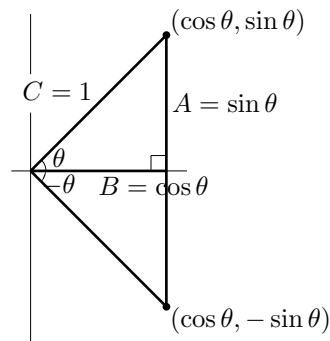
$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Because 2π radians is 360° , the angles θ and $\theta + 2\pi$ are really the same, so

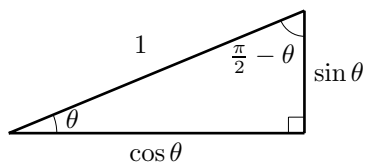
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

The following trig identities are consequences of the figure to their right.

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \sin(-\theta) &= -\sin(\theta) & \cos(-\theta) &= \cos(\theta) \end{aligned}$$



The following trig identities are consequences of the figure to their left.



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

Trig Identities – Addition Formulae

The following trig identities are derived in the handout entitled “Trig Identities – Cosine law and Addition Formulae”

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Setting $y = x$ gives

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1 \quad \text{since } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x \quad \text{since } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Solving $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$ for $\cos^2 x$ and $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$ for $\sin^2 x$ gives

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Dodatne vsebine pri predmetu Osnove elektrotehnike 1:

Osebnosti:

B. Franklin
Coulomb
Gauss
Galvani in Volta, živalska elektrika
Ohm

Modeliranje:

Prikaz Jacoba – testi, link na <http://jacob.fe.uni-lj.si>
Simulacije s Femlabom, sproti in link na <http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE.OE.html>
Matlab izračuni in link na <http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE.OE.html>
Simulacije na internetu (več internetnih strani)
Fizleti, virtualni eksperimenti z appleti

Zgodovina:

Leidenska flaša zgodovina , nadaljevanje
Whimhurstova mašina
Van den Graffov generator
Voltina kaskada
Millikenov poskus
Thompsonov poskus

Delovanje:

Kondenzatorji: zgodovina, tipi kondenzatorjev, uporaba, nadomestno vezje, ... PPT
Upori: zgodovina, tipi uporov, uporaba, ... PPT

Aplikacije: elektrostaticno čiščenje plinov, elektrostaticno naprševanje, xerox fotokopiranje, katodna cev, elektroforeza in dielektroforeza, elektrostaticni generatorji, elektrostaticni ionski pospeševalniki, elektrostaticni generatorji ionov (stanovanje), fleksibilni e-papir

Uporaba v: senzorji pospeška, piezoelektrični senzorji in dajalniki,

Narava: zemlja kot elektrostaticni sferični kondenzator, elektrika strele, človek v električnem polju, biološka celica in elektrika (generator, spremenljiv upor, elektroporacija)

Elektrostatika pri nas (industrija in raziskave):

merjenje električnih polj (ZVD)
načrtovanje večžičnih kablov in razdvojniov (ETI)
prebojna trdnost v zraku (ELES, Vidmar), dielektrikih (ISKRA), polprevodnikih
ESD: elektrostaticna razelektritev v elektroniki (preboji) in industriji (nevarnosti samovžiga)
Načrtovanje in merjenje ozemljitev
...

dokument je še v delu

Osnove elektrotehnike 1, VSŠ

Osnovna izpitna vprašanja za ustni izpit (Križaj)

1. Enosmerna vezja

1. Kirchhoffova zakona: enačbi, katere lastnosti polja popisujeta, razlaga, uporaba.
2. Vezave Ohmskih uporov, nadomestna upornost: izpeljava, primeri.
3. Viri električnega toka: definicija, idealni, realni, UI karakteristika realnega vira, delovna točka.
4. Moč: izračun iz napetosti, toka, upornosti, izračun dela iz moči, moč na bremenu priključenem na realni vir, izkoristek, maksimalna moč na bremenu.
5. Merilni instrumenti: notranja upornost, razširitev merilnega območja.
6. Analiza vezij: graf, drevo, veja, spojišče,
7. Neposredna uporaba Kirchhoffovih zakonov pri analizi električnih vezij: definicija, graf, drevo, veja, spojišče, neodvisne enačbe, matrični zapis, primer.
8. Metoda spojiščnih potencialov pri analizi električnih vezij.
9. Metoda zančnih tokov pri analizi električnih vezij.
10. Metoda superpozicije.
11. Theveninov teorem ali teorem nadomestnega napetostnega vira: definicija, razlaga, primer.
12. Nortonov teorem ali teorem nadomestnega tokovnega vira: definicija, razlaga, primer.
13. Tellegenov teorem.

2. Elektrostatično polje

1. Zakon o ohranitvi naboja.
2. Tok kot časovna sprememba količine naboja (kontinuitetna enačba)
3. Povezava med tokom in nabojem (izračun toka pri znani časovni spremembi množine naboja in izračun množine naboja pri znani časovni spremembi toka)
4. Sila na točkaste naboje – Coulombov zakon: velikost sile, smer, dielektričnost vakuumu, odbojna in privlačna sila.
5. Električna poljska jakost: definicija, izpopolnjena definicija z limito, superpozicija.
6. Porazdelitve nabojev: linijska ali vzdolžna, površinska, volumska. povezava med nabojem in gostoto naboja.
7. Električna poljska jakost porazdeljenih nabojev.: izraz in princip uporabe.
8. Enačbe za polje v okolici točkastega naboja, naelektrene premice (preme elektrine), naelektrene daljice, v središču naelektrenega obroča, v osi naelektrenega obroča, naelektrene ravnine.
9. Gaussov zakon: razlaga in primeri. Izvornost električnega polja.
10. Delo in energija elektrostatičnega polja: definicija za izračun dela iz sile, pomen skalarnega produkta pri izračunu, delo električne sile in delo zunanje sile, delo po zaključeni poti, delo pri prenosu naboja do neskončnosti, povezava med delom in potencialno energijo.

11. Potencial: definicija in primer izračuna, potencial sistema točkastih nabojev, potencial v okolici porazdeljenih nabojev, potencial kot skalarno polje, ekvipotencialne ravnine.
12. Električna napetost: definicija, povezava med napetostjo in potencialom. Potencialnost polja (Kirchoffov zakon).
13. Osnovni primeri izračuna potenciala, napetosti, polja in kapacitivnosti za: ploščni, valjni (koaksialni) in sferični kondenzator.
14. Prevodnik v električnem polju: polje znotraj prevodnika, potencial na površini prevodnika, elektrostatična indukcija, polje v votlini prevodnika, Faradayeva kletka, okovinjeno ekvipotencialno, električno polje na površini prevodnika.
15. Zveza med poljem in potencialom: povezava v »obe smeri«. Primer izračuna polja iz znane porazdelitve potenciala.
16. Gibanje nabojev v električnem polju: sila, pospešek, hitrost, energija, smer leta, kinetična in potencialna energija).
17. Električni dipol: dipolni moment, dipol v homogenem in nehomogenem polju, potencial in polje v okolici dipola, navor na električni dipol.
18. Okovinjeno ekvipotencialnih ravnin: primer dveh premih nabojev, dva naelektrena valja z in brez upoštevanja ekscentričnosti.
19. Metoda zrcaljenja: zrcaljenje različnih naelektrenih teles, izračun polja na zemlji, sistem daljnovodnih vrvi, zrcaljenje točkastega naboja na ozemljeni kovinski krogli.
20. Kapacitivnost: definicija, izrazi za kapacitivnost osnovnih struktur. Zaporedna in vzporedna vezava kondenzatorjev.
21. Kondenzatorska vezja: princip računanja.
22. Dielektrik v električnem polju: razlaga spremembe kapacitivnosti pri vložitvi dielektričnega lističa pri konstantni napetosti med ploščama ali pri konstantnem naboju na ploščama kondenzatorja.
23. Vektor polarizacije, površinska gostota polariziranega naboja, povezava med E in P , električna susceptibilnost.
24. Gostota električnega pretoka: definicija, povezava med D , E in P , povezava med D in E .
25. Modificiran Gaussov zakon.
26. Mejni pogoji: z upoštevanjem in brez upoštevanja prostega površinskega naboja, »lomni zakon«.
27. Energija: energija posameznega naboja pri preletu naboja v polju, energija sistema nabojev, povezava med delom in energijo sistema, energija v polju kondenzatorja, gostota energije in povezava med silo in energijo.
28. Vir napetosti: elektrostatično polje in generatorska sila.

3. Časovno konstantno tokovno polje

1. Gostota toka.
2. Definicija časovno konstantnega polja.
3. 1. in 2. Kirchoffov zakon iz integralnih enačb
4. Konduktivni in konvektivni tok.
5. Ohmov zakon v diferencialni obliki
6. Specifična prevodnost in upornost, upornost pri homogeni gostoti v prevodniku, temperaturna odvisnost specifične upornosti.

7. Joulov zakon.
8. Mejni pogoji v tokovnem polju
9. Dualnost tokovnega in elektrostatičnega polja: primer uporabe.

VSEBINA

1. UVOD
2. MOČ
3. ANALIZA VEZIJ
4. STAVKI (TEOREMI)
5. NABOJ IN TOK
6. SILA NA TOČKASTE NABOJA (COULOMBOV ZAKON)
7. ELEKTRIČNA POLJSKA JAKOST
8. PORAZDELITEV NABOJA
9. KOORDINATNI SISTEMI
10. ELEKTRIČNA POLJSKA JAKOST PORAZDELJENIH NABOJEV
11. GAUSSOV ZAKON
12. DELO IN ENERGIJA ELEKTROSTATIČNEGA POLJA
13. POTENCIAL IN NAPETOST
14. PREVODNIK V POLJU
15. ZVEZA MED E IN V
16. GIBANJE NABOJEV V ELEKTRIČNEM POLJU
17. ELEKTRIČNI DIPOL
18. OKOVINJENJE EKVIPOTENCIALNIH RAVNIN
19. METODA ZRCALJENJA
20. KAPACITIVNOST
21. DIELEKTRIK V ELEKTRIČNEM POLJU
22. KONDENZATOR
23. ENERGIJA
24. VIR NAPETOSTI
25. ČASOVNO KONSTANTNO TOKOVNO POLJE

1. Uvod

Predmet Osnove elektrotehnike razdelimo v dva: Oe1 in OE2. V OE1 obravnavamo osnove električnega polja v stacionarnem stanju ter enosmerna električna vezja....

Stacionarno stanje. Kaj je to stacionarno stanje? To je stanje, ko je sistem v ravnovesju, ko ni več časovnih sprememb sistema. Če bi na primer pogledali napetost na kondenzatorju, bi ta morala biti ves čas nespremenjena - konstantna – stacionarna. V nasprotnem primeru govorimo pogosto o prehodnem pojavu, stanju, ko se na primer napetost na kondenzatorju časovno spreminja.

Zakaj najprej obravnavamo razmere v stacionarnem stanju? V resnici je vedno potreben nek prehodni pojav, da pridemo do takega stanja. Na primer, če želimo na kondenzatorju imeti določeno napetost, ga moramo predhodno naelektriti, to pa je že prehodni pojav. Razlog je v tem, da je obravnava dogajanja enostavnejša, če upoštevamo le stacionarno stanje.

In zakaj obravnavamo najprej le enosmerna in šele kasneje tudi izmenična vezja? Tudi tu je dogovor enak: analiza dogajanja v enosmernih vezjih je bolj preprosta kot v izmeničnih.

Naše spoznavanje elektrike temelji torej na postopnosti. Od bolj preprostih konceptov do bolj zahtevnih. V tem smislu bomo celo začeli z obravnavo električnih vezij namesto, da bi začeli z obravnavo električnega polja. Razlog je zopet v tem, da je za obravnavo električnega polja potrebno razumevanje integralnega in infinitezimalnega računa (integralov in odvodov), za kar potrebujemo nekoliko matematičnega predznanja.

Osnovni koncepti – naboj, napetost, tok, upornost. V tem smislu bomo kar takoj začeli govoriti o konceptih kot so naboj, napetost, tok in upornost. To so koncepti, ki so vam sicer že znani, ki pa so v smislu eksaktne definicije manj preprosti, kot bi morda pričakovali. Na primer napetost, ki je definirana kot delo, ki ga opravijo električne sile pri premiku naboja 1 C od enega do drugega mesta. V primeru kondenzatorja (ali baterije) sta ti dve mesti ravno zunanji priključni sponki.

Atomi. Zavedati se torej moramo, da so električni pojavi vezani na lastnost naše narave, ki je sestavljena iz atomov, ti pa iz jedra iz protonov, neutronov in oblaka elektronov. Elektroni in protoni imajo lastnost, ki ji rečemo naboj. Prvi imajo pozitivni naboj, drugi pa negativnega. To je seveda naš (človeški) koncept, ki ga je prvi vpeljal Benjamin Franklin, ki je ene naboje poimenoval pozitivne, druge pa negativne. Čisto lahko bi se lahko Franklin odločil tudi za obratno pojmovanje.

Prevodniki. Dokler ima atom enako število pozitivnih in negativnih nabojev je nevtralen. Atomi so običajno vezani med seboj in tvorijo zelo različne tvorbe. V kovinah imamo združbo atomov, ki običajno tvorijo močne vezi, obenem pa so te vezi take, da so določeni elektroni zelo šibko vezani na jedro in se z lahkoto gibljejo po materialu. Rečemo, da so dobri prevodniki. Pri obravnavi vezij se dobro zavedati, da so sicer nosilci električnega toka naboji, tako pozitivni kot negativni, da pa v kovinah (običajno baker), iz katerih so običajno zgrajene povezave med elementi vezja prevajajo le elektroni.

Enota za naboj. Omenili smo že 1 C (coulomb). Najmanjša vrednost naboja je naboj elektrona, ki je približno $1,6 \cdot 10^{-19}$ C in ker je ta naboj negativen, moramo upoštevati še negativen predznak. 1 C je torej mnogo elektronov. Koliko? $1 / 1,6 \cdot 10^{-19} = 6,25 \cdot 10^{18}$.

Električni tok. Nosilci električnega toka so torej električni naboji, rečemo jim lahko tudi elektrine. Če ti mirujejo električnega toka ni. Tako kot ni vodnega toka, če je vodni jez zajezen. Če pa jez odpremo, da lahko voda steče po strugi ali po cevi na lopatice turbine, pa seveda govorimo o vodnem toku. Tako je tudi pri elektriki. Če nabojem omogočimo, da se »pretakajo« iz enega mesta na drugo, lahko govorimo o električnem toku. Če je sprememba količine naboja v enoti časa večja, to pomeni večji tok. Matematično lahko spremembo v času zapišemo z operacijo (operatorjem) odvodajanja $\frac{d}{dt}$. Električni tok torej lahko definiramo kot odvod naboja po času, kar zapišemo kot $i = \frac{dQ}{dt}$.

Primer: Naboj na pozitivni sponki kondenzatorja je konstanten. Kolikšen je električni tok? Matematično lahko zapišemo, da je časovno konstantna količina naboja na pozitivni sponki enaka $Q(t) = Q_0$. Iz osnov matematike vemo, da je odvod konstante enak nič, torej bo ta tok seveda enak nič. Kaj pa če recimo na 12 V akumulator priključimo žarnico in se naboj na pozitivni sponki akumulatorja manjša linearno, v 10 sekundah za 12 C? Matematično to zapišemo kot $Q(t) = Q_0 - \frac{12C}{10s}t$. V tem primeru skozi breme (žarnico) teče električni tok, ki je $i = \frac{dQ}{dt} = -\frac{12C}{10s} = -12C/s$. Ker vemo, da je enota za tok A (ampere), je rezultat torej -12 A. Obenem vidimo, da velja $1C = 1A \cdot s$. Kaj pomeni negativni predznak toka? To, da s pozitivne sponke odteka pozitivni naboj s hitrostjo oziroma bolje s tokom 12 A. Kakšna pa je v resnici slika gibanja naboja? Ker smo že ugotovili, da po prevodniku prevajajo elektroni, pomeni, da gre v resnici za prenos elektronov preko žarnice v smeri pozitivne sponke, kjer smo imeli prej višek pozitivnih nabojev oziroma pomanjkanje negativnih.

Zakaj bi elektroni sploh potovali od ene sponke proti drugi? Odgovor na to vprašanje ni ravno preprosto. Prav gotovo bo v prvem hipu prišlo do prehodnega pojava, saj smo ob določenem trenutku priklopili na akumulator breme (žarnico). Pred tem je bil tok skozi žarnico enak nič, potem pa ne več. Nekako smo morali priti do toka 12 A. V resnici je prišlo do zelo hitrega prehodnega pojava. Ob priključitvi avtomobilskega akumulatorja na drugega je to običajno zelo dobro vidno – kot iskra ali celo iskrenje. Da bi bolj podrobno razumeli ta pojav, moramo poznati lastnosti prostora v katerem delujejo električne sile, to pa je že poglavje, za katerega smo rekli, da si ga bomo prihranili za kasneje. In če smo odkriti, na marsikatero vprašanje tudi s poznavanjem osnovnih konceptov elektrike ne moremo do potankosti pojasniti.

Električna napetost. Na eni od sponk našega akumulatorja imamo pozitivni naboj, na drugi pa negativni. Rečemo lahko, da je naš akumulator nabit ali bolje naelektren, med sponkama akumulatorja pa je določena napetost. Napetost nam torej na nek način govori o naelektrenosti v prostoru. Oziroma, o energiji, ki smo jo vložili (ali se je vložila) v elektrenje. Ta napetost še nič ne pove o tem, kolikšno zalogo nabojev imamo na naših dveh sponkah, pač pa le o tem, koliko energije na enoto naboja smo vložili v to, da smo ločili naboje (če pri tem nismo imeli drugih izgub (npr. toplotnih)). Zveza med nabojem, ki ga ločujemo in napetostjo je pogosto linearna, kar lahko zapišemo kot $Q = C \cdot U$. Konstanta C ni nič drugega, kot prav gotovo že

slišan pojem kapacitivnost. Toda, kot smo že dejali, v prvem delu predmeta se bomo ukvarjali z elementi enosmernih električnih vezij. Enota za napetost je V(olt).

Upor, upornost, prevodnost, Ohmov zakon. Bremana, ki jih bomo upoštevali pri analizi enosmernih vezij bomo označili kot upore, za katere velja preprosta zveza med tokom in napetostjo

$$U = R \cdot I$$

oziroma z besedami: napetost na uporju je sorazmerna toku skozi upor, faktor sorazmernosti imenujemo upornost. Enota za upornost je 1Ω (Ohm). Ta »zakon« pogosto imenujemo tudi Ohmov zakon, kar pa moramo upoštevati z zadržkom. Zvezo med napetostjo in tokom na določenem elementu vedno lahko poiščemo, ni pa vedno linearna. V elektrotehniki pogosto uporabljamo elemente kot so diode in tranzistorji. Pri teh ravno izkoriščamo njihove nelinearne lastnosti med tokom in napetostjo za usmerjanje, ojačanje, ipd. Ohmov zakon v smislu linearne zveze med tokom in napetostjo je omejen na tiste elemente, kjer pač velja linearnost– to pa so linearni upori, ki jih bomo uporabljali pri analizi enosmernih vezij.¹

Analogno izrazu upornost lahko uporabimo tudi izraz prevodnost. Velja $G = 1/R$. Enota za prevodnost je S(iemens). »Ohmov« zakon bi tako lahko pisali tudi

$$U = 1/G \cdot I \text{ ali pogosto kot } I = G \cdot U.$$

SLIKA: Simbol za upor, linearna zveza med tokom in napetostjo

Idealni tokovni in napetostni vir. S prerazporeditvijo nabojev realiziramo električne vire. Ločimo dva vira tipa virov: napetostne vire in tokovne vire. Idealni napetostni vir je tak, ki zagotavlja na svojih sponkah konstantno napetost neodvisno od obremenitve. To je napetost odprtih sponk, včasih ji rečemo tudi napetost prostega teka.

SLIKA: Simbol za idealni napetostni vir, napetost odprtih sponk in karakteristika vira.

Idealni tokovni vir pa je tak, ki na svojih zunanjih sponkah zagotavlja tok, ki je neodvisen od priključitve bremena. V primeru, da sponke takega vira kar kratko sklenemo, bo tekel tok kratkega stika, kar predstavlja tudi nazivni tok tega vira. Verjetno ni potrebno posebno poudariti, da taka priključitev običajno ni ravno zaželena.

¹ Omejenost Ohmovega zakona ne sme zmanjšati njegovega zgodovinskega in praktičnega pomena. Kar se tiče zgodovine elektrike se je potrebno zavedati, da so bili sprva pojmi kot so naboj, tok in napetost še popolnoma nejasni in so različni raziskovalci preizkušali različne pojme. Ohm je na tem področju razjasnil razlike med napetostjo in tokom. Poleg tega seveda zvezo med tokom in napetostjo v elektrotehniki zelo pogosto uporabljamo in je za enostavne upore pogosto upravičena linearna zveza.

SLIKA: Simbol za idealni tokovni vir, tok kratkega stika in karakteristika vira.

Označevanje smeri tokov in napetosti. Tako napetost kot tok imata smer. Na viru označimo smer napetosti od sponke plus proti sponki minus, na bremenu pa lahko smer toka ali napetosti določimo poljubno. Ne pa tudi obeh. Smer toka na bremenu določa tudi smer napetosti in obratno.

SLIKA: Označevanje smeri tokov in napetosti na virih in bremenu.

1. Kirchhoffov zakon. Oglejmo si najprej primer na vodnem toku iz vodnega zbiralnika. Ta tok preusmerimo v dve strugi, en del toka pa še pronica v tla. Če seštejemo vse odtekajoče toke morajo biti ti seveda enaki pritekajočemu. Enako velja za električni tok. Vsota odtekajočih tokov v neko spojišče (razvejišče) mora biti enaka vsoti vseh pritekajočih tokov. Glede na to, da označujemo smer toka s pozitivnim ali negativnim predznakom, v smislu 1. Kirchhoffovega zakona to pogosto zapišemo kot

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0$$

oziroma z besedami: vsota vseh (N) tokov v spojišče je enaka nič. Dogovoriti se moramo le še kdaj je tok pozitiven. Kot pozitiven tok lahko označimo tistega, ki priteka v ali odteka iz spojišča. Važno je le, da smo pri obravnavi konsistentni.

Primer: V spojišče so povezani štirje vodniki. Po prvem priteka tok 4 A, po drugem odteka tok 2 A in v tretjem priteka tok 1 A. Določimo tok v četrtem vodniku.

SLIKA: Vsota tokov v spojišče mora biti enaka nič: 1 KZ.

2. Kirchhoffov zakon. Vzemimo naš akumulator in ga priključimo na dve bremeni, ki sta zaporedno vezani. Kako se razporedijo napetosti med bremenoma? Najprej lahko ugotovimo, da se v skladu z »Ohmovim zakonom« porazdeli padec napetosti na dva padca napetosti in to

v skladu (sorazmerju) z njunimi upornostmi: $U_1 = R_1 I$ in $U_2 = R_2 I$, vsota teh dveh napetosti pa je priključena napetost: $U = U_1 + U_2$. Lahko pa pišemo tudi kot $U - U_1 - U_2 = 0$. Če si to ogledamo na sliki, ugotovimo, da smo zapisali, da je vsota vseh napetosti v zanki enaka nič, pri čemer je seveda potrebno upoštevati smeri padcev napetosti. To pa velja tudi splošno, neodvisno od števila virov in bremen v zanki. Temu pravilu pravimo 2. Kirchoffov zakon in ga v splošnem (za M elementov vezja v zanki) zapišemo kot

$$\sum_{i=1}^M U_i = 0.$$

SLIKA: Idealni napetostni generator in vzporedno vezani dve bremen. Po 1. Kirchoffovem zakonu mora veljati, da je vsota vseh padcev napetosti v zanki enaka nič.

Analiza vezij. Upoštevaje obeh Kirchoffovih zakonov in zveze med napetostjo in tokom (Ohmovim zakonom) lahko analiziramo poljubno enosmerno vezje. Potrebno je pač zapisati zadostno število enačb za neznane toke v vejah vezja in rešiti linearni sistem enačb. V kratkem si bomo podrobneje ogledali metode za reševanje (analizo) vezij, ki nam omogočajo sistematičen pristop k reševanju.

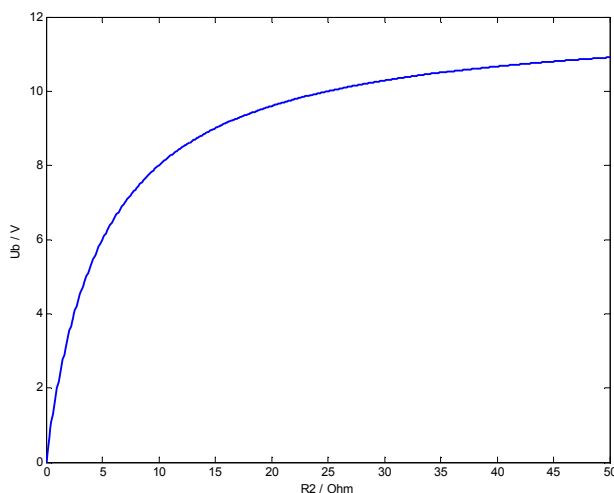
Primer: Določimo napetost na drugem uporju prejšnjega primera.

Rešitev: Upoštevamo že zapisane enačbe $U - U_1 - U_2 = 0$, $U_1 = R_1 I$ in $U_2 = R_2 I$ in dobimo

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} \text{ ter } U_2 = IR_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Dobili smo rešitev, ki je v elektrotehniki zelo pogosto uporabljena. Napetost moramo pogosto zmanjšati oziroma »deliti«. Takemu preprostu načinu rečemo **delilnik napetosti**, enačbo pa si velja

vtisniti v spomin. Ponovimo končni rezultat: $U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$



SLIKA: Sprememba napetosti na bremenu v odvisnosti od upora R_2 .

Podobno je pogosta uporaba **tokovnega delilnika**, ko se ena veja razcepi v dve. Vzemimo torej ponovno naš akumulator in ga povežimo z dvema uporoma, ki pa sta vezana vzporedno. Sedaj nas zanima tok skozi upor R_2 : Velja: $I = I_1 + I_2$, kjer sta $I_1 = U / R_1$ in $I_2 = U / R_2$.

Dobimo $I = U / R_1 + U / R_2 = U (1 / R_1 + 1 / R_2) = U \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$. Napetost je torej $U = I \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, tok

skozi upor R_2 pa $I_2 = U / R_2 = I \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$. Končni rezultat je podoben (vendar

ne enak) kot pri napetostnem delilniku. Zaradi pogoste uporabe si ga tudi velja zapomniti.

Zato ga ponovimo: $I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$.

Zaporedna vezava uporov. Pogosto upore nizamo zaporedno. Če so priključeni na vir

napetosti, se napetost porazdeli na posamezne upore: $U = U_1 + U_2 + \dots + U_N = \sum_{i=1}^N U_i$. Ker pa

skozi vse teče skupen tok, velja $U = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_N = I(R_1 + R_2 + \dots + R_N) = I \sum_{i=1}^N R_i = IR_{nad}$

Nadomestna upornost zaporedno vezanih uporov je seštevek posameznih upornosti:

$$R_{nad} = \sum_{i=1}^N R_i.$$

SLIKA: Zaporedna vezava uporov.

Primer: Določimo nadomestno upornost zaporedne vezave uporov 30Ω , 100Ω in $1 \text{ k}\Omega$.

Rešitev: $R_{nad} = 1130 \Omega$.

Vzporedna vezava uporov. Upore lahko vežemo tudi vzporedno. To je potrebno tedaj, ko želimo tok razdeliti v več vej. Skupni tok je torej $I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$. Če so vzporedno vezani upori priključeni na vir, je na vseh uporih skupna napetost. Dobimo

$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_N} = U \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} = \frac{U}{R_{nad}}$. Vzporedno vezane upore lahko torej nadomestimo z

nadomestno upornostjo, za katero velja $\frac{1}{R_{nad}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$. Če to izrazimo s prevodnostmi dobimo

$G_{nad} = \sum_{i=1}^N G_i$. Pri vzporedni vezavi uporov tvorimo torej nadomestno upornost s seštevanjem

njihovih prevodnosti, pri zaporednih pa upornosti.

SLIKA: Vzporedno vezane upornosti.

Primer: Določimo nadomestno upornost vzporedne vezave uporov $30\ \Omega$, $100\ \Omega$ in $1\ \text{k}\Omega$.

Rešitev: $G_{\text{nad}} = 1/30\ \text{S} + 1/100\ \text{S} + 1/1000\ \text{S} = 0,044\ \text{S}$, kar ustreza $R_{\text{nad}} = 22,556\ \Omega$.

Vzporedna in zaporedna vezava virov. Enako kot upore, lahko zaporedno vežemo tudi napetostne vire in s tem dosežemo višjo skupno napetost na zunanjih sponkah. To je tudi običajno pri mnogo elektronskih aparatih, kjer je na primer za delovanje naprave pri $6\ \text{V}$ potrebno vezati zaporedno štiri $1,5\ \text{V}$ baterije. Podobno lahko z vzporedno vezavo tokovnih virov dosežemo vir z večjim nazivnim tokom.

Realni napetostni vir. Govorili smo že o idealnem napetostnem viru, za katerega smo rekli, da ima napetost na zunanjih sponkah konstantno in neodvisno od priključenega bremena. Takih virov seveda ni, če na slab napetostni vir priključimo preveliko breme (v resnici je to breme z majhno notranjo upornostjo), se na zunanjih sponkah vira napetost »sesede«. Vsak vir ima namreč določeno notranjo upornost in ob priključitvi vira na breme steče tok, ki povzroči padec napetosti na bremenu, pa tudi na notranji upornosti vira. Kar tudi pomeni, da na zunanjih sponkah vira nimamo več napetosti odprtih sponk pač pa neko manjšo napetost, ki je zmanjšana za padec napetosti na notranji upornosti vira. Poglejmo si razmere matematično in grafično:

SLIKA: realni napetostni vir.

Realni napetostni vir ponazorimo z zaporedno vezavo idealnega napetostnega vira in upora. Če na priključnih sponkah ni priključeno breme, je seveda tok enak nič in padca napetosti na upornosti vira ni. Napetost na priključnih sponkah je enaka napetosti odprtih sponk:

$U = U_g = U_o$. Če pa priključimo breme, se napetost na priključnih sponkah zmanjša za padec napetosti na notranji upornosti generatorja: $U = U_g - IR_g$. To enačbo lahko prikažemo tudi grafično in ji rečemo *karakteristika vira*. Na X osi (abscisi) označimo napetost, na Y osi (ordinati) pa tok. Enačba predstavlja enačbo premice, ki jo najlažje določimo v točkah, kjer premica seka X in Y os. Ko je tok enak nič, je $U = U_o = U_g$, to je stanje **odprtih sponk**. Ko pa je napetost enaka nič, je $I = U_g / R_g$. To pa je stanje **kratkega stika**. Skozi ti dve točki mora potekati premica, ki ji rečemo *karakteristika realnega vira*.

Samo karakteristika vira še ne zadostuje za določitev napetosti na bremenu. Potrebujemo še karakteristiko bremena. Ta je preprosta, saj ko na priključne sponke priključimo breme, je na

bremenu napetost U in velja: $U = R_b I$. Če narišemo še to enačbo v diagram, tudi ta predstavlja enačbo premice. Ena točka je v koordinatnem izhodišču, drugo pa določimo tako, da za določeno izbrano vrednost toka (napetosti) izračunamo vrednost napetosti (toka) in vrišemo še drugo točko ter potegnemo premico. Naklon premice predstavlja upornost. Velik naklon predstavlja veliko upornost, majhen pa majhno.

Premici imata presečišče, ki ga imenujemo *delovna točka*. To je namreč točka, ki ponazarja »delovno« stanje vezja. Odčitamo lahko tok in napetost delovne točke. To je tok, ki teče skozi breme, napetost pa je napetost na bremenu. Ta način določanja delovne točke imenujemo *grafični način*.

Določimo delovno točko še matematično. Gre preprosto za to, da združimo enačbi bremena in

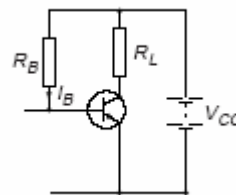
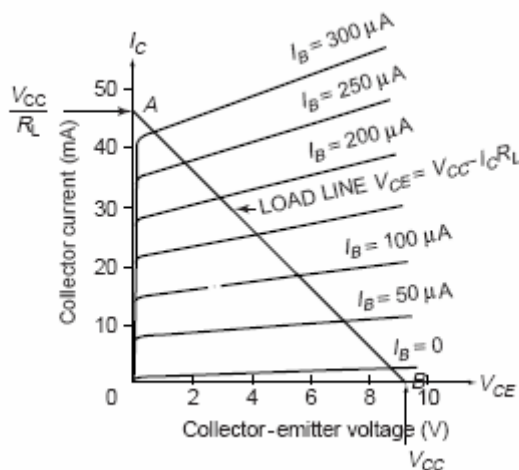
vira, dobimo $R_b I = U_g - I R_g$. Tok v vezju bo torej $I = \frac{U_g}{R_g + R_b}$, napetost na bremenu pa

$U = \frac{U_g}{R_g + R_b} R_b$. To sta tudi tok in napetost delovni točki, ki jih odčitamo tudi grafično.

Primer: Na 9 V baterijo z notranjo upornostjo $1\ \Omega$ priključimo breme z upornostjo $5\ \Omega$. Določite napetost in tok na bremenu grafično in analitično.

Rešitev: $I = \frac{U_g}{R_g + R_b} = \frac{9\text{ V}}{1\ \Omega + 5\ \Omega} = 1,5\text{ A}$, $U = 1,5\text{ A} \cdot 5\ \Omega = 7,5\text{ V}$.

Nelinearno breme. Grafični način je posebno primeren tedaj, ko je breme nelinearno. Ko je napetost na sponkah bremena neka nelinearna funkcija toka skozi breme. Na primer $U = kI^2$. Tak primer je na primer dioda, element, ki ima nizko upornost pri pozitivnih in zelo visoko pri negativnih napetostih (ali obratno, odvisno od priključitve). Pri diodi je v prevodni smeri tok eksponentno odvisen od napetosti: $I = I_0 e^{kU}$, v zaporni smeri pa je tok majhen, do določene napetosti, kjer pride do preboja. Ob preboju tok skozi diodo močno naraste in lahko pride do trajne poškodbe ali uničenja elementa. Delovno točko določimo grafično, tako, da določimo točko preseka nelinearne karakteristike bremena in linearne karakteristike realnega vira.



SLIKA: Primer določanja delovne točke pri tranzistorski vezavi. Nelinearne so karakteristike tranzistorja, ki so prikazane za različne vrednosti baznega toka. (samo informativno)

Realni tokovni vir. Je sestavljen iz idealnega tokovnega vira in vzporedno vezane upornosti. Na zunanjih sponkah je napetost enaka $U = R_g I$, če ni priključenega bremena. Če je breme priključeno, se tok bremena zmanjša za tok skozi upornost vira: $I = I_g - U / R_g$. Ta enačba predstavlja karakteristiko realnega tokovnega vira, ki jo prav tako lahko grafično prikažemo. Pri kratkem stiku je napetost na bremenu enaka nič, tok pa je kar tok idealnega vira in ga imenujemo tudi tok kratkega stika: $I(U = 0) = I_k = I_g$, pri odprtih sponkah pa je tok enak nič, napetost pa $U = I_g R_g$. Če karakteristiko narišemo kot U-I diagram, dobimo zopet premico. V presečišču s karakteristiko bremena pa delovno točko.

SLIKA: Realni tokovni vir.

Ugotovimo lahko, da se karakteristika realnega tokovnega vira lahko prilega karakteristiki realnega napetostnega vira. V tem smislu sta to dva *ekvivalentna vira*. Če primerjamo karakteristiki ugotovimo, da bo analogija veljala tedaj, ko bo $U_g = I_g R_g$. Kdaj torej govorimo o napetostnem in kdaj o tokovnem viru? Ko imamo vir z zelo veliko notranjo upornostjo nam le ta zagotavlja konstanten tok (dokler je upornost bremena dosti manjša od notranje upornosti vira, če pa je notranja upornost vira zelo majhna, nam to na zunanjih sponkah zagotavlja konstantno napetost).

Fizikalne količine in merske enote.

V (elektro)tehniki običajno govorimo o veličinah, v fiziki pa o količinah. Veličina je recimo napetost, tok, čas, temperatura itd. Za vsako veličino uporabljamo določen simbol, običajno eno črko abecede, pogosto tudi grške. Simbol za napetost je U , za tok I , temperaturo T itd. Opazili ste že, da pišemo simbole za veličine poševno. To pa zato, da jih ločimo od merskih enot, kratko kar enot. Kot primer zapišimo $U = 5\text{ V}$. Med številsko vrednostjo in enoto je presledek. Mersko enoto predstavimo z imenom in simbolom. Ime enote za napetost je volt, simbol pa V.

V svetu se je uveljavil sistem merskih enot, ki ga s kratico imenujemo SI. Obsega sedem osnovnih enot in vrsto izpeljanih. Osnovne enote so kilogram (kg), meter (m), sekunda (s), amper (A), kelvin (K), kandela (cd), mol (mol), radian (rad) in steradian (sr). Izpeljane enote pa so na primer m/s za hitrost itd.

Druge merske enote. Pogosto v literaturi zasledimo uporabo drugih merskih enot, kot smo jih navajeni. Pogosto so posledica uporabe drugega merskega sistema (npr. CGS –centimeter-

gram-sekunda), kjer se na primer namesto enote tesla za gostoto magnetnega polja uporablja enota gauss. V konkretnem primeru je pretvorba direktna $1 \text{ T} = 10^4 \text{ gaussa}$.

Označevanje: V elektrotehniki pogosto uporabljamo predpone k merskim enotam. To je potrebno zato, ker je razred velikosti veličin zelo različen. Kapacitivnosti so pogosto reda mikro, nano ali piko faradov (μF , nF , pF), uporabljajo se napetosti se od mikro voltov do mega voltov itd. Zveze nam prikazuje preglednica:

vrednost ime predpona

10^{-12}	piko	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	mikro	μ
10^{-3}	mili	m
10^3	kilo	k
10^6	mega	M
10^9	giga	G
10^{12}	tera	T

Povzetek, vprašanja:

- 1) Razložite Ohmov zakon. Kakšne so omejitve tega zakona?
- 2) Razložite idealni in realni napetostni vir matematično in grafično (I-U karakteristika).
- 3) Razložite idealni in realni tokovni vir matematično in grafično (I-U karakteristika).
- 4) Kaj je delovna točka, kako jo določimo?
- 5) 1. in 2. Kirchhoffov zakon.
- 6) Tokovni in napetostni delilnik.
- 7) Zaporedna in vzporedna vezava uporov.
- 8)

2. Moč

Moč (simbol P) je definirana kot produkt napetosti in toka. Enota je W(att). Matematično je $P = U \cdot I$.

V primeru, da se moč troši na linearnem upor (na katerem velja $U = RI$), dobimo še druge koristne zveze:

$$P = RI^2 \text{ ali } P = U^2 / R.$$

Te zveze pogosto imenujemo kar Joulov zakon, saj je James P. Joule leta 1841 prvi prišel do ugotovitve, da je sproščena toplota v prevodniku proporcionalna kvadratu toka, ki teče skozi vodnik.

Moč je merilo za intenzivnost dela, ki ga opravljajo električne sile. Obstaja torej neposredna zveza med močjo in delom,

$$A = \int P \cdot dt.$$

Če je moč časovno konstantna dobimo $A = P \int dt = P \cdot T$, kjer je T čas opravljanja dela.

Primer: Ko priključimo breme (avtomobilska žarnica) na enosmerni vir napetosti 12 V teče skozenj tok 2 A. Določimo moč na bremenu, upornost bremena in energijo, ki se sprosti na bremenu v času 10 minut.

Rešitev: Moč je $P = UI = 12 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 24 \text{ W}$. Upornost je

$$R = P / I^2 = 24 \text{ W} / (2 \text{ A})^2 = 6 \Omega. \text{ Energija je}$$

$$A = W = PT = 24 \text{ W} \cdot 10 \cdot 60 \text{ s} = 14400 \text{ J} = 14,4 \text{ kJ}.$$

Ali gre vsa ta energija v toploto (segrevanje)? Vsekakor en del, drugi del pa gre v svetlobno energijo. (Žarnice z žarilno nitko nimajo ravno velikega izkoristka, običajno med 10 in 20 % celotne moči).

Moč na bremenu. Oglejmo si, kako se moč spreminja na spremenljivem bremenskem upor,

ki ga priključimo na realni napetostni vir. Veljati mora $P_b = R_b I^2 = R_b \left(\frac{U_g}{R_b + R_g} \right)^2$. To ni

ravno preprosta funkcija, saj R_b nastopa 2x, tako v števcu kot v imenovalcu. Ugotovimo lahko dve skrajnosti: ko je bremenski upor enak nič, bo moč enaka nič, in ko bo bremenski upor

zelo velik bo veljalo $P \approx \frac{U_g^2}{R_b}$. Ta moč se bo z večanjem očitno zmanjševala proti nič. Vmes

bo imela funkcija (moč) nek maksimum.

Primer: Določimo moč na bremenu 10Ω , ki ga priključimo na realni napetostni vir 12 V z notranjo upornostjo 2Ω .

$$\text{Rešitev: } P = 10 \Omega \left(\frac{12 \text{ V}}{12 \Omega} \right)^2 = 10 \text{ W}.$$

SLIKA: Iščemo moč na bremenu R_b , ki je priključeno na realni napetostni vir.

Vprašanje: Ali lahko to moč dosežemo tudi pri kakšni drugi upornosti?

Odgovor je pritrdilen: Če enačbo zapišemo tako, da iščemo neznano upornost bremena pri znani moči, dobimo:

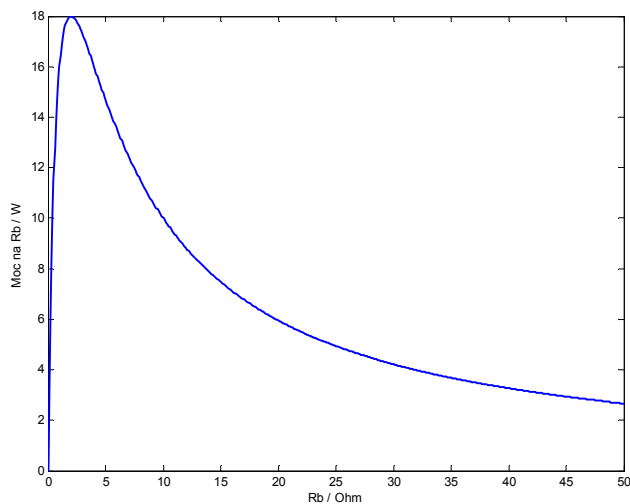
$10(2 + R_b)^2 = 12^2 R_b$, kar je kvadratna enačba, ki je s preureditvijo enaka

$$10R_b^2 - 104R_b + 40 = 0$$

(Pri zapisu v matematično obliko smo zaradi preglednosti opustili pisanje enot. Ko določimo rešitev moramo pravilno enoto dopisati!)

Rešitvi kvadratne enačbe sta dve: že znanih 10Ω , pa tudi $0,4 \Omega$.

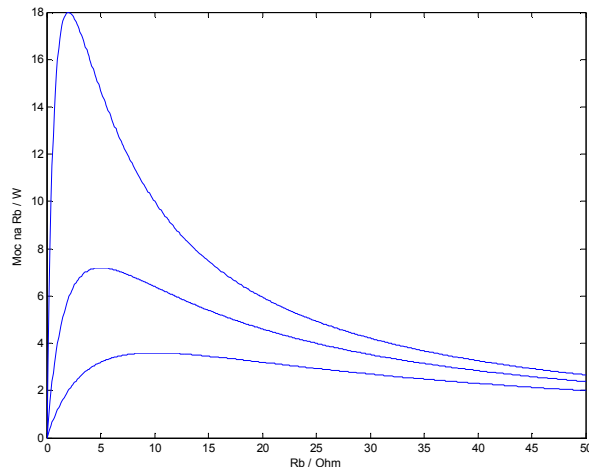
Poglejmo si rešitev še grafično



Ugotovimo, da se grafična rešitev sklada z matematično. Grafični prikaz je izveden s programom Matlab, ki je zelo primeren program za izračune v elektrotehniki.

Preprosti ukazi s programom Matlab za izračun in prikaz moči na bremenu:

```
% Komentar: Matlab program za izracun moci na upor Rb
Rb=0:0.1:50 % tvorimo niz vrednosti Rb od 0 do 50 s korakom 0,1
Ug=12
Rg=2
P=Rb*Ug^2./(Rg+Rb).^2 % Izracun moci
plot(Rb,P) % izris
xlabel('Rb / Ohm')
ylabel('Moc na Rb / W')
```



SLIKA: Prikaz moči za različne vrednosti notranje upornosti generatorja (2 Ω , 5 Ω in 10 Ω).

Maksimalna moč na bremenu. Vzemimo primer bremena priključenega na realni napetostni vir in se vprašajmo, kdaj je na bremenu največja moč. Grafična določitev je seveda enostavna, matematično pa jo določimo pri pogoju, da mora biti naklon premice na funkcijo moči enak nič (vzporeden z X osjo). Ker naklon premice dobimo z odvajanjem, moramo maksimalno moč iskati pri pogoju

$$\frac{dP}{dR_b} = 0.$$

Ugotovimo, da z odvajanjem dobimo pogoj, da mora biti za maksimalno moč na

bremenu upornost bremena enaka notranji upornosti vira:

$$R_b = R_g.$$

Kolikšna bo tedaj moč? Preprosto vstavimo pogoj v enačbo in dobimo:

$$P_b = R_b \left(\frac{U_g}{R_b + R_g} \right)^2 = \frac{U_g^2}{4R_b}.$$

Primer: Določimo še maksimalno moč iz prejšnjega primera. To bo tedaj, ko bo

$$R_b = 2 \Omega, \text{ moč pa bo tedaj } P_{\max} = \frac{(12 \text{ V})^2}{4 \cdot 2 \Omega} = 18 \text{ W}.$$

Rešitev se seveda sklada z odčitkom maksimalne moči, ki jo poiščemo na grafu.

Merilni inštrumenti.

Poznamo vrsto merilnih inštrumentov, ki nam omogočajo meritve električnih veličin: voltmeter, ampermeter, ohmeter, vatmeter in drugi. Običajno so bili ti inštrumenti analogni in so bili zasnovani na osnovnih principih lastnosti električnega polja. Večinoma so uporabljali vrtljive tuljavice. Sodobni inštrumenti so večinoma digitalni, izdelani z uporabo elektronskih elementov. Največji problem merilnih inštrumentov je njihova omejena točnost merjenja, ki je pogosto določena s ceno naprave. Omejeno točnost naprav je potrebno upoštevati pri natančnejših meritvah. S problemi merjenja se ukvarja posebno področje elektrotehnike – metrologija.

Voltmeter. Voltmeter je inštrument za merjenje napetosti. Simbol je krog s črko V v sredini kroga. Idealni voltmeter bi bil tak, ki bi ga priključili med merilni sponki in se razmere v vezju ne bi spremenile. V resnici ima vsak voltmeter določeno notranjo upornost, ki je velika, ni pa neskončna. Zamislimo si, da merimo napetost odprtih sponk. S priključitvijo voltmetra bomo spremenili razmere v vezju, saj bo skozi voltmeter stekel določen tok, ki pri odprtih sponkah ne bi.

SLIKA: Voltmeter: priključitev, razlika med idealnim in realnim voltmetrom.

Razširitev merilnega območja voltmetra je mogoča z dodanim preduporom, ki ga vežemo zaporedno voltmetru. S tem izvedemo že omenjen napetostni delilnik.

Primer: Vzemimo, da voltmeter meri do 5 V (merilno območje), želimo pa meriti do 100 V, pri čemer je notranja upornost voltmetra 100 kΩ. Določimo predupor tako, da bo voltmeter kazal 5 V tedaj, ko bo na zaporedno vezavo voltmetra in predupora priključena napetost 100 V.

Rešitev: $100\text{ V} = IR_p + 5\text{ V}; I = \frac{5\text{ V}}{100\text{ k}\Omega}. R_p = 1900\text{ k}\Omega = 1,9\text{ M}\Omega.$

SLIKA: Povečanje merilnega območja voltmetra.

Ampermeter. Ampermeter je inštrument za merjenje toka. Umestimo ga v vejo, v kateri želimo meriti tok. Simbol za ampermeter je krog s črko A v sredini kroga. Tudi ampermeter ni idealen inštrument. V idealnih razmerah naj bi bila notranja upornost ampermetra čim manjša, torej taka, ki ne bi povzročila dodatnega padca napetosti na inštrumentu.

SLIKA: Ampermeter, priključitev

Prav tako kot voltmetru, lahko tudi ampermetru povečamo merilno območje vendar tako, da upor vežemo vzporedno z ampermetrom, ki ga imenujemo tudi soupor ali kar po angleško »šant« (ang. shunt). S tem del toka, ki bi ga sicer meril ampermeter preusmerimo v vzporedno vejo.

Primer: Želimo meriti toke 30 A, pri čemer nam inštrument kaže največ 10 A. Notranja upornost ampermetra v tem merilnem območju 0,2 Ω. Določimo upornost soupora.

Rešitev: Ker ampermeter meri največ 10 A, moramo predvideti, da bi pri toku 30A v vzporedni veji tekel tok 20 A. Napetost na ampermetru pri 10 A je 2 V, ta napetost mora biti tudi na souporu v vzporedni veji. Veljati mora torej $R_s = \frac{2V}{20A} = 0,1 \Omega$.

SLIKA: Razširitev merilnega območja ampermetra s souporom.

Vatmeter je inštrument za merjenje moči. Ima dva para sponk. Z enim parom merimo napetost, z drugim pa tok. Simbol je krogec s črko W. Odčitek vatmetra bi bil ob upoštevanju neidealnosti vatmetra različen glede na priključitev sponk. Zakaj?

SLIKA: Priključitev vatmetra.

Ohmmeter. Je naprava za merjenje upornosti. V osnovi je inštrument, ki pri znani vzbujačni napetosti meri tok skozi breme in iz razmerja določi upornost bremena.

Univerzalni inštrument običajno vključuje tako ampermeter, voltmeter kot ohmeter, običajno pa je z njim mogoče meriti tudi kapacitivnosti, določene parametre nelinearnih elementov (tranzistorjev, diod), induktivnosti, pogosto pa tudi omogočajo priklop določenih senzorjev (temperature, svetilnosti), brezkontaktno merjenje toka (s tokovnimi kleščami) in tudi priklop na računalnik za sprotno odčitavanje in kasnejšo analizo podatkov.

Povzetek, vprašanja.

- 1) Kako je definirana moč? Zapiši zveze tudi z upoštevanjem Ohmovega zakona.
- 2) Kakšna je povezava med močjo in delom?
- 3) Kako se spreminja moč na bremenu, ki je priključen na realni napetostni vir?
- 4) Ali lahko enako moč dosežemo pri dveh različnih upornostih?
- 5) Kdaj bo moč na bremenu, ki je priključeno na realni napetostni vir maksimalna? Pri kateri upornosti? Kolikšna bo tedaj moč?
- 6) Voltmeter. Razširjanje merilnega območja s preduporom.
- 7) Ampermeter. Razširjanje merilnega območja s souporom.
- 8) Ohmeter, Watmeter, Univerzalni inštrument.

3. Analiza vezij

Spoznali smo že oba Kirchoffova zakona in zvezo med tokom in napetostjo na upor. Zaradi pomembnosti lahko ponovimo:

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 \text{ v spojišču}$$

$$\sum_{i=1}^M U_i = 0 \text{ v zanki}$$

$$U = R \cdot I \text{ na linearnem upor}$$

S pomočjo teh zvez lahko analiziramo (določimo tok in napetost na poljubnem elementu vezja) poljubno vezje. Le zapisati moramo primerno število enačb in jih rešiti. Spoznali bomo tudi metode, ki nam omogočajo analizo vezij z manjšim številom enačb.

Najbolj tipične metode reševanja vezij so:

- 1) Metoda Kirchoffovih zakonov
- 2) Metoda zančnih tokov
- 3) Metoda spojiščnih potencialov

Lahko pa si pomagamo še z raznimi stavki, kot so:

- 1) Stavke superpozicije
- 2) Stavke Thevenina in Nortona
- 3) Stavke Tellegena
- 4) Stavke o največji moči

- 1) **Metoda Kirchoffovih zakonov.** Je najosnovnejša metoda, ki se (kot že ime pove) poslužuje uporabe osnovnih Kirchoffovih zakonov.

Način reševanja bomo prikazali na konkretnem primeru. Najprej moramo označiti smeri tokov v vsaki veji. Ta označitev je lahko poljubna, potrebno pa se je zavedati (kot smo že omenili!), da smer toka na upor določa tudi smer napetosti. Za lažjo analizo bomo označili tudi spojišča vezja ter tudi tri zanke. Toka v veji s tokovnim virom nismo posebej poznačevali, saj lahko privzamemo kar smer toka generatorja.

Zapišemo lahko štiri enačbe z uporabo 1 KZ:

1 KZ:

spojišče (0): $-I_4 - I_3 - I_5 = 0$

spojišče (1): $I_g + I_1 + I_4 = 0$

spojišče (2): $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$

spojišče (3): $-I_2 - I_g + I_5 = 0$

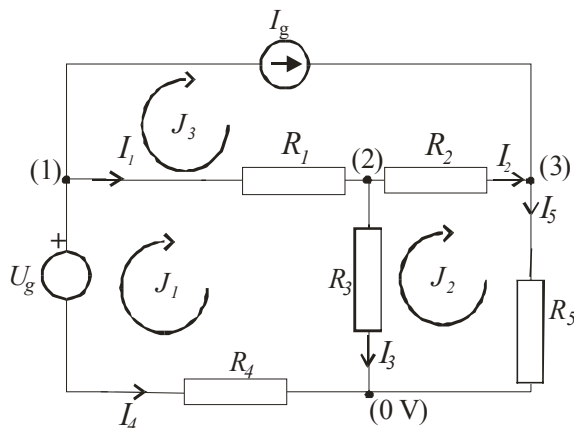
2 KZ:

zanka (J1): $-U_g + I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0$

zanka (J2): $-I_3 R_3 + I_2 R_2 + I_5 R_5 = 0$

zanka (J3): ne moremo zapisati zakona, ker ne moremo zapisati padca napetosti na tokovnem viru

Poglejmo število neznank in število enačb, ki smo jih zapisali. Število neznank je enako številu vejskih tokov, torej 5. Število enačb, ki smo jih zapisali pa je 6. Izkaže se, da je ena od enačb odveč, je redundančna. Izkaže se, da je odveč ena od enačb po 1 KZ. Izločimo lahko poljubno enačbo.



SLIKA: Primer vezja: $U_g = 10 \text{ V}$, $I_g = 2 \text{ A}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$, $R_5 = 40 \Omega$.

Reševanje takega sistema enačb zahteva sistematičen pristop. Pomagamo si lahko s teorijo grafov, kjer najprej narišemo t.i. **graf vezja**, označimo **drevo vezja** in **dopolnilne veje (kite)**. Graf vezja narišemo kot vezje, v katerem ostanejo le veje vezja. Drevo vezja sestavimo iz vej vezja, s katerimi moramo doseči vsa spojišča vezja pri tem pa ne smemo zaključiti nobene zanke. Veje, ki jih nismo uporabili za tvorjenje drevesa, so dopolnilne veje in jih dorišemo s črtkanimi črtami.

Število enačb, ki jih moramo zapisati po 1 KZ je enako številu spojišč $- 1$, število enačb po 2 KZ pa je enako številu dopolnilnih vej. V našem primeru bomo potrebovali $4 - 1 = 3$ spojiščne enačbe in 2 zankni enačbi.

Sistem enačb se reši tako, da se jih uredi v matrično obliko: (upoštevali bomo spojiščne enačbe od (1) do (3))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ 0 \\ I_g \\ U_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Potrebno je še vstaviti vrednosti in rešiti matrični sistem enačb. V te namene pogosto uporabimo računalniške programe.

Sistem enačb rešimo s programom Matlab. Tvoriti moramo matriko A in vektor b ter rešiti sistem enačb tipa $Ax=b$. Rešitev dobimo z Matlabovim ukazom $x=A\backslash b$.

```
>> A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;20,0,10,-1,0;0,5,-10,0,40]
```

```
A =
```

```
1 0 0 1 0
-1 1 1 0 0
0 -1 0 0 1
20 0 10 -1 0
0 5 -10 0 40
```

```
>> b=[ -2; 0 ;2 ;10 ;0];
```

```
>> x=A\b
```

```
x = -0.2243 -1.4953 1.2710 -1.7757 0.5047
```

Vejski toki so torej $I_1 = -0,2243$ A $I_2 = -1,42953$ A itd.

- 2) **Metoda znančnih tokov**, je metoda, s pomočjo katere lahko zmanjšamo sistem enačb, saj je število potrebnih znančnih enačb kar enako številu dopolnilnih vej.

Zančne toke tvorimo iz vejskih tako, da je ta v veji, ki ni skupna drugi (sosednji) zanki kar enak vejskemu toku, sicer pa je enak vsoti ali razliki vejskih tokov. Tako bo:

$$J_1 = -I_4$$

$$J_2 = I_5$$

$$J_3 = I_g$$

in

$$I_3 = J_1 - J_2$$

$$I_2 = J_2 - J_3$$

Če bi vejske toke vstavili v zgornje enačbe po 2 K.Z., bi dobili sistem znančnih enačb.

Običajno je lažje napisati enačbe tako, da sproti upoštevamo padce napetosti v zanki:

$$\text{zanka (J1): } -U_g + (J_1 - J_3)R_1 + (J_1 - J_2)R_3 - J_1R_4 = 0$$

$$\text{zanka (J2): } (J_2 - J_1)R_3 + (J_2 - J_3)R_2 + J_2R_5 = 0$$

$$\text{zanka (J3): } J_3 = I_g$$

Dobimo sistem treh enačb za tri neznane toke. V resnici le sistem dveh, saj je tretja že določena: $J_3 = I_g = 2$ A.

Obstaja še drug pristop k tvorjenju zapisa, ki seveda privede do ekvivalentnega zapisa enačb. Pri tem najprej upoštevamo tok zanke in vse padce napetosti v zanki, nato prištejemo ali odštejemo še prispevke ostalih znančnih tokov.

$$J_1(R_1 + R_3 + R_4) - J_3R_1 - J_2R_3 - U_g = 0$$

$$J_2(R_2 + R_3 + R_5) - J_1R_3 - J_3R_2 = 0$$

Vstavimo vrednosti in rešimo enačbi:

$$J_1 31 - 2 \cdot 20 - J_2 10 - 10 = 0$$

$$J_2 55 - J_1 10 - 2 \cdot 5 = 0$$

Matlab: Reševanje s pomočjo programa Matlab je silno preprosto. Tvorimo matriko A in vektor b ter rešitev kot $x=A \backslash b$. Druga možnost je $x=inv(A)*b$. Tokrat smo nekoliko drugače zapisali vektor b (kot vrstični vektor) kot v prejšnjem primeru. Zato ga je potrebno spremeniti (transponirati) z dodatkom '.

```
A=[31, -10; -10,55]
b=[50,10]
x=A\b
>> x =    1.7757    0.5047
```

Enačbi z dvema neznankama preprosto rešimo tudi tako, da iz ene enačbe izrazimo eno od spremenljivk in jo vstavimo v drugo enačbo. Npr. iz 1. enačbe izrazimo J_2 in dobimo $J_2 = 0,1(J_1 31 - 50)$. Sedaj to vstavimo v drugo enačbo in dobimo $0,1(J_1 31 - 50) 55 - J_1 10 = 10$ in iz nje rezultat.

Rešitev je torej $J_1 = 1,7757 \text{ A}$ in $J_2 = 0,5047 \text{ A}$. Ugotovimo lahko, da je dobljeni tok J_1 skladen z rešitvijo, ki smo jo dobili po sistemu reševanja Kirchhoffovih enačb: $J_1 = -I_4$.

- 3) **Metoda spojiščnih potencialov.** Metoda temelji na 1. KZ, pri kateri zapišemo vsoto tokov v spojišče. Pri tej metodi vsak tok zapišemo s potenciali spojišč, razen, če je tok v veji znan (tokovni generator). Označimo vsa spojišča in jim pripišemo neznane potenciale. Potencial enega spojišča lahko prosto izberemo. Ponavadi mu priredimo vrednost 0 V (ga ozemljimo). Toke v vejah zapišemo s potenciali tako, da določimo z njimi padec napetosti na upor v veji.

Število potrebnih enačb je enako številu spojišč -1. V smislu sistematičnega pristopa bomo predpostavili, da vsi tokovi izhajajo iz spojišča (čeprav smo jih označili drugače).

Spojišče (1): Tok v tej veji določimo iz padca napetosti na upor R4. Napetost na tem uporu pa je razlika potencialov spojišč (1) in (0). Ker smo spojišče (0) ozemljili, potencial spojišča (1) pa je V_1 , je tudi napetost med spojiščema enaka V_1 . Napetost na uporu R4 je manjša od V_1 za padec napetosti na napetostnem viru, torej je enaka $V_1 - U_g$, tok skozi upor R4 pa je

$\frac{V_1 - U_g}{R_4}$. Na podoben način določimo ostale toke. tako za spojišče (1) velja

$$\frac{V_1 - U_g}{R_4} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} + I_g = 0$$

Spojišče (2): Sedaj zopet predpostavimo toke iz spojišča in jih določimo:

$$\frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_3} + \frac{V_2 - V_3}{R_2} = 0$$

$$\text{Spojišče (3): } -I_g + \frac{V_3 - V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_5} = 0$$

Dobimo sistem treh enačb za tri neznane potenciale. Vstavimo vrednosti in rešimo sistem enačb:

$$\frac{V_1 - 10}{1} + \frac{V_1 - V_2}{20} + 2 = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{20} + \frac{V_2}{10} + \frac{V_2 - V_3}{5} = 0$$

$$-2 + \frac{V_3 - V_2}{5} + \frac{V_3}{40} = 0$$

```
>> A=[1+1/20,-1/20,0;-1/20,1/10+1/20+1/5,-1/5;0,-1/5,1/5+1/40]
```

```
A =
```

```
1.0500 -0.0500 0
```

```
-0.0500 0.3500 -0.2000
```

```
0 -0.2000 0.2250
```

```
>> b=[-2+10;0;2]
```

```
b =
```

```
8
```

```
0
```

```
2
```

```
>> V=A\b
```

```
ans = 8.2243 12.7103 20.1869
```

Potencial spojišča V_1 je torej 8,2243 V, V_2 je 12,71 V in $V_3 = 20,1869$ V.

Vejske toke določimo iz že zapisanih tokov, pri čemer pa je sedaj potrebno upoštevati vnaprej izbrano smer tokov. Tako je na primer tok I_1 enak $\frac{V_1 - V_2}{R_2} = (8,224 - 12,71) / 20 = -0,2243$ A.

(Opozorilo: Zaradi preglednosti pisanja namenoma pri zapisu številskih vrednosti v enačbe nismo pisali tudi enot. Enačbe smo torej spremenili v matematično obliko. Ko določimo rešitev, pripišemo ustrezne enote).

Reševanje s pomočjo determinant:

Sistem enačb lahko rešimo tudi s pomočjo determinant in poddeterminant. Rešitev za

neznanko V_1 je $V_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$, kjer je determinanta matrike A enaka

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1,05 & -0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,35 & -0,2 \\ 0 & -0,2 & 0,225 \end{vmatrix} = 1,05(0,35 \cdot 0,225 - (-0,2)(-0,2)) - (-0,05)(0,05 \cdot (-0,225) - (-0,2) \cdot 0 + 0 \cdot (0,05 \cdot (-0,2) - (0,35) \cdot 0))$$

$$\det(A) = 0,0401.$$

Poddeterminanto pa dobimo tako, da prvo kolono matrike A nadomestimo z vektorjem znank (b):

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 8 & -0,05 & 0 \\ 0 & 0,35 & -0,2 \\ 2 & -0,2 & 0,225 \end{vmatrix} = 0,330$$

$$V_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 8,22 \text{ V}.$$

Stavek superpozicije. Ta stavek določa, da lahko poljubno vezje sestavljeno iz linearnih elementov z več viri poenostavimo tako, da analiziramo vezje z izmeničnim vklopom posameznih virov v vezje. Toke, katere izračunamo na tako poenostavljenem vezju na koncu seštejemo (superponiramo). V našem konkretnem primeru bi lahko določili toke v vejah vezja za dve poenostavljeni vezji. V prvem bi bil vklopljen le napetostni vir, v drugem pa le tokovni vir. Izklopljen napetostni vir predstavlja kratek stik, izklopljen tokovni vir pa odprte sponke.

SLIKA: Vezje nadomestimo z dvema enostavnejšima vezjema. V prvem vezju obdržimo le napetostni vir, tokovnega pa izklopimo (odprte sponke), v drugem vezju pa obdržimo tokovni vir in odklopimo napetostnega (nadomestimo s kratkim stikom).

Primer: Določimo tok I_4 s pomočjo metode superpozicije.

1. vezje: Ko izklopimo tokovni vir lahko vse upornosti združimo v eno (nadomestno) tako, da zaporedno seštejemo upora R_2 in R_5 ter nato obema vzporedno še R_3 ter nato vsem še zaporedno R_1 in R_4 . Dobimo nadomestno upornost

$R_{\text{nad}} = (R_2 + R_5) \parallel R_3 + R_1 + R_4 = 29,18 \, \Omega$. Tok $I_{4(1)} = -10/25,44 \text{ A} = -0.3427 \text{ A}$. (Bodite pozorni, da je predznak toka negativen.)

2. vezje: Ko izklopimo napetostni vir, nam ostane vezje, pri katerem ne moremo preprosto seštevati upore. Zopet moramo uporabiti eno od metod za reševanje vezij. Vzemimo kar metodo zanknih tokov, ki se je za analizo konkretnega vezja izkazala kot zelo primerna in izračunajmo zankna toka. Razlika v že nastavljenih enačbah bo le ta, da sedaj nimamo napetostnega vira:

$$J_1 31 - 2 \cdot 20 - J_2 10 = 0$$

$$J_2 55 - J_1 10 - 2 \cdot 5 = 0$$

Izračun nam da vrednosti $J_1 = 1,4330 \text{ A}$ in $J_2 = 0.4424 \text{ A}$. $I_{4(2)}$ je enak kar $-J_1$ in bo torej enak $I_{4(2)} = -1,4330 \text{ A}$.

Na koncu seštejemo obe vrednosti in dobimo

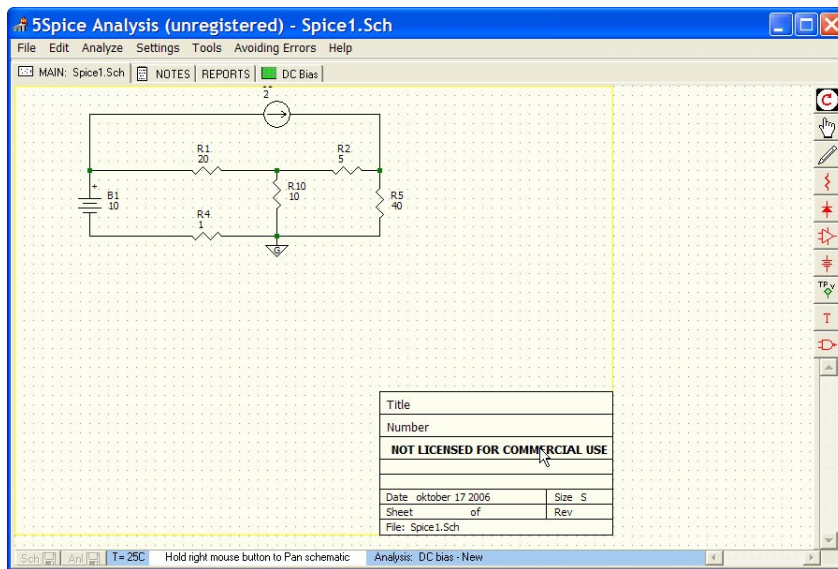
$$I_4 = I_{4(1)} + I_{4(2)} = -0,3427 \text{ A} - 1,4330 \text{ A} = -1.7757 \text{ A}.$$

Ugotovimo lahko, da je rešitev enaka, kot smo jo dobili z uporabo metode Kirchhoffovih zakonov.

Analiza vezij s programskim orodjem.

Pri bolj kompleksnih vezjih, še posebno, ko analiziramo vezja z nelinearnimi elementi, se lahko poslužimo analize vezij s programskimi paketi. En najbolj znan je zasnovan na Spice simulacijah. Na spletu je mogoče dobiti vrsto programov, ki temeljijo na Spice simulaciji. Poglejmo si primer uporabe programa 5Spice, ki ima tudi grafični vmesnik. Ta je še posebno koristen za popolne začetnike, saj ni potrebno poznati sintakse zapisov, pač pa le nekaj osnovnih pravil. Eno od teh je, da je potrebno eno od spojišč ozemljiti. Lista s povezavo elementov vezja, ki smo ga analizirali je:

R4.1, R5.1, R10.2, Ground,
I1.2, B1.1, R1.2,
R1.1, R2.2, R10.1,
R2.1, I1.1, R5.2,
B1.2, R4.2,



SLIKA: Primer simulacije vezja s programom 5Spice.

Povzetek, vprašanja:

- 1) Zapišite in razložite Kirchhoffova zakona. (glej tekst)
- 2) Kolikšno število enačb moramo zapisati za analizo vezja po metodi Kirchhoffovih zakonov?
- 3) Kaj je to graf vezja, drevo in dopolnilne veje? Prikaži na primeru.
- 4) Kako zapišemo enačbe z uporabo metode zračnih tokov? Kolikšno je število potrebnih enačb za analizo vezja?
- 5) Kaj je to determinanta in poddeterminanta sistema, kako zapišemo sistem enačb v matrični obliki?
- 6) Na čem temelji metoda spojiščnih potencialov? Kako jo uporabimo? Kolikšno je potrebno število enačb po tej metodi?
- 7) Razložite stavek superpozicije. Ali ob izklopu vira iz vezja pustimo odprte sponke ali naredimo kratek stik?

4. Stavki (Teoremi)

Stavek Thevenina in Nortona. To sta pomembna stavka v elektrotehniki in se pogosto uporabljata. Theveninov stavek »pravi«, da je mogoče poljubni del linearnega vezja nadomestiti z realnim napetostnim virom, torej z idealnim napetostnim virom (ki ga imenujemo Theveninov) in notranjo (Theveninovo) upornostjo.

Nortonovo nadomestno vezje pa je sestavljeno in idealnega tokovnega (Nortonovega) vira in vzporedne notranje upornosti.

SLIKA: Shematski prikaz Theveninovega in Nortonovega nadomestnega vira.

Kako določimo Theveninovo nadomestno napetost in upornost?

Napetost Thevenina določimo kot napetost odprtih sponk na mestu vezja, ki ga želimo nadomestiti, Theveninovo upornost pa kot notranjo upornost vezja, merjeno (računano) s sponk, pri čemer napetostne vire kratko sklenemo (kratek stik), tokovne pa razklenemo (odprte sponke).

Primer: Kot primer odklopimo iz vezja upor R_3 in na njegovih sponkah vezje nadomestimo s Theveninovým nadomestnim vezjem.

Če iz vezja odklopimo upor R_3 in zapišemo zanko enačbo dobimo

$$-U_g + J(R_1 + R_2 + R_4 + R_5) - I_g(R_1 + R_2) = 0$$

Po ustavitvi vrednosti določimo zanko tok $J = 30,91 \text{ V}$, Theveninova napetost pa je $U_{Th} = (J - 2\text{A})5\Omega + J40\Omega = \underline{\underline{30,91 \text{ V}}}$.

Upornost Thevenina je $R_{Th} = (R_1 + R_4) \parallel (R_2 + R_5) = \underline{\underline{14,32\Omega}}$.

Sedaj lahko tvorimo nadomestno vezje in dodamo upor R_3 ter izračunamo tok skozi

$$\text{upor: } I_3 = \frac{U_{Th}}{R_3 + R_{Th}} = 1,270 \text{ A}.$$

Drugi način določanja Theveninove nadomestne upornosti je s pomočjo izračuna toka kratkega stika med sponkama nadomestitve. Ta način pride v poštev predvsem tedaj, ko ne moremo preprosto seštevati vzporedne in zaporedne vezave uporov. S pomočjo računalnika najlažje uporabimo kar matriko za izračun tokov po metodi Kirchhoffovih zakonov pri čemer

bo upornost $R_3 = 0 \Omega$. Dobimo $I_K = 2,1587 \text{ A}$ in $R_{Th} = \frac{U_{Th}}{I_K} = \frac{30,91 \text{ V}}{14,32 \text{ A}} \doteq 14,32 \Omega$.

Omenimo še tretjo možnost. Upornost vezja med sponkama pri izklopljenih virih lahko dobimo tako, da na sponki priključimo poljubno izbrano napetost in izračunamo tok v vezje. Iz količnika med napetostjo in tokom sledi upornost. V našem konkretnem analiziranem primeru je ta način v osnovi enak prvemu načinu, saj izračunamo upornost Thevenina kot

$$R_{Th} = \frac{U_{sponk}}{I_{sponk}} = \frac{I_{sponk} \cdot (R_1 + R_4) \parallel (R_2 + R_5)}{I_{sponk}} = (R_1 + R_4) \parallel (R_2 + R_5) = \underline{\underline{14,32 \Omega}}.$$

Bi pa prišel ta način v poštev, če upornosti v vezju ne bi mogli kar preprosto seštevati.

Maksimalna moč na bremenu – drugič. Theveninov stavek je posebno primeren za izračun **maksimalne moč na upor (bremenu)**. Pri analizi maksimalne moči bremena priključenega na realni napetostni vir smo ugotovili, da bo moč na bremenskem upor največja tedaj, ko bosta bremenska in generatorska upornost enaki. Da dosežemo maksimalno moč, mora biti upornost bremena torej enaka upornosti Thevenina:

$$R_{b(P_{\max})} = R_{Th},$$

maksimalna moč pa bo tedaj

$$P_{\max} = \frac{U_{Th}^2}{4R_b}.$$

Primer: V našem vezju smo analizirali razmere moči na bremenskem upor R_3 . Tedaj

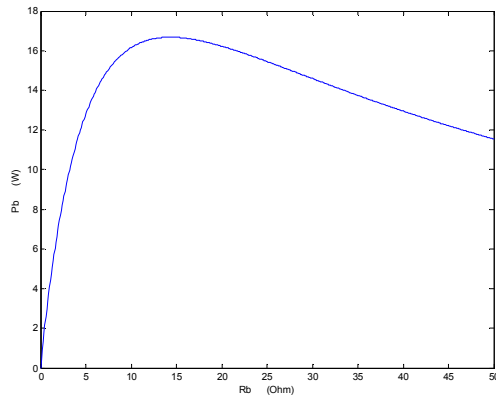
$$\text{bo torej } R_{b(P_{\max})} = 14,32 \Omega, \text{ maksimalna moč pa } P_{\max} = \frac{U_{Th}^2}{4R_b} = \frac{(30,91V)^2}{4 \cdot 14,32 \Omega} = 16,68 W.$$

Pogosto rečemo tudi, da je breme **prilagojeno** na vir, če je upornost bremena enaka upornosti Thevenina $R_b = R_{Th}$, torej tedaj, ko je na breme prenešena maksimalna moč iz vira.

Izrišimo moč na bremenu s pomočjo računalnika, pri čemer si bomo zopet pomagali s programom Matlab. Vzemimo izračunani vrednosti $U_{Th} = 30,91$ in $R_{Th} = 14,32 \Omega$ in spreminjajmo R_b od 0Ω do 50Ω in izračunajmo moč na bremenu. Z Matlabovimi ukazi:

```
Rb=0:0.1:50      % tvorimo niz vrednosti Rb od 0 do 50 s korakom 0,1
Uth=30.91
Rth=14.32
P=Rb*Uth^2./(Rth+Rb).^2  % Izracun moci
plot(Rb,P)          % izris
xlabel('Rb (Ohm)')
ylabel('Pb (W)')
```

Ugotovimo lahko, da izris ustreza našim pričakovanjem, da bo torej maksimalna moč na bremenu tedaj, ko bo upornost bremena enaka upornosti Thevenina. Ugotovimo tudi, da vrednost največje moči ustreza izračunani. Kako to ugotovimo z uporabo Matlab? Z ukazom $\max(P)$ izvemo največjo vrednost niza P, v katerem so shranjene vrednosti moči. Dobimo 16,68. Kaj pa vrednost upornosti pri maksimalni moči? Najprej ugotovimo indeks, pri katerem nastopa v nizu maksimalna moč z uporabo ukaza $i=find(P==\max(P))$, nato pa z $Rb(i)$ dobimo vrednost 14,3. Dobljena vrednost se razlikuje od točne za 0,02, kar je za pričakovati, saj smo numerično izračunavali moči le za vrednosti upornosti, ki se razlikujejo za 0,01 Ω . Namen tega pojasnjevanja je v tem, da bi vzpodbudil bralca k uporabi in raziskovanju izjemnih zmožnosti programa.



SLIKA: Moč na bremenu pri spreminjanju bremenske upornosti.

Da se prepričamo v pravilnost izračunov, lahko uberemo še eno pot. Izhajamo direktno iz izračunavanja tokov v vezju s pomočjo metode Kirchoffovih zakonov ter določimo moč na upor R_3 pri različnih vrednostih te (bremenske) upornosti. Preprosto, s pomočjo enačbe $P_3 = I_3^2 R_3$. S pomočjo računalnika lahko zelo hitro določimo maksimalno moč, tudi če formule ne poznamo. Iz že znane matrike:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ 0 \\ I_g \\ U_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

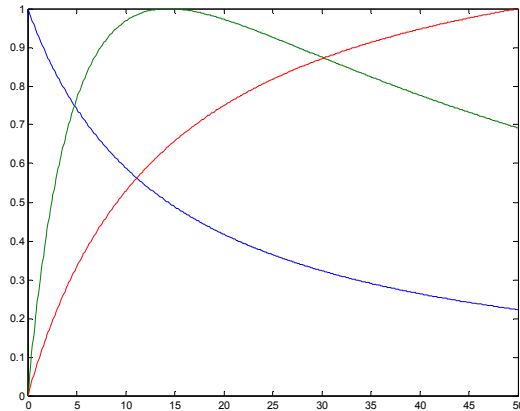
spreminjamo R_3 od 0 Ω do 50 Ω in izračunavamo tokove ter moč na upor R_3 in rezultate izrišimo. Dobimo (Matlab):

```
b=[-2;0;2;10;0] % vektor znanih vrednosti / desna stran enacbe
II=[] % prazen vektor, potreben za shranjevanje izracunanih vrednosti moči
for R3=0:0.1:50 % zanka povecuje upornosti
    A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;R1,0,R3,-R4,0;0,R2,-R3,0,R5]
    I=A\b % izracun tokov za določen R3

    II=[II,I(3)] % shranjevanje vrednosti toka I3 v vektor, ki se zaporedno polni
end

R3=0:0.1:50 % vektor upornosti
P=II.^2.*R3 % izracun moci
plot(R3,P) % izris
```

Iz primerjave dobljenega grafa in prejšnjega ugotovimo, da sta identična, kar smo seveda tudi pričakovali.



SLIKA: Slika prikazuje normirane krivulje toka, napetosti in moči na uporu R_3 v že znanem vezju. Sami ugotovite, katera krivulja prikazuje določeno veličino. To boste ugotovili zelo hitro, če si zamislite Theveninovo nadomestno vezje (Normiranje izvedemo tako, da poiščemo največjo vrednost v nizu (določene veličine) in delimo vse vrednosti s to vrednostjo.) Ukazi v Matlabu: $U=R3.*II$; $\text{plot}(R3,II/\max(II),R3,P/\max(P),R3,U/\max(U))$

Stavek Tellegena. Stavek Tellegena pravi preprosto to, da je moč bremen enaka moči virov. Pri tem lahko vir deluje v generatorskem načinu (pozitivna moč) ali v bremenskem načinu (negativna moč). To zapišemo kot

$$\sum_i P_g(i) = \sum_j P_b(j).$$

V našem konkretnem primeru je moč generatorjev enaka

$$P_g = U_g (-I_4) + I_g (V_3 - V_1) = 41,6822 \text{ W}$$

moč na bremenih pa

$$P_b = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = 41,6822 \text{ W}$$

Reševanje z Matlabom (vrednosti tokov imamo shranjene v vektorju x , potencialov pa v V , v vektor R shranimo vrednosti uporov.):

$$Pg=10*(-x(4))+2*(V(3)-V(1))$$

$$R=[20;5;10;1;40]$$

$$Pb=\text{sum}(x.^2.*R)$$

Izkoristek vezja. Ker velja zakon o ohranitvi energije, bo določen del energije virov prenešen na bremena, drugi del pa lahko smatramo kot izgubna energija:

$$W_{vhodna} = W_{izhodna} + W_{izgubna}.$$

Izkoristek lahko definiramo kot kvocient izhodne in vhodne energije

$$\eta = \frac{W_{izhodna}}{W_{vhodna}}.$$

Ker pa je energija pri enosmernih vezjih sorazmerna moči $W = P \cdot T$. Torej lahko definiramo izkoristek tudi kot kvocient moči na bremenu in moči vira (virov):

$$\eta = \frac{P_b}{P_g}$$

Izkoristek pogosto zapišemo v procentih, torej kot

$$\eta = \frac{P_b}{P_g} \cdot 100\%$$

SLIKA: Vhodna energija se prenese (transformira v) na izhodno in izgubno.

Poglejmo, kako se spreminja izkoristek vezja pri bremenu, priključenem na realni napetostni vir. Izkoristek opisuje enačba

$$\eta = \frac{P_b}{P_g} = \frac{I^2 R_b}{I^2 (R_b + R_g)} = \frac{R_b}{R_b + R_g}.$$

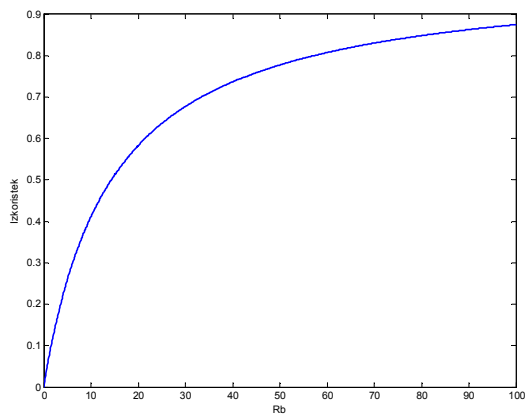
Pri majhnih bremenskih upornostih gre izkoristek proti nič, pri velikih pa proti vrednosti 1 (100%).

Primer z Matlabom:

Rg=14.32

Rb=0:0.1:100

plot(Rb,Rb./(Rb+Rg))



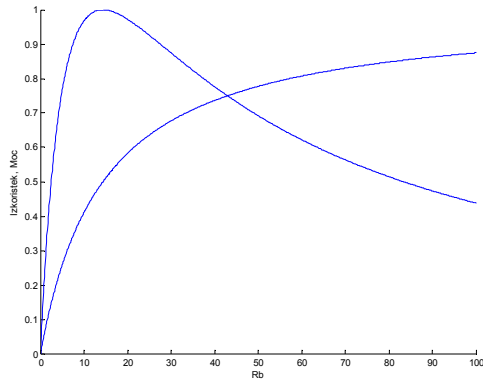
SLIKA: Povečevanje izkoristka z večanjem bremenske upornosti.

Dodajmo še spremembo moči z ukazi

hold on

P=Rb./(Rb+Rg).^2

plot(Rb,P/max(P))



SLIKA: Izkoristek vezja in moč na bremenu.

Ugotovimo, da je izkoristek vezja nekaj drugega kot maksimalna moč na bremenu. Največji izkoristek dosežemo pri čim večji upornosti bremena vendar je tedaj moč na bremenu majhna v primerjavi z maksimalno. Pri maksimalni moči pa je izkoristek vezja ravno 50%.

Če imamo dva zaporedno vezana sistema, lahko izkoristek določimo kot

$$\eta = \frac{P_{izh(2)}}{P_{vh(1)}} = \frac{P_{izh(2)}}{P_{vh(1)}} \cdot \frac{P_{iz(1)}}{P_{vh(2)}} = \eta_1 \eta_2,$$

torej kot produkt posameznih izkoristkov.

Pomembnejše oblike vezij

- 1) Neobremenjen in obremenjen napetostni delilnik.** Napetostni delilnik smo že spoznali. Za napetost na upor R_2 , ki je priključen na zaporedno vezavo uporov smo dobili

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Običajno ga uporabimo za to, da zmanjšamo maksimalno napetost na določeno vrednost. Ta enačba nam da ustrezno vrednost, če je upornost bremena dosti večja od upornosti upora R_2 . V nasprotnem primeru pa je potrebno upoštevati tudi samo bremensko upornost. Vzemimo, da imamo podano breme z določeno bremensko napetostjo in močjo: $U_b/P_b = 9 \text{ V} / 30 \text{ W}$, ki ga želimo priključiti na napetost $U = 12 \text{ V}$, pri čemer je $R_2 = 10 \Omega$. Kolikšen mora biti R_1 ? Tok bremena bo $30 \text{ W} / 9 \text{ V} = 3,33 \text{ A}$, tok na uporu R_2 pa $I_2 = 9 \text{ V} / 10 \Omega = 0,9 \text{ A}$. Skupni tok je $I_1 = 4,233 \text{ A}$. Zapišemo $12 \text{ V} = I_1 R_1 + 9 \text{ V}$ od koder sledi $R_1 = 0,7087 \Omega$. Nekoliko bolj zapleteno je, če imamo določeno breme R_1 in želimo poiskati pravo vrednost R_2 . Poiščite rešitev sami ali si jo preberite v ARS, Elektrotehnika 2.

SLIKA: Obremenjen napetostni delilnik.

- 2) **Neobremenjen in obremenjen potenciometerski delilnik.** Potenciometer je pogost element v elektrotehniki. Je v osnovi upor, katerega vrednost določamo z lego drsnika (gumba). V praksi imamo na razpolago linearne in logaritemske potenciometerske upore. Kot že ime pove, se pri linearnem uporu upornost med drsnikom in enim ali drugim kontaktom spreminja linearno, pri logaritemskem pa se spreminja logaritemsko. Z določeno natančnostjo seveda.

SLIKA: Potenciometerski delilnik predstavimo kot dva zaporedno vezana upora.

Celotno skalo dolžine l razdelimo na dve (neenaki) polovici. Dolžina enega dela je x drugega pa $l-x$. Tako celotno upornost R_p razdelimo na $R_2 = R_p \cdot x/l$ in $R_1 = R_p(l-x)/l$. Če uporabimo potenciometer kot napetostni delilnik, je napetost na delu upora dolžine x

$$\text{enaka: } U_2 = U \frac{R_2}{R_p} = U \frac{R_p \cdot x/l}{R_p} = U \frac{x}{l}.$$

Dobimo linearno zvezo med razdaljo x in napetostjo U_2 .

Če upoštevamo še priključitev bremena na upor $R_2 = R_p \frac{x}{l}$, velja

$$\frac{U - U_p}{R_1} = \frac{U_p}{R_2} + \frac{U_p}{R_b}. \text{ Po preureditvi dobimo (preverite še sami)}$$

$$U_p = U \frac{x}{x(1-x/l)n + l},$$

kjer je $n = R_p / R_b$.

Izrišimo nekaj krivulj vrednosti U_p za različna razmerja $n = R_p / R_b$. Vzemimo $U = 1$ in spreminjajmo

x od 0 do 1 ($l=1$) in izrišimo vrednosti U_p za vrednosti $n = 1, 10, 100$. Matlabovi ukazi so

```
x=0:0.01:1;
```

```
for n=[0.01,0.1,1,10,100]
```

```
Up=x./(1+x.*(1-x)*n)
```

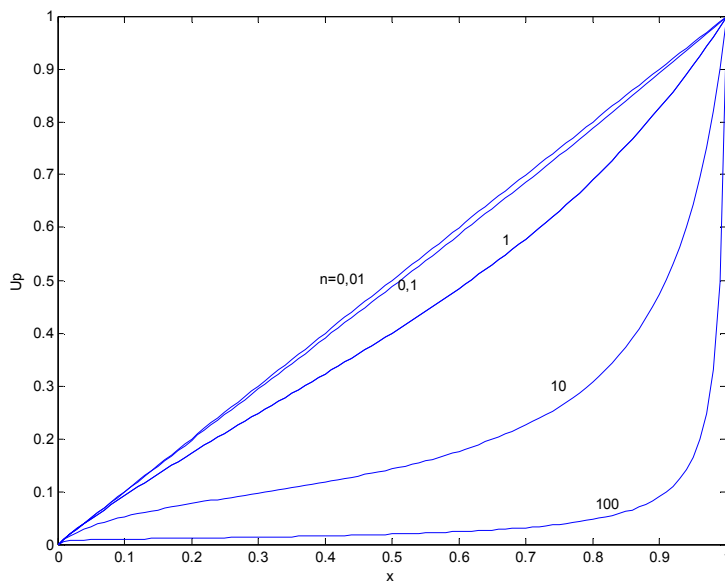
```
plot(x,Up)
```

```
hold on
```

```
end
```

```
xlabel('x');
```

```
ylabel('Up');
```



SLIKA: Različne vrednosti U_p pri razmerjih $n = 0,1, 1, 10, 100$. Večjo linearnost se doseže pri $n \ll 1$, torej tedaj, ko bo bremenska upornost dosti večja od upornosti uporovnega delilnika.

3) Tokovni delilnik. Pogosto uporabljamo tudi tokovni delilnik, ki smo ga že spoznali predhodno, zato navedemo le rezultat. Tok I razdelimo v dve veji z uporoma R_1 in R_2 . Tok v veji z uporom R_1 je

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

4. Transformacija zvezda – trikot.

Pogosto se srečamo z vezavo uporov v obliko, ki ji rečemo trikot, saj so trije upori nameščeni v obliki trikotnika. Druga oblika vezave pa je taka, da so trije upori vezani v skupno spojišče – taki vezavi pravimo vezava v zvezdo. Pogosto si za lažjo analizo vezij pomagamo s transformacijo vezave trikot v zvezdo in obratno. Če imamo v vezavi zvezda tri spojišča z upori R_1, R_2 in R_3 , potem ob transformaciji dobimo vezavo trikot z upori R_{12}, R_{23} in R_{31} , katerih vrednosti so

$$R_{12} = \frac{R^2}{R_3} \quad R_{23} = \frac{R^2}{R_1} \quad \text{in} \quad R_{31} = \frac{R^2}{R_2},$$

pri čemer je $R^2 = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$.

SLIKA: Transformacija vezja oblike zvezda v obliko trikot.

Zapišimo še obratno pot: če želimo iz vezave trikot preiti v vezavo zvezda, bomo upore določili iz

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \text{ podobno pa tudi } R_2 \text{ in } R_3. \text{ Poskusite sami izpeljati te enačbe. Pot}$$

je ta, da mora biti nadomestna upornost med dvema sponkama enaka v obeh vezavah.

Ta vezava bi nam lahko koristila na primer pri analizi vezja s superpozicijo, kjer smo morali v drugem primeru »rešiti« vezje s primerno metodo, če pa bi uporabili transformacijo v trikot, bi lahko vezje rešili z vzporedno – zaporedno vezanimi upornostmi.

5. Mostično vezje. Pogosto elemente v vezju vežemo tako, imamo po dva upora v dveh vzporednih vejah. Vzemimo, da sta v eni veji upora R_1 in R_2 , v drugi pa R_3 in R_4 . Če med veji vključimo voltmeter, bo napetost voltmetra enaka nič, ko bo

$$U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

in

$$U \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U \frac{R_3}{R_3 + R_4}.$$

Če delimo ti enačbi dobimo

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Ko velja to razmerje, rečemo, da je mostiček **uravnotežen**. Tedaj iskano upornost enostavno določimo iz preostalih treh. Pri tem je točnost rezultata odvisna od točnosti uporov v mostičku.

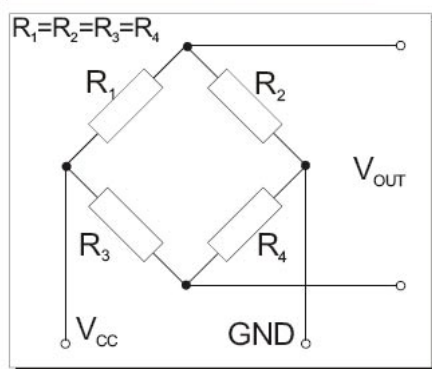
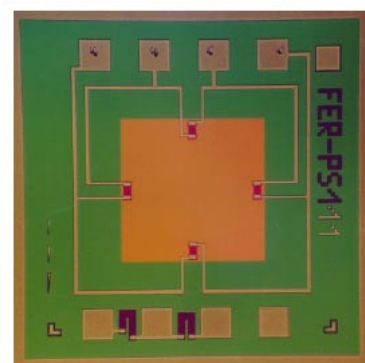
SLIKA: Wheatstonovo mostično vezje.

Pogosto se uporablja tudi neuravnotežene Wheatstonove mostičke. Torej iz izmerjene napetosti med sponkama uporov določimo eno od neznanih upornosti. Tedaj velja

$$U_V = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} - U \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

Ta princip merjenja je posebno primeren tedaj, ko merimo dinamične signale in ni časa za uravnoteženje mostiča.

Wheatstonovo mostično vezavo ne uporabljamo le v enosmernih razmerah pa tudi pri izmeničnih signalih. Poznamo različne tipe mostičev, npr. Wienov, Owenov, Maxwellov, itd.

SCHEMATIC DIAGRAM**SENSOR LAYOUT**

SLIKA: Primer uporabe vezave uporov v Wheatstonov mostič za realizacijo polprevodniškega senzorja tlaka. Vir: produkt Laboratorija za mikrosenzorske strukture na Fakulteti za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani.

Temperaturne lastnosti uporov. Ko skozi upor teče tok, se nosilci naboja (v uporih običajno elektroni) ne gibljejo premočrtno od ene do druge sponke, pač pa »trkajo« z atomi v snovi. Gibljejo se z neko povprečno hitrostjo, ki pa je odvisna od temperature. Pri višji temperaturi je namreč nihanje atomov večje in s tem tudi število trkov, torej se povprečna hitrost nabojev zmanjša. S tem se tudi zmanjša tok, posredno pa se poveča električna upornost. Meritve pokažejo, da se temperaturna odvisnost upornosti spreminja skoraj linearno, po formuli $R(T) = aT + b$,

kjer sta a in b konstanti, ki jih moramo določiti z meritvijo. Običajno nas zanima sprememba upornosti okoli okoljske temperature 20°C , kjer bo $R(T_{20}) = aT_{20} + b$. Če enačbi odštejemo, dobimo

$$R(T) = R(T_{20}) \left(1 + a \frac{T - T_{20}}{R(T_{20})} \right).$$

Vpeljemo konstanto α , ki jo imenujemo temperaturni koeficient

in pišemo

$$R(T) = R(T_{20}) (1 + \alpha (T - T_{20})).$$

Tipične vrednosti temperaturnih koeficientov so (v K^{-1}):

Železo 0,006

Aluminij 0.0041

Baker 0,0039

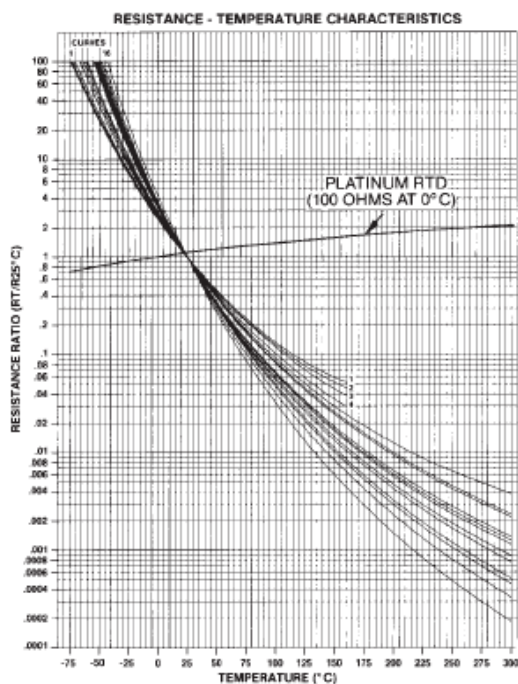
Konstantan 0,00003

Vse zapisane vrednosti koeficientov so pozitivne, torej bo upornost železa, aluminija, bakra in konstantana večja pri višjih temperaturah. Okrajšava za pozitivni temperaturni koeficient je PTK, za negativnega pa NTK (ang. PTC in NTC).

Primer: Bakreni žici, ki ma pri 20 °C upornost, 10 Ω, bo imela pri 80 °C upornost $R(80^{\circ}\text{C}) = 10\ \Omega (1 + 0,0039\ \text{K}^{-1} \cdot 60\text{K}) = 12,34\ \Omega$.

SLIKA: Linearna temperaturna odvisnost upora.

Obstaja vrsta elementov, katerim se upornost izrazito spreminja s temperaturo. Tem elementom pravimo termistorji (ang. thermistor = thermal resistor). Njihova uporaba v elektrotehniki je zelo pogosta, od merjenja temperature do kompenzacije temperaturnih lastnosti drugih elementov v vezju, regulacija ampliture, napetosti, alarm, ...



SLIKA: Upornost NTC termistorja se zmanjša z višanjem temperature. Za primerjavo je na sliki spreminjanje upornosti platine. Vir: katalog firme Murata.

Nelinearni elementi. Linearni element je samo poenostavitev, ki nam olajša analizo vezij. V osnovi so vsi elementi vsaj do določene mere nelinearni. Za upore navadno smatramo, da so linearni, čeprav poznamo tudi vrsto nelinearnih uporov. Najbolj znan nelinearni element je prav gotovo dioda. Dioda je običajno izdelana iz polprevodniškega materiala, ki omogoča prevajanje v eni smeri, v drugi pa ne. To povzroči izrazito nelinearno karakteristiko, ki jo v elektrotehniki s pridom uporabljamo. Bolj zapleteni so tranzistorji, ki so elementi z najmanj tremi kontakti od katerih je en običajno namenjen za kontrolo prevajanja toka med drugima kontaktoma.

Pogosto se uporablja grafičen način za določanje delovne točke tudi pri uporabi nelinearnih elementov. Če si zamislimo, da priključimo nelinearen element na določene sponke vezja, lahko posebej narišemo karakteristiko vezja brez priključenega elementa, ki bo enaka Theveninovemu nadomestnemu vezju in dodamo karakteristiko nelinearnega elementa. V presečišču je delovna točka. Pogosto rišemo grafično karakteristiko nelinearnega elementa za več parametrov, na primer pri bipolarnem tranzistorju za različne bazne toke, pri MOS tranzistorju za različne vrednosti napetosti vrat itd.

Kirchoffova zakona sta splošno veljavna, tudi za vezja z nelinearnimi elementi. Večji problem je pri izračunavanju, saj je sistem linearnih enačb dosti lažje rešiti od nelinearnega. Pri slednjem se moramo poslužiti numeričnih metod, pa še v tem primeru ni uspeh zagotovljen.

Povzetek:

- 1) Razloži Theveninov in Nortonov stavek.

Med poljubnima dvema sponkama linearnega vezja lahko vezje nadomestimo z realnim napetostnim (Thevenimovim) ali realnim tokovnim (Nortonovim) virom.

- 2) Kako določimo Theveninovo napetost in upornost?

Theveninova napetost je napetost odprtih sponk med katerima želimo nadomestiti vezje z Theveninovim. Theveninova upornost je notranja upornost med sponkama, pri čemer napetostne vire kratko sklenemo, tokovne pa odklopimo (odprte sponke) od vezja.

- 3) Kako določimo Nortonov tok generatorija in upornost?

Tok generatorja je tok kratkega stika med sponkama vezja. Upornost Nortonovega nadomestnega vezja določimo enako kot upornost Thevenina. Torej sta ti upornosti enaki: $R_N = R_T$.

- 3) Ali velja povezava med Nortonovim in Theveninovim nadomestnim vezjem?

Obstaja. Velja $R_N = R_T$, pa tudi $U_{Th} = I_N R_{Th}$.

- 4) Kako določimo maksimalno moč na bremenu s pomočjo Thevenina?

Breme odklopimo iz vezja in izračunamo Theveninovo nadomestno napetost in upornost. Moč na bremenu bo maksimalna, ko bo $R_b = R_{Th}$. Tedaj bo maksimalna moč na bremenu

$$P_{\max} = \frac{U_{Th}^2}{4R_b}.$$

5) Kdaj velja, da je breme prilagojeno na vir?

Ko je na bremenu (prenešena) maksimalna moč.

6) Razloži stavek Tellegena.

Stavek Tellegena pove, da je moč generatorjev v vezju enaka moči bremen.

7) Kako je definiran izkoristek vezja?

Izkoristek vezja definiramo kot kvocient moči na bremenu in moči vira (virov)

$$\eta = \frac{P_b}{P_g}.$$

8) Razloži razliko med izkoristkom vezja in maksimalno močjo. Kdaj je izkoristek največji in kdaj je moč maksimalna? Kolikšen je izkoristek pri maksimalni moči?

Izkoristek na bremenu se večja z upornostjo bremena, moč pa je največja tedaj, ko je bremenska upornost enaka upornosti Thevenina. Pri maksimalni moči je izkoristek vezja 50%.

9) Zapišite enačbo za napetost neobremenjenega napetostnega delilnika. (glej tekst)

10) Razložite razliko med obremenjenim in neobremenjenim napetostnim delilnikom.

11) Razložite uporabo potenciometra kot napetostnega delilnika. (glej tekst)

12) Wheatstonov mostiček: uravnotežen in neuravnotežen, uporaba.

13) Opišite temperaturne lastnosti uporov. Kaj je to pozitivni ali negativni temperaturni koeficient. Zapišite enačbo.

5. Naboj in tok

Kljub temu, da so bili električni efekti znani že dolgo časa, pa so osnovne ugotovitve, ki jih poznamo o naravi elektrike resnično dognane šele v prejšnjem stoletju. Znani ameriški politik pa tudi znanstvenik Benjamin Franklin je bil prvi, ki je predlagal osnovna poimenovanja, kot jih poznamo danes. Predlagal je, da lahko ene naboje poimenujemo pozitivne, druge pa negativne (prej so jih poimenovali vitreous in resinous). Dandanes poznamo zgradbo atomov: jedro iz neutronov in pozitronov in oblak elektronov. V osnovi je atom nevtralen, z enakim številom elektronov in protonov, neutroni pa nimajo naboja. Pomanjkanje ali presežek elektronov v atomu (in tudi molekuli) predstavimo kot presežek pozitivnega ali negativnega naboja. Take atome (molekule) imenujemo ioni.



SLIKA: Benjamin Franklin (1706-1790) je bil izjemen politik (pisec ameriške ustave) pa tudi znanstvenik. Prvi je ločil naboje na pozitivne in negativne, izumil izraze baterija, naboj, prevodnik, pozitivni in negativni naboj itd. Najbolj znan (in tudi nevaren) je njegov dokaz, da je strela električen pojav z eksperimentom z zmajem, ki se ob dežju namoči in postane prevoden. Ob strelah se del toka razelektritve prenese preko zmaja na zemljo. Iz teh raziskav sledi njegov izum strel vodovoda.

Naboj je kvantiziran. Najmanjši naboj je naboj elektrona, ki je $Q_e = -1,609 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Naboj protona je enako velik samo nasprotnega predznaka – pozitivnega. Naboj 10 nC torej predstavlja pomanjkanje $10 \text{ nC} / 1,609 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cong 62 \cdot 10^9$ elektronov.

(Naboj = elektrina. Včasih za naboj uporabimo tudi izraz elektrina. To je ekvivalenten izraz.)

Protoni so močno vezani na jedro atoma, medtem ko elektroni krožijo okoli jedra v t.i. orbitalah. Elektroni, ki krožijo na zunanjih orbitalah (bolj oddaljenih od jedra) imajo manjšo privlačno silo v smeri jedra in se v določenih primerih lahko »odlepijo« od atoma. To se posebno pogosto zgodi v prevodnikih, kjer so ob dokaj trdni vezi med atomi (kovalentni) določeni elektroni zelo šibko vezani na jedro in lahko »potujejo« med atomi. Za tako potovanje pa seveda morajo imeti »razlog«. Razlog za premikanje je električna sila med naboji.

In kakšna je ta sila? Z eksperimenti se je potrdilo, da je sila med naboji z nasprotnim predznakom privlačna, sila med naboji istega predznaka pa je odbojna.

V določenih primerih ni težko doseči ločitve nabojev. Že z drgnjenje oblačil lahko dosežemo ločitev nabojev. V določenih primerih to ločitev tudi začutimo. Na primer ob iskri, ki preskoči med prstom in karoserijo avta, ko pride do razelektritve nabojev. Ali pa kot iskrice pri slačenju obleke iz umetnih materialov. Ali pa pri hoji, ko s čevlji drgnemo po tleh. Naboj čutimo tudi na televizijskem zaslonu, ki se ob uporabi naelektri in privlači delčke iz zraka (povzroča umazanijo). Elektritve in razelektritve opazimo tudi v naravi. Najbolj impozantna razelektritev je pojav strele, ko se velika napetost med naelektrenimi oblaki in nasprotno naelektreno zemljo odrazi v močni razelektritvi. Tudi arktični sij (aurora borealis) je posledica delovanja naelektrenih delcev – tokrat tistih, ki priletijo izven našega ozračja.

Zakon o ohranitvi naboja. Kako pa nastaja naboj? Ugotovitve kažejo, da naboj niti ne more iz nič nastati niti se ga ne da izničiti. To dejstvo opišemo kot zakon o ohranitvi naboja, ki je fundamentalen zakon. Pravi, da je v izoliranem sistemu vsota vseh nabojev konstantna.

$$\sum_i Q_i \Big|_{\substack{\text{znotraj} \\ \text{izoliranega} \\ \text{sistema}}} = konst$$

Če je konstanta (vsota nabojev) pozitivna, govorimo o presežku pozitivnih nabojev, če je negativna o presežku negativnih nabojev, če pa je enaka nič je sistem nevtralen (ima enako število pozitivnih in negativnih nabojev). Pri vseh prej omenjenih primerih razelektritve in naelektritve gre torej za prerazporejanje naboja, ne more pa naboj nastati »iz nič« niti ne more »izginiti«. V tem smislu lahko rečemo, da je neuničljiv. Fizikalno – matematično rečemo, da je relativistična invarianta, je količina, ki se ne spremeni tudi če se sistem giblje s hitrostjo blizu svetlobne. (To pa ne drži za maso, ki se ob velikih hitrostih spreminja v skladu z znano povezavo med maso in energijo delcev (Einstein). Torej za maso ne moremo trditi, da velja zakon o ohranitvi mase. Ta velja le, če so hitrosti sistema majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Kar pa zelo pogosto drži.)

Primer: Vzemimo izoliran sistem v katerem imamo tri telesa. Dve nevtralni, na enem pa je presežek pozitivnega naboja 10 mC. Ob stiku teh treh teles se prenese 5 mC na eno, 2 mC pa na drugo telo. Koliko naboja je ostalo na prvotno naelektrenem telesu? V skladu z zakonom o ohranitvi naboja mora veljati

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 10 \text{ mC},$$

tako pred stikom teles kot po stiku. Po stiku teles je $Q_2 = 5 \text{ mC}$, $Q_3 = 2 \text{ mC}$ iz česar sledi $Q_1 = 10 \text{ mC} - (Q_2 + Q_3) = 3 \text{ mC}$.

V neposredni povezavi z zakonom o ohranitvi naboja je tudi kontinuitetna enačba, ki opisuje povezavo med električnim tokom in nabojem.

Tok kot časovna sprememba naboja (kontinuitetna enačba)

Gibanje nabojev smo poimenovali kot električni tok. Kdaj je tok večji? Tedaj, ko je hitrost spremembe naboja na opazovanem delu večja. Matematično to zapišemo kot

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Zgornji zapis je ustrezen, če se naboj linearno spreminja s časom. Če se na primer naboj na pozitivni elektrodi akumulatorja spreminja kot $Q(t) = Q_0 - \frac{12 \text{ C}}{10 \text{ s}} t$, kjer je Q_0 poljubna vrednost naboja ob času $t = 0$. Vzemimo poljubni čas 1 s in 2 s in pogledjmo, kolikšen tok teče v tem času:

$$i = \frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{Q_0 - \frac{12 \text{ C}}{10 \text{ s}} 2 \text{ s} - \left(Q_0 - \frac{12 \text{ C}}{10 \text{ s}} \cdot 1 \text{ s} \right)}{2 \text{ s} - 1 \text{ s}} = -\frac{12 \text{ C}}{10 \text{ s}} = -1,2 \text{ A}.$$

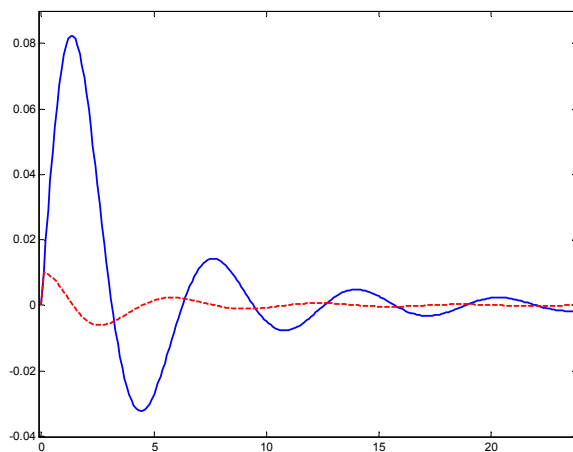
Izberemo lahko poljubno dva različna časovna trenutka in rezultat bo enak. Če pa se velikost naboja spreminja po neki poljubni funkciji, ki ni linearna, bomo lahko dobili različne

vrednosti odvisno od časov, ki si jih izberemo. Zvezo med tokom in nabojem moramo popraviti tako, da bo rezultat vrednosti toka enoličen neodvisno od izbire dveh različnih časovnih trenutkov. Idealni matematični okvir za to nam ponuja koncept odvoda, ki je definiran kot limita diferenc, ko gre $\Delta t \rightarrow 0$.

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}.$$

Grafično si lahko odvod predstavljamo kot naklon premice na krivuljo, ki jo predstavlja naboj kot funkcija časa.

SLIKA: Spreminjanje naboja na določenem objektu in tok kot naklon na krivuljo.



SLIKA: Naboj (modra polna črta) in tok (rdeča črtkana črta) kot odvod toka. Odvod je največji tedaj, ko je naklon na modro krivuljo največji. Odvod (tok) je enak nič, ko se naboj ne spreminja s časom ali ko ima maksimum ali minimum. Tedaj je naklon enak nič.

Po dogovoru je s pozitivnim predznakom definiran tok, ki je v smeri »opazovanega« naboj:

$$i_{\text{v smeri}} = + \frac{dQ}{dt}.$$

Če je tok vezan na smer stran od opazovanega naboja, je potrebno uporabiti negativni predznak:

$$i_{\text{stran}} = - \frac{dQ}{dt}.$$

Gre seveda za isti tok, le da ga enkrat določamo glede na naboj na eni ,drugič pa drugi strani glede na smer toka.

SLIKA: Razlaga predznaka pri zvezi med nabojem in tokom.

Primer: Ob naelektritvi se naboj na pozitivni elektrodi kondenzatorja spreminja kot

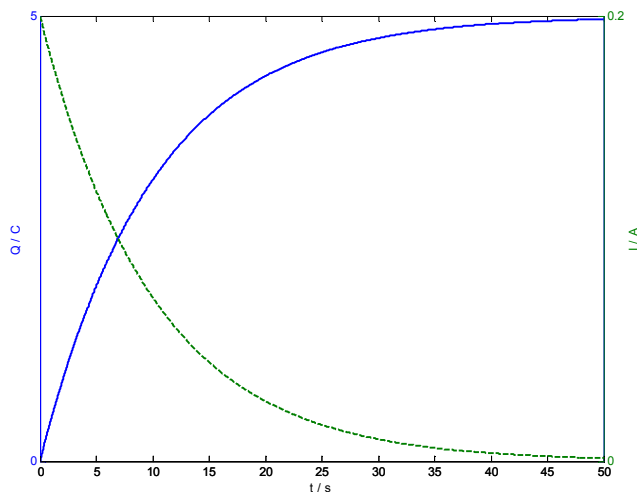
$$Q(t) = 5 \left(1 - e^{-\frac{t}{10\text{s}}} \right) \text{mC} .$$

Določimo tok naelektritve, če smer toka označimo v smeri pozitivne elektrode.

Glede na označitev moramo uporabiti enačbo

$$i = i_{\text{v smeri elektrode}} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(5 \left(1 - e^{-\frac{t}{10\text{s}}} \right) \text{mC} \right) = -5e^{-\frac{t}{10\text{s}}} \text{mC} \cdot \left(-\frac{1}{10\text{s}} \right) = 0,5e^{-\frac{t}{10\text{s}}} \text{mA} .$$

Pozitivni rezultat pomeni, da teče v smeri pozitivne elektrode pozitivni naboj.



SLIKA: Elektrenje kondenzatorja. Naboj (modra polna črta) eksponentno narašča proti vrednosti 5 mC, tok pa je v začetku največji in se s časom manjša proti nič.

Naboj kot integral toka.

Vzamemo enačbo $i = \frac{dQ}{dt}$, pomnožimo z dt in dobimo $i \cdot dt = dQ$. Z integracijo na obeh straneh enačbe dobimo

$$Q = \int_0^{Q(t)} dQ = \int_0^t i \cdot dt , \text{ torej}$$

$$Q = \int_0^t i \cdot dt .$$

Primer: Ali dejansko dobimo nazaj rezultat za naboj na elektrodi iz prejšnjega primera, če integriramo tok? Velja

$$Q = \int_0^t i \cdot dt = \int_0^t 0,5e^{-\frac{t}{10s}} \text{mA} \cdot dt = 0,5\text{mA} \cdot (-10s) e^{-\frac{t}{10s}} \Big|_0^t = 5 \left(1 - e^{-\frac{t}{10s}} \right) \text{mC}.$$

Primer: Preverimo še primer, ko smo imeli na elektrodah spremembo naboja

$$Q(t) = Q_0 - \frac{12\text{C}}{10\text{s}} t \text{ in smo izračunali, da teče v smeri elektrode tok } -1,2\text{ A}.$$

Če sedaj iz toka računamo naboj dobimo

$$Q(t) = \int_0^t i \cdot dt = \int_0^t (-1,2\text{ A}) \cdot dt = -1,2\text{ A} \int_0^t dt = -1,2\text{ A} \cdot t.$$

Ugotovimo, da se v tem primeru rezultat razlikuje za konstanto Q_0 . Bolj splošno bi

$$\text{moral zapisati } \int_{Q_0}^{Q(t)} dQ = \int_0^t i \cdot dt = -1,2\text{ A} \cdot t \text{ in } Q(t) = Q_0 - 1,2\text{ A} \cdot t.$$

Fizikalna slika: Ugotovimo, da se množina pozitivnega naboja na telesu zmanjšuje, ko teče na telo negativen tok. Če upoštevamo, da je naboj, ki se »pretaka« v prevodnikih, posledica premikanja elektronov (ki imajo negativen naboj), potem lahko ugotovimo, da v smeri elektrode potujejo elektroni in zmanjšujejo koncentracijo pozitivnega naboja.

Konstanten tok. Ob konstantnem toku velja linearna zveza med nabojem in tokom

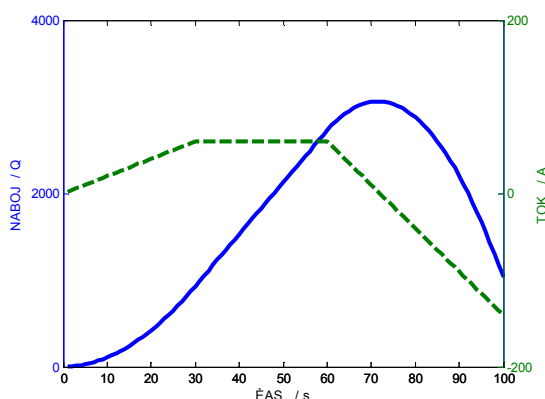
$$Q = \int_0^T I_0 \cdot dt = I_0 T.$$

To zvezo poznamo že iz srednješolske fizike: naboj je produkt toka in časa. Ugotovimo lahko omejeno veljavnost zapisa $Q = i \cdot t$, saj velja le za konstantne toke.

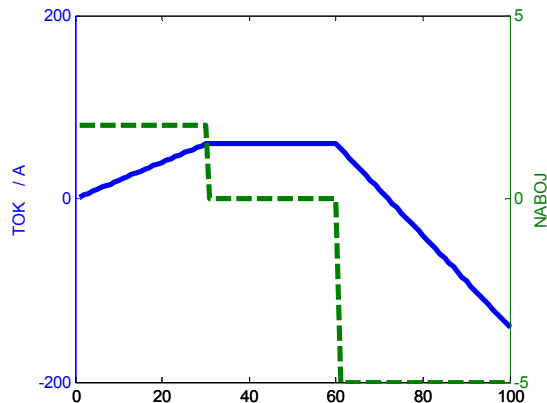
Fizikalni pomen integracije:

Integracija pomeni seštevanje infinitezimalno majhnih koščkov površine. V našem primeru seštevamo produkt toka in malih delov časa. Naboj je torej enak površini pod i - t krivuljo.

Enačba velja, če je tok konstanten, če pa ni, je potrebno uporabiti integralni račun.



SLIKA: Tok (zelena črtkana črta) in naboj kot integral toka (modra polna črta.)



```
% Matlabo ukazi
a=30;b=30;c=40
f=[2*ones(1,a),0*ones(1,b),-5*ones(1,c)]

x=[1:1:(a+b+c)]

plotyy(x,cumsum(f),x,f)
figure
plotyy(x,cumsum(cumsum(f)),x,cumsum(f))
```

SLIKA: Naboj (modra polna črta) in tok kot odvod toka (zelena črtkana črta).

V povezavi z zakonom o ohranitvi energije je tudi **1. Kirchhoffov zakon**, ki pravi, da je vsota vseh tokov v spojišče enaka nič. Na primeru pogledjmo, če je splošno veljaven:

Primer: Ob trenutku $t = 0$ s začne teči tok 10 A v določeno neutralno območje, iz njega pa obenem začne izstopati tok 5 A. Določimo količino naboja v tem območju ob času $t = 2$ s.

Naboj, ki se nakopiči ob času 2 s zaradi toka 10 A je $Q_1 = \int_0^{2s} i_1 dt = 10A \cdot 2s = 20As$,

izstopajočega naboja zaradi toka 5 A stran od območja (ali tudi -5 A v to območje) pa je

$Q_2 = \int_0^{2s} i_2 dt = -5A \cdot 2s = -10As$. Vsota je 10 As. V začetku je bilo območje neutralno, po

dveh sekundah pa je bilo v njem 10 C naboja. Ali zakon o ohranitvi naboja ne velja za to območje?

Za to območje ne velja zakon o ohranitvi naboja, ker ne gre za izoliran sistem. Da bi dobili izoliran sistem, moramo upoštevati še »rezervoar, od koder s tokom 10 A prihajajo naboji in rezervoar kamor s tokom -5A odhajajo naboji. Če bi to upoštevali, bi bila vsota nabojev v takem sistemu konstantna.

SLIKA: Neizoliran in izoliran sistem.

Ugotovili smo, da se v določenem območju lahko naboj kopiči, torej ni nujno, da bo tok, ki v to območje vstopa enak izstopajočemu toku. Da bi bil Kirchhoffov zakon veljaven, mora veljati, da tokovi vstopajo in izstopajo v izoliran sistem, torej sistem, kjer se naboj ne kopiči.

Vprašanja:

- 1) Kolikšna je najmanjša vrednost naboja?

- 2) Kakšno lastnost manifestirajo električni naboji?
- 3) Kaj »pravi« zakon o ohranitvi naboja?
- 4) Kakšna je zveza med tokom in nabojem – kontinuitetna enačba?
- 5) Kdaj velja $i = +\frac{dQ}{dt}$ in kdaj $i = -\frac{dQ}{dt}$?
- 6) V katerem primeru lahko korektno uporabimo zvezo $Q = i \cdot t$?
- 7) Skiciraj poljubno obliko toka in temu ustrezen naboj. Upoštevaj predznake.
- 8) Skiciraj poljubno obliko spremembe naboja in temu ustrezen tok. Upoštevaj predznake.

V nadaljevanju:

Da telesa naelektrimo potrebujemo določeno silo. Lahko to silo ustvarimo sami, recimo z drgnjenjem dveh teles (triboelektrika), z vrtenjem elektrostatičnega ali pa kar pravega generatorja, lahko uporabimo že ločene naboje v baterijah itd, lahko pa so telesa naelektrena že zaradi sil, ki delujejo v naravi. V nadaljevanju se bomo spraševali, kako ločiti naboje in kako določiti (izračunati, izmeriti) električne sile med dvema ali več naelektrenimi telesi.

6. Sila na točkaste naboje

Ugotovili smo, da med naboji deluje sila, ki je odbojna za enako predznačene in privlačna za nasprotno predznačene naboje.

SLIKA: Odbojna in privlačna sila med naboji.

Osnovno zakonitost je s pomočjo eksperimenta s torzijsko tehtnico dognal Charles Augustin de Coulomb. Ugotovil je, da je sila med dvema naelektrenima kroglicama proporcionalna produktu nabojev in inverzno proporcionalna kvadratu razdalje med kroglicama. Matematično to zapišemo kot

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

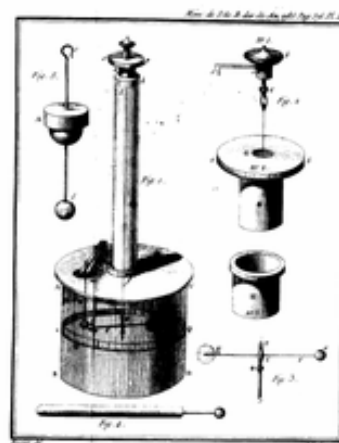
kjer je k določena konstanta in je odvisna od tega, kaj izberemo za osnovno enoto. V sistemu merskih enot, ki je v veljavi dandanes (SI), velja

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ in je enaka } k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}}.$$

ϵ_0 imenujemo dielektrična konstanta vakuumu in je enaka $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$. V bistvu je zrak obnaša podobno

kot vakuum, zato omenjen zakon dovolj dobro drži tudi v zračni atmosferi.

Da bi bila enačba točna morata biti kroglici čim manjši. Eksaktno enačba velja le za tako imenovane **točkaste elektrine**. To je čista matematična formulacija, saj točkastih nabojev v naravi ni. Še tako majhen naboj ima določen polmer, četudi majhen. Je pa koncept točkaste elektrine (točkastega naboja) zelo pomemben v elektrotehnik in z njegovo pomočjo izpeljemo izraze za silo med naelektrenimi telesi.



SLIKA: Coulombova torzijska tehtnica s katero je izvajal poskuse in ugotovil povezavo med nabojem in silo.

Primer: Določimo električno silo med dvema točkastima nabojema $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ in $Q_2 = 5 \mu\text{C}$, ki sta oddaljena za 1 cm.

$$\text{Sila je } F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{2\mu\text{C} \cdot 5\mu\text{C}}{(0,01\text{m})^2} = 900 \text{ N}.$$

Iz rezultata lahko ugotovimo, da smo enoto N(ewton) kar pripisali, saj bi po izvajanju morala biti enota za silo VAs/m. To tudi je ekvivalentna enota za moč, le da je bolj običajno, da moč izrazimo z enoto iz mehanike, newtnom.

Izračun sile med naboji je torej preprost. Potrebno pa je poudariti, da je sila vektorska veličina, saj ima poleg velikosti tudi smer. Kot smo že omenili, je smer sile taka, da se enako naznačena naboja odbijata, nasprotno naznačena pa privlačita. To pravilo moramo le še zapisati v matematični obliki in ga upoštevati pri izračunu sile. Pri tem si pomagamo z vektorskim računom, kjer silo predstavimo kot vektor, prav tako pa tudi razdalje do točk, kjer se naboji nahajajo.

Imejmo točkasta naboja Q_1 in Q_2 , ki se nahajata v točkah T_1 in T_2 , kjer je točka T_1 določena s koordinatami (x_1, y_1, z_1) in T_2 z (x_2, y_2, z_2) . Vektor iz koordinatnega izhodišča do točke T_1 označimo z $\vec{r}_1$ in ima komponente (x_1, y_1, z_1) ter $\vec{r}_2$ s komponentami (x_2, y_2, z_2) .

Med točkama T_1 in T_2 zapišemo vektor $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, kar je s komponentami enako $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Da bi izračunali vektor sile, moramo vrednosti, določeni z enačbo $F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, dodati smer. Smer sile bo v smeri vektorja $\vec{r}_{12}$ in sicer tako, da bo velikost tega vektorja enaka 1. To pa dobimo tako, da vektor delimo z njegovo absolutno vrednostjo (amplitudo). Ta vektor imenujemo enotski vektor in ga dobimo kot

$$\vec{e}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}.$$

Sila med točkastima nabojema Q_1 in Q_2 zapisana v vektorski obliki je

$$\boxed{\vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}}}. \text{ To enačbo imenujemo } \mathbf{Coulombov zakon}.$$

Zapisana sila je sila na naboj Q_2 , če pa želimo izraziti silo na naboj Q_1 moramo obrniti vektor $\vec{r}_{12}$ oziroma upoštevati $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

SLIKA: Sila med nabojema Q_1 in Q_2 .

Primer: Določimo električno silo med točkastima nabojema $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ in $Q_2 = -5 \mu\text{C}$. Q_1 se nahaja v točki $T_1(1,0,2)\text{cm}$, naboj Q_2 pa v točki $T_2(2,3,1)\text{cm}$.

Zapišimo točki z vektorjema $\vec{r}_1$ in $\vec{r}_2$ ter tvorimo vektor

$\vec{r}_{12} = (2-1, 3-0, 1-2)\text{cm} = (1, 3, -1)\text{cm}$. Enotski vektor dobimo tako, da delimo vektor z njegovo absolutno vrednostjo.

$$|\vec{r}_{12}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} \text{ cm} = \sqrt{11} \text{ cm}$$

in

$$\vec{e}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{(1,3,-1)\text{cm}}{\sqrt{11}\text{cm}} = \frac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}}.$$

Sila na naboj Q_2 je torej

$$\begin{aligned}\vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mu\text{C} \cdot (-5\mu\text{C})}{11\text{cm}^2} \frac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}} = \\ &= -9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{11 \cdot 10^{-4}\text{m}^2} \frac{10^{-11}\text{A} \cdot \text{s}}{\sqrt{11}} (1,3,-1) \text{N}\end{aligned}$$

Rezultat je negativen, torej sila kaže v nasprotno smer kot vektor $\vec{r}_{12}$, kar je seveda pravilno, saj sta naboja nasprotnega predznaka in se torej privlačita. Kolikšna je komponenta sile v smeri določene osi? Pomnožimo komponente z 24,7 in dobimo:

$$\vec{F}_{12} = -24,7 \text{ N} \cdot \vec{e}_x + 74 \text{ N} \cdot \vec{e}_y + 24,7 \text{ N} \cdot \vec{e}_z$$

Superpozicija sil. Kaj pa če imamo tri ali več nabojev? Kako določimo silo na določen naboj? Določimo jo preprosto s seštevanjem posameznih prispevkov sil. Matematično temu rečemo superpozicija in princip seštevanja sil kot superpozicija sil. Sila na Q_1 bi torej bila enaka vsoti sil med naboje Q_1 in Q_2 , Q_1 in Q_3 , Q_1 in Q_4 itd.

$$\vec{F}_{Q_1} = \vec{F}_{Q_2 \rightarrow Q_1} + \vec{F}_{Q_3 \rightarrow Q_1} + \vec{F}_{Q_4 \rightarrow Q_1} + \dots$$

Primer: Poleg nabojev Q_1 in Q_2 iz gornjega primera imamo še naboj $Q_3 = 3 \mu\text{C}$, ki se nahaja na mestu $T_3(2,3,-3)\text{cm}$. Določite skupno silo na naboj Q_2 .

Silo med naboje Q_3 in Q_2 je nekoliko lažje izračunati, saj je razdalja med naboje 1 cm (razlika samo v smeri z osi), ker je en naboj pozitiven drugi pa negativen, bo sila na Q_3 v smeri naboja Q_2 , torej v smeri $-z$ osi. Rezultat bo torej

$$\begin{aligned}\vec{F}_{32} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q_2}{r_{32}^2} \vec{e}_{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|3\mu\text{C} \cdot (-5\mu\text{C})|}{(4\text{cm})^2} (-\vec{e}_z) = \\ &= -9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{16 \cdot 10^{-4}\text{m}^2} \frac{15 \cdot 10^{-12}\text{A} \cdot \text{s}}{\vec{e}_z} = -84,38 \cdot \vec{e}_z \text{ N}\end{aligned}$$

Skupni seštevek je

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} = -24,7 \text{ N} \cdot \vec{e}_x + 74 \text{ N} \cdot \vec{e}_y + 59,675 \text{ N} \cdot \vec{e}_z.$$

Vprašanja:

- 1) Kdaj je sila med dvema naboje odbojna in kdaj je privlačna?
- 2) Razloži Coulombov zakon.
- 3) Kako določimo razdaljo med dvema naboje, če sta mesti nabojev podani s koordinatami?
- 4) Kako tvorimo enotski vektor?
- 5) Zapišite vektor sile med naboje.
- 6) Kako računamo silo na naboj v okolici več nabojev?

7. Električna poljska jakost

Pojem električne poljske jakosti je en najpomembnejših konceptov v elektrotehniki. V osnovi abstrakten pojem se bo kasneje izkazal kot ključen za določanje napetosti in energije.

Električna poljska jakost je definirana kot sila normirana na enoto naboja, matematično

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_t}.$$

Električno poljsko jakost v poljubni točki v prostoru določimo tako, da v to točko postavimo poskusni (testno) naboj Q_t in določimo silo na to elektrino. Nato silo delimo s poskusnim nabojem Q_t in dobimo električno poljsko jakost.

Električna poljska jakost na oddaljenosti r od naboja Q je torej enaka

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Primer: Določimo električno poljsko jakost v koordinatnem izhodišču $(0, 0, 0)$, če se v točki $T_1(1,0,2)\text{cm}$ nahaja $Q_1 = 2 \mu\text{C}$.

Izračuna se lahko lotimo na enak način, kot da bi določali silo na naboj Q v točki $(0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned}\vec{F}_Q &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_1}{r_2^2} (-\vec{e}_r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot 2\mu\text{C}}{5\text{cm}^2} \frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}} = \\ &= -9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{5 \cdot 10^{-4}\text{m}^2} \frac{Q \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{A} \cdot \text{s}}{\sqrt{5}} (1,0,2) = -1,61 \cdot 10^7 \cdot Q \cdot (1,0,2) \text{N}\end{aligned}$$

Električna poljska jakost pa je

$$\vec{E}_Q = \frac{\vec{F}_Q}{Q} = -1,61 \cdot 10^7 \cdot (1,0,2) \text{N/C} = -1,61 \cdot 10^7 \cdot (1,0,2) \text{V/m}.$$

Enota za električno poljsko jakost je V/m.

Iz primera vidimo, da lahko smer električne jakosti določimo kot smer sile na namišljen pozitivni naboj. V principu je vseeno, kako velik je ta testni naboj, saj vidimo, da v enačbi sploh ne nastopa – v enačbi nastopa naboj, ki povzroča silo na testni naboj. Ker je naboj 1 C zelo veliko naboja, ki ga je (1) nemogoče zbrati v točki in (2) tak naboj bi vsekakor predstavljal izrazito veliko silo na okoliške naboje in povzročil njihovo premaknitev. Bolj primerna **definicija za električno poljsko jakost bi torej bila, da je to sila na majhen poskusni naboj**, matematično

$$\vec{E} = \lim_{Q_t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{Q_t}.$$

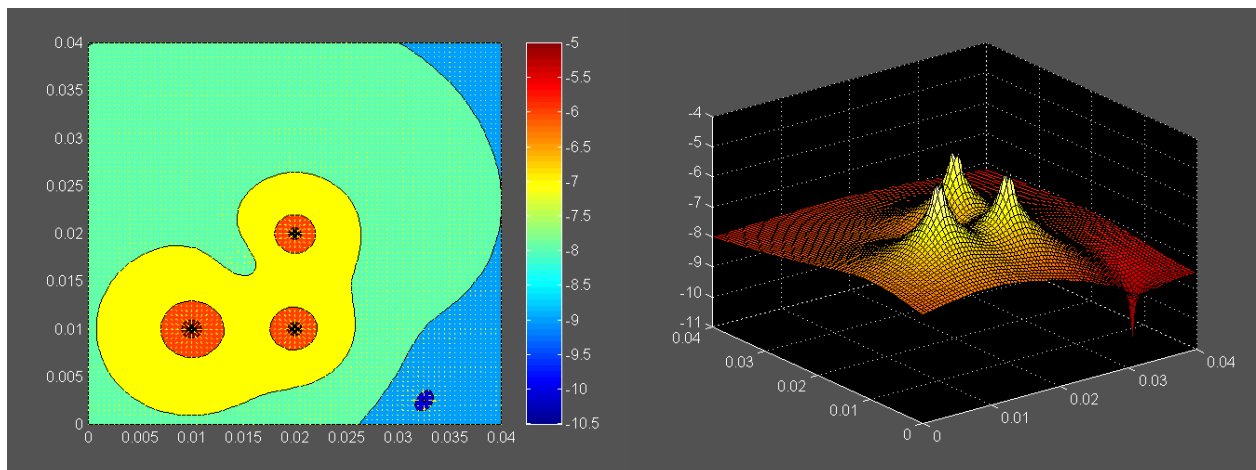
V čem je potem razlika med silo in električno poljsko jakostjo? Pomembna razlika je v tem, da je mogoče sile določati le med naboji, medtem ko je **električna poljska jakost definirana v vsaki točki v prostoru**.

Superpozicija električnega polja. Kako določimo električno poljsko jakost v točki, če je v okolici več nabojev? Enako kot pri sili. V točko postavimo poskusni naboj, izračunamo silo na poskusni naboj kot superpozicijo posameznih prispevkov sile ter nato delimo s poskusnim nabojem. Oziroma, določimo električno poljsko jakost za vsak naboj posebej in vplive seštejemo.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots = \sum_i \vec{E}_i$$

SLIKA: Več nabojev in električna poljska jakost v točki kot superpozicija posameznih polj.

Prikazovanje električne poljske jakosti v prostoru. Ker je polje definirano v vsaki točki prostora, pomeni, da lahko v vsaki točki prostora ponazorimo polje z vektorjem, ki kaže smer in velikost polja v točki. Običajno se spoprijazimo s tem, da rišemo vektorje električne poljske jakosti v določenih točkah v prostoru in tako prikažemo vektorsko polje. Druga možnost je, da prikazujemo velikost polja (vendar ne smeri) z 2D ali 3D prikazom.



SLIKA: 2D in 3D prikaz električne poljske jakosti za štiri naboje. Tri pozitivne in enega negativnega.

Vprašanja: Definicija električne poljske jakosti. Enota. Problem osnovne definicije. Razlika med silo in električno poljsko jakostjo. Superpozicija polj.

8. Porazdelitev naboja

Spoznali smo že koncept točkastega naboja, za katerega pa smo že rekli, da ga v naravi ni. Najmanjši naboj je naboj elektrona, s svojo maso in kvantizirano množino naboja. Nadaljnji problem je, da je naboja običajno zelo veliko. Če samo malo podrgnemo, se med telesi prenesejo milijoni elektronov. Mi pa smo sposobni izračunati silo na nekaj točkastih nabojev. No, v principu lahko s superpozicijo izračunamo tudi silo med nekaj milijoni nabojev. Kar pa ni običajno. Potrebno je najti nek drug način obravnave naelektrenih teles. Našli ga bomo v konceptu različnih tipov porazdelitve naboja v prostoru. Predpostavili bomo, da je naboj zaradi velike količine delcev porazdeljen zvezno. V tem smislu bomo definirali tri načine porazdelitve nabojev: volumsko, površinsko in linijsko porazdelitev naboja.

Tri načini porazdelitve naboja:

- 1) naboj, porazdeljen v volumnu. Govorimo o volumski porazdelitvi naboja, ki jo opišemo z **gostoto volumske porazdelitve naboja** ρ . Enota je C/m^3 . Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po volumnu, lahko gostoto volumskega naboja določimo kot $\rho = \frac{Q}{V}$, oziroma celotni naboj kot $Q = \rho \cdot V$. Bolj pogosto je, da ta naboj ni prozadeljen enakomerno, tedaj velja zveza $Q = \rho \cdot V$ le za en majhen del celotnega naboja v nekem majhnem volumnu, torej $\Delta Q = \rho \cdot \Delta V$ in če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno majhen), dobimo $dQ = \rho \cdot dV$. Celotni naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po volumnu: $Q = \int_V \rho \cdot dV$.
- 2) naboj, porazdeljen po površini. Govorimo o površinski porazdelitvi naboja, ki jo opišemo z **gostoto površinske porazdelitve naboja** σ . Enota je C/m^2 . Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po površini, lahko površinsko gostoto naboja določimo kot $\sigma = \frac{Q}{A}$, oziroma celotni naboj kot $Q = \sigma \cdot A$. Bolj pogosto je, da ta naboj ni prozadeljen enakomerno, tedaj velja zveza $Q = \sigma \cdot A$ le za en majhen del celotnega naboja na neki majhni površini, torej $\Delta Q = \sigma \cdot \Delta A$ in če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno majhen), dobimo $dQ = \sigma \cdot dA$. Celotni naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po površini: $Q = \int_A \sigma \cdot dA$.
- 3) naboj, porazdeljen po liniji (žici). Govorimo o linijski porazdelitvi naboja, ki jo opišemo z **gostoto linijske porazdelitve naboja** q . Enota je C/m . Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po liniji, lahko linijsko gostoto naboja določimo kot $q = \frac{Q}{L}$, oziroma celotni naboj kot $Q = q \cdot L$. Bolj pogosto je, da ta naboj ni porazdeljen enakomerno, tedaj velja zveza $Q = q \cdot L$ le za en majhen del celotnega naboja na neki majhni razdalji, torej $\Delta Q = q \cdot \Delta L$ in če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno

majhen), dobimo $dQ = q \cdot dl$. Celotni naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po liniji: $Q = \int_L q \cdot dl$.

9. Koordinatni sistemi

Zakaj uporabljati več koordinatnih sistemov, ce nam je kartezični koordinatni sistem (KKS) najbolj poznan in najbolj razumljiv? Odgovor je preprost: zato, ker je v določenih primerih izračun mnogo bolj preprost z izbiro drugega koordinatnega sistema. Na primer, ce je naboj porazdeljen po površini cilindra. Sama po sebi se ponuja najboljša izbira cilindrični (ali valjni) koordinatni sistem, itd.

Za koordinatne sisteme, ki jih obravnavamo je značilno to, da so vse ravnine med sabo pravokotne. Takim KS recemo ortogonalni.

Tocko v vsakem koordinatnem sistemu določimo s presekom treh ravnin. V KKS so to tri ravnine:

$$x = x_1$$

$$y = y_1$$

$$z = z_1$$

Koordinate v KKS določa trojček (x,y,z) .

Vzdolž vsake osi lahko določimo diferencial dolžine. Dobimo ga z limitiranjem $dl = \lim_{DL \rightarrow 0} DL$.

V smeri osi X je to dx , v smeri osi Y je dy in v smeri Z je dz . V splošnem lahko **diferencial poti** v KKS zapišemo kot vektor:

$$d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$$

$$d\vec{l} = (dx, dy, dz)$$

Poleg tega bomo v nadaljevanju potrebovali še (diferencialno) majhne dele površine in volumna. V KKS so diferencialne površine kvadrati, recimo $dx \cdot dy$. Tem diferencialom pogosto dodamo še smer, ki kaže v smeri, ki je pravokotna na površino. To je smer **normale** na površino. Kvadratku $dx \cdot dy$ bi torej pripisali smer osi Z, itd. V splošnem **diferencial površine** lahko zapišemo kot vektor

$$d\vec{A} = \vec{e}_x dy \cdot dz + \vec{e}_y dx \cdot dz + \vec{e}_z dx \cdot dy$$

Diferencial površine v KKS je mala kocka s stranicami dx, dy, dz , torej je diferencial volumna produkt treh diferencialov poti:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

Primeri:

Cilindrični (valjni) koordinatni sistem (CKS). Tocka je določena s presekom treh ravnin

$$r = r_1$$

$$\phi = \phi_1$$

$$z = z_1$$

Prva ravnina je plašč valja, druga je polravnina okoli Z osi, ki jo doloca kot ϕ , tretja pa ravnina z eno vrednostjo koordinate Z. Koordinate v CKS sestavlja torej trojcek (r, ϕ, z) .

Diferencial poti je

$$d\vec{l} = \vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_\phi \cdot r \cdot d\phi + \vec{e}_z \cdot dz.$$

Diferencial površine je

$$d\vec{A} = \vec{e}_r \cdot r \cdot d\phi \cdot dz + \vec{e}_\phi \cdot dr \cdot dz + \vec{e}_z \cdot dr \cdot r \cdot d\phi.$$

Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri osi R (rotacijska simetrija), V tem primeru je diferencial v smeri osi Z določen z $dA_z = 2\pi r dr$

Diferencial volumna je

$$dV = dr \cdot r \cdot d\phi \cdot dz.$$

Primeri:

Primer: Dolocite površino diska z notranjim polmerom 1 cm in zunanjim polmerom 6 cm. Vzamemo diferencial površine, ki kaže v smeri osi Z in zapišemo dvojni integral

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{1\text{cm}}^{6\text{cm}} r \cdot dr \cdot d\phi = 2\pi \int_{1\text{cm}}^{6\text{cm}} r \cdot dr = 2\pi \left. \frac{r^2}{2} \right|_{1\text{cm}}^{6\text{cm}} = \pi [(6\text{cm})^2 - (1\text{cm})^2] = 35\pi \text{ cm}^2.$$

Primer: Po površini plašca valja višine 2 m polmera 5 cm se spreminja površinska gostota naboja z izrazom $s = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \mu\text{C/m}$. Dolocimo površinsko gostoto naboja.

Uporabimo zvezo $Q = \int_A s \cdot dA$, ki v našem primeru pomeni

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\text{m}} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \mu\text{C/m}^2 \cdot r \cdot d\phi \cdot dz = 5\text{cm} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot 2 \right)_0^{2\pi} \mu\text{C/m} \cdot 2\text{m} = 0,1 \cdot 4 \mu\text{C} = 0,4 \mu\text{C}.$$

Sfericni (krogeljni) koordinatni sistem (SKS). Tocka je dolocena s presekom treh ravnin

$$r = r_1$$

$$J = J_1$$

$$j = j_1$$

Prva ravnina je plašč krogelje, druga je površina stožca (kjer je J (theta) kot od Z osi navzdol), tretja pa polravnina znana iz CKS. Koordinate v SKS sestavlja torej trojcek (r, J, j) .

Diferencial poti je

$$d\vec{l} = \vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_J \cdot r \cdot dJ + \vec{e}_j \cdot r \cdot \sin(J) \cdot dj.$$

Diferencial površine je

$$d\vec{A} = \vec{e}_r \cdot r^2 \cdot \sin(J) \cdot dJ \cdot dj + \vec{e}_J \cdot r \cdot \sin(J) \cdot dj \cdot dr + \vec{e}_j \cdot r \cdot dr \cdot dJ.$$

Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri osi R (rotacijska simetrija),

V tem primeru je diferencial v smeri osi R določen z $dA_J = 4\pi r dr$

Diferencial volumna je

$$dV = r^2 \cdot \sin(J) \cdot dr \cdot dJ \cdot dj.$$

Primer: Določimo površino kroglice polmera R . Vamemo diferencial volumna kroglice

$dV = r^2 \cdot \sin(J) \cdot dr \cdot dJ \cdot dj$ in ga integriramo

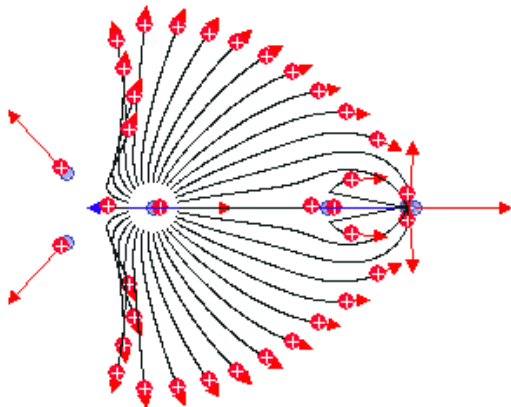
$$V = \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot dr \cdot \sin(J) \cdot dJ \cdot dj = \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \cdot (-\cos(J)) \Big|_0^{\pi} \cdot j \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

10. Električna poljska jakost porazdeljenih nabojev

Spoznali smo že definicijo električne poljske jakosti ter enačbo za izračun polja v okolici točkastega naboja.

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{Polje točkastega naboja}$$

Nadalje smo ugotovili, da je število presežkov nabojev pogosto zelo veliko, kar pomeni, da se že ob manjšem drgnenju dveh teles prenese med telesi milijone in milijone elektronov. Da bi izračunali električno poljsko jakost, ki jo povzročajo ti elektroni, bi potrebovali mnogo računanja, saj bi z upoštevanjem superpozicije lahko izračunali prispevek polja vsakega elektrona posebej in vplive sešteli. Tak način računanja bi bil zelo zamuden in nepraktičen, čeprav v pedagoške namene lahko uporabljamo tudi tak način računanja. Seveda na tak način, da upoštevamo manjše število delcev. Tipičen primer je program JaCoB (<http://jacob.fe.uni-lj.si>), ki računa silo med naboji in jih dinamično pomika v smeri rezultantne sile.



SLIKA: Primer izračuna in prikazovanja sil med naboji s programom JaCoB.

Tak način izračunavanja se pogosto uporablja tudi v raziskavah delovanja osnovnih delcev, kjer pa se upošteva tudi lastnosti trkanja delcev. Te metode imenujemo metode Monte Carlo.

Pri izračunu električne poljske jakosti porazdeljenih nabojev pa pogosto predpostavimo, da je zaradi velikega števila delcev naboj porazdeljen zvezno. Spoznali smo že možnost predstavitve porazdelitve nabojev kot volumsko, površinsko ali linijsko gostoto nabojev. Da bi dobili ustrezen izraz za izračun polja, ki ga povzroča določena porazdelitev naboja, se

najprej poslužimo ideje, da če velja za točkasti naboj izraz $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, potem lahko

trdimo, da bo to veljalo tudi za neko malo količino naboja ΔQ , ki se nahaja na majhnem

prostoru (majhnem v primerjavi z razdaljo r). V tem smislu bi za del celotnega naboja lahko določili polje, ki ga povzroča:

$$\Delta \vec{E} = \vec{e}_r \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

S procesom limitiranja diferenčnih vrednosti dobimo izraz za diferencial polja, ki ga povzroča diferencial naboja:

$$d\vec{E} = \vec{e}_r \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Da bi določili vpliv vseh delnih vrednosti oz. diferencialov naboja, moramo posamezne prispevke sešteti, kar v zveznem prostoru predstavlja integracijo:

$$\vec{E} = \int_{\text{po vseh Q-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r. \quad \text{Izraz za izračun polja porazdeljenih nabojev}$$

SLIKA: Integracija prispevkov diferencialov naboja za izračun električne poljske jakosti.

Teoretično lahko na ta način določimo električno poljsko jakost za poljubno porazdelitev naboja. Praktično pa smo omejeni s primeri, ko je zapisani integral še analitično rešljiv. V nasprotnem primeru nam preostane numerična integracija vplivov posameznih majhnih delov

celotnega naboja: $\vec{E} = \sum \Delta \vec{E}_i = \sum_i \vec{e}_{r_i} \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}.$ ¹

Postopek za določitev polja porazdeljenih nabojev. Zapišimo postopek, po katerem lahko določimo električno poljsko jakost za porazdeljen naboj z uporabo enačbe

$$\vec{E} = \int_{\text{po vseh Q-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r :$$

- 1) Naboji, ki povzročajo polje so porazdeljeni po volumnu, površini ali liniji. V tem smislu bo diferencial naboja enak $dQ = \rho \cdot dV$, $dQ = \sigma \cdot dA$ ali $dQ = q \cdot dl$.

¹ V praksi imamo na razpolago še nekaj drugih možnih načinov reševanja, ki jih bomo omenili v nadaljevanju.

- 2) Da bi natančneje določili diferencial volumna, površine ali razdalje, moramo našo naelektreno strukturo umestiti v določen koordinatni sistem. Če bo struktura na kateri se nahaja naboj v obliki žice, bo najbolj primerna uporaba cilindričnega koordinatnega sistema, če bo naboj v volumnu krogle bo primeren sferični K.S., itd.
- 3) Glede na izbran koordinatni sistem določimo ustrezen diferencial. Na primer, če se naboj spreminja vzdolž palice, postavljene v osi X, bo $d\vec{l} = \vec{e}_x dx$ in $dQ = q \cdot dx$. Če se naboj nahaja na površini valja, bo potrebno uporabiti izraz $dQ = \sigma \cdot dA$, pri čemer bo $dA = r \cdot d\varphi \cdot dz$, itd.
- 4) Postaviti moramo diferencial naboja na neko poljubno mesto na strukturi in določiti vektor r kot funkcijo koordinat. Vektor r je vektor od mesta diferenciala naboja dQ do točke, kjer želimo izračunati polje.
- 5) Zapišemo integral ter določimo meje integracije. Meje integracije so določene s koordinatami na oseh, ki zajamejo celoten naboj.
- 6) Rešimo integral.

Poiščimo električno poljsko jakost v okolici naelektrenih preprostih struktur, kot so naelektrena premica, daljica, naelektren prstan, naelektrena ravnina.

Polje naelektrene premice (prema elektrina):

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Polje naelektrene daljice: (položene vzdolž Z osi)

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\vec{e}_r (\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)) + \vec{e}_z (\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)) \right]$$

Polje v osi naelektrenega obroča (polmer obroča = a):

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{q \cdot a \cdot z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

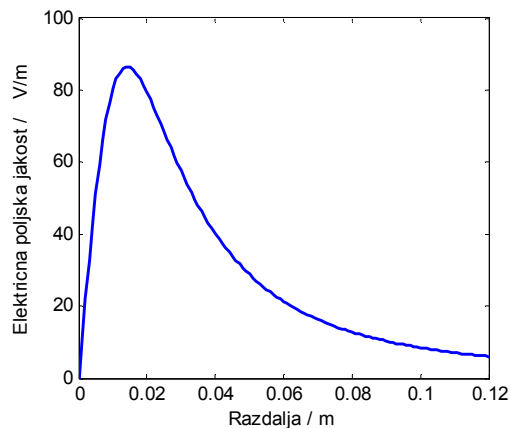
Polje v središču naelektrenega prstana ($z = 0$):

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{q}{2\epsilon_0 a}$$

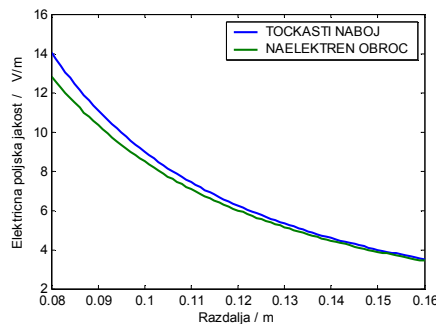
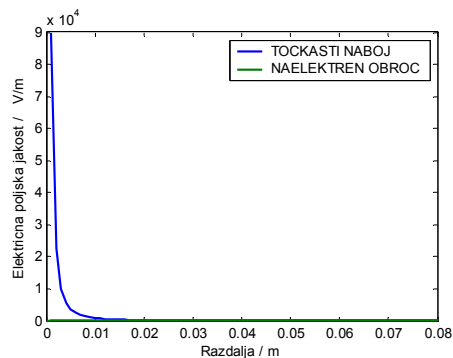
Polje naelektrene ravnine (normala v smeri osi Z):

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Primeri



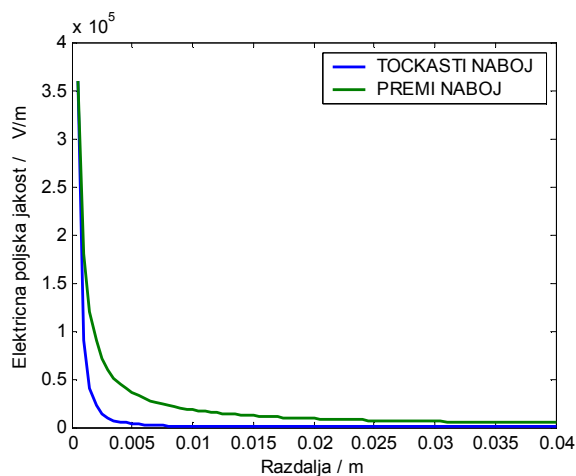
SLIKA: Polje v osi naelektrenega obroča. Polmer obroča je 2 cm, na njem je enakomerno (linijsko) porazdeljen naboj 0,1 nC.



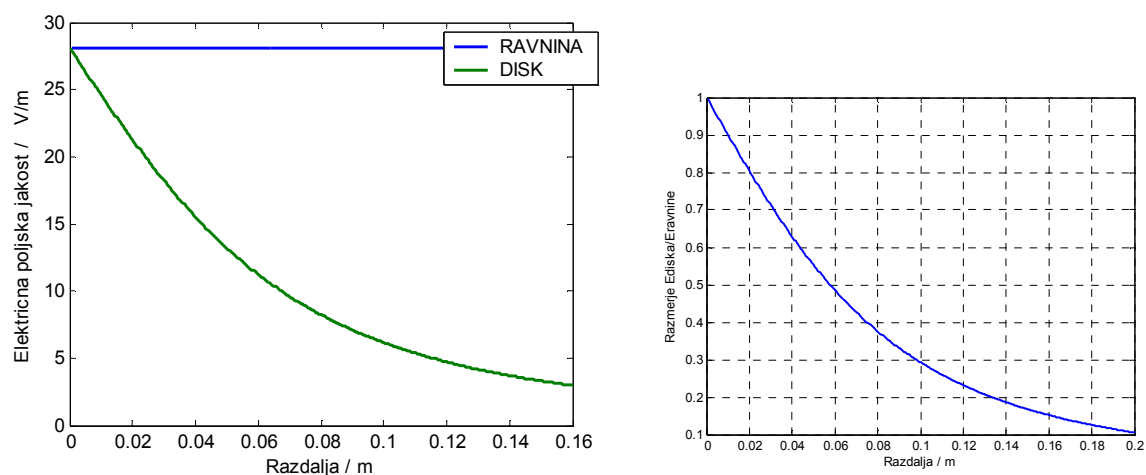
SLIKA: Primerjava med poljem točkastega naboja in naelektrenega obroča. Oba imata enako velik naboj (0,1 nC, polmer prstana je 2 cm). Levo: polje v bližini obroča. Desno: polje v

oddaljenosti od obroča. V oddaljenosti od prstana postane izraz $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ enakovreden

izrazu $\vec{E} = \vec{e}_z \frac{q \cdot a \cdot z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$, v bližini obroča (razdalja manjša od nekaj polmerov obroča) pa je razlika velika.



SLIKA: Primerjava med poljem točkastega in premega naboja. Polje točkastega naboja upada s kvadratom razdalje ($1/r^2$), polje premega pa z razdaljo ($1/r$).



SLIKA: Primerjava med poljem naelektrenega diska in neskončne ravnine z enako velikim površinskim nabojem. Polmer diska je 8 cm. Desna slika kaže razmerje med poljem diska in poljem ravnine. Tik ob površini je izračun ustrezen, na razdalji polmera diska pa je polje diska 38 % polja ravnine.

11. Gaussov zakon

V tem poglavju bomo spoznali Gaussov zakon v integralni obliki, ki je v osnovi posledica Coulombovega zakona, torej dejstva, da polje v okolici točkastega naboja upada s kvadratom razdalje. Da bi razumeli njegov pomen, se moramo najprej seznaniti s pojmi kot so silnice polja, pretočne oz. gostotne cevke in električni pretok ali fluks.

Električno poljsko jakost v prostoru lahko prikažemo z vektorji v prostoru. Če vektorje povežemo z linijami, le te imenujemo **silnice polja**. Prikaz s silnicami je zelo primeren in pogost način prikaza polja. (Konceptualno jih je vpeljal Michael Faraday, ki jih je imenoval lines of force.) Ker so silnice usmerjene v smeri polja, bi po silnici potoval naboj, če bi ga postavili v polje. Pri tem moramo predpostaviti, da vstavitve tega naboja v polje ne bi spremenila samega polja, saj bi tak naboj tudi deloval s silo na tiste naboje, ki ustvarjajo polje v katerem potuje.

SLIKA: Vektorji in silnice polja za prikaz električnega polja v prostoru .

Nadalje je potrebno spoznati koncept **pretoka električnega polja** skozi neko ploskev.¹ Če je polje konstantno, običajno rečemo homogeno, in pravokotno na ravno ploskev površine A , potem je pretok določen kot produkt polja in površine: $E \cdot A$. V nekem smislu JE pretok polja povezan s količino naboja iz katerih izhajajo silnice. Na površini naelektrenega telesa se izkaže produkt $E \cdot A$ direktno proporcionalen količini naboja.

Če je ravna ploskev postavljena prečno na smer homogenega polja, potem je ta pretok enak nič, če pa je pod določenim kotom na ploskev, je potrebno upoštevati kosinus vmesnega kota, pri čemer je to kot med normalo (pravokotnico) na površino in smerjo električnega polja $E \cdot A \cdot \cos(\alpha)$. Po definiciji skalarnega produkta lahko to zvezo zapišemo tudi s skalarnim produktom vektorja polja in vektorja površine, pri čemer je potrebno ponovno poudariti, da je smer vektorja površine določena z normalo na površino (smerjo, ki je pravokotna na površino).

Pretok električnega polja = $\vec{E} \cdot \vec{A}$. (velja za homogeno polje in ravno ploskev)

Primer: Določimo pretok homogenega električnega polja velikosti 5 kV/m, ki je usmerjen pod kotom 30° na normalo ravno površine določene s pravokotnikom dimenzij 3 x 4 m².

¹ Koncept pretoka nekega vektorja skozi določeno površino je splošen pojem, ki se pogosto uporablja za opis določenih veličin.

Odgovor: Pretok je enak $5 \text{ kV/m} \cdot 12 \text{ m}^2 \cdot \cos(30^\circ) = 52 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}$.

SLIKA: Pretok homogenega električnega polja skozi ravno površino.

Pretok nehomogenega polja skozi neravno površino. Kaj pa če polje ni homogeno in/ali če površina skozi katero računamo pretok ni ravna? Tedaj bomo dobili pravilni izraz za pretok na že poznan način: Najprej zapišemo pretok za neko diferenčno majhno površino, na kateri bi homogenost veljala, torej za $\vec{E} \cdot \Delta \vec{A}$, v limiti pa dobimo diferencial pretoka $\vec{E} \cdot d\vec{A}$, celotni pretok električnega polja pa kot $\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$.

Za poljubno obliko polja in površine je pretok električnega polja določen z $\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$.

Tudi pretok električnega polja lahko ponazorimo na enak način kot ponazarjamo silnice polja le da sedaj govorimo o gostotnih ali **pretočnih cevkah**, silnice pa ponazarjajo le stene gostotnih cev. Večji pretok električnega polja dosežemo, če zajamemo več pretočnih cev.

SLIKA: Pretok električnega polja znotraj gostotnic je konstanten (enako velik na poljubnem preseku).

Sedaj pa si pogledjmo vrednost tega pretoka po celotni - zaključeni površini. Včasih ji rečemo tudi **Gaussova površina**. To pomeni, da nas zanima pretok polja skozi površino krogle ali skozi vseh šest stranic kocke ali pač poljubne površine, ki v celoti zaobjame določen objekt. Pri tem niti ni potrebno, da računamo pretok skozi neko površino telesa, lahko je to popolnoma namišljeno (abstraktno) telo. Matematično integracijo po zaključeni površini naznačimo s krogcem v sredini simbola integrala:

$\text{Pretok polja skozi zaključeno površino} = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$
--

Vzemimo kar najpreprostejši primer, kjer je naboj Q postavljen v središče sferičnega koordinatnega sistema in računamo pretok skozi neko zamišljeno površino krogle polmera r :

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r r^2 \sin(\vartheta) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_0^\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Ugotovimo, da je ta integral sorazmeren naboju, ki se nahaja v središču krogle. Ali je to naključje ali to velja za poljubno postavitve naboja znotraj krogle? Z razmislekom, da lahko naboj zamaknemo iz središča koordinatnega sistema, pa se število pretočnic, ki sekajo površino krogle, ne spremeni lahko ugotovimo, da je rezultat enak tudi za poljubno postavitve naboja Q znotraj (namišljene) krogle polmera r .

SLIKA: Število pretočnih cev, ki sekajo površino namišljene krogle je enako za poljubno postavitev naboja znotraj krogle.

SLIKA: Pretočne cevke več nabojev, ki jih zajamemo z namišljeno površino krogle (ali poljubno zaključeno površino).

Če je naboj znotraj zaključene površine več lahko pišemo:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} + \oint_A \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} + \dots = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} + \dots = \frac{\sum_i Q_i|_{\text{znotraj } A}}{\epsilon_0}$$

Kaj pa naboji, ki se nahajajo zunaj krogle? Ugotovimo lahko, da sicer povzročajo polje na površini krogle, vendar je pretok polja v kroglo enak velikemu pretoku polja iz krogle.

SLIKA: Pretok polja skozi zaključeno površino v kateri ni nabojev je enak nič. Če se v zunanji okolici površine nahajajo naboji, je pretok polja, ki vstopa v prostor enak pretoku polja, ki izstopa iz tega prostora.

Torej: Pretok električne poljske jakost skozi sklenjeno (zaključeno) površino je enak zaobjemu naboju (algebrajski vsoti nabojev) deljeno z ϵ_0 . Ta zapis imenujemo **Gaussov zakon**.

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{znotraj A}}}{\epsilon_0}. \quad \text{Gaussov zakon}$$

Pomen Gaussovega zakona:

- 1) Ugotavlja **izvornost** električnega polja. Električno polje izvira iz pozitivnih nabojev in ponira na negativnih.
- 2) **Omogoča izračun naboja** v določenem prostoru ob poznavanju električnega polja na mejah tega prostora.
- 3) **Omogoča izračun električnega polja** v primeru simetrične porazdelitve naboja. V tem primeru namreč polje ni funkcija spremenljivk integracije.
- 4) Gaussov zakon smo spoznali v t.i. integralni obliki. Zapisan je namreč z integralom in velja po določeni površini. Poznamo tudi zapis Gaussovega stavka v diferencialni obliki, ki definira povezavo med električnim poljem in nabojem (gostoto naboja) v točki v prostoru. Ta zakon je en od osnovnih zakonov, ki opisujejo naravo električnega polja. **Gaussov zakon je znan tudi kot ena od štirih Maxwellovih enačb**, ki v celoti opisujejo elektromagnetne pojave.

Primeri izračunov z uporabo Gaussovega zakona:

Primer: Kroglja polmera R ima enakomerno volumsko porazdelitev naboja. Določimo električno poljsko jakost znotraj in zunaj krogle.

$$E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot 4\pi \frac{r^3}{3} / \varepsilon_0$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

12. Delo in energija elektrostatičnega polja

V srednješolski fiziki je veljalo, da je delo enako produktu sile in dolžine poti, torej, če vzdolž poti dolžine l deluje sila F , le ta opravi delo $A = F \cdot l$. Če torej potiskamo voziček v smeri poti dolžine 5 m s silo 100 N opravimo delo 500 N·m ali 500 J. Kaj pa, če voziček potiskamo s silo 100 N v smeri, ki je pod kotom 60° na smer poti? V tem primeru moramo upoštevati le tisto komponento sile, ki deluje v smeri poti. Delo je torej $A = F \cdot l \cdot \cos(\alpha) = 100 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} \cdot \cos(60^\circ) = 250 \text{ J}$. Ugotovimo, da je za izračun dela primerna uporaba skalarnega produkta $A = \vec{F} \cdot \vec{l}$.

SLIKA: Premikanje vozička s konstantno silo a) v smeri poti in b) pod kotom 30° na smer poti.

Kaj pa drugi del sile? Ta sila je usmerjena pravokotno na smer poti in ima za posledico trenje po ploskvi. In koliko energije potrebujemo za premik na poti 5 m? En del te energije je očitno delo 250 J, ki se odraža v spremembi kinetične energije vozička, drug del energije pa potrebujemo za premagovanje sile trenja. Za točen izračun bi torej morali poznati še energijo, ki se porabi pri trenju vozička s podlago.

Delo pri poljubni smeri in velikosti sile in poti. Kaj pa če sila ni konstantna na poti in poleg tega ne deluje vedno v isti smeri glede na pot? Potem lahko zapišemo delo le za en mali (diferenčni) odsek, da dobimo tisti del sile, ki deluje v smeri poti pa uporabimo skalarni produkt. Diferenčni del sile na poti Δl je torej $\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l}$. Z limitiranjem dobimo iz diferenc diferencial: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{l}$, celotno delo pa je seveda integracija po poti od začetne točke do končne točke:

$$A = \int dA = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

SLIKA: Delo sil po poljubni poti.

Delo električne sile. Kako pa izračunamo delo električnih sil (A_e) na naboje? Na popolnoma enak način. Upoštevamo, da je sila na naboj v električnem polju enaka $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$, torej bo delo za premik naboja v električnem polju iz točke T_1 v točko T_2 enako

$$A_e = A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

1. Primer: Vzemimo dva pozitivna naboja oddaljena za 1 cm z množino naboja 10 nC. Koliko dela opravi naboj (zunanji vir) za premik na polovično razdaljo?

Odgovor: naboja postavimo vzdolž X osi, desni naboj se premakne za razdaljo 0,5 cm v levo. Na desni naboj deluje električno polje $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(1\text{cm})^2} \vec{e}_x$, dl pa je usmerjen v smeri – X osi¹.

SLIKA: Razlaga pozitivnega podznaka pri diferencialu poti.

Delo je:

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{T_1}^{T_2} Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_{x_1=1\text{cm}}^{x_2=0,5\text{cm}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x)^2} \vec{e}_x \cdot (\vec{e}_x dx) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right)_{1\text{cm}}^{0,5\text{cm}} = \\ &= -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{0,5\text{cm}} - \frac{1}{1\text{cm}} \right) = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} (10 \cdot 10^{-9} \text{C})^2 \cdot 10^2 \text{m}^{-1} = -9 \cdot 10^{-5} \text{J} \end{aligned}$$

Dobljen rezultat je negativen, kar pomeni, da je morala biti neka zunanja sila (A_z), ki je opravila to delo. Veljati torej mora:

$$A_z + A_e = 0.$$

2. Primer: Določimo delo za premik desnega naboja v desno za 0,5 cm. Rezultat je

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{T_1}^{T_2} Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{x_1=1\text{cm}}^{x_2=1,5\text{cm}} \frac{QQ}{4\pi\epsilon_0(x)^2} \vec{e}_x \cdot (\vec{e}_x dx) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right)_{1\text{cm}}^{1,5\text{cm}} = \\ &= -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{1,5\text{cm}} - \frac{1}{1\text{cm}} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} (10 \cdot 10^{-9} \text{C})^2 \cdot \frac{1}{3} 10^2 \text{m}^{-1} = 3 \cdot 10^{-5} \text{J} \end{aligned}$$

Rezultat je pozitiven, saj polje opravi delo 30 μJ : delec se premakne v drugo točko pod vplivom električne sile.

3. primer: Izračunajmo delo za enak premik kot v prejšnjem primeru le po drugi poti. Izberimo to pot tako, da bo šla najprej v smeri kota za 45° , nato v smeri radija do $r = 2,5 \text{ cm}$ in nato nazaj za kot 45° do končne točke.

¹ Kljub temu, da je $d\vec{l}$ usmerjen v smeri –X osi ni njegova vrednost $-\vec{e}_x dx$, pač pa

$d\vec{l} = -\vec{e}_x (x - (x + dx)) = \vec{e}_x$.

Ugotovimo lahko, da je v smeri kota ($d\vec{l} = \vec{e}_\varphi r d\varphi$) polje enako nič, saj je polje v vsaki točki usmerjeno radialno. Torej je produkt integracije $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ v smeri kota enak nič in je rezultat enak kot prej. Ugotovimo lahko, da je rezultat neodvisen od smeri integracije.

Delo po zaključeni poti. Ker je rezultat integracije polja neodvisen od poti lahko vzamemo dve poljubni poti in zapišemo $\int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, integracija v nasprotni smeri pa bi spremenila predznak integralu $\int_{-L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

SLIKA: Delo od točke T1 do točke T2 po poti L1 in poti L2 je enako.

Integracija polja po zaključeni poti bo torej:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1+(-L_2)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{-L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Prišli smo do pomembnega rezultata, da je **krivuljni integral električne poljske jakosti po poljubni zaključeni zanki enak nič**:

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.}$$

Pri tem je potrebno biti previden, saj smo doslej obravnavali le elektrostatično polje, torej tako, ki se s časom ne spreminja. Zgornji zapis je torej **točen le za elektrostatične polje**. Ko bomo obravnavali dinamično polje bomo ugotovili, da je potrebno zgornji zapis spremeniti – dopolniti.

Delo pri prenosu naboja v neskončnost (kjer je polje enako nič). Določimo še delo, če bi enega od nabojev pustili v neskončnost. Opravljeno delo bi bilo:

$$A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_{r_1}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(r)^2} \vec{e}_r \cdot (\vec{e}_r dr) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_1}^{\infty} =$$

$$= -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_1}$$

SLIKA: Delo pri prenosu naboja od točke T do neskončnosti.

Lahko rečemo, da je imel sistem pred prenosom naboja v neskončnost določeno energijo, ki se je nato porabila za prenos. Ta (potencialna) energija je bila ravno enaka delu, potrebnem, da se naboj prenese v neskončnost. Če uporabimo simbol W za zapis električne potencialne energije, velja

$$W(T) = A_e(T \rightarrow T_{\infty})$$

Delo, potrebno za prenos naboja Q od neke točke T do neskončnosti je enako električni potencialni energiji tega naboja v točki T .

Primer 4: Določite elektrostatično potencialno energijo sistema dveh nabojev velikosti 10 nC oddaljenih za 1 cm.

Izračun: Izračun smo že opravili, saj je ta energija enaka delu polja za premik enega od nabojev za premik od začetne lege proti neskončnosti:

$$W_e = A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = 9 \mu\text{J}.$$

Energija sistema nabojev. Kolikšna pa je energija sistema, če imamo več nabojev? Postopamo tako, kot da bi imeli najprej na mestu naboj² Q_1 , nato na svoje mesto oddaljeno od Q_1 za r_{12} pripeljemo iz neskončnosti naboj Q_2 . Za to je potrebno delo

$A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$, da pripeljemo poleg še naboj Q_3 potrebujemo delo $\frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$. Energija sistema treh nabojev bo torej $\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$. V nadaljevanju bomo ta rezultat prikazali še nekoliko drugače.

² Za postavitev naboja Q_1 na določeno mesto ne potrebujemo nobenega dela, saj imamo predhodno sistem brez nabojev in torej brez polja. V nadaljevanju pa seveda vsi nadaljnji naboji prispevajo k polju – delu.

SLIKA: Sistem treh nabojev z označenimi naboji in razdaljami med naboji.

Delo kot razlika potencialnih energij sistema. Imamo sistem nabojev porazdeljenih po prostoru in torej določeno električno potencialno energijo. Sedaj premaknemo enega od nabojev iz izhodiščnega mesta T_1 na drugo mesto (T_2) in pri tem opravimo določeno (pozitivno ali negativno) delo. Če je to delo pozitivno, je delo opravilo elektrostatično polje, energija sistema pa je bila po premiku manjša kot pred premikom. V nasprotnem primeru (delo negativno) mora delo opraviti neka zunanja sila, kar pomeni, da je končna energija sistema večja kot pred premikom. Delo potrebno za premik naboja od T_1 do T_2 lahko torej določimo iz razlike potencialne energije sistema pred in po premiku:

$$A(T_1 \rightarrow T_2) = W(T_1) - W(T_2)$$

SLIKA: Delo je enako razliki potencialnih energij sistema pred premikom in po premiku.

13. Potencial in napetost

Električni potencial. Ugotovili smo že, da je električna potencialna energija naboja Q na mestu T enaka delu pri prenosu tega naboja od točke T v neskončnost oziroma do mesta, kjer je energija enaka nič:

$$W(T) = Q \int_T^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Normirano potencialno energijo imenujemo električni potencial

$$V(T) = \frac{W(T)}{Q} = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Enota za potencial je $J/C = V$.

Številčno je torej električni potencial enak delu polja električnih sil za premik enote naboja (1 C) od točke T do neskončnosti.

Ali obratno: Če poznamo potencial v določeni točki, bo energija potrebna za prenos naboja q v polju električnih sil do te točke enaka produktu naboja in potenciala: $W(T) = q \cdot V(T)$ ali tudi, če se na mestu T nahaja naboj Q (ali pa ga na to mesto postavimo) in ga sila polja premakne do mesta, kjer je polje enako nič, pridobi energijo $W(T) = Q \cdot V(T)$.

SLIKA: Izračun potenciala z integracijo prispevkov nabojev.

Primer: Določimo potencial v okolici točkastega naboja Q . In številsko za $Q = 10 \text{ nC}$ in $r = 1 \text{ cm}$.

Izračun: Na določeno oddaljenost r od naboja Q postavimo testni naboj Q_t in določimo delo, pri prenosu tega naboja od r do neskončnosti:

$$V(r) = \frac{W(r)}{Q_t} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Potencial naboja 10 nC v oddaljenosti 1 cm je

$$V(r = 1 \text{ cm}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{10 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{10^{-2} \text{ m}} = 9 \text{ kV}.$$

To pomeni, da bi bila energija potrebna za premik naboja 1 C iz neskončnosti do razdalje 1 cm od naboja 10 nC enaka $9 \text{ kV} \cdot 1 \text{ As} = 9 \text{ kJ}$.

Ponovimo ta pomemben rezultat: **potencial v okolici točkastega naboja se manjša z $1/r$ in je enak**

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Potencial sistema točkastih nabojev. Ugotovili smo, da je potencial v okolici enega

točkastega naboja enak $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, kjer je r razdalja od točke kjer iščemo potencial do

točke, kjer se nahaja naboj Q . Ker velja superpozicija polja lahko tudi potencial določimo kot superpozicijo posameznih delnih prispevkov normirane energije. Za sistem točkastih nabojev bo torej potencial enak

$$V(T) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i},$$

kjer so r_1, r_2 itd razdalje od naboja Q_1, Q_2 , itd do točke T , kjer računamo potencial.

Primer: Določimo potencial v sredini med dvema točkastima nabojema $Q = 10 \text{ nC}$ oddaljenima za 2 cm.

Izračun:

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 2 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 1 \text{ cm}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^{-9} \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \cdot 10 \cdot 10^9 \text{ C} \cdot 100 \text{ m}^{-1} = 18 \text{ kV}.$$

SLIKA: potencial na razdalji r od točkastega naboja je enak delu polja za premik enote naboja 1 C od razdalje r do neskončnosti.

SLIKA: Porazdelitev potenciala v okolici točkastega naboja. Potencial upada z $1/r$.

Potencial sistema porazdeljenih nabojev. Za porazdelitev točkastih nabojev smo ugotovili,

da lahko potencial določimo kot vsoto $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}$.

Če je porazdelitev naboja zvezna moramo vzeti en mali del celotnega naboja in z limitiranjem vsote delnih prispevkov dobimo

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta Q_i}{r_i} = \int_{\text{po vseh } Q\text{-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

r je razdalja od mesta, kjer se nahaja dQ do točke kjer iščemo potencial. Odvisno od načina porazdelitve naboja (po površini, volumnu, liniji) določimo potencial kot

$$V = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = \int_A \frac{\sigma \cdot dA}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = \int_L \frac{q \cdot dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

SLIKA: Izračun potenciala porazdeljenega naboja s seštevanjem (integracijo) delnih prispevkov dV . (na sliki je narisana diferencial naboja, točka T kjer računamo integral in razdalja r od dQ do točke)

Primer: Izračunajmo potencial vzdolž Z osi za enakomerno naelektren tanek obroč polmera a z nabojem Q , ki leži v ravnini $z = 0$.

Ker je naboj porazdeljen enakomerno po obroču lahko uporabimo enačbo

$$V = \int_L \frac{q \cdot dl}{4\pi\epsilon_0 r}, \text{ ki jo zapišemo v obliki}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{q \cdot a \cdot d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\frac{Q}{2\pi a} \cdot a \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

Ugotovimo lahko, da je računanje potenciala v določeni točki podobno računanju električne poljske jakosti, le da je običajno nekoliko bolj preprosto. Predvsem zato, ker je potencial skalarna veličina, polje pa vektorska. Pogosto zato električno polje določimo posredno, tako, da najprej izračunamo potencial, nato pa iz potenciala še električno poljsko jakost. Kako, bomo spoznali v nadaljevanju.

Potencialno polje je skalarno polje. Potential lahko določimo v vsaki točki prostora neodvisno od porazdelitve nabojev, medtem ko je energija sistema vezana na porazdelitev nabojev v prostoru. Podobno torej kot razlika med silo med naboji in električno poljsko jakostjo. Je pa za razliko od električnega polja, ki je vektorsko polje, potencial skalarna količina in tvori skalarno polje.

Ekvipotencialne ravnine. Če povežemo točke z enako vrednostjo potenciala dobimo ravnino, ki jo imenujemo ekvipotencialna ravnina ali ekvipotencialna ploskev. V primeru osamljenega točkastega naboja so ekvipotencialne ploskve krožnice, oz. v 3D površine krogle. Običajno jih rišemo tako, da je razlika med vsako naslednjo konstantna.

Primer: Določimo ekvipotencialne ravnine v okolici točkastega naboja $Q = 10 \text{ nC}$. Ugotovili smo že, da velja za potencial v okolici točkastega naboja enačba

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \text{ Ugotovili smo tudi, da je ta potencial na razdalji 1 cm enak}$$

$V(r = 1 \text{ cm}) = 9 \text{ kV}$. Potencial 9 kV je torej enak v vseh točkah, ki so od točkastega naboja oddaljeni za 1 cm, kar prikažemo z lupino krogle (v 2D z krožnico) polmera 1 cm. Kje pa se nahajajo ekvipotencialne ravnine s potenciali 8 kV, 7 kV itd.? Preprosto: enačba, ki jo je potrebno rešiti za ekvipotencialno ravnino s potencialom 8 kV bo

$$8 \text{ kV} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_{8\text{kV}}} \Rightarrow r_{8\text{kV}} = Q / (8 \text{ kV} \cdot 4\pi\epsilon_0) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{8 \cdot 10^3} \text{ m} = 0,01125 \text{ m} = 1,125 \text{ cm}$$

. Naslednja ekvipotencialka bo pri $r_{7\text{kV}} = \frac{8}{7} 1,125 \text{ cm} = 1,285 \text{ cm}$ itd. V splošnem nas

zanimajo ekvipotencialne ravnine, katerih potenciali se razlikujejo za konstantno razliko napetosti, v našem primeru za 1 kV). Za ekvipotencialne ravnine v okolici točkastega naboja lahko ugotovimo, da se vrstijo v geometrijskem zaporedju.

SLIKA: Prikaz ekvipotencialnih ravnin za točkasti naboj.

Električna napetost. Ugotovili smo že, da lahko delo za premik naboja med dvema točkama določimo iz razlike potencialne energije. Če to delo opravi testni naboj 1 C govorimo o električni napetosti med dvema točkama. **Električna napetost je torej številsko enaka delu polja električnih sil potrebnem za prenos enote naboja iz točke T_1 do točke T_2 :**

$$U_{12} = \frac{A_{Q_t}(T_1 \rightarrow T_2)}{Q_t} = \frac{W(T_1) - W(T_2)}{Q_t} = \frac{Q_t \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{Q_t} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ugotovimo lahko, da lahko **električno napetost določimo tudi kot razliko potencialov:**

$$U_{12} = V(T_1) - V(T_2) = \int_{T_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{T_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Kirchffov zakon. Ugotovili smo, da električno napetost med dvema točkama določimo z integracijo električne poljske jakosti po poljubni poti od ene do druge točke. Obenem smo ugotovili, da je ta integral enak nič, če je pot zaključena sama vase. Torej bi lahko pisali:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{T_2}^{T_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{T_{N-1}}^{T_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_1 + U_2 + \dots + U_N = 0$$

Ali tudi, vsota vseh napetosti po zaključeni poti (zanki) je enaka nič, kar je 2. Kirchhoffov zakon:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N U_i = 0}$$

OSNOVNI PRIMERI IZRAČUNA NAPETOSTI, POLJA IN POTENCIALA ZA: PLOŠČATI, VALJNI IN SFERIČNI KONDENZATOR:

Ploščati kondenzator: dve ravni vzporedni naelektreni plošči.

Primer: Ravni vzporedni plošči površine $A = 5 \cdot 8 \text{ cm}^2$ sta oddaljeni za $d = 10 \text{ cm}$ in imata površinsko gostoto naboja $\sigma = \pm 5 \text{ } \mu\text{C/m}^2$. Določimo polje, potencial in napetost med ploščama, pri čemer predpostavimo homogenost polja med ploščama (polje neskončnih naelektrenih ravnin).

SLIKA: a) Dve ravni nasprotno naelektreni plošči postavljeni v koordinatni sistem z normalo v smeri osi X. b) Napetost in polje med dvema ravnima (nasprotno) naelektrenima ploščama.

Izračun: Plošči postavimo v koordinatni sistem, recimo tako, da je normala na površino v smeri X osi in da ima leva elektroda pozitivni naboj. Električno polje med ploščama je superpozicija polj dveh plošč in je enako¹ $\vec{E} = \vec{e}_x \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot 2 = \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Napetost med ploščama dobimo z integracijo polja med ploščama:

$$U = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^d \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d$$

$$U = \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{s}}{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}}} \cdot 0,1 \text{ m} = 56,5 \text{ kV}.$$

Ugotovimo lahko, da celotni naboj na površini niti ni pomemben za izračun napetosti pač pa le gostota naboja na površini. Poleg tega lahko iz primera ugotovimo, da je električna poljska jakost med ploščama konstantna in enaka $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Takemu polju rečemo tudi **homogeno**

polje. Če v enačbi za napetost med ploščama zamenjamo $\frac{\sigma}{\epsilon_0} = E$, dobimo

$U = E \cdot d$ oziroma $E = \frac{U}{d}$. To sta enačbi, ki ju poznamo že iz srednješolske fizike.

Ugotovimo lahko, da sta enačbi ustrezni za izračun polja ali napetosti, vendar le v tem

¹ Tu smo predpostavili polje v okolici dveh naelektrenih ravnin. V resnici sta dve vzporedni plošči omejenih dimenzij zato velja aproksimacija le delno torej tedaj, ko je površina plošč velika v primerjavi z razdaljo med ploščama.

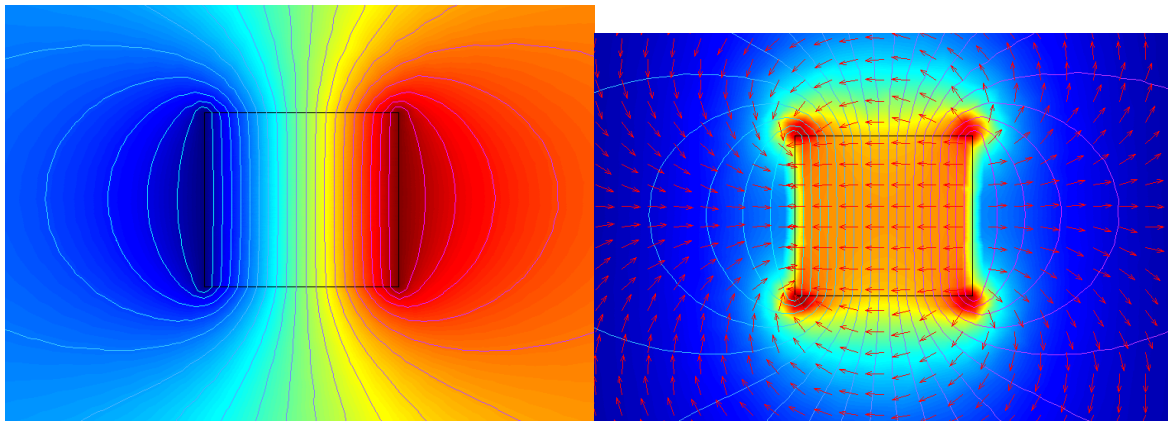
konkretnem primeru, torej, za polje oz. napetost med dvema ravnima ploščama. To seveda ne zmanjšuje pomembnosti izraza pač pa le opozarjamo, da se ga ne bi uporabljalo nekritično. Če polje med dvema točkama ni homogeno, je potrebno napetost med točkama izračunati s pomočjo integrala električne poljske jakosti po poti. To bomo prikazali z naslednjim primerom (koaksialni kabel).

Določimo še potencial med ploščama ploščatega kondenzatorja: če ozemljimo desno elektrodo (elektrodo, ki ima negativni naboj), bo potencial med elektrodama ()

$$V(x) = \int_x^d \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot (d - x). \quad V(x = d) = 0, V(x = 0) = U$$

Če ozemljimo levo elektrodo, bo potencial med elektrodama:

$$V(x) = \int_x^0 \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot x. \quad V(x = 0) = 0, V(x = d) = -U$$



SLIKA: Levo: Ekvipotencialne ravnine med in v okolici dveh nasprotno naelektrenih ravnih plošč. Ugotovimo, da so med ploščama ekvipotencialne ravnine enakomerno razmalnjene, v okolici pa ne. Desno: Vektorji električne poljske jakosti skupaj z ekvipotencialnimi ravninami in velikostjo električne poljske jakosti (večje polje bolj rdeča barva). Za lažje opazovanje so vektorji polja enako veliki neodvisno od velikosti polja.

Valjni kondenzator: Koaksialni kabel.

Primer: Med žilo in oklopom zračnega koaksialnega kabla je napetost 2 kV. Določimo linijsko gostoto naboja na žili in oklopu ter maksimalno električno poljsko jakost, če je polmer žile $r_n = 2$ mm, $r_o = 5$ mm, $r_z = 7$ mm. Oklop je iz prevodnega materiala.

SLIKA: Koaksialni kabel s priključitvijo napetosti med oklopom in žilo.

Izračun: Najprej moramo predpostaviti porazdelitev naboja na žili in oklopu. Predpostavimo pozitivni naboj na žili (Q) in negativni na oklopu ($-Q$). Električno poljsko jakost med žilo in oklopom določimo s pomočjo Gaussovega zakona. Na neki razdalji r od osi kabla izračunamo pretok el. polja skozi plašč valja in dobimo (na polje na radiju r vpliva le zaobjeti naboj):

$$E_r \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{q \cdot l}{\epsilon_0} \text{ in } E_r = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ oziroma } \vec{E} = \vec{e}_r \cdot \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Dobimo enak izraz kot za polje v okolici premega naboja (naelektrene premice).

Podobno bi izvajali, če bi si izbrali enakomerno površinsko gostoto naboja po površini:

$$E_r \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\sigma \cdot A(r_n)}{\epsilon_0} \text{ in } E_r = \frac{\sigma 2\pi r_n \cdot l}{2\pi\epsilon_0 r \cdot l} = \frac{\sigma r_n}{\epsilon_0 r} \text{ oziroma } \vec{E} = \vec{e}_r \cdot \frac{\sigma r_n}{\epsilon_0 r}. \text{ Enačba je}$$

seveda enakovredna prejšnji, saj velja $Q = q \cdot l = \sigma \cdot 2\pi r_n \cdot l$, oziroma $q = \sigma \cdot 2\pi r_n \cdot l$. Ali je površinska gostota naboja enako velika na oklopu in na površini žile? Odgovor je NE. Enako velik je celotni naboj, za gostoto naboja pa velja:

$$Q(r_n) = \sigma_n \cdot 2\pi r_n \cdot l = -Q_o = -\sigma_o \cdot 2\pi r_o \cdot l, \text{ torej bo}$$

$$\sigma_o = -\sigma_n \cdot \frac{r_n}{r_o}.$$

Pogosto nas zanima tudi gostota površinsko porazdeljenega naboja. Iz izpeljanih enačb

$$E(r_n) = \frac{\sigma 2\pi r_n}{2\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ oziroma } \sigma = \epsilon_0 \cdot E(r_n).$$

Napetost med oklopom in žilo določimo z integracijo polja med polmeroma:

$$U = \int_{r_n}^{r_o} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_n}^{r_o} \vec{e}_r \cdot \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_o}{r_n}.$$

Zakaj integracija od r_n do r_o in ne do r_z ? Zato, ker integriramo polje, ki pa je znotraj žile in znotraj (prevodnega oklopa) enako nič! To lahko hitro ugotovimo z razmislekom, da se pozitivni in negativni naboji privlačijo in se zato pozitivni naberejo na površini žile, negativni pa na notranji strani oklopa. Z uporabo Gaussovega zakona na plašču valja z radijem, ki je večji od polmera r_o bi hitro ugotovili, da je polje znotraj oklopa enako nič, saj je zaobjeti naboj vsota enako velikega pozitivnega in negativnega naboja.

Zakaj integracija od r_n do r_o in ne od r_o do r_n ? Zato, ker z integracijo v smeri polja dobimo pozitivno napetost. Napetost bi lahko določili tudi kot razliko potencialov, pri

čemer je potencial oklopa enak nič. Torej je $U = V(r_n) - V(r_o) = V(r_n) = \int_{r_n}^{r_o} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr$.

In še izračun linijske gostote naboja:

$$q = U \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_o}{r_n}} = 2 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \frac{2\pi 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}}{\ln \frac{5 \text{ mm}}{2 \text{ mm}}} = 0,121 \mu\text{C/m}.$$

Električno polje je maksimalno pri najmanjšem radiju, torej pri r_n :

$$\vec{E}_{\max} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r_n} = \vec{e}_r \frac{U}{r_n \cdot \ln \frac{r_0}{r_n}} \quad E_{\max} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ V}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \ln \frac{5}{2}} = 1,09 \text{ MV/m}$$

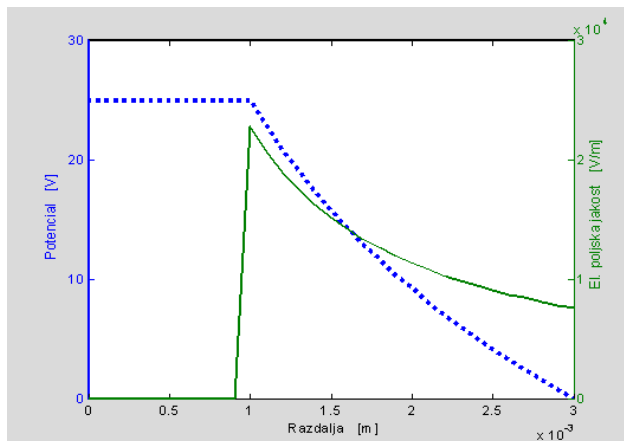
Ponovimo pomembne rezultate iz tega primera:

napetost med žilo in plaščem koaksialnega kabla je

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_n},$$

električno polje pa $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$, **oziroma** $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{U}{r \cdot \ln \frac{r_0}{r_n}}.$

Površinska gostota naboja je $\sigma = \epsilon_0 \cdot E(r_n).$



Slika: Električna poljska jakost in potencial znotraj koaksialnega kabla.

```
% PRIMER IZRISA POLJA IN POTENCIALA KOAKSIALNEGA KABLA S PROGRAMOM MATLAB
e0=8.854e-12;
k=1/(4*pi*e0);
U=25; m=1e-3; rz=3e-3;
q=U*2*pi*e0/(log(rz/m));
R=0:1e-4:rz;
E=zeros(length(R),1);
V=E;
E=q/(2*pi*e0)./R;
V=q/(2*pi*e0)*log(rz./R);
for i=1:length(R)
    if R(i)<m
        V(i)=U;
        E(i)=0;
    end
end
%plot(R,V); xlabel(' Radij [m]'); ylabel(' Potencial [V]');
%figure; plot(R,E); xlabel(' Radij [m]'); ylabel(' El. poljska jakost [V/m]');
% IZRIS POLJA IN POTENCIALA NA ISTI SLIKI Z DVEMA OSEMA
[ax ax1 ax2]=plotyy(R,V,R,E,'plot');
axes(ax(1)); ylabel(' Potencial [V]');
axes(ax(2)); ylabel(' El. poljska jakost [V/m]');
set(ax1,'LineStyle',':');
set(ax1,'Linewidth',3);
set(ax2,'Linewidth',2);
```

In še tretji tipični primer: **sferični kondenzator**:

Primer: Na površini zemlje izmerimo električno poljsko jakost 150 V/m, ki je usmerjena v smeri središča zemlje. Določimo napetost med zemljo in ionosfero, ki je od površine zemlje oddaljena približno² 40 km. Določimo še površinsko gostoto naboja. Polmer zemlje je $r_n = 6370$ km, ionosfere pa $r_i = 6410$ km. Predpostavimo zemljo in ionosfero kot sferični kondenzator.

SLIKA: Področje med površino zemlje in ionosfero predstavimo kot velik krogelni kondenzator. Ker je polje na površini usmerjeno v smeri središča zemlje pomeni, da je zemlja naelektrena negativno glede na ionosfero.

Zemljo in ionosfero predstavimo kot sferični kondenzator. Znano je, da je na površini zemlje presežek negativnega naboja, v ionosferi pa pozitivnega. Električno polje kaže v smeri centra zemlje in je (lahko z uporabo Gaussovega zakona) enako

$\vec{E} = -\vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Napetost med ionosfero in zemljo je

$$U = \int_{r_i}^{r_n} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = - \int_{r_i}^{r_n} \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_i}^{r_n} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_i} \right).$$

$$\vec{E}(r=r_n) = -\vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = -\vec{e}_r \frac{U}{r_n^2} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_i} \right)^{-1} = -\vec{e}_r 150 \text{ V/m}. \text{ Sledi}$$

$$U = 150 \text{ V/m} \cdot r_n^2 \cdot \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_i} \right) = 150 \text{ V/m} \cdot \left(6370 - \frac{6370^2}{6410} \right) \cdot 10^3 \text{ m} \approx 6 \text{ MV}.$$

Gostota naboja na površini zemlje je $Q = E(r_n) \cdot 4\pi\epsilon_0 r_n^2$,

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r_n^2} = \frac{E(r_n) \cdot 4\pi\epsilon_0 r_n^2}{4\pi r_n^2} = E(r_n) \cdot \epsilon_0. \text{ In rezultat: } \sigma = -150 \text{ V/m} \cdot \epsilon_0 = -1,33 \text{ nC/m}^2.$$

Pomembni rezultati za sferični kondenzator:

² Pri izračunu smo predpostavili, da je zemlja oblike krogle. Ionosfera je del atmosfere zemlje, ki je ioniziran zaradi radiacije sonca. Energija, ki jo sonce oddaja v določenem spektru je tako velika, da lahko razbije molekule in jih ionizira. Potencialna razlika med zemljo in ionosfero se ohranja z razelektritvami s strelami. Več o tem: <http://en.wikipedia.org/wiki/Ionosphere>

V splošnem imamo sferični kondenzator z notranjim polmerom r_n in zunanjim polmerom $r_z = r_z$:

Polje v sferičnem kondenzatorju je enako $\vec{E} = \pm \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, napetost pa

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right) \text{ oziroma } U = E(r_n) \cdot r_n^2 \cdot \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right). \text{ Površinska gostota naboja je } \sigma = E(\text{na površini}) \cdot \epsilon_0.$$

14. Prevodnik v polju

Že v prejšnjem poglavju smo ugotovili, da polja znotraj žile koaksialnega kabla ni, niti ga ni znotraj prevodnega oklopa koaksialnega kabla. Ali je to le posledica simetrične porazdelitve naboja in uporabe Gaussovega zakona, ali je to splošna lastnost prevodnikov? Odgovor dobimo z razmislekom o lastnostih prevodnikov: dober prevodnik ima to lastnost, da je tudi v primeru nevtralnosti (brez presežkov naboja) mnogo nabojev (elektronov), ki so zelo šibko vezani na jedro, kar pomeni, da jih že najmanjše polje lahko premakne iz ravnovesne lege.

* Energijsko so ti elektroni v prevodnem pasu, za razliko od izolatorjev, kjer elektronov v prevodnem pasu praktično ni. Polprevodniki so po lastnostih nekje vmes med prevodniki in izolatorji. Njihove lastnosti spreminjamo z dodajanjem primesi. Čisti silicij je tako izolator, z dodatkom atomov fosforja, ki se (z difuzijo pri visoki temperaturi) vgradijo v kristalno strukturo silicija pa postane tak kos silicija prevoden. Siliciju z dodatki fosforja rečemo n-tip polprevodnika, ker atomi fosforja doprinesejo k dodatku šibko vezanih elektronov, ki so negativni naboji. Poznamo tudi p-tip polprevodnikov, pri katerih siliciju (ali drugemu polprevodniku) dodajamo atome npr. bora, ki s kristalno strukturo silicija tvorijo vezi v katerih nastanejo vrzeli (nezaključene vezi). Te vezi delujejo kot pomanjkanje elektronov. Tudi p-tip polprevodnika je prevoden, vendar je način prevajanja nekoliko drugačen kot v n-tipu. Smatramo lahko, da v takem tipu polprevodnika prevajajo pozitivni nosilci naboja, ki jih imenujemo vrzeli.

Novo ravnotežje. Če prevodnik postavimo v električno polje, na šibko vezane elektrone deluje sila, v skladu z zvezo $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$. Šibko vezani elektroni se torej pomaknejo v nasprotni smeri polja (ker so negativnega predznaka) do roba prevodnika.¹ Koliko pa se jih pomakne? Toliko, kolikor zahteva zunanje polje, oziroma toliko, da se vzpostavi novo ravnotežje, v katerem je znotraj prevodnika polje enako nič.

$$E_{\text{v prevodniku}} = 0.$$

SLIKA: a) V zunanje polje vstavimo prevodnik. b) Po (hitrem) prehodnem pojavu pride do prerazporeditve naboja (presežka elektronov na eni strani in pomanjkanja na drugi strani) tako, da je polje znotraj prevodnika enako nič.

¹ V resnici elektron ne prepotuje celotne razdalje od enega roba do drugega roba prevodnika pač pa se elektroni le zamaknejo med samo. Povprečna hitrost elektronov v prevodniku je relativno počasna (reda) in ji rečemo tudi hitrost drifta, saj med prenosom trkajo z atomi v prevodniku tako, da njihova pot ni premočrtna pač pa se le v povprečju gibljejo v nasprotni smeri polja. Prerazporeditev, ki smo ji priča ko vstavimo prevodnik v polje pa je skoraj hipna.

Polje znotraj pa tudi v okolici polprevodnika se spremeni ob prerazporeditvi naboja, saj na polje vplivajo tudi prerazporejeni naboji.

Površina polprevodnika je ekvipotencialna ploskev. Če je polje znotraj prevodnika enako nič, potem bo tudi napetost med poljubnima dvema točkama znotraj prevodnika enaka nič, saj velja $U_{12} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$. To pa tudi pomeni, da imajo vse točke na prevodniku enak potencial in da je površina prevodnika ekvipotencialna ploskev.

Polje na nevtralnem prevodnem telesu. Če deluje polje na nevtralno prevodno telo, pride znotraj tega telesa do prerazporeditve elektronov, ki se premaknejo v smeri polja in pustijo za sabo pomanjkanje elektronov oz. pozitivni naboj. Presežkov pozitivnega naboja je enako veliko kot prerazporejenih elektronov, tako, da je vsota vseh nabojev znotraj telesa še vedno enaka nič. Prerazporeditvi naboja rečemo **elektrostatična indukcija**.

SLIKA: Prerazporeditev nabojev imenujemo elektrostatična indukcija.

Ali je polje znotraj votline prevodnika v kateri ni nabojev različno od nič? Če bi to polje obstajalo, potem bi imeli znotraj votline prevodnika ekvipotencialne ploskve in po Gaussovem zakonu bi morali z integracijo polja okoli ekvipotencialne ploskve dobiti količino zaobjetega naboja. Ker pa tega ni, je tudi polje enako nič.

SLIKA: Ekvipotencialne ravnine znotraj votline prevodnika. Polje kaže v smeri manjšanja potenciala.

Faradayeva kletka. Ugotovili smo že, da se v izvotljenem prevodniku postavljenem v zunanje električno polje vzpostavijo take razmere, da na površini prevodnika pride do prerazporeditve naboja, znotraj prevodnika in tudi v votlini pa je polje enako nič. Če hočemo del prostora električno izolirati od okolice, ga moramo torej prevleči s prevodnikom, ki ga običajno ozemljimo. Omeniti velja, da je taka zaščita popolna za elektrostatično (enosmerno)

polje, za časovno spremenljivo pa ne popolnoma, odvisno od frekvence motenj in debeline zaščitne plasti².

Okovinjene ekvipotencialnih ploskev. Vzemimo primer poljubnih ekvipotencialnih ploskev med dvema prevodnima telesoma. Poljubno ekvipotencialno ploskev lahko okovinimo, kar pomeni, da prevodno telo razširimo do te ekvipotencialne ravnine, pa se polje med novima prevodnima telesoma ne bo spremenilo, če pridobi novo prevodno telo potencial okovinjene ekvipotencialne ravnine.

SLIKA: Okovinjene ekvipotencialnih ravnin ne spremeni razmer (polja) med neokovinjenimi ekvipotencialkami.

Električno polje na robu prevodnika. Ugotovili smo že, da je rob prevodnika ekvipotencialna ploskev. To tudi pomeni, da na robu ne more obstajati komponenta polja, ki je usmerjena vzdolž roba prevodnika. Taki komponenti rečemo tangencialna komponenta, pravokotno na površino pa je normalna komponenta. Če bi tangencialna komponenta polja obstajala, bi to polje delovalo na šibko vezane elektrone v kovini in jih premaknila v novo ravnovesno lego. Velja torej:

$$E_t(\text{na robu prevodnika}) = 0$$

Poleg tega smo na treh primerih (ploščati, valjni in krogelni kondenzator) ugotovili, da je polje na površini prevodnika enako σ/ϵ_0 . Ali to velja splošno? DA. Polje na površini polprevodnika je usmerjeno v smeri normale na površino in je enako³

$$\vec{E}_{\text{na površini prevodnika}} = \vec{e}_n \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

***Sila na površini prevodnika.** Če je na površini prevodnika električno polje, torej mora na naboje na površini delovati sila, pač v skladu z $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$. Upoštevati je potrebno električno polje na naboje σ , ki je posledica ostalih nabojev na prevodniku. To polje je enako polovici

² Znano je, da avto smatramo kot precej varnega pred udarom strele, ker je njegova karoserija iz prevodnika. Podobno velja za letala, kjer pa je kljub temu potrebna pazljiva dodatna zaščita elektronike pred udari strel. Poleg tega so moderna letala lahko zgrajena iz neprevodnih kompozitnih materialov (zaradi večje trdote in manjše teže), ki jim je ravno zaradi nevarnosti strel potrebno vgraditi dodatno prevodno plast.

³ Za bolj natančno razlago glej A.R.Sinigoj: Osnove elektromagnetike.

celotnega polja na površini prevodnika⁴ oz. $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Sila na naboje σ je ploskovna sila (ali pritisk) in je enaka $\vec{f}_e = \vec{e}_n \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$. Celotno silo na objekt pa bi dobili z integracijo ploskovne sile po celotni površini $\vec{F}_e = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_A \sigma^2 \cdot d\vec{A}$.

⁴ Drugače povedano, električna poljska jakost na površini prevodnika velja pravzaprav tik nad površino, medtem, ko je električna poljska jakost na naboje σ na površini prevodnika enaka povprečni jakosti v notranjosti in zunanosti: Ker je v notranjosti polje enako nič, je polje na mestu nabojev enako $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

15. Zveza med E in V

Če poznamo električno polje v prostoru, lahko z integracijo polja izračunamo potencial v točki oziroma:

$$V(T) = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Vprašajmo se, ali lahko tudi iz znane porazdelitve potenciala določimo električno polje?

Odgovor je seveda pritrdilen, uporabiti pa je potrebno nasprotno operacijo od integracije.¹

Najprej zapišemo diferencial potenciala kot $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$. Vzdolž ekvipotencialne ploskve je električna poljska jakost enaka nič. Torej je električna poljska jakost pravokotna na ekvipotencialne ploskve:²

$$\vec{E} = \vec{e}_n E_n = -e_n \frac{\partial V}{\partial n},$$

kjer je $\vec{e}_n$ normala na ekvipotencialno ploskev.

SLIKA: Električna poljska jakost kaže v smeri upadanja potenciala in je torej pravokotna na ekvipotencialne ravnine.

Če želimo ugotoviti velikost polja v smeri koordinat pa uporabimo parcialno odvajanje po posameznih koordinatah:

¹ Iz matematičnega priročnika lahko ugotovimo sledečo zvezo: $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) \cdot dt = f(x)$. Glede na definicijo

potenciala bi lahko pisali tudi $V(T) = - \int_{T(V=0)}^T \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{T(V=0)}^T (E_x \cdot dx + E_y \cdot dy + E_z \cdot dz)$, od koder sledi

$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, itd.

² Simbol $\frac{\partial}{\partial x}$ je simbol za parcialen odvod po x-u. Razlika med totalnim odvodom $\frac{d}{dx}$ in parcialnim je v tem, da pri parcialnem odvodu odvajamo izraz parcialno, torej le po eni spremenljivki (v konkretnem primeru po x-u), vse ostale spremenljivke pa so v smislu odvajanja konstante.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Če združimo posamezne komponente polja v vektor električne poljske jakosti, ga v kartezičnih koordinatah zapišemo kot:

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Za cilindrični koordinatni sistem velja $\vec{E} = (E_r, E_\varphi, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \varphi}, \frac{\partial V}{\partial z}\right).$

Za sferični koordinatni sistem velja $\vec{E} = (E_r, E_\vartheta, E_\varphi) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \vartheta}, \frac{\partial V}{r \sin(\vartheta) \partial \varphi}\right).$

SLIKA: Večja gostota ekvipotencialnih ravnin pomeni večjo električno polje na tistem mestu oziroma, zgoščenost ekvipotencialnih ploskev je merilo za velikost polja.

* Enačbo $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ lahko zapišemo tudi kot $\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V$, kjer je zapis v

oklepaju operator odvajanja, ki ga imenujemo nabla in pišemo s simbolom $\vec{\nabla}$ ali pa z imenom gradient. Zvezo med potencialom in poljem lahko torej zapišemo kot $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\text{grad}(V)$. Gre torej za operator, ki skalarnemu polju priredi vektorsko na tak način, da kaže v smeri zmanjšanja potenciala, po velikosti pa je enak (krajevni) hitrosti spreminjanja polja.

Primer: Električni potencial v prostoru je določen z enačbo $V(x, y, z) = 4xy - 2z^2$.

Določimo električno poljsko jakost iz potenciala.

Izračun:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -4y$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -4x$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -(-2 \cdot 2z) = 4z$$

$$\vec{E} = (-4y, -4x, 4z) .$$

SLIKA: Električna poljska jakost kaže smer in hitrost upadanja potenciala.

16. Gibanje nabojev v električnem polju

Če se naboj nahaja v električnem polju in ima možnost gibanja, se giblje v skladu s silami, ki delujejo na naboj. V splošnem velja enačba gibanja

$m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$, kjer pod vsoto vseh sil upoštevamo električno, mehnično, kemično silo itd. Mi

se bomo predvsem posvetili električni sili na naboje. V tem primeru gibanje naboja določimo z upoštevanjem zveze:

$$\boxed{m \cdot \vec{a} = Q \cdot \vec{E}}$$

V splošnem je pospešek a vektor, ki ima tri komponente, in je enak odvodu hitrosti, ta pa odvodu poti, torej $m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = Q \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$ ali na kratko $m \cdot \ddot{\vec{r}} = Q \cdot \vec{E}$. V splošnem moramo trajektorijo gibanja delcev določiti s pomočjo reševanja sistema treh diferencialnih enačb. Pogosto pa je mogoče določiti pozicijo delca z uporabo osnovnih zvez, kar bomo prikazali kar na primeru.

Primer: V homogeno polje 2000 V/m usmerimo elektron s hitrostjo 10^6 m/s, ki vpade prečno na smer polja. Določimo odklon elektrona iz vpadne smeri po preletu polja za 1 cm.

Izračun: Elektron nadaljuje pot v smeri leta pred vpadom v polje s hitrostjo 10^6 m/s, za 1 cm poti pa potrebuje časa $t = \frac{x}{v_x} = \frac{1 \text{ cm}}{10^6 \text{ m/s}} = 10^{-8} \text{ s}$. Obenem v prečni smeri nanj

deluje električna sila in torej pospešek

$$a_y = \frac{Q_e \cdot E}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ V/m}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 3,52 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2, \text{ odklon v tej smeri pa bo enak}$$

$$y = \frac{a_y \cdot t^2}{2} = \frac{3,52 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2 \cdot (10^{-8} \text{ s})^2}{2} = 17,58 \text{ mm}.$$

SLIKA: Elektron prileti v električno polje in se ukloni.

In kako je z energijo tega delca med gibanjem? Zgornjo enačbo integriramo v smeri poti in dobimo

$$\int_{T_1}^{T_2} m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} Q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Če izvajanje poenostavimo le na gibanje v eni smeri (recimo X), se zgornja zveza poenostavi v

$$m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dv}{dt} \cdot dx = m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dx}{dt} \cdot dv = m \int_{T_1}^{T_2} v \cdot dv = Q \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ iz česar sledi } \boxed{\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Q \cdot (V(T_1) - V(T_2))}.$$

V splošnem pa bo $v^2 = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$. Če to zvezo napišemo nekoliko drugače, dobimo

$$\frac{mv_1^2}{2} + Q \cdot V(T_1) = \frac{mv_2^2}{2} + Q \cdot V(T_2) \text{ oziroma}$$

$$\boxed{W_{kin}(T_1) + W_{pot}(T_1) = W_{kin}(T_2) + W_{pot}(T_2)}$$

Z besedami: **Energija se ohranja, med gibanjem pa se lahko pretvarja iz kinetične v potencialno ali obratno.**

Na naboj, ki se giblje v smeri polja deluje pospešek, torej sem mu povečuje kinetična energija.

Primer: Elektron prileti s hitrostjo 10^6 m/s v zaviralno homogeno polje, ki ga vzpostavimo z napetostjo med elektrodama oddaljenima za 10 cm. Določimo potrebno napetost med elektrodama, da se bo delec ustavil na polovici razdalje med elektrodama.

Izračun: Na začetku bo imel elektron le kinetično energijo $\frac{mv_1^2}{2}$, potencialna energija pa je enaka nič. Ko se elektron ustavi na sredini med elektrodama, bo njegova kinetična energija enaka nič, potencialna pa bo enaka $Q \cdot \frac{U}{2}$. Potrebno napetost torej določimo iz izenačitve energij na začetku in na koncu (ko se elektron ustavi na polovici razdalje med elektrodama je njegova hitrost enaka nič):

$$\frac{mv_1^2}{2} = Q \cdot \frac{U}{2}.$$

$$U = \frac{m \cdot v_1^2}{Q} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (10^6 \text{ m/s})^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 5,69 \text{ V}.$$

Iz rezultata ugotovimo, da je razdalja med elektrodama nepomembna, pomembna je le napetost med elektrodama. Zakaj?

Kaj se »zgodí z elektronom po ustavitvi«? Polje ga bo pospešilo nazaj in izstopil bo iz polja z enako hitrostjo, kot je v polje vstopil.

Kako velika je električna sila v primerjavi s silo gravitacije? Vzemimo kar prvi primer in primerjajmo velikost sile polja in sile gravitacije, če je elektron v polju 2 kV/m:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{Q_e \cdot E}{m \cdot g} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^3}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,8} = 3,59 \cdot 10^{13}.$$

Ugotovimo, da je v tipičnih primerih (že pri majhnem električnem polju) električna sila mnogo večja od gravitacijske.

17. Električni dipol

En pomembnejših konceptov v teoriji električnega polja je koncept električnega dipola. S tem konceptom razložimo vpliv in delovanje električnega polja v snovi, kar je seveda zelo pomembno. Do sedaj smo bili sposobni ugotavljati le polje v vakuumu, kar pa v veliki meri velja tudi za zrak. Poleg tega smo ugotovili, da električnega polja v prevodnikih ni, da je lahko le na površini prevodnika in še to na zunanji površini. Tam je polje sorazmerno površinski gostoti naboja.

Če nevtralni prevodnik postavimo v električno polje, pride v prevodniku do prerazporeditve naboja, pri čemer se elektroni premaknejo (zamaknejo) v nasprotni smeri polja. Ti zamiki potekajo toliko časa, da se v notranjosti prevodnika vzpostavi polje, ki je enako nič. Prevodni delec tako dobi enovit potencial. Presežek pozitivnega naboja lahko konceptualno združimo v pozitivni točkasti naboj, presežek negativnega pa v točkasti negativni naboj. Ta naboja sta razmaknjena za neko fiksno razdaljo, ki jo lahko opišemo z vektorjem, ki kaže od negativnega v smeri pozitivnega naboja. Velja opozoriti, da je ta smer ravno nasprotna smeri polja, ki ga povzročata naboja.

SLIKA: Prevodnik v električnem polju. Prerazporeditev naboja lahko ponazorimo z dvema točkastima nabojema povezanimi s fiksno razdaljo, kar ponazorimo s konceptom električnega dipola.

Dipolni moment imenujemo produkt naboja Q in vektorja $\vec{d}$, ki je distančni vektor od naboja $-Q$ do naboja Q in ga zapišemo s simbolom $\vec{p}$:

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$

Primer: Vzdolž daljše osi ovalnega prevodnika dolžine 5 mm se prerazporedi 10^{10} elektronov. Ponazorimo prevodnik v obliki električnega dipola in določimo njegov dipolski moment.

$$p = Q \cdot d = 10^{10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8 \cdot 10^{-12} \text{ C} \cdot \text{m}.$$

Polarne in nepolarne molekule. Ni pa nujno potrebno, da dobimo električni dipol le pri vstavitvi prevodnika v električno polje. Določena snov, molekula je lahko že sama po sebi taka, da ima neenakomerno porazdeljen naboj v svoji okolici. Tipičen primer je molekula vode (H_2O), ki ima vodikova atoma razmaknjena od središčnega kisikovega za kot 104° . Zakaj

ravno tak kot? Izkaže se, da ta kot omogoča minimalno energijsko stanje molekule. Zaradi nehomogene porazdelitve naboja je električni dipolski moment molekule vode $1,9 \cdot 10^{-29} \text{ Cm}$. Molekula vode ima torej vgrajen dipolni moment, rečemo tudi, da je **polarna** molekula (ima pozitivni in negativni pol) v nasprotju z nepolarnimi, kjer je naboj molekule porazdeljen tako, da je navzven nevtralna. Lahko pa nepolarna molekula postane bolj ali manj polarna, če jo postavimo v električno polje. Temu efektu rečemo **polarizacija**.

SLIKA: Polarna in nepolarna molekula.

Dipol v električnem polju. Kako se obnaša električni dipol v električnem polju. Nanj deluje električna sila, ki je enaka $\vec{F} = \vec{F}_Q + \vec{F}_{-Q} = Q \cdot \vec{E}_Q + (-Q) \cdot \vec{E}_{-Q} = Q \cdot (\vec{E}_Q - \vec{E}_{-Q})$.

SLIKA: Dipol v homogenem in nehomogenem polju.

Če je polje homogeno, je $\vec{E}_Q = \vec{E}_{-Q}$ in skupna sila na dipol je enaka nič. Deluje pa sila na oba naboja dipola v nasprotni smeri, tako, da bo delovala z navorom na dipol v taki smeri, da bi dipol usmerila v smer polja. Če pa je polje nehomogeno, na dipol deluje poleg navora tudi skupna sila, ki je različna od nič in deluje v smeri večjega polja. Te sile so običajno zelo majhne, kljub temu pa jih je mogoče koristno izrabiti.

SLIKA: Sile na dipole usmerijo dipole v smer polja. Primer semenk v enosmernem polju velike vrednosti.

* Primer je recimo koncentriranje mikronskih in submikronskih delcev v nehomogenem električnem polju. To se uporablja predvsem za manipulacijo bioloških celic, kjer s pomočjo mikroelektronske tehnologije ustvarimo zelo majhne elektrode, ki imajo ravne in »ostre« robове. Vzpostavitev napetosti med takima dvema elektrodama vzpostavi polje med njima, ki je izrazito nehomogeno in večje v okolici ostre elektrode. Če se med elektrodama znajde

delec, se polarizira, nato pa nanj deluje sila v smeri »ostre« elektrode. Še bolj pogosta pa je manipulacija nevtralnih delcev (bioloških celic) z vzpostavitvijo izmeničnega električnega polja. V tem primeru lahko s spreminjanjem frekvence električnega polja vplivamo na polarizabilnost molekul. Pri določeni frekvenci se ustvarja večji ali manjši dipolni moment, odvisno od tega, kako hitro so se sposobni preorientirati naboji v električnem polju. Zagotoviti je potrebno, da so električne lastnosti polarizacije delca različne od lastnosti polarizacije delca. Če je to zagotovljeno, bo delec pri določenih frekvencah vzbu jalnega signala ustvarjal dipolni moment, ki je v smeri polja, pri drugih pa dipolni moment, ki je usmerjen v nasprotno smer kot polje. S frekvenco je torej mogoče vplivati na silo na delce v smeri večjega polja ali pa v smeri manjšega polja.

Potencial v okolici električnega dipola. Potencial v okolici električnega dipola ni težko določiti, saj gre za vsoto dveh potencialov, potencial od pozitivnega in negativnega naboja.

SLIKA: Električni dipol v koordinatnem sistemu.

$$V(T) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Če je razdalja med nabojema dosti manjša od razdalje do točke T, lahko smatramo, da je $r_1 r_2 \doteq r^2$ in $r_2 - r_1 \doteq d \cos(\vartheta)$. Enačbo torej lahko zapišemo v obliki

$$V(T) = \frac{Qd \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

* Pogosto se zgornjo enačbo zapiše tudi v obliki $V(T) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

Potencial v okolici dipola se manjša s kvadratom razdalje od dipola.

Električno polje dipola. Električno polje bi lahko določili iz preprostega seštevanja prispevkov obeh nabojev. Ker pa je polje vektor, bi imeli nekoliko več dela kot pri seštevanju potencialov. Bolj elegantna pot je s pomočjo gradienta polja, saj velja

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

oziroma v sferičnih koordinatah $\vec{E} = (E_r, E_\varphi, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \varphi}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$, torej

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p \cos(\vartheta)}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_{\vartheta} = -\frac{\partial V}{r \partial \vartheta} = \frac{p \sin(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_{\varphi} = 0.$$

Ugotovimo lahko, da polje v oddaljenosti od dipola upada s tretjo potenco. (To je zelo hitro)

SLIKA: Potencial in polje v okolici električnega dipola.

Navor na električni dipol. Ugotovili smo že, da na električni dipol v zunanjem električnem polju deluje sila, ki želi usmeriti (zavrteti) dipol v smeri polja. Kako pa bi določili navor na dipol v zunanjem električnem polju? Preprosto, po definiciji za navor

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Opozoriti velja, da je pri vektorskem produktu pomembno, kateri vektor nastopa prvi, saj je rezultat vektorskega produkta vektor, ki kaže smer navora (vrtenja). Pravilno torej dobimo smer navora tako, da vektor radija (ročice) zavrtimo v smeri sile v smeri najmanjšega kota. Velja torej $\vec{M} = \vec{e}_n \cdot r \cdot F \cdot \sin(\vartheta)$, kjer je smer normale smer, ki je pravokotna na površino, ki jo določata vektorja r in F .

SLIKA: Električni dipol v homogenem polju. Nanj deluje navor.

Navor na pozitivni in negativni naboj je

$$\vec{M} = \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_Q + \frac{-\vec{d}}{2} \times \vec{F}_{-Q} = \frac{\vec{d}}{2} \times Q\vec{E}_Q + \frac{-\vec{d}}{2} \times (-Q\vec{E}_{-Q}) = \frac{Q\vec{d}}{2} \times (\vec{E}_Q + \vec{E}_{-Q}).$$

Če upoštevamo kratko razdaljo med nabojema, lahko smatramo, da je polje na pozitivni naboj enako polju na negativni naboj (lokalno homogeno polje) in navor na dipol bo enak $\vec{M} = Q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Ponovimo rezultat: navor na dipol je enak vektorskemu produktu električnega dipolskega momenta in jakosti polja. Rezultat je vektor, ki opisuje smer vrtenja.

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Primer: Potencial se spreminja vzdolž X osi v skladu z enačbo $V = \frac{200}{x} \text{ V} \cdot \text{m}$. Pri $x = 1 \text{ cm}$ se nahaja električni dipol z momentom $\vec{p} = 10^{-6}(1, 2, 0) \text{ C/m}$. Določimo navor na dipol.

SLIKA: Električno polje in dipol v polju.

Izračun: Električno polje ima le komponento v smeri X osi, ki je enaka $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{200}{x^2} \text{ V} \cdot \text{m}$. Pri $x = 1 \text{ cm}$ je polje enako $E_x = -\frac{200}{1 \text{ cm}^2} \text{ V} \cdot \text{m} = -2 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$,

navor pa je $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = (1, 2, 0)10^{-6} \text{ C/m} \times \left(-2 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}, 0, 0 \right) = (0, 0, 4) \text{ N} \cdot \text{m}$.

*** Način izračunavanja sile na dipol iz spremembe električne energije.** Podobno, kot smo poiskali zvezo med potencialom in električno poljsko jakostjo kot

$V(T) = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$ lahko najdemo tudi povezavo med energijo in silo, saj velja

$W(T) = \int_T^{T(W=0)} \vec{F} d\vec{l} \Rightarrow \vec{F} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right)$. Ta način je pogosto uporabljen tudi pri numeričnemu izračunavanju, kjer izračunamo porazdelitev polja, potenciala in energije s pomočjo računalnika. Za izračun sile je potrebno izračun opraviti 2x, vsakič na tak način, da rahlo zamaknemo strukturo (v našem primeru dipol) za neko majhno razdaljo in vsakič izračunamo polje in energijo. Silo pa nato izračunamo kot diferenco

$$\vec{F} \cong -\left(\frac{\Delta W}{\Delta x}, \frac{\Delta W}{\Delta y}, \frac{\Delta W}{\Delta z} \right).$$

*** Izračunavanje sile na dipol iz spremembe električne poljske jakosti.** Postavimo dipol vzdolž in v smeri X osi. Na naboj $-Q$ deluje polje E_x in torej sila $-Q \cdot E_x$ na naboj $+Q$, ki je od $-Q$ oddaljen za razdaljo dx , pa polje $E_x + dx$ oziroma $E_x + \frac{dE_x}{dx} dx$, sila pa bo

$Q \cdot \left(E_x + \frac{dE_x}{dx} dx \right)$. Če je polje nehomogeno, se bosta polji razlikovali, torej bo na dipol delovala rezultančna sila v smeri osi X, ki bo enaka $Q \cdot \left(\frac{dE_x}{dx} dx \right)$, kar lahko pišemo tudi kot

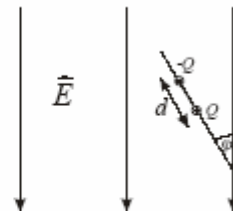
$F_x = Q \cdot dx \cdot \frac{dE_x}{dx} = p \cdot \frac{dE_x}{dx}$, kjer smo $Q \cdot dx$ zapisali z dipolnim momentom p . Enačba, ki smo jo zapisali velja le, če dipol leži vzdolž X osi in nanj deluje polje v smeri X osi. V splošnem je potrebno upoštevati možnost, da je dipol usmerjen poljubno. Torej bo potrebno silo na dipol v smeri osi X izračunati kot

$F_x = p_x \cdot \frac{dE_x}{dx} + p_y \cdot \frac{dE_x}{dy} + p_z \cdot \frac{dE_x}{dz}$ in na enak način tudi sili v smeri osi Y in Z.

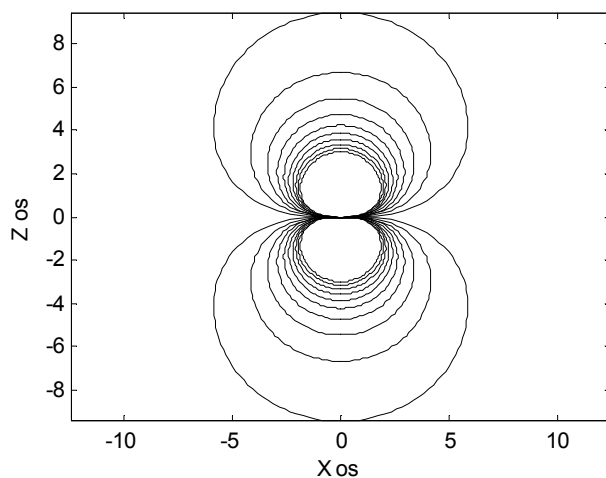
Energija rotacije dipola. $W = \int M \cdot d\alpha = \dots - \vec{p} \cdot \vec{E}$.

Primer: kolokvij15.12.2004.

4. Električni dipol je v homogenem električnem polju. Os dipola oklepa s smerjo polja kot $\varphi = 30^\circ$. Izračunajte absolutno vrednost navora na dipol. ($Q = 40 \text{ nC}$, $d = 10 \text{ cm}$, $E = 500 \text{ V/m}$)



4. Navor na dipol v električnem polju določa izraz: $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = Q\vec{d} \times \vec{E}$. Absolutna vrednost navora je enaka produktu absolutne vrednosti dipolskega momenta, absolutne vrednosti jakosti polja in sinusa kota med vektorjema: $M = QdE \sin \varphi = \boxed{1 \mu\text{Nm}}$.



SLIKA: Ekvipotencialne ploskve (krivulje v 2D) električnega dipola, ki leži v koordinatne izhodišču in je usmerjen navzgor.

```
% dipol.m
for Veq=0:1:10
p=1e-8;
eps0=8.854e-12;
k=p/(4*pi*eps0*Veq);

theta=0:pi/100:pi;

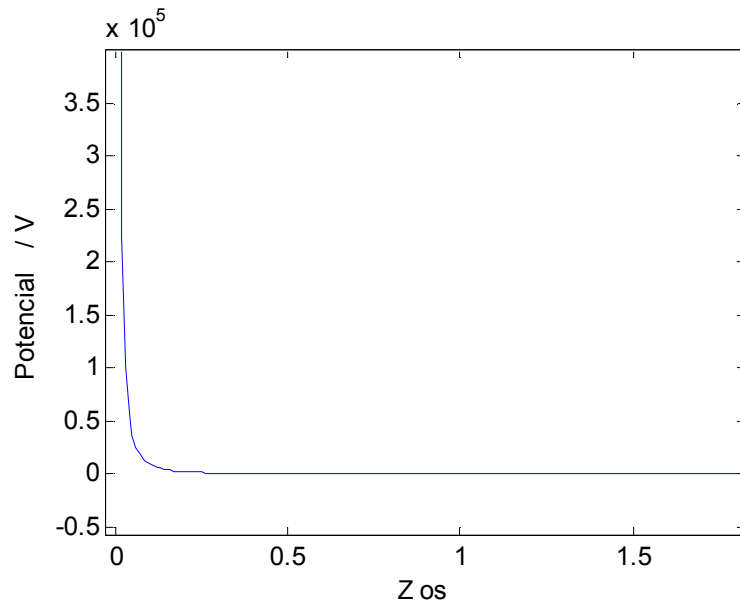
r=sqrt(k.*cos(theta))

x=r.*sin(theta);
y=r.*cos(theta);

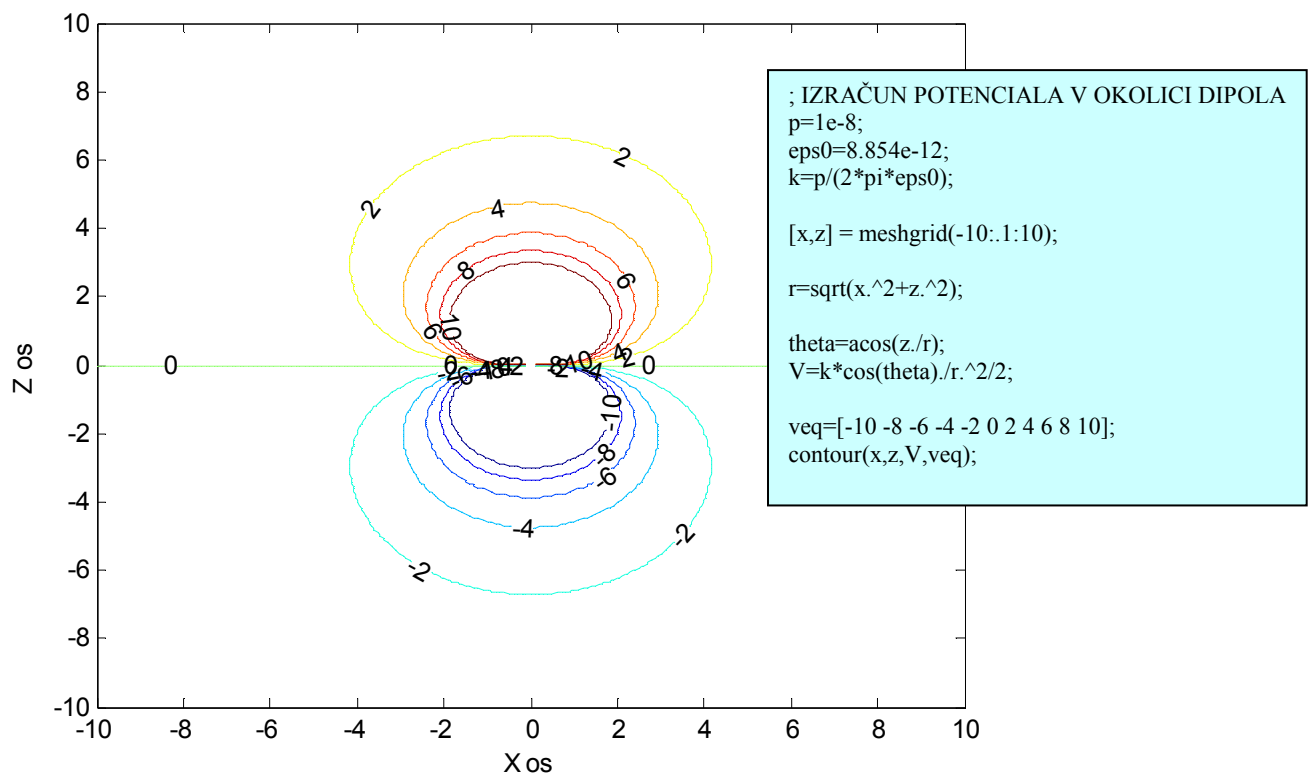
plot(x,y,-x,y,-x,-y,x,-y)
set(findobj('Type','line'),'Color','k')
xlabel('X os');
ylabel('Z os')
axis equal
hold on
end

figure;

k=p/(4*pi*eps0);
r=0:0.01:10;
V=k./r.^2
plot(r,V)
xlabel('Z os');
ylabel('Potencial / V')
```



SLIKA: Potencial vzdolž Z osi.



SLIKA: Drug način izračuna polja v okolici dipola: določimo mrežo točk na X in Z osi in v teh točkah izračunavamo potenciale, ki jih nato prikažemo grafično.

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p \cos(\vartheta)}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\vartheta = -\frac{\partial V}{r \partial \vartheta} = \frac{p \sin(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

18. Okovinjje ekvipotencialnih ravnin

Ekvipotencialna ravnina povezuje točke z enako vrednostjo potenciala. Ugotovili smo, da je površina prevodnika ekvipotencialna ploskev. Celo več, celoten prevodnik je na istem potencialu. Običajno rišemo ekvipotencialne ploskve tako, da je med sosednjimi enaka potencialna razlika (napetost). Hitreje kot se krajevno spreminja potencial, večja je električna poljska jakost. Zgoščenost ekvipotencialnih ravnin nam torej nakazuje zvečanost električne poljske jakosti na tem mestu. Velja seveda tudi obratno: Večje polje ima posledično bolj zgoščene ekvipotencialne ploskve na tem območju.

Sedaj se vprašamo: ali se razmere (porazdelitev polja in potenciala) med dvema ekvipotencialnima ploskvama spremeni, če ekvipotencialni ravnini okovinimo, pri čemer okovinjena ekvipotencialka ohrani vrednost potenciala ekvipotencialke?

Odgovor je NE, porazdelitev polja med okovinjenima ekvipotencialnika ravninama se ne spremeni, saj je kovina sama kot prevodnik tudi ekvipotencialna ravnina in če ohrani potencial ekvipotencialke, se razmere ne spremenijo.

SLIKA: Porazdelitev ekvipotencialk in okovinjje ekvipotencialke. Razmere med ekvipotencialkama se ne spremenijo.

Sistem dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev. En najpomembnejših primerov, ki ima tudi precejšnjo praktično uporabo sledi iz okovinjenja ekvipotencialnih ravnin sistema dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev. Torej sistema dveh vzporednih tankih enakomerno naelektrenih žic.

Potencial v okolici ene same preme elektrine je

$$V(T) = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_T^{T(V=0)} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \Big|_T^{T(V=0)}.$$

Ugotovimo lahko, da zaidemo v težave, če vzamemo, da je točka, kjer je potencial enak nič v neskončnosti, saj iz enačbe sledi $\ln(\infty) = \infty$. Torej bi bil potencial v neskončnosti neskončen. Problem je v tem, da imamo pri enem samem premem naboju opravka z enim samim neskončno razsežnim električno nezaključenim sistemom, kar pa v realnosti ni možno. Nekaj, kar v realnosti ni možno, pogosto tudi v teoriji ne da smiselne rezultate. Temu problemu se ognemo tako, da obravnavamo sistem dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev, razmaknjen za razdaljo s .

SLIKA: Dva prema naboja vzdolž X osi.

Vzemimo, da sta naboja položena na X osi simetrično na Y os in potekata vzdolž Z osi. (Glej sliko). Potencial v točki T , ki je od naboja q_1 oddaljena za r_1 in od naboja q_2 za razdaljo r_2 , je sedaj vsota prispevkov obeh nabojev:

$$V(T) = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \Big|_{r_1}^{T(V=0)} + \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \Big|_{r_2}^{T(V=0)} = -\frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_1) - \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) + \frac{(q_1 + q_2)}{2\pi\epsilon_0} \ln(T(V=0)),$$

Če velja $q_1 = -q_2 = q$ je tretji člen v gornji enačbi enak nič in potencial enak

$$V(T) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_1) - \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Potencial v točki T v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev bo torej enak

$$\boxed{V(T) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Sedaj lahko ugotovimo, da je potencial enak nič v neskončnosti (kjer je $r_1 = r_2$), pa tudi vzdolž Y osi (pri $x = 0$).

Ekvipotencialne ravnine so krožnice. Poskušajmo določiti ekvipotencialne ravnine sistema dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev. To pomeni, da iščemo točke, kjer je

$$\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = V_{ep} \text{ oziroma } \frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{V_{ep} \cdot 2\pi\epsilon_0}{q}} = k, \text{ kjer je } V_{ep} \text{ potencial ekvipotencialke.}$$

Če upoštevamo, da je $r_2^2 = (x-s)^2 + y^2$ in $r_1^2 = (x+s)^2 + y^2$ dobimo

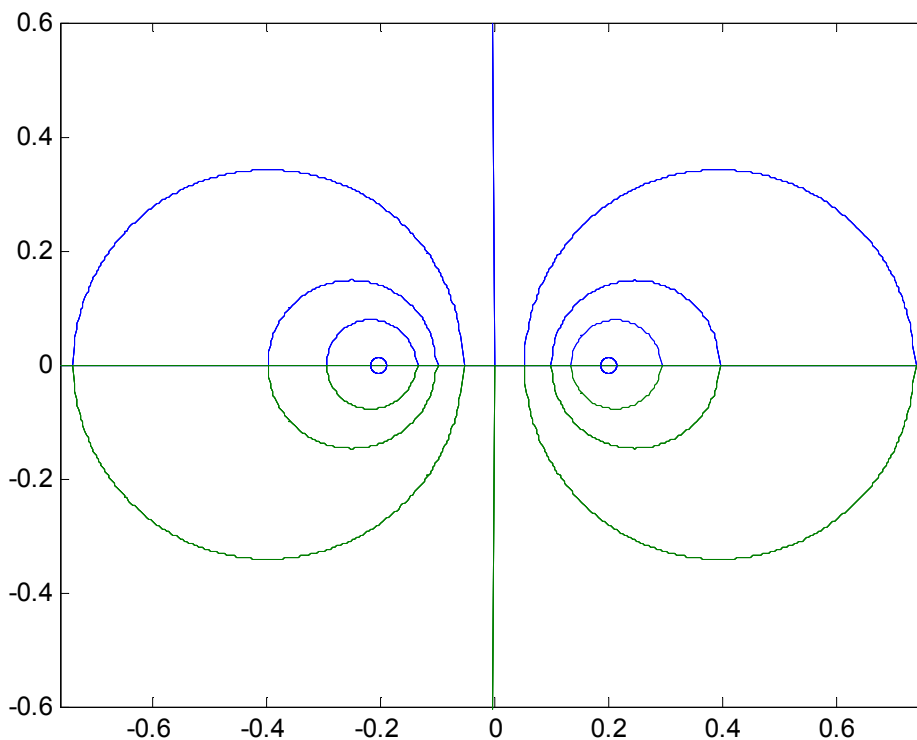
$\frac{(x-s)^2 + y^2}{(x+s)^2 + y^2} = k^2$ in $(x-s)^2 + y^2 = k^2 ((x+s)^2 + y^2)$. Po preureditvi lahko enačbo spravimo v obliko

$(x-p)^2 + y^2 = r^2$, kar je **enačba za krog polmera r zamaknjen v X osi za p** . S primerjavo enačb dobimo

$$p = -\frac{k^2+1}{k^2-1}s \text{ in } r = \frac{2k}{|k^2-1|}s \text{ ter } s^2 = p^2 - r^2.$$

Primer: Poiščimo pozicijo ekvipotencialno ravnino s potencialom $V=300$ za naboja $q = \pm 10 \text{ nC}$, ki sta razmaknjena za 20 cm.

določimo konstante $k = e^{\frac{V_{ep} \cdot 2\pi\epsilon_0}{q}} \approx 5,31$, $p = -0,215$ in $r = 0,078$.



SLIKA: Ekvipotencialne ravnine izračunane pri vrednostih potenciala $V = -300 \text{ V}, -200 \text{ V}, -100 \text{ V}, 0 \text{ V}, 100 \text{ V}, 200 \text{ V}, 300 \text{ V}$, za prema naboja $q = \pm 10 \text{ nC}$.

```
% ekvipot_2preme.m
q=10e-9; s=0.2;
eps0=8.854e-12;

Veq=[-300,-200,-100,0.001,100,200, 300];
%Veq=[300];
for i=1:length(Veq)
k=exp(Veq(i)*2*pi*eps0/q);
p=-(k^2+1)/(k^2-1)*s;
r=sqrt(p^2-s^2);

x=-5*s:0.01*s:5*s;
lx=length(x);
y=sqrt(ones(1,lx)*r^2-(x-ones(1,lx)*p).^2);
plot(x,y,x,-y); plot(x,y,x,-y);
axis([-3*s 3*s -3*s 3*s]); axis equal;
plot(-s,0,'o');plot(s,0,'o')
hold on
end
```

Dva valja priključena na vir napetosti.

Namen vsega tega izvajanja ni bil samo določitev ekvipotencialnih ravnin dveh premih nabojev. Šele z okovinjenjem ekvipotencialk dobimo strukture, ki so tudi v realnosti zanimive. Ugotovili smo, da so ekvipotencialke za sistem dveh premih nabojev krogi oziroma plašči valjev, kar pomeni, da je mogoče **z okovinjenjem ekvipotencialk izračunati polje in potencial v okolici dveh naelektrenih valjev s pomočjo sistema dveh premih nabojev.**

Kaj je potrebno narediti? Običajno poznamo napetost med valjema. Torej je potrebno iz znane napetosti določiti lokacijo dveh nadomestnih premih nabojev in njun naboj. Ko to določimo, lahko zelo preprosto določimo tudi polje in potencial v okolici - (z analizo polja in potenciala v okolici dveh premih nabojev).

Če analiziramo dve simetrični okovinjeni ekvipotencialki (površina valja), je napetost med njima enaka dvojni vrednosti potenciala ene od njih (na sredini med valjema je potencial enak nič):

$$U = V(T_1) - V(T_2) = 2 \cdot V(T_1) = 2 \cdot \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{s + d/2 - r_0}{s - d/2 + r_0} \right), \text{ kjer je } r_0 \text{ polmer valja, } d \text{ pa razdalja}$$

med geometrijskima središčema valja. Za ekvipotencialko, ki je površina valja velja $p = \frac{d}{2}$ in

$r = r_0$ kar vstavimo v zvezo $s^2 = p^2 - r^2$ in s določimo kot $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}$. Iz te enačbe torej lahko določimo lego naboja, ki predstavlja v primeru dveh prevodnih valjev le navidezni naboj znotraj valja. V resnici tega naboja ni, saj znotraj valja ni polja. Lahko pa analiziramo polje v okolici dveh valjev z določitvijo polja v okolici dveh premih nabojev. Smiselne rešitve so le v prostoru zunaj in na površini dveh valjev. Znotraj prevodnih valjev je pač polje enako nič.

Postopek izračunavanja je torej sledeč: Če poznamo legi in napetost med dvema prevodnima valjema, lahko lego nadomestnih premih nabojev določimo s pomočjo zveze

$$s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2},$$

kjer je s razdalja od središča med valjema (kjer je potencial enak nič) do lege nabojev.

Velikost naboja pa določimo iz enačbe za napetost

$$U = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{s + d/2 - r_0}{s - d/2 + r_0} \right).$$

Primer: Naelektrena valja polmera 4 cm sta razmaknjena za 10 cm. Med valjema je napetost 20 kV. Določimo lego in velikost navidezni nabojev.

Izračun: $d = 10 \text{ cm} + 2 \cdot 4 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$. $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2} = \sqrt{7^2 - 4^2} \text{ cm} = 8,06 \text{ cm}$.

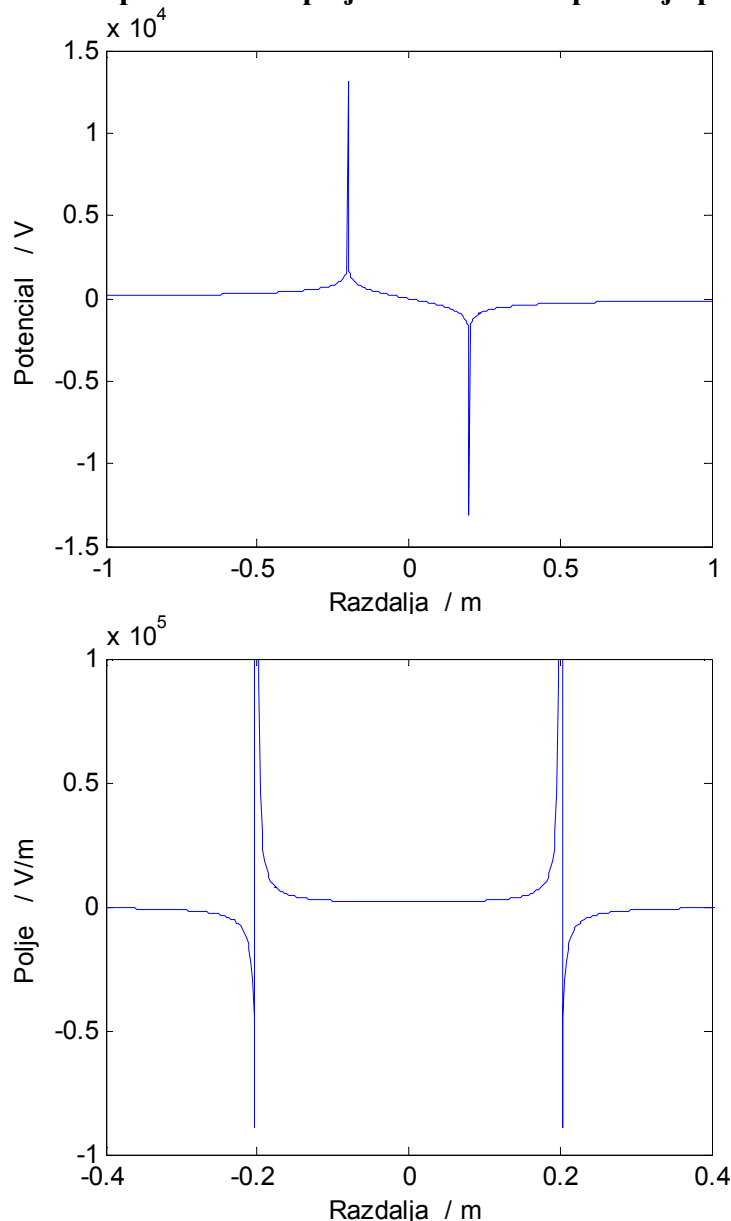
$$20 \text{ kV} = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{8,06 + 9 - 4}{8,06 - 9 + 4} \right) \text{ iz česar sledi } q = 3,833 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}.$$

Določimo še polje na sredini med valjema:

$$\vec{E} = \vec{e}_x \frac{q}{2\pi\epsilon_0 s} \cdot 2 = \vec{e}_x \frac{3,833 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}}{\pi\epsilon_0 8,06 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \approx 171 \text{ kV/m}.$$

In kolikšno bi bilo za primerjavo polje med ravnima ploščama oddaljenima za 10 cm in priključenima na napetost 20 kV? $E = \frac{U}{d} = \frac{20 \text{ kV}}{0,1 \text{ m}} = 200 \text{ kV/m}$. Ugotovimo, da je polje na sredini med valjema manjše od polja enako razmaknjenih vzporednih plošč. Je pa zato večje polje na površini valjev. Določite ga sami!

Izračun potenciala in polja vzdolž osi X s pomočjo programa Matlab.



```
% pot_2preme.m
q=10e-9; s=0.2;
eps0=8.854e-12;

x=-5*s:0.01*s:5*s;

r1=x+s; r2=x-s;
V=q/(pi*eps0)*log(r2./r1)

E=q/(2*pi*eps0)*(1./r1-1./r2)
plot(x,V);
xlabel('Razdalja / m');
ylabel('Potencial / V');
figure;
plot(x,E); axis([-2*s 2*s -1e5 1e5])
xlabel('Razdalja / m');
ylabel('Polje / V/m');
```

Druge strukture, ki jih lahko analiziramo z okovinjenjem ekvipotencialk dveh premih nabojev:

- a) dva valja z različnima polmeroma
- b) en valj v drugem (koaksialni kabel z ekscentrom)
- c) valj nad prevodno ravnino – zemljo

Posebno zanimiv je tretji primer, primer valja nad zemljo. Gre namreč za pomembno strukturo, ki jo srečamo v našem vsakdanu, za elektrotehnika pa je še posebno zanimiva – za daljnovodno žico nad zemljo. To bomo obravnavali v posebnem (naslednjem) poglavju.

SLIKA: Primeri možne analize struktur izhajajočih iz okovinenja ekvipotencialk nasprotno naelektrenih premih nabojev.

19. Metoda zrcaljenja

V prejšnjem poglavju smo ugotavljali, da so ekvipotencialne ploskve v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev krožnice oziroma plašči valjev. Ena od krožnic je tudi ravnina med nabojema, v obravnavanem primeru ravnina $x = 0$ (krožnica z neskončnim radijem). Obenem smo ugotavljali, da lahko poljubne ekvipotencialne ploskve okovinimo in s tem ne spremenimo razmer (polja) med okovinjenimi ploskvami. Če je ena od okovinjenih ekvipotencialnih ploskev ravnina $x = 0$, lahko v tem primeru prepoznamo možnost analize vodnika nad prevodno ravnino – zemljo. Tako strukturo potem analiziramo na način, da naboj zrcalimo preko ravnine, kjer ima nasproten predznak.

SLIKA: Zrcaljenje nabojev: točkasti naboj, premi naboj, dipol, linijski naboj, površinski naboj.

Valj nad zemljo.

Primer je zelo podoben prejšnjemu, le da v tem primeru okovinimo eno ekvipotencialko, ki ima radij r_0 in eno, ki ima neskončen radij (ravnino v osi Y kjer je potencial enak nič). Tudi ta primer lahko analiziramo z dvema nasprotno naelektrenima premima nabojema. En od teh se nahaja »pod zemljo«, zato pravimo, da **analiziramo primer naelektrenega valja nad zemljo s pomočjo metode zrcaljenja. To pomeni, da moramo v primeru analize premega naboja nad zemljo za izračun postaviti še navideznega zrcalno na ravnino zemlje. Zrcalni naboj ima nasprotni predznak od tistega nad zemljo.**

SLIKA: Valj nad zemljo: okovinjenje ekvipotencialke z radijem r_0 in ravnine $x = 0$.

Napetost med valjem in zemljo določimo podobno kot v prejšnjem primeru, le da je sedaj

$$V(T_2) = 0 \text{ in je } U = V(T_1) - V(T_2) = V(T_1) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{s + d/2 - r_0}{s - d/2 + r_0} \right). \text{ Razlika v izrazu je le v}$$

»polovički«. Lego navideznega naboja določimo enako kot prej: $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}$, kjer je $d/2$ razdalja med geometrijskim središčem valja in zemljo, r_0 pa polmer valja.

Primer: 20 m nad zemljo se nahaja daljnovodna vrv polmera 2 cm z nabojem $q = 300 \text{ nC/m}$. Določimo napetost med vrvjo in zemljo, električno poljsko jakost na površini zemlje tik nad vrvjo ter površinsko gostoto naboja na zemlji.

Izračun: $d/2 = 20,01 \text{ m}$; $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2} = 20,0099975 \text{ cm}$. Ugotovimo lahko, da je razmak med geometrijskim središčem vrvi in lego nadomestnega naboja praktično zanemarljiv $e = d/2 - s = (20,01 - 20,0099975) \text{ cm} \approx 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$. V tem primeru lahko ekscentrično postavitve navideznega naboja zanemarimo in smatramo, da se navidezni naboj nahaja v geometrijskem središču valja (vrvi). **Za zanemaritev ekscentričnosti mora veljati,**

da je razdalja od vrvi do zemlje dosti večja od polmera vrvi: $\frac{r_0}{d} \ll 1$. V praksi lahko

vzamemo $\frac{r_0}{d} \leq 0,01$. V primeru zanemaritve ekscentričnosti se poenostavi tudi izračun

napetosti med vrvjo in zemljo, ki je sedaj ($d/2 \approx s$):

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d - r_0}{r_0} \right).$$

Izračunajmo napetost v konkretnem primeru

$$U = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \cdot 300 \cdot 10^{-9} \text{ C/m} \cdot \ln \left(\frac{40,04 \text{ m}}{0,02 \text{ m}} \right) \approx 41 \text{ kV}.$$

Dodatno: Določimo še polje na površini zemlje. Upoštevati je potrebno oba naboja – originalnega v središču vrvi in zrcalnega z nasprotnim predznakom. Polje na površini zemlje tik pod vrvjo je torej vsota obeh in je enako

$$\vec{E} = -\vec{e}_y \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot 2 = -\vec{e}_y \frac{300 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}}{\pi\epsilon_0 20 \text{ m}} \approx -\vec{e}_y 540 \text{ V/m}.$$

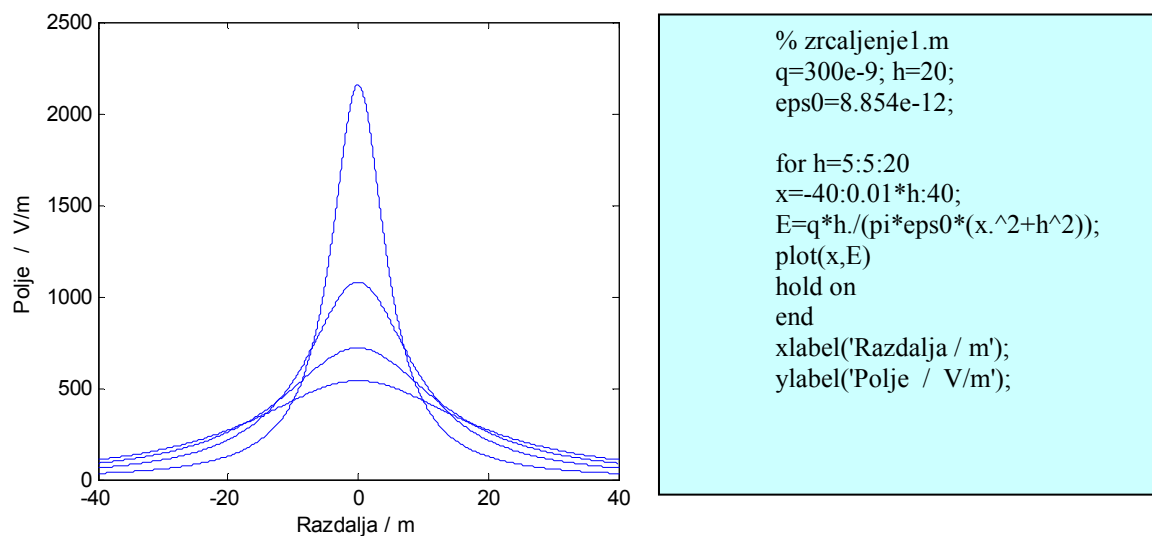
Koliko pa je površinska gostota naboja na tem mestu? Ugotovili smo že, da je na površini polprevodnika $\sigma = \epsilon_0 \cdot E_n$, torej bo $\sigma = -4,77 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}$.

SLIKA: Izračun polja na površini zemlje.

V poljubni točki na zemlji je polje enako:

$$\vec{E} = -\vec{e}_y 2 \cdot E \cdot \cos(\alpha) = -2 \cdot \vec{e}_y \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + x^2}} \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} = -\vec{e}_y \frac{q \cdot h}{\pi\epsilon_0 (h^2 + x^2)}$$

To polje je največje na zemlji direktno pod vrvi in se z oddaljenostjo manjša. Za vizualizacijo se zopet poslužimo programa Matlab.



SLIKA: Električna poljska jakost na površini zemlje za razdalje od zemlje do vrvi 5, 10, 15 in 20 m za naboj na vrvi 30 nC. Bližje kot se nahaja vrv, večje je polje tik pod vrvi na zemlji.

Z integracijo površine pod krivuljo polja bi dobili enak rezultat za vse krivulje. Zakaj? Zato, ker je polje na površini sorazmerno gostoti naboja $\sigma = \epsilon_0 \cdot E_n$, z integracijo gostote naboja po površini pa dobimo celotni naboj, ki je po iznosu enako velik kot naboj na vrvi, le nasprotnega predznaka je. To je naboj, ki se inducira na površini zemlje kot posledica naboja na vrvi.

Izračun linijske gostote naboja za različne razdalje od zemlje do vrvi in konstantno napetostjo 40 kV:

h / m	$q / \text{nC/m}$
5	358
10	322
15	304
20	293

..

Izračun napetosti med vrvjo in zemljo za različne razdalje od zemlje do vrvi in konstantno gostoto naboja 300 nC/m:

h / m	U / kV
5	33,5
10	37,3
15	39,4
20	41

Kapacitivnost. Ugotovimo, da se pri konstantni napetosti med vrvjo in zemljo naboj na vrvi spreminja v odvisnosti od višine vrvi. Bližje kot je vrv površini zemlje, večji je njen naboj. In seveda obratno. Pri konstatnem naboju na vrvi ugotavljamo spreminjanje napetosti z višino vrvi. Zakaj je temu tako? Zato, ker bližje kot je vrv zemlji, bolj se bodo na površini zemlje pod vrvjo zgostili (influirali) naboji nasprotnega predznaka in večja bo električna poljska jakost na zemlji. Posledično bo višja tudi napetost med zemljo in vrvjo. Med nabojem na vrvi in napetostjo med vrvjo in zemljo velja linearna zveza:

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right) \text{ oziroma } q = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}.$$

Če zapišemo celotni naboj na dolžini l vrvi, dobimo $Q = q \cdot l = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$. Razmerje Q/U je

konstantno. To konstanto imenujemo – kapacitivnost. Kapacitivnost sistema vrvi nad zemljo je torej

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}.$$

V tem primeru smo prvič omenili kapacitivnost, ki je izražena kot razmerje med nabojem in napetostjo. V praksi pogosto za daljnovidne vrvi uporabljamo kapacitivnost na enoto

razdalje, $c = C/l = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$.

Določimo kapacitivnost daljnovidne vrvi na enoto dolžine v našem primeru:

$$C/l = \frac{300 \text{ nC/m}}{41 \text{ kV}} \cong 7,32 \text{ pF/m. Enota za kapacitivnost je Farad s simbolom F.}$$

Kapacitivnost smo izračunali iz poznanega naboja in napetosti med vrvjo in zemljo.

Ugotovimo lahko, da bi lahko kapacitivnost določili direktno s pomočjo uokvirjene enačbe in da ni odvisna ne od napetosti ne od naboja pač pa le od geometrijskih razmer torej od razdalje od vrvi do zemlje in njenega polmera. Kapacitivnost je torej geometrijski pojem.

Računanje polja in potenciala v okolici daljnovodnih vrvi nad zemljo.

Ugotovili smo, da običajno lahko zanemarimo vpliv ekscentričnosti, in da je napetost med

vrvo in zemljo podana z enačbo $U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$. Če imamo opravka z več

daljnovodnimi vrvmi, je smiselno ugotavljati potencial posamezne vrvi, zato pogledjmo, kako je sestavljen potencial ene same vrvi:

$V = U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(d-r_0) - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0)$. Običajno zanemarimo tudi r_0 v primerjavi z d in dobimo

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d}{r_0}\right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(d) - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0).$$

Prvi člen je potencial, ki ga povzroča negativni naboj na mestu pozitivnega od katerega je oddaljen za razdaljo d . Drugi člen je potencial lastnega (pozitivnega) naboja. Da ne bi pri izračunu pozabili, da se pozitivni predznak nanaša na razdaljo od negativnega naboja, lahko enačbo zapišemo tudi v obliki:

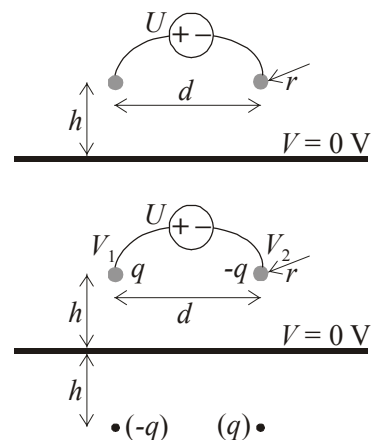
$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{r_0}\right) + \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{d}\right).$$

Primer (izpitna naloga 4.2.2005):

Vodnika simetričnega dvovoda dolžine 5 m ležita vzporedno nad ozemljeno prevodno ploščo. Med njiju je priključen vir napetosti $U = 400$ V. Izračunajte naboja na vodnikih. ($h = 3$ cm, $d = 6$ cm, $r = 2$ mm)

Izračun: Glede na priključitev vira sta vzdolžni gostoti nabojev na vodnikih enakih absolutnih vrednosti, vendar nasprotnih predznakov, $(\pm q)$. Polje naboja ozemljene prevodne plošče določata polji zrcalnih nabojev $(\pm q)$. Naboj $Q_{1,2} = \pm ql$ vodnikov (dolžine $l = 5$ m) določa napetost vira, ki je enaka razliki potencialov vodnikov: $U = V_1 - V_2$. Njiju zapišemo kot vsoto prispevkov dveh parov nabojev:

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{\sqrt{(2h)^2 + d^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}}$$



$$V_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{d} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(2h)^2 + d^2}}{2h} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}}{2hd} = -V_1$$

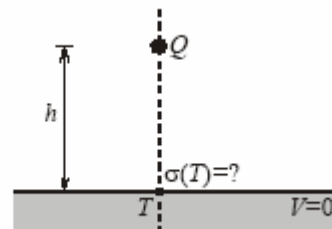
$$U = V_1 - V_2 = 2V_1 = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}} \Rightarrow Q_{1,2} = \pm ql = \pm \frac{\pi\epsilon_0 l U}{\ln(2hd/r\sqrt{(2h)^2 + d^2})} \approx \underline{\underline{18,2 \text{ nC}}}$$

Druge variante:

- Naboja na vrveh sta povezana z virom napetosti: v tem primeru je na eni vrvi pozitivni, na drugi pa negativni naboj enake absolutne vrednosti.
- Naboja na vrveh sta nista povezana z virom napetosti: v tem primeru sta naboja različna.
- Na nevtralnemu vodniku ni naboja. Vodnika na katerem ni naboja ne zrcalimo.
- Vodnik je v homogenem polju. V tem primeru je poleg ostalih prispevkov potrebno upoštevati še potencial $E h$, kjer je h višina vrvi.
- Zrcalimo tudi točaste in druge naboje; zrcalni naboji imajo nasprotni predznak.
- Kapacitivnost med vrvema je določena s kvocientom napetosti med vrvema in naboja na vrveh.

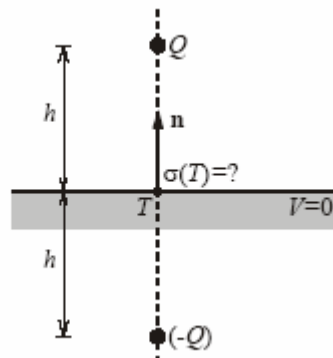
Primer, zrcaljenje točkastih nabojev: kolokvij 17.12.2002

4. Točkasta elektrina množine Q se nahaja na višini h nad zemljo. Kolikšna je ploskovna gostota σ elektrine na površini zemlje v točki T , ki leži navpično pod točkasto elektrino?



4. Ploskovna gostota elektrine na površini zemlje je sorazmerna normalni komponenti električne poljske jakosti tik nad površino: $\sigma(T) = \epsilon_0 E_n(T_+)$. Pri določanju poljske jakosti upoštevamo še zrcalno elektrino $(-Q)$, ki v točki T_+ povzroča enako polje kot originalna elektrina Q :

$$\vec{E}(T_+) = -2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h^2} \vec{n}; \quad \sigma(T) = \boxed{-\frac{Q}{2\pi h^2}}$$



Zrcaljenje točkastega naboja na kovinski krogli.

Vzemimo dva točkasta naboja vzdolž X osi. Potencial v točki T je

$$V(T) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Poiščimo točke (ekvipotencialno ravnino), kjer je potencial enak nič. Tedaj bo

$$V(T_0) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{10}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{20}} = 0 \Rightarrow \frac{R_{20}}{R_{10}} = -\frac{Q_2}{Q_1}.$$

Tudi pri razmerju dveh premih nabojev smo dobili, da je razmerje radijev konstantno, ekvipotencialne ravnine pa so bile krožnice oziroma plašči valjev. V tem primeru je ekvipotencialna ravnina krogla s polmerom R_{20} , če je $|Q_1| > |Q_2|$.

Če zapišemo potenciala v dveh točkah na krogli, določimo ekscentrično lego naboja Q_2

znotraj krogle iz $e = \frac{r_0^2}{d}$, kjer je r_0 polmer krogle, d pa razdalja od središča krogle do naboja

Q_1 . Poleg dobimo zvezo med Q_1 in Q_2 : $\frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{d}{r_0}$.

SLIKA: Dva točkasta naboja imata ekvipotencialke od katerih je ena krogla s potencialom nič. Polje v okolici naboja, ki se nahaja v bližini ozemljene krogle analiziramo s pomočjo zrcalnega naboja, ki leži ekscentrično od geometrijskega središča krogle.

Primer: Določimo silo na točkasti naboj $Q_1 = 10$ nC, ki je oddaljen za 10 cm od prevodne ozemljene krogle polmera 8 cm.

$$e = \frac{r_0^2}{d} = \frac{(8 \text{ cm})^2}{10 \text{ cm} + 8 \text{ cm}} \approx 3,556 \text{ cm}.$$

Naboj Q_2 moramo torej postaviti za 3,556 cm od središča krogle v smeri naboja Q_1 . Po velikosti pa mora biti

$$Q_2 = -Q_1 \frac{r_0}{d} = -10 \text{ nC} \cdot \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = -8 \text{ nC}.$$

Sila med nabojema (hkrati tudi sila med prevodno naelektreno kroglo in točkastim

$$\text{nabojem) je } F = \left| \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right| = \left| \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 (d - e)^2} \right| = \left| \frac{10 \text{ nC} \cdot (-8 \text{ nC})}{4\pi\epsilon_0 (10 \text{ cm} - 3,556 \text{ cm})^2} \right| \approx 498 \mu\text{N}.$$

20. Kapacitivnost

V prejšnjem poglavju smo že spoznali, da vlada med nabojem med dvema nasprotno naelektrenima telesoma **sorazmerje med kolicino naboja na telesu in napetostjo med telesoma**. **Faktor sorazmernosti imenujemo kapacitivnost**. Ali z drugimi besedami: vecanje napetosti med telesoma povzroci sorazmerno povecanje naboja na telesoma. V matematicni obliki pa to zapišemo kot

$$Q = C \cdot (V_A - V_B) \text{ oziroma } Q = C \cdot U, \text{ od koder je } \boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

SLIKA: Kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma.

Element vezij: Kondenzator. Simbol in enota za kapacitivnost.

Dve poljubni prevodni telesi lahko prikažemo kot sistem, ki ga imenujemo kondenzator. temu, da iz srednješolske fizike (elektrotehnike) že poznamo simbol za kondenzator, ga omenimo še enkrat. Simbol za kondenzator sta torej dve vzporedni enako dolgi daljici, precno na vodnika, razmaknjeni za malo razdaljo. Ce je med telesoma prikljucimo napetost U , se bo na njunih telesih vzpostavil naboj $\pm Q = C \cdot U$. C imenujemo kapacitivnost sistema, sistem, ki shranjuje naboj pa kondenzator. Enota za kapacitivnost je $C/V = F$, v cast pomembnemu znanstveniku in raziskovalcu Michaelu Faraday-u. Pogosto tudi enoto za dielektricnost vakuumu ϵ_0 oznacujemo z enoto F/m .

Zanimivo je to, da na prvi pogled na kapacitivnost med dvema telesoma vpliva napetost in naboj na telesih, v resnici pa ni tako. Kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma v zraku je odvisna le od geometrijskih znacilnosti teles (oblike teles in postavitve). To velja tudi za kapacitivnosti pri dielektrikih, ce njihove dielektricne lastnosti niso odvisne od napetosti, smeri polarizacije, itd., kar sicer velja za določene specifične dielektrike.

SLIKA: Simbol za kondenzator.

Merjenje kapacitivnosti. Kako bi določili kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma? Eksperimentalno bi to lahko naredili tako, da bi ti dve telesi naelektrili z znanim nabojem in izmerili napetost, ki se pojavi med telesoma. Kapacitivnost bi določili iz razmerja $C = \frac{Q}{U}$.

Ali bolj verjetno: med telesi bi priključili znan vir napetosti in ju naelektrili. Nato bi morali ugotoviti, koliko naboja je prešlo pri tem na telesi. To bi lahko naredili tako, da bi merili tok naelektritve, naboj pa je iz že znanih zvez enak integralu toka: $Q = \int i(t) \cdot dt$. Ali pa bi najprej telesi naelektrili, nato vir odstranili in izmerili tok razelektritve.

Bolj običajno pa se v te namene uporablja metode, kjer se uporabi mostično vezje in izmenično napetost ali pa kar preprosto meri upornost kondenzatorja pri izmeničnih signalih. Vec o tem bomo govorili v naslednjem semestru.

Kako pa izračunamo kapacitivnost matematično? Tako, da predpostavimo, da sta telesi naelektrjeni z nabojema $+Q$ in $-Q$ ter izračunamo napetost med njima. Kapacitivnost pa je razmerje med nabojem in izračunano napetostjo: $C = \frac{Q}{U}$.

Kapacitivnosti osnovnih struktur.

Uporabili bomo ugotovitve iz poglavja o potencialu in napetosti in določili kapacitivnosti osnovnih struktur s katerimi se srečujemo:

Kapacitivnost zračnega ploščatega kondenzatorja:

$U = E \cdot d = \frac{s}{e_0} \cdot d$ oziroma $U = \frac{Q \cdot A}{e_0} \cdot d$, kjer je A površina ene plošče, d pa razdalja med njima. Kapacitivnost je

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = e_0 \frac{A}{d}}$$
 KAPACITIVNOST PLOŠČATEGA ZRACNEGA KONDENZATORJA

Dobili smo enacbo, ki jo poznamo že iz srednješolske fizike (elektrotehnike).

Kapacitivnost zračnega koaksialnega kabla:

$U = \int_{r_n}^{r_0} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_n}^{r_0} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi e_0 r} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi e_0} \ln \frac{r_0}{r_n}$, kjer je r_n polmer žile, r_0 pa notranji polmer oklopa. Kapacitivnost je

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{q \cdot l}{U} = \frac{2\pi e_0 \cdot l}{\ln \frac{r_0}{r_n}}}$$
 KAPACITIVNOST ZRACNEGA KOAKSIALNEGA KABLA

Kapacitivnost zračnega sferičnega kondenzatorja:

Napetost med sferama s polmeroma r_n in r_z je

$$U = \int_{r_n}^{r_z} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_n}^{r_z} \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_n}^{r_z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right). \text{ Kapacitivnost je torej}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right)}. \text{ KAPACITIVNOST ZRACNEGA SFERICNEGA KONDENZATORJA}$$

Dolocimo lahko tudi **kapacitivnost osamljene naelektrene prevodne krogle** ($r_z \rightarrow \infty$), ki je

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \cdot r_n. \text{ KAPACITIVNOST OSAMLJENE NAELEKTRENE PREVODNE KROGLE}$$

Kapacitivnost med valjem in zemljo. Z zanemaritvijo ekscentricnosti smo dobili zvezo med

napetostjo in linijsko gostoto naboja: $U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$. Kapacitivnost je:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{q \cdot l}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}. \text{ KAPACITIVNOST MED PREVODNIM VALJEM IN ZEMLJO}$$

d je razdalja med geometrijskima središčema dveh valjev. Tistega nad zemljo in prezrcaljenega. Če se torej valj nahaja za višino h nad zemljo bo $\frac{d}{2} = h + r_0$ in enacbo za izracun kapacitivnosti med prevodnim valjem nad zemljo lahko zapišemo v obliki:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{q \cdot l}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{2h+r_0}{r_0}\right)}.$$

SLIKA: Prevodni valj nad zemljo.

Kapacitivnost med dvema valjema. Napetost med dvema valjema je 2x večja kot med

valjem in zemljo: $U = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$, torej bo kapacitivnost med valjema (ob zanemaritvi ekscentricnosti):

$$C = \frac{pe_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)} \quad \text{KAPACITIVNOST MED PREVODNIMA VALJEMA}$$

SLIKA: Dva prevodna valja.

Zaporedna vezava kondenzatorjev. Ugotovimo, da je kapacitivnost med valjem in zemljo 2x večja od kapacitivnost med valjema z enako razdaljo d . V smislu koncentriranih elementov (kot npr. upor) lahko govorimo o zaporedni vezavi dveh kapacitivnosti. Skupna kapacitivnost je 2x manjša, torej kapacitivnosti zaporedno seštevamo enako kot prevodnosti:

$$\frac{1}{C}_{\text{zaporedno}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Narišimo sliko zaporedno vezanih več kondenzatorjev. Med skrajnima je napetost U , torej bo na pozitivni sponki naboj $+Q$, na negativni pa $-Q$, zveza med njima pa je $Q = C \cdot U$. Tudi na vsakem zaporedno vezanem kondenzatorju bo enako velik naboj, saj bo med dvema sosednjima kondenzatorjema prišlo le do prerazporeditve naboja. Na plošči kondenzatorja, ki bo bliže pozitivni sponki se bo nakopil negativni naboj ($-Q$) na račun povečanja pozitivnega naboja na povezani plošči sosednjega kondenzatorja. Celotna napetost bo vsota posameznih padcev napetosti: $U = U_1 + U_2 + \dots U_n$, kar lahko izrazimo z nabojem in kapacitivnostjo

kondenzatorjev $U = \frac{Q}{C}_{\text{zaporedno}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots \frac{Q}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{Q}{C_i}$. Če enačbo delimo z nabojem Q , dobimo že ugotovljeno zvezo:

$$\frac{1}{C}_{\text{zaporedno}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad \text{KAPACITIVNOST ZAPOREDNO VEZANIH KONDENZATORJEV}$$

SLIKA: Zaporedna vezava kondenzatorjev.

Primer: Določite nadomestno kapacitivnost zaporedne vezave treh kondenzatorjev: 1 nF, 2 nF in 5 nF.

Izračun: $\frac{1}{C} = \frac{1}{1\text{nF}} + \frac{1}{2\text{nF}} + \frac{1}{5\text{nF}} = \frac{10+5+2}{10\text{nF}} = \frac{17}{10\text{nF}}$, $C = \frac{10}{17}\text{nF} \approx 0,588\text{nF}$. Velja si

zapomniti, da je nadomestna kapacitivnost zaporedno vezanih kondenzatorjev vedno manjša od vsake posamezne kapacitivnosti. Najmanjša je 1 nF, torej bo skupna gotovo manjša od 1 nF. Kako si to razložimo? Preprosto iz ugotovitve, da je kapacitivnost razmerje med nabojem in napetostjo. Vec kot je kondenzatorjev vezanih zaporedno, vecji je skupni padec napetosti, obenem pa se naboj ne spreminja. Števec torej ostaja enako velik, imenovalc pa se veča in posledicno se manjša kapacitivnost.

Vzporedna vezava kondenzatorjev. Pri vzporedni vezavi kondenzatorjev je na vseh kondenzatorjih enaka napetost, naboj pa je sorazmeren kapacitivnosti vsakega posebej:

$$Q = C|_{\text{vzporedna vezava}} \cdot U = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + \dots + C_n \cdot U = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \cdot U, \text{ torej}$$

bo

$$C|_{\text{vzporedna vezava}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i. \text{ KAPACITIVNOST VZPOREDNO VEZANIH KONDENZATORJEV}$$

SLIKA: Vzporedna vezava kondenzatorjev.

Primer: Med dvema ravnima vzporednima ploščama površine 100 cm² je razdalja 2 cm.

- Določite kapacitivnost med ploščama.
- Za koliko se kapacitivnost poveca/zmanjša, ce plošči razmaknemo za trikratno razdaljo?
- Za koliko se kapacitivnost poveca/zmanjša, ce površino plošč povečamo za trikrat?
- Za koliko se skupna kapacitivnost poveca/zmanjša, ce ploščama zaporedno priključimo še 2 enako velika kondenzatorja?

Izračun: a) Kapacitivnost med ploščama je

$$C = e_0 \frac{A}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{0,02 \text{ m}} = 4,427 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 4,427 \text{ pF}.$$

Ce plošči razmaknemo za 3x, se poveca razdalja d za 3x, torej bo posledicno

kapacitivnost 3x manjša: $C = e_0 \frac{A}{3d} \approx 1,48 \text{ pF}$. Ce povečamo površino plošč za 3x, bo

kapacitivnost trikrat vecja: $C = e_0 \frac{3A}{d} \approx 13,3 \text{ pF}$. Ce ploščama zaporedno priključimo

še dva enaka kondenzatorja, bo skupna kapacitivnost

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{3}{C_1} \Rightarrow C = \frac{C_1}{3} \approx 1,48 \text{ pF}. \text{ Ugotovimo, da je zaporedna vezava treh}$$

enakih kondenzatorjev ekvivalentna povecanju razdalje med ploščama enega za 3x.
Hkrati je vzporedna vezava enakih kondenzatorjev ekvivalentna povecanju površine plošč enega kondenzatorja.

Kondenzatorska vezja.

Preprosta kondenzatorska vezja so kar vzporedne in zaporedne vezave kondenzatorjev. V tem primeru moramo ob upoštevanju zveze $Q = C \cdot U$ vedeti le to, da je skupna (nadomestna) kapacitivnost vzporedne vezave kondenzatorjev vsota posameznih kapacitivnosti in da moramo pri zaporedni vezavi seštevati inverzne vrednosti.

Primer: Zaporedni vezavi kondenzatorjev $C_1 = 1 \text{ nF}$ in $C_2 = 2 \text{ nF}$ priključimo vzporedno še kondenzator $C_3 = 2 \text{ nF}$. Določimo naboj na kondenzatorju C_2 , če vezje priključimo na napetost 100 V.

SLIKA: Vezava kondenzatorjev.

Izračun: Določimo nadomestno skupno kapacitivnost, ki je

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} \text{ nF} \cong 0,67 \text{ nF} . C_{nad} = C_{12} + C_3 \cong 0,67 \text{ nF} + 2 \text{ nF} = 2,67 \text{ nF} . \text{ Naboj na } Q_3 \text{ je}$$

$$Q_3 = C_3 \cdot U_3 = C_3 \cdot 100 \text{ V} = 267 \text{ nC} .$$

Koliko naboja pa je na Q_2 ? $Q_2 = C_2 \cdot U_2 = C_1 \cdot U_1$ in $U_2 = U - U_1$ torej

$$Q_2 = C_2 \cdot (U - U_1) = C_2 \cdot \left(U - \frac{Q_2}{C_1} \right), \text{ od koder je } Q_2 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) = C_2 \cdot (U - U_1) = C_2 \cdot U, \text{ oziroma}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot (U - U_1) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot U = C_{12} \cdot U . \text{ Ugotovili smo to, kar bi lahko zapisali že kar takoj,}$$

saj je zaradi zaporedne vezave naboj na kondenzatorju C_2 enak naboju na C_1 in torej

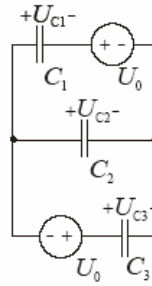
$$Q_2 = C_{12} \cdot U \cong 0,67 \text{ nF} \cdot 100 \text{ V} = 67 \text{ nC} .$$

Kako pa bi analizirali vezje z več kondenzatorjev in virov, ko ni mogoca preprosto vzporedno in zaporedno seštevati kondenzatorje? V tem primeru je potrebno napisati sistem enacb ob upoštevanju osnovnih zakonitosti:

- 1) Vsota vseh napetosti v zaključeni zanki je enaka nič: $U_{zanke} = \sum_i U_i .$
- 2) Vsota nabojev v spojišču je enaka nič: $Q_{spojisca} = \sum_i Q_i .$

Primer naloge iz kolokvija 11.1.2002 (VŠŠ):

2. Določite napetosti na kondenzatorjih!
 ($C_1 = 6\mu\text{F}$, $C_2 = 6\mu\text{F}$, $C_3 = 6\mu\text{F}$, $U_0 = 12\text{ V}$)



2. Desno spojišče vezja ozemljimo, levo spojišče se nahaja na potencialu V .

Zapišimo napetosti:

$$U_{C1} = V - U_0$$

$$U_{C2} = V$$

$$U_{C3} = V + U_0$$

Zapišimo vsoto nabojev v levem vozlišču:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$C_1 \cdot (V - U_0) + C_2 \cdot V + C_3 \cdot (V + U_0) = 0$$

$$V = \frac{U_0 (C_1 - C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = 0\text{ V}$$

in iz nje izrazimo potencial V . Tako dobimo:

$$U_{C1} = V - U_0 = -U_0 = -12\text{ V}$$

$$U_{C2} = V = 0\text{ V}$$

$$U_{C3} = V + U_0 = U_0 = 12\text{ V}$$

21. Dielektrik v električnem polju

Dielektrik v zračnem kondenzatorju.

Do sedaj smo imeli opravka le s prevodniki v vakuumu oziroma zraku. Kako pa vplivajo različni materiali (snovi) na električne razmere? Na primer, kaj se zgodi, ko med plošči ploščatega kondenzatorja vložimo material, ki je idealen (električni) izolator in ju priključimo na vir napetosti? Takemu materialu pogosto rečemo dielektrik in s tem poudarimo njegove dielektrične (kapacitivne) lastnosti, medtem ko izolatorjem praviloma predpisujemo uporabne lastnosti; dober izolator ima zelo veliko (specifično) upornost.

Če izmerimo kapacitivnost pred vložitvijo dielektrika in po vložitvi ugotovimo, da se kapacitivnost po vložitvi poveča:

$$\frac{C_{diel}}{C_{zrak}} = \epsilon_r \geq 1.$$

ϵ_r imenujemo relativna dielektrična konstanta in pove, za koliko se kapacitivnost zračnega poveča ob vstavitvi dielektrika med plošči kondenzatorja. Kapacitivnost zračnega ploščatega kondenzatorja pred vstavitvijo dielektrika je $C_{zrak} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$, po vstavitvi pa je

$$C_{diel} = \epsilon_r \cdot C_{zrak} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Kapacitivnosti, ki smo jih zapisali za zračne kondenzatorje veljajo tudi v primeru, ko je namesto zraka dielektrik, le konstanto ϵ_0 nadomestimo z $\epsilon_r \epsilon_0$. Pri tem je potrebno opozoriti, da je pri določenih materialih dielektričnost odvisna tudi od napetosti med elektrodama. V tem primeru je tudi kapacitivnost odvisna od napetosti. Zelo pogosto to velja za elemente iz polprevodniških materialov.

Primer: Vzemimo ploščati kondenzator s površino plošč 100 cm^2 . Med plošči stisnemo list papirja debeline 2 mm ($\epsilon_r = 2$) in 4 mm debelo steklo z $\epsilon_r = 12$. Kondenzator priključimo na napetost 12 V . Kolikšen je padec napetosti na plasti papirja in kolikšen na steklu? Kolikšno je polje v steklu in v papirju. Kolikšno je polje na meji med steklom in papirjem?

Izračun:

$$C_1 = C_{\text{papir}} = \epsilon_{r1} \epsilon_0 \frac{A}{d_1} = 2 \cdot 8,854 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 8,854 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

$$C_2 = C_{\text{steklo}} = \epsilon_{r2} \epsilon_0 \frac{A}{d_2} = 12 \cdot 8,854 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{4 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 3 \cdot C_1 = 26,562 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

$$Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = C_{12} \cdot U$$

Nadomestna kapacitivnost je

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 \cdot 3C_1}{C_1 + 3C_1} = \frac{3}{4} C_1, \text{ torej je}$$

$$C_1 U_1 = \frac{3}{4} C_1 \cdot U \text{ od koder je } C_1 = \frac{3}{4} U = 9 \text{ V} . U_2 \text{ je torej } U - U_1 = 3 \text{ V} .$$

Električna poljska jakost v papirju je: $E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{9 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 4,5 \text{ kV/m}$, v steklu pa

$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{3 \text{ V}}{4 \text{ mm}} = 0,75 \text{ kV/m} .$$

Razmerje električne poljske jakosti je obratno sorazmerno relativnim dielektričnim konstantam, kar ugotovimo tudi iz zveze

$$C_1 U_1 = C_2 U_2$$

$$\epsilon_{r1} \epsilon_0 \frac{A}{d_1} \cdot E_1 d_1 = \epsilon_{r2} \epsilon_0 \frac{A}{d_2} \cdot E_2 d_2 , \text{ od koder je}$$

$$\epsilon_{r1} E_1 = \epsilon_{r2} E_2 .$$

Polje v dielektriku z manjšo dielektričnostjo je večje od polja v dielektriku z večjo dielektričnostjo.

Kolikšno je povečanje kapacitivnosti? Večina plinov ima vrednosti dielektričnosti okoli 1, med 1 in 1,001 in prebojno trdnost okoli 3 MV/m, medtem, ko imajo običajni izolatorji relativne dielektričnosti med 2 in 10 in prebojne trdnosti od nekaj do nekaj sto MV/m.

Plin	relativna dielektričnost brez enot	prebojna trdnost MV/m
vodik	1,00027	2
suh zrak	1,00058	3
CO ₂	1,00099	2,9

Tekočine in izolatorji	relativna dielektričnost	prebojna trdnost v MV/m
papir	2,3	20
etanol	3,7	16
voda (destilirana)	81	
olje	2-5	
guma	3	
silicij	11	

Kako razložimo, da se kapacitivnost po vložitvi dielektrika poveča?

Vzemimo, da imamo med elektrodama ploščatega kondenzatorja fiksni naboj, torej $\pm Q$. Med plošči vstavimo dielektrik. Pozitivni in negativni naboji na ploščah delujejo s silo na naboje v dielektriku tako, da se le ti prerazporedijo. To prerazporeditev nabojev lahko ponazorimo z modelom dipola. Dipoli se usmerijo v smer polja (navor $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ je enak nič, ko sta vektorja vzporedna), pri čemer je potrebno upoštevati, da so negativni poli dielektrika bližje pozitivni elektrodi. Polje med ploščama je vsota prispevkov vseh nabojev, tistih na ploščah kondenzatorja in ločenih nabojev (dipolov) v dielektriku med ploščama. Dipoli so nanizani v verigi, kjer se minus pol enega dipola kompenzira s plus polom naslednjega dipola. Tako

lahko smatramo, da se znotraj dielektrika kompenzirajo naboji dipolov, ostane pa na površini nekompenziran naboj, ki pa je nasprotnega predznaka kot naboj, ki je povzročil polarizacijo. Ti pa na celotno polje delujejo tako, da se to zmanjša. Posledično pa se **zmanjša tudi**

napetost med ploščama $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Ker pa je kapacitivnost določena kot $C = \frac{Q}{U}$, se ob zmanjšanju napetosti med ploščama in konstantnem naboju poveča kapacitivnost.

Ob vložitvi dielektrika med naelektreni plošči kondenzatorja bo torej: $C \uparrow = \frac{Q}{U \downarrow}$.

SLIKA: Naboj na ploščah kondenzatorja polarizira snov med ploščama, kar prikažemo s kreiranjem dipolov.

Kako pa razložimo enako povečanje kapacitivnosti pri vložitvi dielektrika med plošči zračnega kondenzatorja ob **konstantni napetosti**? Tudi v tem primeru si zamislimo, da se na elektrodah zaradi napetosti nakopiči določen naboj. Ko pa vstavimo dielektrik, prosti naboji na prevodnih ploščah povzročijo polarizacijo dielektrika. Zopet tako, da so negativni naboji dielektrika v povprečju bližje pozitivnim nabojem na plošči. Ti polarizirani naboji bi ob ohranjeni količini naboja na ploščama povzročili zmanjšanje polja in zmanjšanje napetosti med ploščama. Ker pa je zunanja napetost vsiljena, priteče ob fiksni napetosti na elektrodi dodaten naboj, ki kompenzira polariziran naboj. Tudi v tem primeru se torej poveča kapacitivnost, saj se poveča količina prostega naboja na ploščah kondenzatorja.

Ob vložitvi dielektrika pri konstantni napetosti bo $C \uparrow = \frac{Q \uparrow}{U}$.

SLIKA: Povečanje kapacitivnosti ob vložitvi dielektrika v zračni kondenzator na konstantni napetosti.

Matematično-fizikalna obravnava dielektrika.

Električni dipolni moment smo že spoznali. Definiran je kot $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$. Ugotovili smo, da na dipol v polju deluje navor $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$. V dielektriku, ki ga postavimo v polje se ustvarijo in

usmerijo dipoli. Vpeljemo pojem **vektorja polarizacije**, ki je določen kot prostorska gostota dipolskih momentov:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta v} = \frac{d\vec{p}}{dv}.$$

Enota za vektor polarizacije je $\frac{C \cdot m}{m^3} = \frac{C}{m^2}$.

Zakaj vpeljati nov vektor? Zopet imamo problem, da je sicer smiselno vpliv polja na dielektrik ponazoriti z množico dipolov, ker pa je v snovi zelo veliko molekul in torej veliko dipolov, je potrebno njihovo skupno delovanje predstaviti na primeren način. Vektor polarizacije je torej makroskopski model in ponazarja povprečno delovanje velike množice dipolnih momentov v majhnem volumnu.

Površinska gostota polariziranega naboja.

Oglejmo si produkt $P \cdot dv$ na površini dielektrika. $P \cdot dv$ lahko zapišemo tudi $P \cdot dA \cdot dl$, kjer $P \cdot dA$ predstavlja gostoto polariziranega naboja na površini dela volumna. V primeru, da smer vektorja polarizacije ni v smeri normale na površino, je potrebno upoštevati skalarni produkt $\vec{P} \cdot d\vec{A}$.

Znotraj dielektrika, ki je izpostavljen zunanemu električnemu polju se vzpostavijo dipoli, ki se usmerijo v smer polja. Znotraj dielektrika se sosednji nasprotni naboji dipolov kompenzirajo. Nekompenzirani ostanejo torej le naboji na površini dielektrika.

Vzemimo, da je na delu površine dA vektor P uniformen (konstanten) in pravokoten na površino. V tem primeru bo $P \cdot dA$ predstavljal kar naboj na površini dA oziroma, **P predstavlja kar površinsko gostoto polariziranega naboja:**

$$\sigma_P = P_n,$$

kjer je P_n normalna komponenta vektorja polarizacije na površini.

Kaj če P ni enakomerno porazdeljen? V tem primeru si je potrebno zamisliti zaključeno površino znotraj dielektrika. Površinski polariziran naboj zunaj volumna določimo z integracijo vektorja polarizacije po površini: $Q_p(\text{na površini } A) = \int_A \vec{P} \cdot d\vec{A}$. Ker ta naboj ni

nujno enak nič tudi po zaključeni površini, ostane ob polarizaciji znotraj zaključene površine površinski polariziran naboj, ki je enak

$$Q_{P, \text{znotraj}} = -\oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A}.$$

Ta naboj je potrebno razlikovati od naboja, ki se »prosto« giblje po prevodni površini, saj je ta naboj vezan v snovi. Lahko se giblje vendar le omejeno, kolikor se lahko giblje dipol.

Povezava med E in P.

Ko dielektrik postavimo v polje se naboji v snovi prerazporedijo. Ta prerazporeditev je lahko večja ali manjša, odvisno od lastnosti materiala. Prerazporeditev naboja predstavimo z modelom električnih dipolov oziroma njihove gostote z vektorjem polarizacije P . Za mnogo snovi velja, da povečanje polja povzroči sorazmerno povečanje polarizacije, kar matematično zapišemo kot:

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

Spomnimo se kaj je $\epsilon_0 E$. Na površini polprevodnika je bil $\epsilon_0 E$ enak površinski gostoti naboja. Konstanto χ (chi) imenujemo **električna susceptibilnost** in govori o odzivnosti snovi na električno polje. Je brezdimenzijska konstanta. V vakuumu je torej χ enaka nič, saj tedaj ni polariziranega naboja.

Dielektrik imenujemo **linearen**, če susceptibilnost ni odvisna od velikosti polja (napetosti), **homogen**, če je neodvisen od pozicije in **izotropen**, če je neodvisen od smeri polja.

Anizotropen material ima različno dielektričnost (susceptibilnost) v različnih smereh. V tem primeru bo polarizacija v vsaki smeri drugačna. Polarizacija v smeri X osi bo torej enaka $P_x = \epsilon_0 \chi_{xx} E_x + \epsilon_0 \chi_{xy} E_y + \epsilon_0 \chi_{xz} E_z$. Podobno zapišemo za ostale smeri. V tem primeru susceptibilnost ni več skalarna količina, pač pa jo moramo predstaviti kot tenzor (v obliki matrike).

Vektor gostote električnega pretoka - D.

Vzemimo, da imamo zunanje električno polje E_0 , ki ga vzpostavimo z zunanjimi viri. V tako polje vstavimo dielektrik. Dielektrik se polarizira, kar ponazorimo z vektorjem polarizacije oziroma z prerazporeditvijo polariziranih nabojev in povzročijo dodatno polje E_p . To polje običajno deluje v nasprotni smeri polja, ki je povzročilo polarizacijo in zato se sumarno polje zmanjša.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$$

Poglejmo, ali lahko upoštevamo Gaussov zakon in druge že znane ugotovitve. Spoznali smo

že potencialnost elektrostatičnega polja: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, pa tudi Gaussov zakon $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$.

Prvi integral je po zaključeni poti, drugi pa po zaključeni površini. Q je naboj, ki je zaobjet z integracijo. Prvi se ne spremeni tudi če gre del poti v skozi dielektrik, medtem ko se drugi spremeni, saj je potrebno upoštevati, da z integracijo polja po zaključeni površini ne zajamemo le prosti naboj pač pa tudi ujetega, polariziranega. Ugotovili smo že, da je količina tega ujetega naboja po zaključeni površini enaka $Q_{P,znotraj} = -\oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A}$, torej moramo Gaussov

zakon zapisati v obliki

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{prosti,znotraj}}{\epsilon_0} + \frac{Q_{P,znotraj}}{\epsilon_0},$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$\oint_A \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} + \oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj } A}$$

$$\oint_A (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj } A}$$

Zgodovina elektrotehnike je doprinesla še eno veličino, ki v osnovi izhaja iz gornjega zapisa. J.C. Maxwell je namreč vpeljal vektor D , ki ga imenujemo **vektor gostote električnega pretoka** in je enak

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Enota vektorja D je C/m^2 , enako kot gostota naboja na površini prevodnika. V osnovi je vektor D na površini enak površinski gostoti naboja, je pa za razliko od površinskega naboja definiran tudi povsod po volumnu.

S pomočjo tega vektorja lahko zapišemo zgornjo enačbo v obliki

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj } A}$$

ki ga lahko imenujemo **modificiran Gaussov zakon**. Z besedami bi rekli, da je pretok vektorja D skozi zaključeno površino enak zaobjemu prostemu naboju. Odlika tega zapisa je predvsem ta, da je zapis neodvisen od vplivov snovi na vektor D . Ta vektor je izključno odvisen od lege prostih nabojev, to pa so tisti, ki jih običajno vzpostavimo z zunanjim poljem.

Zveza med D in E .

Združimo enačbi $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ in $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ in dobimo

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

Ponovimo pomembno zvezo med E in D :

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

kjer ϵ_r imenujemo relativna dielektrična konstanta. Povezava med električno susceptibilnostjo in relativno dielektrično konstanto je preprosta:

$$\epsilon_r = 1 + \chi$$

Zveza med D in P.

Če smo ugotovili enostavno zvezo med D in E, velja seveda tudi enostavna zveza med D in P,

$$\text{saj velja } \vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E} = \frac{(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{D}}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{(\epsilon_r - 1) \vec{D}}{\epsilon_r}.$$

* V praksi pogosto zasledimo tudi diferencialno obliko zapisa Gaussovega zakona, ki pa jo mi sistematično ne obravnavamo. Ta oblika je posebno pogosta pri numerični simulaciji električnih polj, ki pa se v praksi vedno bolj pogosto uporablja. Na kratko: $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj}}$

lahko zapišemo v obliki (Stokesov izrek) $\int_V \text{div} \vec{D} \cdot dV = \int_V \rho_{\text{prosti, znotraj}} \cdot dV$ od koder sledi

$\text{div} \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{prosti}}$, kjer je div operator, ki ga imenujemo divergenca in je operator odvajanja. To je ena od Maxwellovih znamenitih štirih enačb, ki v celoti opisujejo naravo elektromagnetnega polja. (Delno smo spoznali tudi še eno ($\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$), ki pa jo bo potrebno dopolniti v primeru izmeničnih signalov. V kartezičnem koordinatnem sistemu je operator div enak $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Če zapišemo še električno poljsko jakost kot gradient polja

$\vec{E} = -\text{grad} V = -\vec{\nabla} V$ in upoštevamo $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ dobimo $\text{div} \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{\nabla} V = -\rho_{\text{prosti}}$. Tudi ta enačba je znamenita, in se imenuje Poissonova enačba. V primeru da v volumnu ni prostih nabojev je desna stran enačbe enaka nič in jo lahko zapišemo tudi v obliki $\Delta V = 0$, kar imenujemo Laplaceova enačba.

Primer: Vzemimo ploščati kondenzator površine plošč 100cm² in ga priključimo na napetost 20 V. Vmes stisnimo 2 mm debel list papirja z relativno dielektrično konstanto 2. Določimo naboj na površini, površinsko gostoto naboja, vektor gostote pretoka, vektor polarizacije, električno poljsko jakost in kapacitivnost.

Izračun: Izračuna se lahko lotimo iz različnih »koncev«. Običajni postopek je tak, da najprej določimo D, ki ni odvisen od snovi, potem E, nato U, itd.. V ploščatem kondenzatorju velja:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj}} \Rightarrow D \cdot A = \sigma \cdot A \Rightarrow D = \sigma$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

$$U = \int_0^d E \cdot dx = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} \cdot d,$$

$$\text{od koder sledi: } E = \frac{U}{d} = \frac{20 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 10 \text{ kV/m}, \quad D = \epsilon_r \epsilon_0 E = 177,08 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2,$$

$$\sigma = D = 177,08 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2, \quad P = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} D = \frac{2-1}{2} D = \frac{D}{2} = 88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2.$$

Sigma, ki smo jo izračunali je gostota površinskega naboja. D je enak sigmi, vendar je D definiran povsod v prostoru, sigma pa le na površini. Ker obravnavamo primer ploščatega kondenzatorja je D povsod enako velik. Ker je normalna komponenta P-ja na površini enaka

površinski gostoti polariziranega naboja, je $\sigma_p = P = 88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$. Prostega naboja na površini plošče je 2x več od polariziranega površinskega naboja, torej, vsaki drugi naboj prosti naboj ima svoj nasprotni – polariziran naboj. Pri dielektrikih z veliko relativno dielektričnostjo bo P kar enak D.

SLIKA: Ploščati kondenzator z dielektrikom.

Pri konstantni napetosti je polje v dielektriku neodvisno od dielektrika in je enako

$E = \frac{U}{d} = \frac{20 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 10 \text{ kV/m}$. Zato pa bo v primerjavi z zrakom potrebna gostota naboja, ki bo vzdrževala to polje v dielektriku večja kot v primeru, če med ploščama ni dielektrika (je le zrak), saj velja $E = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \epsilon_r \epsilon_0 E = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{U}{d}$. Ko bomo vstavili dielektrik, se bo površinska gostota naboja povečala za 2x: od $88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$ na $177,08 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$. Razlika je ravno posledica polarizacije, ki na površini dielektrika vzpostavi površinsko gostoto polariziranega naboja (nasprotnega predznaka kot prosti naboj) velikosti $88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$.

Če pa imamo konstantno gostoto naboja, se bo polje po vložitvi dielektrika med plošči zmanjšalo za ϵ_r : $E = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0}$, torej na 5 kV/m. To pomeni, da se bo zmanjšala tudi napetost na 10 V.

Primer: Nekoliko drugačne pa bodo razmere, če bomo med plošči kondenzatorja vstavili dielektrik, ki bo le delno zapolnil vmesni prostor. Vzemimo, da v zračni kondenzator, ki je priključen na napetost 20V in ima 2 mm razdalje med ploščama potisnemo 1 mm debel kos papirja.

SLIKA: Ploščati kondenzator z dvema dielektrikoma.

D bo neodvisen od dielektrikov in bo povsod konstanten. Spremenilo pa se bo polje, ki bo $E = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0}$ v dielektriku (papirju) in $E = \frac{D}{\epsilon_0}$ v zraku. Da bi določili vrednosti polja moramo

$$U = \int_0^d E \cdot dx = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} \cdot d_1 + \frac{D}{\epsilon_0} \cdot d_2 = D \left(\frac{d_1}{\epsilon_r \epsilon_0} + \frac{d_2}{\epsilon_0} \right)$$

zapisati še napetost, ki bo

$$D = \frac{U}{\left(\frac{d_1}{\epsilon_r \epsilon_0} + \frac{d_2}{\epsilon_0} \right)} = \frac{20 \text{ V}}{\frac{1 \text{ mm}}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} = 118,053 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

Toliko je tudi površinska gostota naboja. Električno polje je torej $E = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = 6,667 \text{ kV/m}$ v

dielektriku (papirju), v zraku pa je 2x večje: 13,33 kV/m.

Gostota polariziranega površinskega naboja na meji med papirjem in ploščo in papirjem in zrakom je enaka $D/2$.

Reševanje primera s pomočjo kapacitivnosti:

$$U = D \left(\frac{d_1}{\epsilon_r \epsilon_0} + \frac{d_2}{\epsilon_0} \right) = \frac{Q}{A} \left(\frac{d_1}{\epsilon_r \epsilon_0} + \frac{d_2}{\epsilon_0} \right) = Q \left(\frac{d_1}{A \epsilon_r \epsilon_0} + \frac{d_2}{A \epsilon_0} \right) = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right). \text{ Iz te zveze lahko}$$

določimo naboj na površini, iz znanega naboja napetost na papirju in v zraku: $U_1 = \frac{Q}{C_1}$ in

$$U_2 = \frac{Q}{C_2}. \text{ Nato iz znanih napetosti določimo polji: } E_1 = \frac{U_1}{d_1} \text{ in } E_2 = \frac{U_2}{d_2}.$$

Na meji med dvema dielektrikoma, v našem primeru med papirjem in zrakom je skokovit prehod polja. Ker je D enak v obeh medijih bo veljalo:

$\epsilon_r \epsilon_0 E_1 = \epsilon_r \epsilon_0 E_2$. To je mejni pogoj za prehod med dvema dielektrikoma, ki velja splošno, vendar le za tisto komponento polja, ki je pravokotna na mejo.

Primer: Vzemimo primer dvoplastnega koaksialnega kabla, ki ga želimo dimenzionirati za delovanje na napetosti 20 kV. Prva, notranja plast je iz gume z relativno dielektričnostjo 3,2, druga pa iz polistirena z $\epsilon_r = 2,6$. Prebojna trdnost gume je 25 kV/mm, polistirena pa 20 kV/mm. Koaksialni kabel polmera žile 4 mm želimo dimenzionirati tako, da maksimalno polje v dielektrikih ne preseže 25% prebojne trdnosti.

Izračun: Določiti moramo torej debelino obeh dielektrikov, torej radij do plasti polistirena r_p in zunanji radij r_z .

Pri vzpostavljeni napetosti 20 KV imamo na žili +q naboj, na oklopu pa -q. Da bi določili polje v enem in drugem dielektriku, se poslužimo Gaussovega stavka za vektor D, ki je neodvisen od dielektrikov. Za poljubni radij med notranjim in zunanjim dobimo

$$D(r) = \frac{q}{2\pi r} \text{ oziroma } \vec{D} = \vec{e}_r \cdot D(r) = \vec{e}_r \cdot \frac{q}{2\pi r}. \text{ Polje v dielektrikih dobimo iz zveze}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r \epsilon_0}, \text{ torej bo polje v plasti gume}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_{rg}\epsilon_0} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_{rg}\epsilon_0 r},$$

v plasti polistirena pa

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_{rp}\epsilon_0} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_{rp}\epsilon_0 r}.$$

Maksimalno polje v gumi ne sme preseči 25% prebojne trdnosti, kar zapišemo kot

$$E_{\max, \text{guma}} = 25\% E_{\text{preb, guma}} = 0,25 \cdot 25 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 6,25 \cdot 10^6 \text{ V/m},$$

za polistiren pa bo veljalo

$$E_{\max, \text{poli}} = 25\% E_{\text{preb, poli}} = 0,25 \cdot 20 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 5 \cdot 10^6 \text{ V/m}.$$

Polje bo maksimalno pri čim manjšem radiju, torej pri

$$E_{\max, \text{guma}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_{rg}\epsilon_0 r_n} = 6,25 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

in

$$E_{\max, \text{poli}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_{rp}\epsilon_0 r_p} = 5 \cdot 10^6 \text{ V/m}.$$

Če enačbi delimo, lahko določimo r_p :

$$r_p = \frac{\epsilon_{rg}}{\epsilon_{rp}} \cdot r_n \cdot \frac{6,25}{5} = 0,62 \text{ cm}$$

Lahko tudi določimo linijsko gostoto naboja, ki bo $q = 2\pi\epsilon_{rg}\epsilon_0 r_n \cdot 6,25 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$.

Preostane nam še, da določimo potrebno debelino plasti polistirena, za kar pa potrebujemo še eno enačbo, ki jo dobimo iz enačbe za napetost. Integrirati je potrebno polje od notranjega do zunanega radija, pri čemer pa se polje spremeni med dvema dielektrikom. Zato je potrebno ločiti integral v dva, enako, kot da bi zapisali celotno napetost kot vsoto padcev napetosti v gumi in v polistirenu. Tako dobimo

$$U = \int_{r_n}^{r_p} \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_{\text{gume}} + U_{\text{poli}} = \int_{r_n}^{r_p} \vec{E}_{\text{gume}} \cdot d\vec{l} + \int_{r_p}^{r_z} \vec{E}_{\text{poli}} \cdot d\vec{l}$$

$$U = \int_{r_n}^{r_p} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_{rg}\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr + \int_{r_p}^{r_z} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_{rp}\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr =$$

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_{rg}\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_p}{r_n}\right) + \frac{q}{2\pi\epsilon_{rp}\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_z}{r_p}\right)$$

V gornji enačbi je edina neznanka zunanji polmer, ki jo določimo z vstavitvijo vrednosti in dobimo 0,77 cm.

SLIKA: Dvoplastni koaksialni kabel.

Mejni pogoji.

Mejni pogoj za normalno (pravokotno) komponento dobimo iz Gaussovega zakona:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj}}$$

Zamislimo si površino med dvema dielektrikoma in kocko, katere stranice stiskamo v smeri meje. Ker moramo računati D skozi zaključeno površino (ven iz površine) bomo pisali:

$$\vec{D}_1 \cdot d\vec{A} - \vec{D}_2 \cdot d\vec{A} = \sigma_{\text{prosti}} \cdot dA \text{ ali tudi}$$

$$\boxed{\vec{e}_n (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_{\text{prosti}}} \text{ ali tudi } D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{\text{prosti}}.$$

Enotski vektor kaže iz dielektrika z indeksom 2 v dielektrik z indeksom 1. Če je površinska gostota prostega naboja na meji dveh dielektrikov enaka nič, velja

$D_{1n} = D_{2n}$ ali tudi $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$. Če poznamo normalno komponento polja na meji na eni strani dielektrika, z lahkoto izračunamo normalno komponento na meji v drugem dielektriku.

SLIKA: Prehod normalne komponente polja.

Potrebujemo še mejni pogoj za komponente polja, ki so vzporedne (tangencialne) z mejo. Tu uporabimo zakon potencialnosti polja:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \text{ Vzemimo pravokotnik na meji dveh dielektrikov in ga stiskajmo v smeri meje.}$$

Integral polja bo imel tako le komponenti v smeri meje – tangencialni komponenti. Veljalo bo torej: $E_{1t} \cdot l - E_{2t} \cdot l = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$.

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}.$$

SLIKA: Prehod tangencialne komponente polja.

Združimo obe enačbi v »lomni zakon«, kot ga poznamo iz srednješolske fizike. Če na meji dveh dielektrikov ni površinskega (prostega) naboja, velja:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Če enačbi delimo med sabo, dobimo:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \tan(\alpha_1) = \frac{1}{\varepsilon_2} \tan(\alpha_2) \quad \text{ali} \quad \boxed{\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Alfa je vpadni kot med normalo na površino in smerjo polja.

SLIKA: Lomni zakon polja na meji dveh dielektrikov.

Elektrostatično polje na meji dielektrika in kovine.

Poseben primer je meja izolator-prevodnik. Vzemimo, da označimo izolator z indeksom 1, prevodnik pa z 2. Predhodno smo že ugotovili, da je elektrostatično polje znotraj prevodnika enako nič: $E_2 = 0$. Ker velja $E_{1t} = E_{2t}$, bo tangencialna komponenta polja v izolatorju na meji z dielektrikom enaka nič. To pa obenem pomeni, da bo imelo polje v izolatorju na meji s prevodnikom le normalno komponento, ki bo enaka $D_{1n} - 0 = \sigma_{\text{prosti}}$ oziroma,

$$E_1 = E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Prišli smo že znane ugotovitve, da je polje na površini prevodnika pravokotno na površino in sorazmerno površinski gostoti naboja.

Zapišimo še enkrat tudi ploskovno silo na prevodnik: $f = \sigma \frac{\sigma}{2\varepsilon}$.

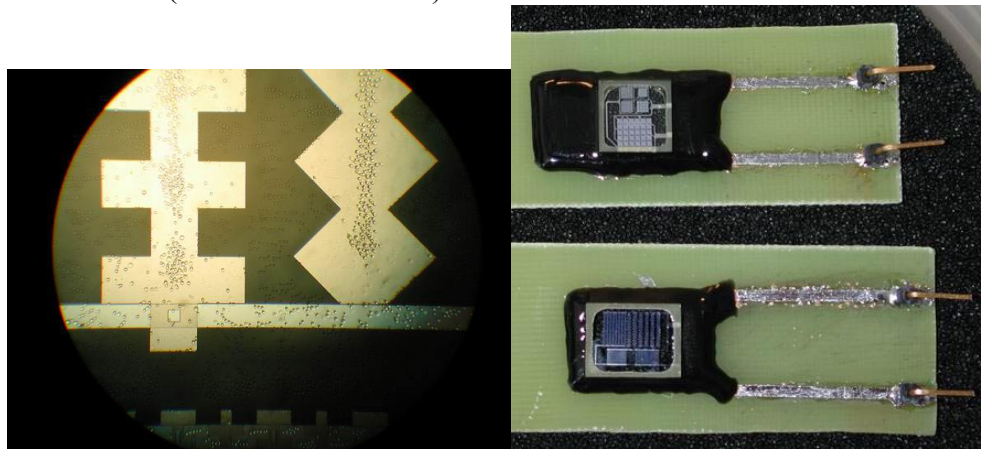
SLIKA: Polje na meji izolator – kovina.

* **Sila med dielektriki.** Zanimiv je tudi primer, ko želimo izračunati silo med dvema dielektrikoma. Primer je na primer sila na nevtralne dielektrične delce v nehomogenem polju. Zaradi različne dielektričnosti delca in medija deluje na delec sila, ki jo lahko določimo z

integracijo ploskovne sile na delec. Brez izpeljave zapišimo rezultat, ki bo

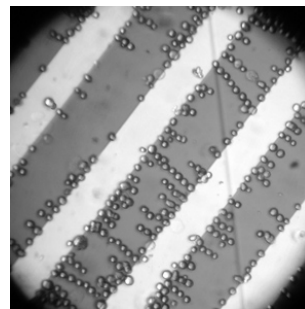
$$f = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2} \left(E_t^2 + \frac{D_n^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right). \text{ Smer te ploskovne sile je v smeri prostora z manjšo dielektričnostjo.}$$

Tako je mogoče dielektrične delce usmerjati z vzpostavitev električnega polja med dvema ali več elektrodami. Delci se naberejo tam, kjer je polje največje – na ostrih robovih elektrod ali pa na mestih, kjer je električno polje najmanjše. Dodatno kontrolo nad gibanjem delcev nam ponuja vzbujanje z izmeničnim signalom. Dielektrične lastnosti snovi (relativna dielektričnost) se s frekvenco signala spreminja, kar omogoča manipulacijo delcev z električnim poljem. V Laboratoriju za bioelektromagnetiko smo skupaj z Laboratorijem za mikrosenzorske strukture in Laboratorijem za biokibernetiko načrtali in izdelali strukture za manipulacijo bioloških celic s pomočjo dielektroforeze. Če je elektroforeza pojav, v katerem izkoriščamo silo na naelektrene delce, je dielektroforeza pojav, kjer izkoriščamo silo na dielektrične (električno nevtralne) delce.



SLIKA: Manipulacija bioloških celic z električnim poljem. Celice se koncentrirajo na mestu najmanjšega polja, ki je v sredini in na površini elektrod. Razdalja med elektrodama je 50 μm . Na desni sta prikazani modula z izdelanimi mikrostrukturami. Mikrostrukture so izdelane s polprevodniško tehnologijo na Pyrex steklu z dvoslojno metalizacijo.

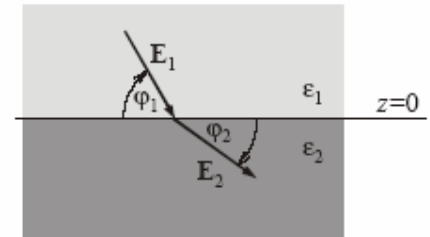
Delovanje dielektroforeze smo ugotavljali tudi pri eksperimentu s semenkami v enosmernem polju. Semenke so iz dielektrika in se usmerijo v smer polja, ker pa so v dovolj gostem mediju, se težje prosto gibljejo. Potrebovali bi še večjo silo, da bi premagali silo viskoznosti. Smo pa opazili značilnost veriženja, ki jo opazimo tudi pri celicah na mikrostrukturah. Poleg tega so pazljivi lahko opazili, da se giblje tudi olje v katerem so bile semenke. Tudi na molekule olja (dielektrik) deluje sila, ki jih premakne v smeri elektrod.



SLIKA: Veriženje celic pri pojavu dielektroforeza.

PRIMERI:**Primer kolokvijske naloge z dne 11.12.2001:**

Ravnina $z = 0$ je meja med dvema dielektrikoma, z relativnima dielektričnostima $\epsilon_{r1} = 5$ za prostor $z > 0$ in $\epsilon_{r2} = 12$ za prostor $z < 0$. V prvem prostoru je električna poljska jakost $E_1 = 10^5 \text{ V/m}$ in je usmerjena pod kotom $\varphi_1 = 60^\circ$ glede na ravnino $z = 0$. Določite velikost električne poljske jakosti v drugem prostoru in kot φ_2 , ki ga oklepa z ravnino $z = 0$.



$$\begin{aligned}
 E_1 &= 10^5 \text{ V/m} & E_{1t} &= E_1 \cos \varphi_1 = 50 \text{ kV/m} \\
 \varphi_1 &= 60^\circ & E_{1n} &= E_1 \sin \varphi_1 = 86,6 \text{ kV/m} \\
 \epsilon_{r1} &= 5 & E_{2t} &= E_2 \cos \varphi_2 \\
 \epsilon_{r2} &= 12 & E_{2n} &= E_2 \sin \varphi_2
 \end{aligned}$$

$$E_{2t} = E_{1t} = 50 \text{ kV/m}$$

$$D_{2n} = D_{1n} \rightarrow E_{2n} = E_{1n} \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} = 36,1 \text{ kV/m}$$

$$E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = 61,7 \text{ kV/m}$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{E_{2n}}{E_{2t}} \rightarrow \varphi_2 = 35,8^\circ$$

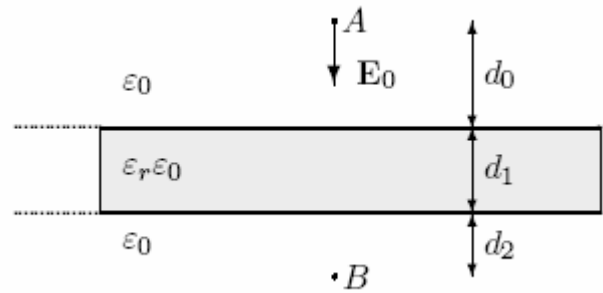
Nalogo bi lahko rešili tudi z uporabo lomnega zakona $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$, pri čemer pa bi morali paziti, da je kot alfa definiran glede na normalo in ne na mejo, torej je $\alpha_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ in

$$\tan(\alpha_2) = \tan(\alpha_1) \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \tan(30^\circ) \frac{12}{5} = 1,386, \text{ od koder je } \alpha_2 \cong 54,2^\circ \text{ in } \varphi_2 = 35,8^\circ.$$

Primer kolokvijske naloge 17.12.2003 (UNI):

Napetost med točkama A in B je 300 V. Določite navpično komponento električne poljske jakosti v praznem prostoru, če je relativna dielektričnost vmesne plasti $\epsilon_r = 8$!

Podatki: $d_0 = d_2 = 2$ cm, $d_1 = 16$ cm.



Ker je polje v vsakem od prostorov homogeno, lahko napetost med točkama A in B zapišemo kot vsoto treh prispevkov $U_{AB} = E_{0y}d_0 + E_{1y}d_1 + E_{2y}d_2$. Mejni pogoj na mejah med plastmi predpisuje $\epsilon_r E_{1y} = E_{0y} = E_{2y}$. Sledi

$$E_{0y} = \frac{U_{AB}}{d_0 + \frac{d_1}{\epsilon_r} + d_2} = \underline{\underline{5 \text{ kV/m}}}.$$

Posebnosti:

- 1) Nelinearna dielektričnost: silicij, piezoelementi
- 2) povečanje relativne dielektričnosti s frekvenco izmeničnega signala
- 3) realni kondenzator
- 4) tipi polarizacije
- 5) akumulatorji, baterije
- 6)

22. Kondenzator

Kondenzator je naprava za shranjevanje naboja. Večja kot je kapacitivnost, več naboja lahko shranimo: $Q = C \cdot U$. Še boljše rečeno, za shranjevanje električne energije, saj ni pomembno le koliko naboja lahko shranimo v kondenzatorju pač pa tudi ali predvsem, koliko energije lahko shranimo. Torej je pomemben produkt naboja in napetosti.

V začetnih raziskavah električnih pojavov kondenzatorja niso poznali. Vsaj kot pojem ne. Naboje so ločevali z ročno gnanimi elektrostatičnimi napravami, ki so z inventivnimi načini ločevale naboje in jih običajno kopičile na dveh ločenih prevodnih kroglih. Tipični primer je Whimshurstov elektrostatični generator. Če so bile krogle blizu, na primer ne več kot nekaj centimetrov, je ob primernih pogojih kopičenja naboja med krogla preskočila iskra. Torej je morala biti ob krogli dosežena preboja trdnost zraka. Vzemimo kar skrajni primer osamljene naelektrene krogle polmera 2 cm. Preboja trdnost bo dosežena pri

$$E_{preb} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}, \text{ od koder izračunamo naboj pri preboju } Q = 133,5 \text{ nC. Napetost}$$

$$\text{bo tedaj } V(E_{preb}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = E_{preb} \cdot r_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m} \cdot 0,02 \text{ m} = 60 \text{ kV}. \text{ Seveda druge elektrode}$$

ne moremo imeti v neskončnosti, lahko pa je večjega polmera in dovolj daleč. Vsekakor večje napetosti od 60 kV ne moremo doseči. Določimo lahko tudi kapacitivnost v primeru, da je druga elektroda v neskončnosti $C = 4\pi\epsilon_0 r_n \approx 2,2 \text{ pF}$. To je precej mala kapacitivnost. V praksi se metalne krogle uporabljajo za testiranje prebojnih napetosti. Shranjena energija bo enaka

$$W = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{133,5 \text{ nC} \cdot 60 \text{ kV}}{2} = 4 \text{ mJ}. \text{ Kar ni ravno veliko. Vzemimo kondenzator povprečno}$$

velike kapacitivnosti 1 μF in nanj priključimo napetost 100V. Energija shranjena v

$$\text{kondenzatorju je } W = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{1 \mu\text{F} \cdot (100 \text{ V})^2}{2} = 5 \text{ mJ}. \text{ Torej je v kondenzatorju velikem za}$$

palec ali tudi dosti manj enako veliko shranjene energije, kot med naelektreno kroglo polmera 2 cm pri prebojni napetosti

Spodaj je del tabele iz Electrical Engineering Reference Book, kjer pa so podane prebojne napetosti med dvema sferama enakega polmera. Ugotovimo, da so prebojne napetosti seveda manjše, kot smo jo izračunali teoretično.

Table 7.5 Sphere-gap breakdown voltages (kilovolts at peak)*; BS 358:1960

Gap (mm)	Sphere diameter			
	0.02	0.0625	0.125	0.25
0.5	2.8	—	—	—
1	4.7	—	—	—
1.5	6.4	—	—	—
2	8.0	—	—	—
4	14.4	14.2	—	—
5	17.4	17.2	16.8	—
6	20.4	20.2	19.9	—
8	25.8	26.2	26.0	—
10	30.7	31.9	31.7	31.7
15	(40)	45.5	45.5	45.5
20	—	58.5	59.0	59.0
30	—	79.5	85.0	86.0
40	—	(95)	108	112
50	—	(107)	129	137
100	—	—	(195)	244
150	—	—	—	(314)

SLIKA: Insert tabele iz Electrical Engineering Reference Book

Drugi primer: V poglavju 18 smo imeli primer okovinenja ekvipotencialnih ravnin, s katerim smo uspeli analizirati sistem dveh naelektrenih valjev. Dva valja polmera 4 cm in razmaknjena za 10 cm sta imela pri napetosti 20 kV linijsko gostoto naboja $q = 3,833 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}$. To pomeni, da je kapacitivnost enaka približno 19 pF/m. Kar je še vedno precej majhna kapacitivnost.

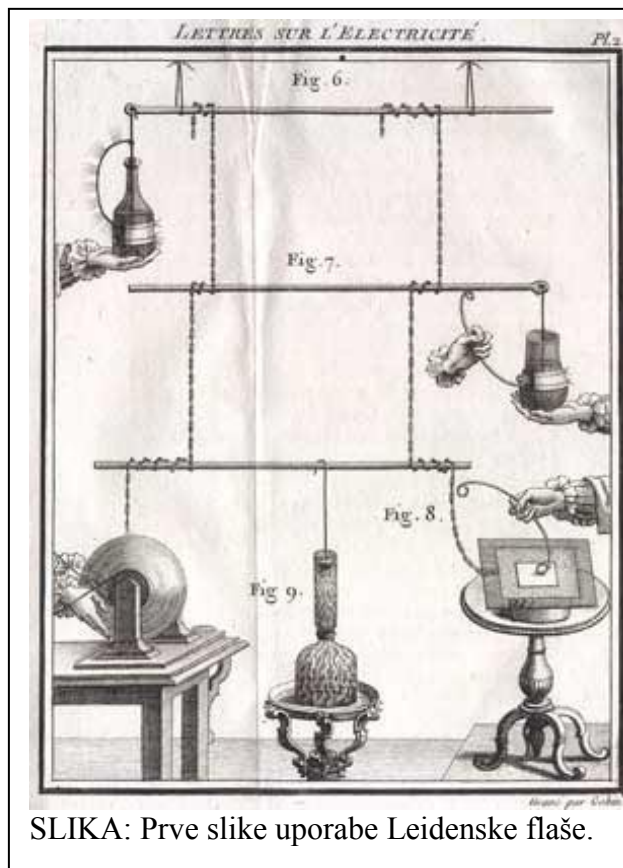
Prve večje vrednosti kapacitivnosti so dosegli z uporabo steklenice, tako imenovane Leidenske flaše, po kraju Leiden na Nizozemskem leta 1745. Hkrati je podobno ugotovil tudi Ewald Georg von Kleist v Nemčiji. Zaslužen za inovacijo flaše je profesor Pieter van Musschenbroek (1692 – 1791). Notranjost in zunanost flaše je bila delno prekrita s prevodnikom, steklenica pa je delovala kot dielektrik. Vzemimo hipotetičen primer steklenice premera 8 cm s 3 mm debelo steno. Znotraj steklenice naj bo voda nalita do višine 15 cm, zunaj pa je prekrita s prevodnikom (aluminijasto folijo). Relativna dielektričnost stekla naj bo 10. Kapacitivnost flaše je

$$C \approx \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = 10 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{2\pi \cdot 0,08 \text{ m} \cdot 0,15 \text{ m}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 742 \text{ pF}. \text{ Da bi dosegli}$$

enako veliko kapacitivnost bi morala biti za enako veliko kapacitivnost dolžina sistema dveh valjev iz prejšnjega primera kar 39 m. V primerjavi z velikostjo flaše je to kar velika dolžina.

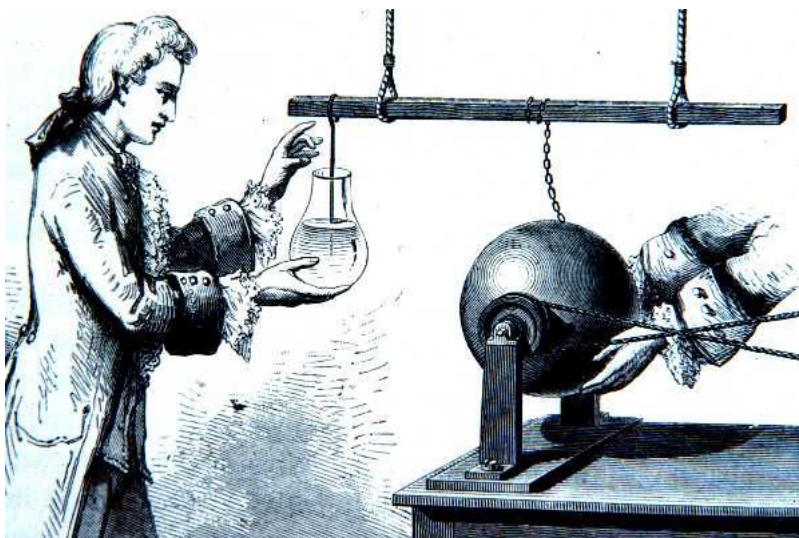


Pieter van
Musschenbroek
(1692 – 1791)



SLIKA: Prve slike uporabe Leidenske flaše.

To veliko odkritje je prineslo tudi nekaj več previdnosti pri uporabi. Razelektritev naboja iz flaše z dotikom namreč ni več tako »nedolžna«. Je pa doprinesla k razvoju znanosti, saj je bilo šele z Leidensko flašo mogoče nakopičiti in shranjevati večjo količino naboja. Naslednja prav tako pomembna in znamenita inovacija je bila Voltina baterija. Kakorkoli se nam dandanes zdi kondenzator in baterija vsakdanja stvar, bi si dandanes oba zaslužila Nobelovo nagrado za dosežke. A. Volta je med drugim tudi predlagal uporabo imena kondenzator.



SLIKA: Primer eksperimentov v zgodovini: Na desni preprost elektrostatični generator (ročno gnana steklena krogla, naboj se ločuje z roko, ki na eni strani trsa ob kroglo, na drugi strani pa drži prevodno verigo).



SLIKA: Primer Leidenskih flaš. Desno elektroskop.

Tipi kondenzatorjev. Dandanes so tudi kondenzatorji precej drugačni. poznamo jih veliko različnih tipov, iz različnih materialov, dimenzij, oblik z zelo različnimi električnimi (in mehanskimi) lastnostmi. Pa si jih oglejmo nekaj:

- 1) Elektrolitski kondenzatorji so izdelani iz elektrolitov. Uporabljajo se elektrode iz aluminija z dodano tanko oksidacijsko membrano. Ta povzroči veliko kapacitivnost kondenzatorja ($C \sim \epsilon \frac{A}{d}$), pa tudi to, da je polariziran,



kar pomeni, da ga lahko obremenimo le z enosmerno napetostjo. V nasprotnem primeru postane neuporaben oziroma nevaren, saj lahko eksplodira. Ti kondenzatorji so ceneni in se pogosto uporabljajo, recimo kot filtri. Ker se kondenzator lahko pokvari, če je obremenjen z višjo napetostjo kot je nazivna, je v praksi modro uporabiti kondenzator z dvakrat višjo nazivno napetostjo, kot je potrebna.

- 2) Posebni tip elektrolitskega kondenzatorja je tantalov elektrolitski kondenzator. Namesto aluminijaste elektrode ima tantalovo, oziroma iz tantalovega pentoksida. Ima boljše električne lastnosti kot »navadni« elektrolitski kondenzatorji, predvsem kar se temperaturnih in frekvenčnih karakteristik. So pa nekoliko dražji kot »navadni«.
- 3) Poliesterski film: ti kondenzatorji uporabljajo kot dielektrik plast poliesterskega filma. So poceni, temperaturno stabilni in se pogosto uporabljajo.
- 4) Polipropilenski kondenzator: uporabimo, ko so zahteve po tolerancah večje. Do frekvence 100 kHz imajo zelo majhne tolerance (1%).
- 5) Polistirenski kondenzator: so izdelani kot koluti in niso primerni za visoke frekvence. So uporabni za aplikacije do nekaj sto kilohercov.
- 6) Metalizirani poliesterski: imajo boljše lastnosti od navadnih poliesterskih. So manjšni dimenzijsko.
- 7) Epoksi:



- 8) Keramični: izgledajo kot mali diski in niso izdelani v zavitkih, zato imajo dobre frekvenčne karakteristike in jih uporabljamo za visokofrekvenčne aplikacije. Na primer za filtriranje visokofrekvenčnih motenj.
- 9) Nastavljivi kondenzatorji (trimerji): vsebujejo lahko keramični ali plastični dielektrik.
- 10) Nastavljivi zračni kondenzatorji: uporabljajo zrak kot dielektrik. Običajno jih najdemo v radijih.
- 11) Superkondenzatorji: imajo izrazito veliko kapacitivnost, na primer 0,47 F, kljub temu pa so majhnih dimenzij. Te lastnosti je mogoče doseči z uporabo električnega dvojnega sloja.



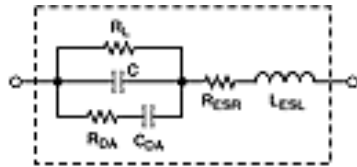
CAPACITOR COMPARISON CHART

TYPE	TYPICAL DIELECTRIC ABSORPTION	ADVANTAGES	DISADVANTAGES
NPO ceramic	<0.1%	Small case size Inexpensive Good stability Wide range of values Many vendors Low inductance	DA generally low, but may not be specified Limited to small values (10 nF)
Polystyrene	0.001% to 0.02%	Inexpensive Low DA available Wide range of values Good stability	Damaged by temperature > +85° C Large case size High inductance
Polypropylene	0.001% to 0.02%	Inexpensive Low DA available Wide range of values Good stability	Damaged by temperature > +105° C Large case size High inductance
Teflon	0.003% to 0.02%	Low DA available Good stability Operational above +125° C Wide range of values	Relatively expensive Large size High inductance
MOS	0.01%	Good DA Small Operational above +125° C	Limited availability Available only in small capacitance values
Polycarbonate	0.1%	Low inductance Good stability Low cost Wide temperature range	Large size DA limits to 8-bit applications High inductance
Polyester	0.3% to 0.5%	Moderate stability Low cost Wide temperature range Low inductance (stacked film)	Large size DA limits to 8-bit applications High inductance
Monolithic ceramic (High K)	>0.2%	Low inductance Wide range of values	Poor stability Poor DA High voltage coefficient
Mica	>0.003%	Low loss at HF Low inductance Very stable Available in 1% values or better	Quite large Low values (<10 nF) Expensive
Aluminum electrolytic	High	Large values High currents High voltages Small size	High leakage Usually polarized Poor stability Poor accuracy
Tantalum electrolytic	High	Small size Large values Medium inductance	Inductive Quite high leakage Usually polarized Expensive Poor stability Poor accuracy

SLIKA: Primerjalna tabela lastnosti kodenzatorjev. Po: Analog Devices: Ask The Applications Engineer – 21 (iz spleta)

Pomembne lastnosti kondenzatorjev.

Kondenzatorji imajo v idealnem smislu le kapacitivne lastnosti in so idealni izolatorji. V resnici pa idealnih lastnosti ni mogoče doseči. Neidealne električne lastnosti prikažemo z nadomestno shemo realnega kondenzatorja, ki je v osnovi vzporedna vezava kondenzatorja z uporom R_p in zaporedno z induktivnostjo L_s in upornostjo R_s .



SLIKA: Nadomestna shema realnega kondenzatorja. (po Analog Devices)

Pri različnih aplikacijah je pomembna različna lastnost. Na primer, izgubna (vzporedna R_P) upornost je pomembna v AC aplikacijah (izmenični toki) in aplikacijah, kjer je pomembno natančno shranjevanje naboja, kot na primer za integratorje ali »sample-hold« vezja ali ko jih uporabljamo pri visokih frekvencah. Elektrolitski (tantalove ali aluminijasti) kondenzatorji dosegajo visoke kapacitivnosti vendar zaradi slabe izolacije tudi velike izgubne toke, na primer 5 – 20 nA na μF . V omenjene namene je bolje uporabiti »plastične« kondenzatorje: polipropilenske ali polistirenske.

Zaporedna (ang. equivalent series resistance) upornost R_S je pomembna pri aplikacijah z velikimi tokovi, saj se na kondenzatorjih z veliko serijsko upornostjo porablja velika (izgubna) moč. Kondenzatorji z majhno R_S so iz filmov ali iz sljude (ang mica).

Serijska induktivnost je tudi lahko problematična pri visokih frekvencah. Elektrolitski, papirni in plastični kondenzatorji niso primerni za visokofrekvenčne aplikacije, saj so večinoma sestavljeni iz dveh kovinskih plasti ločenih s plastjo dielektrika in zviti v svitke. Za visokofrekvenčne aplikacije so primerni keramični kondenzatorji.

Pomemben podatek je faktor disipacije (polnilni faktor), ki predstavlja razmerje energije, ki jo kondenzator potroši z energijo, ki jo shrani.

Dielektrična absorpcija nam pove histerezne lastnosti kondenzatorja. Torej, kako je ponovljivo elektrenje kondenzatorja brez efekta spomina.

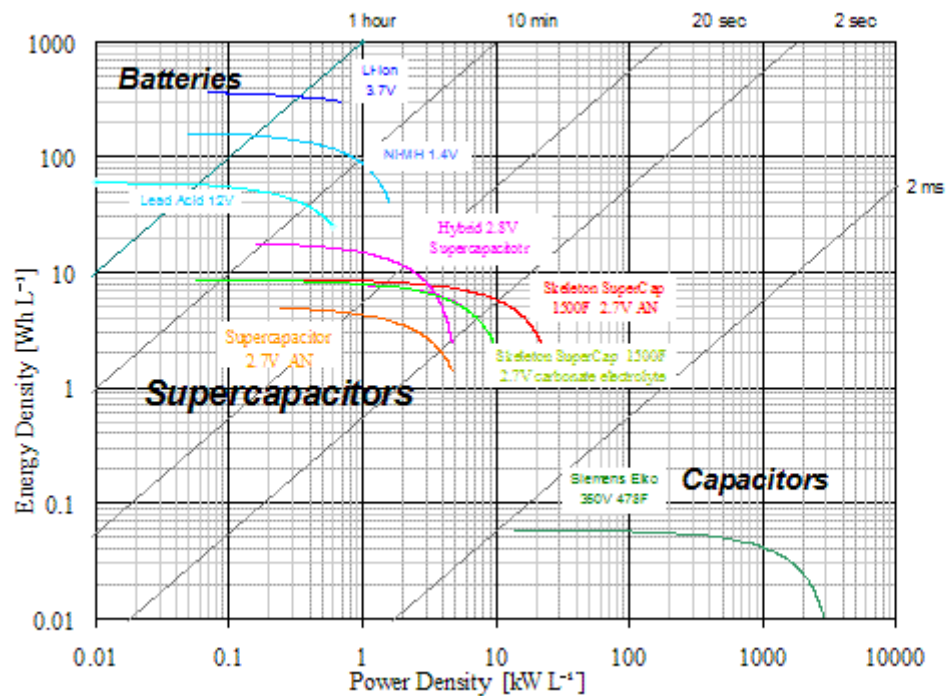
Nekaj aplikacij kondenzatorjev:

- **začasno nadomeščanje baterijskega napajanja v vezjih**
- **za usmerjanje v močnostnih aplikacijah**
- **charge-pump kasakada (zvišanje napetosti)**
- **glajenje signalov**
- **izločanje AC komponente**
- **izločanje DC komponente**
- **kompensacija moči**
- **florescenčna osvetlitev**
- **filtracija signalov**
- **za doseganje resonančne frekvence**

Uporaba kondenzatorskega principa:

- **senzor razdalje (majhne razdalje)**
- **senzor pospeška (ADXL)**
- **senzor nivoja tekočine**
- **kondenzatorski mikrofoni**

- senzorji dotika
- visokonapetosti kondenzatorji za shranjevanje energije in hitro praznjenje (pulzni laserji, elektromagnetno izstreljevanje, radar, pospeševalniki, detonatorji,



SLIKA: Primerjava med različnimi tipi kondenzatorjev, baterijami in superkondenzatorjem. Elektrolitski kondenzatorji omogočajo razelektritev velikih tokov vendar v zelo kratkem času. Baterije omogočajo shranjevanje velike količine energije vendar jo ne morejo zelo hitro izkoristiti. Superkondenzatorji so vez med navadnimi kondenzatorji in baterijami. Omogočajo relativno velike toke razelektritve v precej daljšem času kot navadni kondenzatorji. Vir: Skeleton Supercaps.

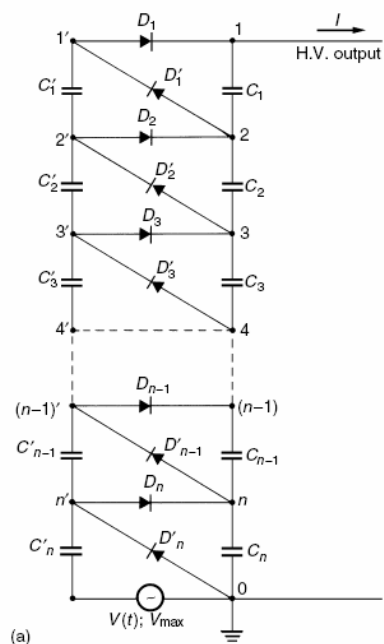
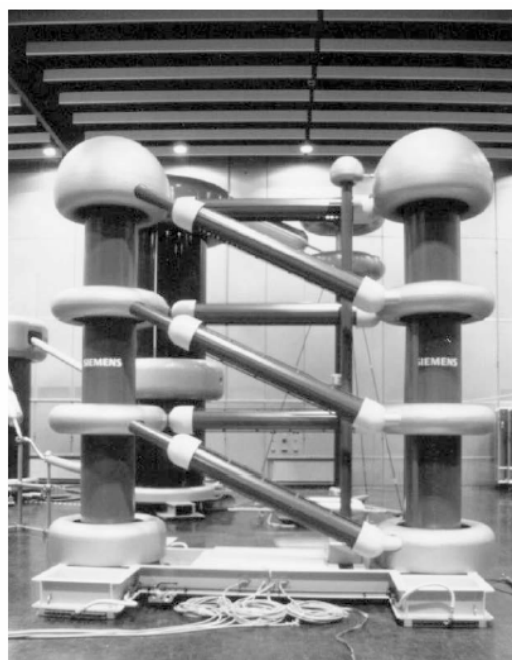


Figure 2.3 (a) Cascade circuit according to Cockcroft–Walton or Greinacher. (b) Waveform of potentials at the nodes, no load



SLIKA: Kaskadno vezje za zvišanje napetosti, tipična uporaba do 200 kV. Cockcroft-Waltonov CD generator na ETH (Švica) 900kV/10mA.



Podnapis pod fotografijo: Filtrska kompenzacija s KLV-kondenzatorji, Acroni, Jesenice

SLIKA: Kompenzacijski kondenzatorji v Acroni Jesenice. Vir:
<http://www.iskra.si/upload/Iskra%20KONDENZATORJI.pdf>

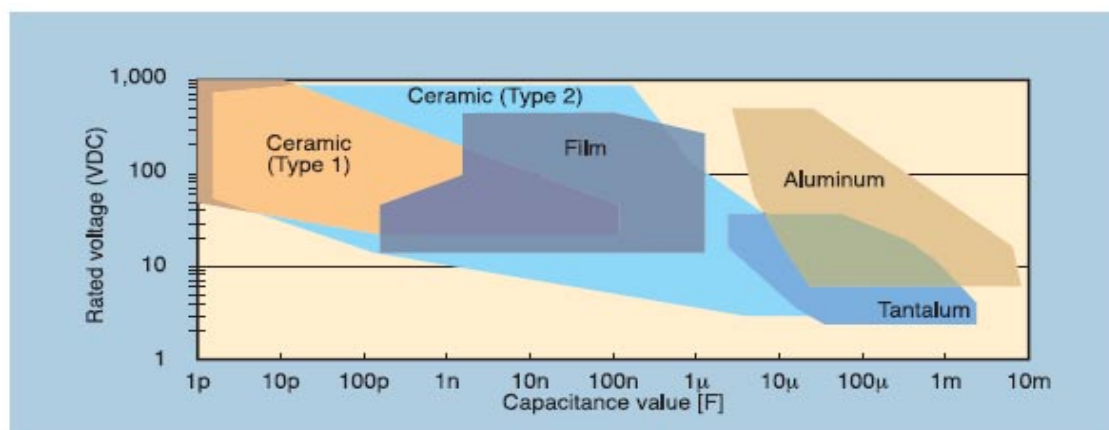


Fig. 1: Relation between capacitance value and rated voltage in each capacitor

SLIKA: različni tipi kondenzatorjev glede na zahtevano nazivno napetost. Vir: Murata.

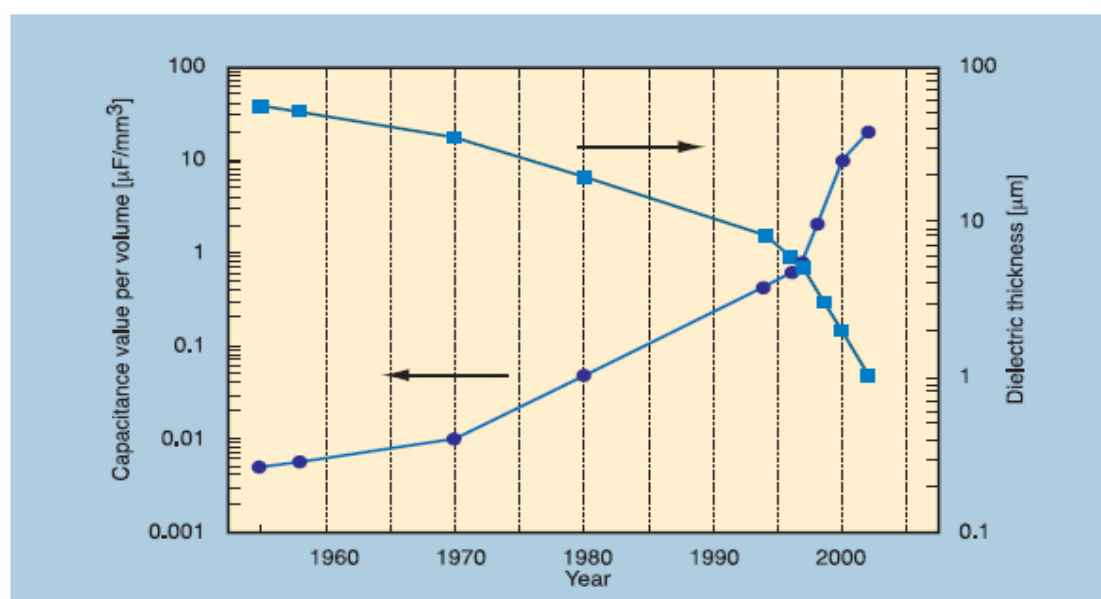


Fig. 2: Transition of capacitance value per volume and dielectric thickness

SLIKA: Primer napredovanja tehnike izdelave kondenzatorjev. Hkrati s tanjšanjem debeline dielektrika se večja kapacitivnost na enoto volumna.

23. Energija

V tem poglavju bomo ponovili določena spoznanja iz poglavja 12 (Delo in energija) in jih nadgradili s celostnim pogledom na pojem energije v elektrostatiki. V poglavju 12 smo spoznali, da je napetost enaka delu, ki jo enota pozitivnega naboja (1 C) opravi pri premiku od ene točke do druge.

Delo električnih sil smo torej zapisal kot

$$A_e = A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

napetost pa kot

$$U = \frac{A_e}{Q} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Obenem smo ugotovili, da je potencialna energija naboja enaka delu, ki ga opravi zunanja sila pri prenosu iz oddaljenosti (kjer je njegov potencial enak nič) do mesta, kjer se nahaja. Enakovredno lahko rečemo, da je ta energija enaka delu električnih sil za premik z mesta, kjer se nahaja do neskončnosti (kjer je potencial enak nič): $W(T) = A_e(T \rightarrow T_\infty)$. Ta definicija pa je hkrati definicija potenciala, le da je definirana s potencialno energijo enote

$$\text{naboja: } V = \frac{A_e(T \rightarrow \infty)}{Q} = \int_{T_1}^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Potencial v razdalji r od osamljenega točkastega naboja Q_1 je $V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r}$. Da bi na

razdaljo r od naboja Q_1 spravili naboj Q_2 bi torej potrebovali energije

$$W = Q_2 \cdot V_2 = Q_2 \cdot \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Energija posameznega naboja pri preletu polja. Če se v električnem polju giblje le en naboj, se njegova potencialna energija poveča ali zmanjša za $\Delta W = Q \cdot \Delta V = Q \cdot U$. Tak primer je na primer gibanje elektrona v električnem polju. Če preleti elektron v smeri polja napetost 20 kV, se bo njegova kinetična energija povečala na račun zmanjšanja potencialne za $\Delta W = Q \cdot U = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 20 \text{ kV} = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}$. Pogosto namesto enote Joule pri zapisu energije delcev uporabljamo enoto elektron-volt, kjer je $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. V tem smislu je kinetična energija delca po preletu polja 20 kV enaka $20 \cdot 10^3 \text{ eV}$ ali 20 keV.

Energija sistema nabojev. Vzemimo, da imamo prostor brez nabojev in torej brez električnega polja. Če želimo v ta prostor prenesti naboj, moramo opraviti delo. V električnem smislu za prenos prvega naboja (Q_1) ni potrebno vložiti nič dela, saj ni nobene električne sile na ta delec. Ko pa želimo v njegovo bližino prenesti naboj Q_2 , moramo za

$$\text{to opraviti delo, ki bo } A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}},$$

kjer je r_{12} razdalja med nabojema Q_1 in Q_2 .

SLIKA: Elektrenje prostora z vnašanjem nabojev.

Ko prenašamo tretji naboj, mora ta premagovati dvojne sile, tako na naboj Q_1 , kot na naboj Q_2 . Torej potrebujemo opraviti delo $\frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$, kjer sta r_{12} in r_{23} razdalji med nabojema Q_1 in Q_3 ter Q_2 in Q_3 . In tako dalje. To delo se shrani v obliki potencialne energije v pozicijah delcev, oziroma v električnem polju, ki ga ti delci formirajo. Vsota elektrenja prostora z vnašanjem treh nabojev je torej

$$W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}.$$

Zapišimo to vsoto nekoliko drugače:

$$W = \frac{1}{2} Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} \right) + \frac{1}{2} Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) + \frac{1}{2} Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right).$$

Ugotovimo, da so vrednosti v oklepajih enake potencialom V_1 , V_2 in V_3 . Enačbo torej lahko zapišemo v obliki:

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3.$$

Očitno bi lahko za sistem n nabojev zapisali energijo v obliki:

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 + \dots + \frac{1}{2} Q_n V_n,$$

oziroma na kratko

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i,$$

kjer je V_i je potencial na mestu naboja Q_i in ga zapišemo kot vsoto:

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{Q_j}{r_{ij}},$$

kjer so r_{ij} razdalje med nabojem Q_i in Q_j .

Primer: Določimo energijo sistema treh enako velikih nabojev $Q = 20 \text{ nC}$, ki se nahajajo v ogliščih enakostraničnega trikotnika stranice $a = 10 \text{ cm}$.

SLIKA: Sistem treh nabojev v ogliščih enakostraničnega trikotnika.

Izračun: Ker so naboji enako veliki in simetrično razporejeni, je tudi potencial na vseh mestih nabojev enako velik. Na mestu naboja Q_1 je enak:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2}{a} + \frac{Q_3}{a} \right) = 2 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}. \text{ Energija sistema bo torej}$$

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 = 3 \cdot \frac{1}{2} Q_1 V_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} Q \cdot 2 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}, \text{ in številčno}$$

$$W = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \cdot \frac{3 \cdot (20 \cdot 10^{-9} \text{C})^2}{0,1 \text{ m}} = 108 \mu\text{J}.$$

Primer: Koliko dela moramo vložiti za premik naboja iz enega oglišča v sredino med druga dva naboja?

Izračun: Vzemimo zgornji naboj (označen kot Q_3) in ga premaknimo med Q_1 in Q_2 . Delo

bi lahko določili iz osnovne formule za izračun dela, torej kot $A_e = Q_3 \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, kjer je E

polje na mestu naboja Q_2 . Izračunati bi morali polje na mestu naboja (kar v konkretnem primeru ne bi bilo ravno zahtevno) in ga integrirati po poti. Bolj enostavno je določiti delo iz razlike potencialnih energij sistema pred in po premiku:

$$A(T_1 \rightarrow T_2) = W(T_1) - W(T_2) = W_{\text{začetna}} - W_{\text{končna}}.$$

Energijo v začetni legi smo že določili, preostane še izračun v končni legi $W(T_2)$.

$$\begin{aligned} W(T_2) = W_{\text{končna}} &= \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 = 2 \cdot \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 = \\ &= Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a/2} \right) + \frac{1}{2} Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a/2} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a/2} \right) = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{2Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{5Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

Energija sistema se bo po premiku očitno povečala, torej bo delo negativno. To pomeni, da ga bodo morale opraviti zunanje sile. To delo bo enako

$$A = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{5Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{2Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -72 \mu\text{J}.$$

Energija v polju kondenzatorja.

Tako kot smo potrebovali določeno energijo, da smo v prostor pripeljali naboje, je potrebna določena energija, da naelektrimo kondenzator. V najpreprostejši obliki si lahko kondenzator predstavljamo kar kot dve prevodni telesi. Med njiju priključimo vir napetosti in povečujemo napetost. Z večanjem napetosti med telesoma, se povečuje tudi naboj na telesoma. Pač skladno z enačbo $Q = C \cdot U$. Vzemimo sedaj (diferencialno) majhen naboj dQ in ga premaknimo iz enega telesa na drugega, pri čemer je napetost med telesoma U . Spememba (potencialne) energije bo enaka $dW = dQ \cdot U$. Napetost lahko izrazimo tudi z nabojem in kapacitivnostjo, tako da je diferencial energije enak $dW = \frac{Q}{C} \cdot dQ$. Celotno energijo, ki smo jo pridobili z elektrenjem kondenzatorja dobimo z integracijo naboja od začetnega (0), do končnega $Q_{\text{končni}}$:

$$W = \int_0^{Q_{\text{končni}}} \frac{Q}{C} \cdot dQ = \frac{Q_{\text{končni}}^2}{2C}.$$

To je energija v naelektrenem kondenzatorju, ki jo lahko izkoristimo v različne namene. Ni pa nujno, da je to tudi celotna energija, ki jo lahko koristno uporabimo. Del energije se ob razelektritvi lahko porabi znotraj baterije - na njeni notranji upornosti.

Enačbo lahko s pomočjo zveze $Q = C \cdot U$ zapišemo tudi v obliki

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{Q \cdot U}{2}$$

Pogosto se gornji izraz uporabi tudi za določitev kapacitivnosti. Če torej znamo energijo ob znani napetosti med elektrodama v kondenzatorju določiti na nek drug način, potem

lahko izračunamo kapacitivnost iz $C = \frac{2W}{U^2}$.

Primer: Določimo energijo v zračnem ploščnem kondenzatorju kapacitivnosti 20 nF, ki je priključen na enosmerni vir napetosti 60 V. Za koliko procentov se spremeni energija shranjena v kondenzatorju, če razdaljo med ploščama razpolovimo?

Izračun: Električna energija shranjena v kondenzatorju je

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{20 \text{ nF} \cdot (60 \text{ V})^2}{2} = 36 \mu\text{J}.$$

Iz enačbe za kapacitivnost ploščnega kondenzatorja $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ ugotovimo, da zmanjšanje razdalje med ploščama za polovico predstavlja zvečanje kapacitivnosti za 2x, kar pomeni, da se bo energija povečala za 2x, na 72 mJ, torej za 100%.

Dodatno: Za koliko procentov se bo spremenila energija v kondenzatorju, če pred zmanjšanjem razdalje med ploščama kondenzatorja za polovico odklopimo kondenzator od vira napajanja?

Izračun: Sedaj se ohranja naboj, ki ga je pred odklopom $Q = C \cdot U = 20 \text{ nF} \cdot 60 \text{ V} = 1,2 \mu\text{C}$, enako pa tudi po preklopu, saj se naboj ohranja. Torej bo ob 2x večji kapacitivnost ob

preniku energija enaka $W = \frac{(1,2 \mu\text{C})^2}{2 \cdot 2 \cdot 20 \text{ nF}} = 18 \mu\text{J}$. Energija v kondenzatorju se bo očitno

zmanjšala za 2x. Zakaj? Med pozitivno in negativno naelektreno ploščo deluje sila, ki plošči privlači. Če ne bi delovale druge sile (težnosti, lepenja), bi se plošči združili, naboji bi se razelektrili in energija bi se pretvorila v drugo obliko (recimo toplotno). Torej se energija sistema manjša z zmanjševanjem razdalje med elektrodama.

SLIKA: Energija v kondenzatorju z in brez dielektrika.

Dodatno: Koliko je energija v kondenzatorju, če pri priključeni napetosti vstavimo vanj dielektrični listič debeline, ki je enaka polovici razdalje med elektrodama in ima relativno dielektričnost 6?

Izračun: Spremeni se kapacitivnost $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ in sicer tako, da imamo sedaj zaporedno

vezavo dveh kapacitivnosti $C_{zraka} = \epsilon_0 \frac{A}{d/2}$ in $C_{diel} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d/2}$, torej je $C_{diel} = 6 \cdot C_{zraka}$ in

nadomestna kapacitivnost $C_{nad} = \frac{C_{diel} \cdot C_{zraka}}{C_{diel} + C_{zraka}} = \frac{6C_{zraka} \cdot C_{zraka}}{6C_{zraka} + C_{zraka}} = \frac{6}{7} C_{zraka} = \frac{6}{7} 2 \cdot C = \frac{12}{7} C$.

Kapacitivnost kondenzatorja je po vložitvi dielektrika približno 2x večja (za 12/7) od začetne kapacitivnosti. Ker je priključena napetost fiksna, bo energija po vložitvi lističa

večja od prvotne za 12/7 in bo enaka $W = \frac{\frac{12}{7} C \cdot U^2}{2} = 61,71 \text{ mJ}$. Pred vložitvijo

dielektričnega lističa pa je bila energija v kondenzatorju 36 μJ . Zakaj se je energija povečala? Ko vstavimo dielektrik med plošči kondenzatorja, se na površini kondenzatorja poveča naboj (ki pride iz vira), ki kompenzira zmanjšanje polja v dielektriku zaradi polarizacije dielektrika.

Kaj pa, če pred vstavitvijo dielektrika odklopimo vir? V tem primeru se bo na ploščama kondenzatorja ohranil naboj (ne bo se povečal), kapacitivnost pa se bo povečala kot smo že izračunali – za 12/7. Energija pa se bo posledično zmanjšala, kar sledi iz

$W = \frac{Q^2}{2 \cdot \frac{12}{7} C}$, torej za 7/12.

Energija elektrostatičnega sistema porazdeljenih nabojev. ???

Poslužimo se izraza iz prejšnjega odstavka, pri čemer zamenjamo napetost U za potencial V , ki je potencial na mestu diferencialno majhnega naboja dQ :

$$dW = dQ \cdot V.$$

Z integracijo po vseh nabojih in upoštevanju potenciala na mestu teh nabojev je energija elektrostatičnega sistema enaka

$$W = \int_{\text{po vseh } Q\text{-jih}} V \cdot dQ,$$

kjer lahko pišemo tudi $dQ = \rho \cdot dV$ in

$$W = \int_V V_{el} \cdot \rho \cdot dV.$$

Nerodnost te enačbe je, da uporabljamo enak simbol za volumen in potencial. Da bi to razmejili, smo v zadnji enačbi zapisali potencial kot V_{el} .

Gostota energije in energija polja

Do sedaj smo izračunavali električno energijo iz kapacitivnosti, naboja in napetosti. Ker je vez med napetostjo in nabojem električna poljska jakost, mora obstajati tudi povezava med energijo in jakostjo polja. Vzemimo primer naelektrene kroglice z nabojem Q , ki je na potencialu V . Električna energija, potrebna, da smo zbrali skupaj ta naboj, je enaka $W = \frac{1}{2} Q \cdot V$.

SLIKA: Energija v polju naelektrene kroglice.

V tem smislu bi za postavitve dela naboja pri določenem potencialu potrebovali energijo $dW = \frac{1}{2} dQ \cdot V$. dQ lahko izrazimo z uporabo Gaussovega zakona $E \cdot dA = dQ / \epsilon_0$.

Diferencial energije pa zapišemo v obliki

$dW = \frac{1}{2} V \cdot (\epsilon_0 E \cdot dA)$. Poleg tega zapišemo diferencial potenciala kot $dV = E \cdot dl$, od koder lahko za diferencial energije zapišemo $dW = \frac{1}{2} E \cdot dl \cdot (\epsilon_0 E \cdot dA)$ in ker je diferencial volumna enak $dV = dA \cdot dl$ je $dW = \frac{1}{2} E \cdot \epsilon_0 E \cdot dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot dV$. Z integracijo po volumnu pa dobimo celotno energijo sistema:

$$W = \int_{Vol} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot dV$$

Izraz v integralu lahko prepoznam kot **gostoto energije** in ga tako tudi poimenujemo ter uporabimo simbol w :

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Enota je energija na volumen, torej J/m^3 .

Enačba za energijo, ki smo jo zapisali, velja za polje v vakuumu oz. zraku. Če imamo polje v dielektriku, bi do izraza za energijo prišli na podoben način, le z uporabo Gaussovega zakona za dielektrike. V tem smislu bi dobili za energijo

$$W = \int_{Vol} \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot dV,$$

za diferencial energije pa

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2.$$

Bolj splošen izraz, ki pa ga ne bomo izpeljevali je $w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ oziroma za diferencial gostote energije.

$$dw = \vec{E} \cdot d\vec{D}.$$

Primer: Določimo izraz za energijo ploščnega kondenzatorja površine plošč A in razdalje med ploščama d z uporabo enačbe $W = \int_{Vol} \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot dV$.

Izračun: $E = \frac{U}{d},$

$$\begin{aligned} W &= \int_{Vol} \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \int_{Vol} dV = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 \cdot V = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \frac{U^2}{d} \cdot A = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \cdot U^2 = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \end{aligned}$$

Gibalni procesi – sila med na telesa.

1) Primer gibanjih procesov naelektrenih teles brez priključenega vira napetosti.

Vzemimo sistem dveh naelektrenih teles z naboji $+Q$ in $-Q$. Energija shranjena v električnem polju je enaka $W_e = \frac{Q \cdot U}{2}$. Če dopustimo, da se eno od teles premakne, se

premakne v smeri drugega za neko majhno razdaljo dl in opravi delo $dA = \vec{F}_e \cdot d\vec{l}$. To delo se je opravilo na račun zmanjšanja električne energije sistema, saj mora veljati, da je vsota opravljenega dela in zmanjšane električne energije enaka nič: $dW_e + dA = 0$. Če izrazimo delo le v smeri X , bo veljalo: $F_{e,x} \cdot dx = -dW_e$ in torej

$F_{e,x} = -\frac{dW_e}{dx}$. Če se razmere spreminjajo tudi v drugih smereh, je bolj korektno uporabiti parcialni odvod:

$$F_{e,x} = -\frac{\partial W_e}{\partial x}.$$

Enako lahko določimo tudi silo v drugih smereh. V splošnem je torej sila enaka

$$\vec{F}_e = \left(-\frac{\partial W_e}{\partial x}, -\frac{\partial W_e}{\partial y}, -\frac{\partial W_e}{\partial z} \right).$$

SLIKA: Sila na naelektreno telo.

2) Primer gibalnih procesov pri priključenosti napetosti.

V tem primeru je potrebno v energijsko bilanco vključiti tudi energijo, ki pride ali se vrne v vir. Torej bo sprememba energije polja in dela premika enaka spremembi energiji vira:

$$dW_e + \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = dA_g,$$

kjer smo z dA_g označili spremembo energije vira.

Če se bosta telesi ob priključenosti napetosti oddaljili za majhno razdaljo, bi se med njima povečala kapacitivnost, zato se bo tudi povečal naboj med telesoma za dQ . Ta naboj bo prišel iz vira na račun opravljenega dela $dA_g = dQ \cdot U$. Zaradi povečanja naboja med

telesoma se bo povečala tudi energije v polju: $dW_e = \frac{U}{2}(Q + dQ) - \frac{U}{2}dQ = \frac{U}{2}dQ$.

Velja torej:

$$\frac{U}{2}dQ + \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = dQ \cdot U,$$

torej je

$$\vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \frac{dQ \cdot U}{2} = dW_e \text{ od koder sledi}$$

$$\vec{F}_e = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}, \frac{\partial W_e}{\partial y}, \frac{\partial W_e}{\partial z} \right).$$

Ugotovimo lahko, da se bo ob premiku naboja v polju pri konstantni napetosti polovico dela generatorja porabilo za premik, druga polovica pa za gradnjo električnega polja. Lahko pa je tudi obratno, da vir deluje kot porabnik, torej, da dobi energijo iz gibalnega procesa, na primer, če bi se nasprotno naelektrena naboja približevala.

Silo med telesoma je najlažje določiti iz povezave med energijo in kapacitivnostjo.

....

Primeri iz kolokvijskih in izpitnih nalog:

Primer: Izpit (UNI) 3.12.2001

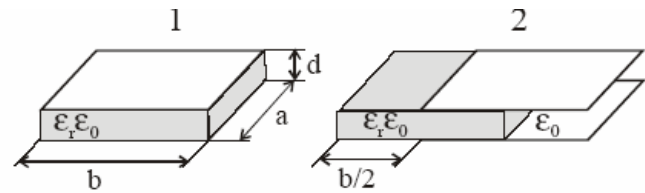
3. Med nadzemni vodnik polmera $\rho_0 = 2 \text{ cm}$ in dolžine $l = 10 \text{ km}$, ki je obešen na višini $h = 10 \text{ m}$, ter zemljo priključimo napetost $U = 150 \text{ kV}$. Kolikšna je električna energija, ki je akumulirana v električnem polju?

3.

$$W_e = \frac{qlU}{2} \quad ; \quad U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln 2h/\rho_0 \Rightarrow q = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\ln 2h/\rho_0} \quad ; \quad W_e = \frac{\pi\epsilon_0 l U^2}{\ln 2h/\rho_0} \doteq \boxed{906 \text{ J}}$$

Primer: Kolokvij 21.1.2002.

2. Ploščati kondenzator je priključen na napetostni vir U . Za kolikšen % se spremeni elektrostatična energija shranjena v polju ploščatega kondenzatorja, če dielektrik z relativno dielektričnostjo $\epsilon_r = 2$ izvlečemo za $b/2$ (glej skico)?



2.

$$1: W_1 = \int_{V_1} w dV = \int_{V_1} \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 \int_0^b dx \int_0^a dy \int_0^d dz = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 U^2 ab}{d} \epsilon_r$$

$$2: W_2 = \int_{V_2} w dV = \int_{V_2} \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 \int_0^{b/2} dx \int_0^a dy \int_0^d dz + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 \int_{b/2}^b dx \int_0^a dy \int_0^d dz = \frac{1}{4} \frac{\epsilon_0 U^2 ab}{d} (\epsilon_r + 1)$$

Odgovor: energija se zmanjša za 25%.

24. Vir napetosti

Do sedaj smo se ukvarjali le z učinki električnega polja, ne pa tudi z načinom, kako sploh ustrezno matematično opisati ločevanje naboja in generiranje napetosti. Vzemimo na primer naelektren kondenzator, ki ima ločene pozitivne in negativne naboje. Smer elektrostaticnega polja je od + nabojev proti – nabojem, tako v notranjosti, kot v zunanosti kondenzatorja.

SLIKA: Naelektren kondenzator z ločenimi naboji in elektrostaticnim poljem v notranjosti in zunanosti.

Če bi upoštevali le elektrostaticno polje (E_{es}) v katerem velja, da je delo električnih sil po zaključeni poti enako nič $\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = 0$, ugotovimo, da to polje ne more biti generatorsko,

da to polje ni sposobno ločevanja nabojev pač pa le združevanja. Torej mora biti neka druga sila, ki omogoča ločevanje nabojev nasprotnega predznaka. Tej sili rečemo **generatorska ali razdvajalna sila**. V angleškem jeziku se pogosto uporablja izraz **electromotive force**, poslovenjeno bi ji rekli elektromotorna ali elektrogeneratorska sila.

Označimo jo z $\vec{F}_g$, pripadajoče električno polje pa $\vec{E}_g = \frac{\vec{F}_g}{Q}$. Vzemimo, da znotraj

kondenzatorja deluje generatorska sila, ki je sposobna razdvajanja nabojev. Hkrati, ko deluje generatorska sila in razdvaja naboje, se vzpostavlja tudi elektrostaticna sila, ki pa je usmerjena v nasprotno smer. Na elektrodah se ustvarja akumulacija naboja, ki je v ravnovesju taka, da je $\vec{E}_g + \vec{E}_{es} = 0$.

SLIKA: V kondenzatorju (bateriji) deluje generatorska sila, ki razdvaja naboje in jih »nalaga« na elektrodi.

Generatorska napetost. Poglejmo sedaj, koliko je v tem primeru integral $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$, kjer je

E sumarna električna poljska jakost, ki vključuje tako generatorsko kot elektrostaticno silo. L_1 naj bo pot znotraj kondenzatorja, L_2 pa zunaj. Če sta smeri enako usmerjeni, velja:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1+L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1+L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} + \int_{L_1} (\vec{E}_g) \cdot d\vec{l}.$$

Integral smo ločili na dva. Prvi vsebuje le elektrostatično polje, drugi pa polje, ki ga povzroča generatorska sila. Prvi člen na desni je enak nič, saj gre za integral elektrostatičnega polja po zaključeni poti, drugi pa je enak potencialni razliki oziroma napetosti, ki jo imenujemo generatorska napetost U_g .

$$\int_{L_1} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = -U_g$$

Ali drugače: Znotraj kondenzatorja je elektrostatično polje (v stacionarnem stanju) enako veliko a nasprotno usmerjeno generatorskemu in je torej $\int_{L_1} (\vec{E}_{es} + \vec{E}_g) \cdot d\vec{l} = 0$, preostane

$$\text{del } \int_{L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = U_g.$$

Generatorska napetost je usmerjena od + naboja proti – naboju, enako kot elektrostatično polje in nasprotno smeri generatorskega polja.

Povzetek: Če povzamemo, integral $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$, ki ne vsebuje le elektrostatične električne poljske jakosti pač pa tudi sile drugega izvora, ni nujno enak nič pač pa neki napetosti, ki ji rečemo generatorska napetost $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_g$. V naslednjem semestru (OE2) bomo ugotovili, da je ta integral različen od nič tudi v primeru časovno spreminjajočega se magnetnega polja skozi zanko.

Tokokrog. Zaključimo generator v tokokrog s ploščatim kondenzatorjem s presekom A , razmakom med ploščama l in specifično prevodnostjo γ . Ponovno pogledamo, kako lahko razdelamo integral $\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = 0$. Integral razdelimo na pot znotraj vira in preko kondenzatorja s prevodnim materialom. Ker je sedaj zaradi toka v tokokrogu $\vec{E}_{es} + \vec{E}_g \neq 0$, bo znotraj generatorja $\int_{L_1} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = U_g - \int_{L_1} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = U_g - \int_{L_1} \frac{\vec{J}_g}{\gamma_g} \cdot d\vec{l}$. Enako velja za integral znotraj prevodnika $\int_{L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \frac{\vec{J}_{es}}{\gamma_R} \cdot d\vec{l}$. Če predpostavimo homogeno polje v preseku A tako za generatorski medij kot za breme, dobimo:

$$\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \frac{I/A}{\gamma_g} \cdot dl + \int_{L_1} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \frac{I/A}{\gamma_R} \cdot dl = I \frac{l}{\gamma_g A} - U_g + I \frac{l}{\gamma_R A} = 0.$$

Prvi člen predstavlja padec napetosti na notranji upornosti vira, drugi člen je generatorska napetost, tretji pa padec napetosti na bremenskem prevodniku (uporu):

$$\boxed{IR_g + IR_R = U_g}.$$

Ugotovimo, da je ločevanje med generatorsko upornostjo in napetostjo mogoče le modelno, v realnosti pa sta ta dva elementa vezij integrirana v eni strukturi.

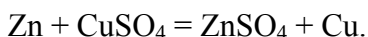
SLIKA: Tokokrog iz generatorskega in bremenskega dela.**Baterije.**

Tak princip generacije naboja si lahko predstavljamo v bateriji (akumulatorju), kjer ločevanje naboja nastopa zaradi elektro-kemijskih reakcij.

Zn/Cu baterija. Vzemimo primer dveh elektrod, ene iz cinka (Zn) in druge iz bakra (Cu). Če med elektrodi vlijemo tekočino, ki ji rečemo elektrolit, med elektrodama zaradi elektrokemijske reakcije nastane t.i. galvanski člen. Če je elektrolit žveplena kislina H_2SO_4 , le ta v vodi disociira (tvorijo se ioni) na ione H^+ in SO_4^{2-} . H^+ ioni se nabirajo na bakrovi elektrodi, kjer tvorijo presežek pozitivnega naboja. Ioni SO_4^{2-} se nabirajo na cinkovi elektrodi, tam tvorijo cinkov sulfat in presežek negativnega naboja. Na Cu elektrodi se tvori presežek pozitivnega naboja. Vzpostavi se napetost, ki jo lahko izkoristimo kot generatorski vir napetosti. Ob priključitvi bremena (upora) na baterijo, v priključnih žicah steče tok (elektronov), ki zmanjšuje količino generiranega naboja. Elektrokemijska reakcija nadomešča porabo naboja dokler je v elektrolitu dovolj ionov ali dokler se cinkova elektroda ne iztroši.¹

SLIKA: a) Baterija iz bakrene in cinkove elektrode v elektrolitu iz razredčene žveplene kisline. b) Tok ob kratkem stiku elektrod.

Kemijsko bi lahko reakcijo zapisali



Vodikovi ioni imajo pomanjkanje elektrona, ki priteče iz tokokroga na bakrovo elektrodo (priključnih žic) kot električni tok. Vodikov ion pridobi iz bakrene elektrode elektron in se izloči iz elektrolita, temu procesu rečemo redukcija. Na cinkovi elektrodi se vrši

¹ Priznati je potrebno, da se napetost med dvema različnima kovinama pojavi že brez delovanja elektrolita, torej pri neposrednem stiku dveh kovin. Ta napetost je posledica različnih izstopnih del različnih kovin in je med drugim temperaturno odvisna. Zato stik dveh različnih kovinskih materialov izkoristimo kot senzor temperature. Tak spoj pa ne more delovati kot generator toka, razen v primeru, da na tak spoj delujemo z zunanjo silo. Na primer, da spoj segrevamo ali ohlajamo.

oksidacija (izločanje presežnih prostih elektronov) pri čemer nastaja cinkov sulfat, ki se useda na dnu posode.

Faraday je z eksperimenti ugotovil, da je količina snovi, ki se nabere na elektrodah (v našem primeru baker) sorazmerna toku, ki steče skozi priklopne žice. Količina elektrike, ki je potrebna za en ekvivalent kemične akcije (ki ustreza kemični reakciji potrebni za izločitev 1g vodika iz kisline) je enaka enemu Faradayju, kar ustreza naboju 96494 amperskih sekund. Za zgornjo reakcijo v kateri sta udeležena ena enota cinka in ena enota bakra ustreza generacija naboja 2 F ali 193 988 C.

Poskuse s podobno baterijo je prvi delal Alessandro Volta v Italiji, ki se po njem imenuje Voltova celica ali Voltin člen. Kovinske elektrode imajo negativen potencial glede na raztopino. Da bi jih lahko primerjali med seboj, jih primerjamo s potencialom t.i. referenčne elektrode, ki je iz platine z dodatki vodika. Tako primerjane elektrodne napetosti so za različne materiale sledeče:

zlato	1,5 V
platina	1,2 V
srebro	0,8 V
ogljje	0,74 V
baker	0,34 V
železo	-0,44 V
cink	-0,76 V
aluminij	-1,67 V

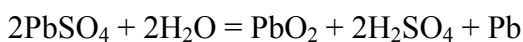
Če torej sestavimo t.i. galvanski člen iz elektrode iz bakra in cinka, bo med njima napetost $0,34 \text{ V} - (-0,76 \text{ V}) = 1,2 \text{ V}$.

Svinčeva baterija - akumulator. Druga znana baterija je svinčeva baterija, v kateri imamo dve elektrodi, ena iz svinca, druga pa iz svinčevega dioksida. Kot elektrolit nastopa razredčena žveplena kislina. Elektroda iz svinčevega dioksida ima za dobra 2 V višjo napetost od svinčeve. Z vezavo šestih takih celic zagotovimo baterijo z 12 - 14 V izhodno napetostjo (avtomobilski akumulator). Reakcija, ki poteka je sledeča:

na negativni elektrodi: $\text{Pb} + \text{SO}_4^{2-} = \text{PbSO}_4 + 2\text{e}$

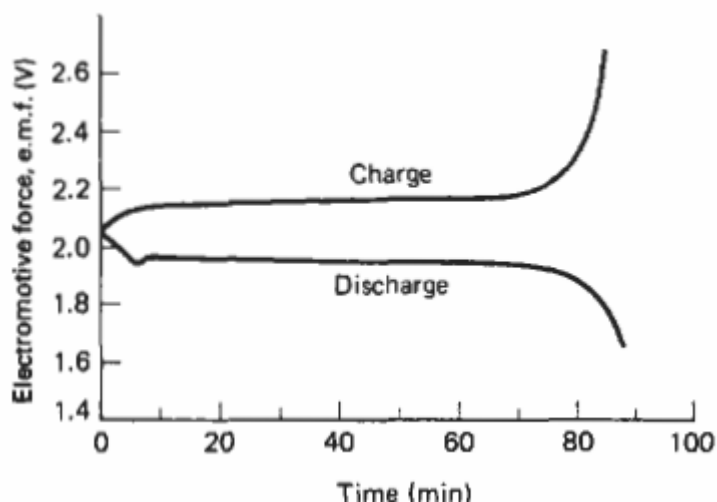
na pozitivni elektrodi: $\text{PbO}_2 + \text{Pb} + 2\text{H}_2\text{SO}_4 + 2\text{e} = 2\text{PbSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$

Na obeh elektrodah nastaja svinčev sulfat, kar pomeni, da je ob popolni razelektritvi napetost med elektrodama enaka nič. Kot vemo, je mogoče te tipe baterij ponovno naelektriti, pri čemer s tokom ustvarimo generacijo svinca na eni in svinčevega dioksida na drugi elektrodi. Proces je torej reverzibilen.



SLIKA: Baterija iz svinčeve elektrode in iz elektrode iz svinčevega dioksida.

Zanimivo je to, da se med razelektritvijo manjša, med naelektritvijo pa večja koncentracija kisline, medtem ko ostane napetost celice več ali manj konstanta. V tem smislu nam merjenje napetosti na akumulatorju ne predstavlja posebno natančnega merila »polnosti«.



SLIKA: Karakteristika naelektritve in razelektritve kondenzatorja (napetost – čas).

Svinčene baterije so verjetno še vedno najbolj razširjene. Predvsem se uporabljajo v avtomobilski industriji. Njihova prednost pred ostalimi je nizka cena, visoka napetost na celico in »dobra« življenska doba (mnogokratno polnjenje). Slabosti pa velika teža, slabe nizko-temperaturne lastnosti in ne sme biti v stanju razelektritve za daljše obdobje.

V prodaji so tudi t.i. zaprti tip akumulatorjev (suhi), katerih prednost je, da jim ni potrebno dolivati elektrolita / destilirane vode. Pri standardnih svinčenih baterijah namreč lahko posebno pri koncu elektritve ali pri prekomerni naelektritvi pride do elektrolize žveplene kisline pri čemer se kreirata kisik in vodik, kar v končni konsekvenci lahko škodno vpliva na karakteristiko baterije. Novi tipi baterij omogočajo, da generiran kisik in vodik tvorita vodo. Pri razelektritvi ima svinčeva »celica« določeno notranjo upornost; standardni tip D ima pri napetosti celice 2 V notranjo upornost 10 mΩ.

Nikelj – kadmijeve baterije (Ni-Cd) so mehansko trdne in imajo dolgo življensko dobo. Imajo tudi dobro nizkotemperaturno karakteristiko in so hermetično zaprte. Imajo pa višjo ceno kot svinčene ali nikel-cinkove baterije. V grobem jih po izdelavi delimo na dva tipa: celice z debelimi ploščami v katerih je aktiven material stisnjen v perforiran metalni trak v obliki žepkov ali tubusov, in na celice s sintranimi ploščami v katerih je aktivni material deponiran v porozne reže metala. Posebno slednje imajo majhno notranjo upornost in sposobnost velike obremenitve. Uporabljajo se na primer v biomedicinskih napravah, igračkah, itd. Vsebujejo toksične substance.

Nikelj – metal – hidridne baterije. Omogočajo večjo gostoto energije (energija na kilogram teže) vendar manjše število ponovnih polnenj kot nikel-kadmijeve baterije. Uporaba: mobilne naprave.

Litijeve-ionske baterije. Hiter razvoj, saj omogočajo zelo velike gostote energije in majhno težo. Uporaba: mobilni telefoni in prenosni računalniki. Litij je najlažji element od kovin, ima velik elektrokemijski potencial in omogoča največjo gostoto energije. Metalne litijeve baterije so se izkazale kot nevarne, saj se pri večkratnih polnjenjih slabša temperaturna karakteristika (stabilnost) litijeve elektrode. Ta tip so nadomestile litij – ionske baterije, ki so bolj varne: Prvo jih je komercialno začel izdelovati Sony leta 1991. Običajno je ena elektroda (anoda) iz grafita, druga (katoda) pa iz kobalta ali magnezija. Elektrolit je iz litijeve soli ([LiPF₆](#), [LiBF₄](#), or [LiClO₄](#)). Ena celica ima tipično napetost 3,6 V. Čas polnenja je tipično 3h. Komercialne Li-ionske baterije vsebujejo zaščitne elemente, na primer FET, ki odklopi baterijo, če je napetost višja od 4,3 V in varovalko, ki odklopi tok, če temperatura celice naraste na temperaturo višjo od 90°. Poleg tega ima še varovalo, ki permanentno odklopi celico, če se poveča pritisk v notranjosti celice nad določeno vrednost. Tipična »življenska doba« Li-ionskih baterij je 300 – 500 ciklov polnenja in praznjenja ali dveletni od dneva proizvodnje. (Vir: Wiki in www.cadex.com).

	Nickel-cadmium	Nickel-metal-hydride	Lead-acid sealed	Lithium-ion cobalt	Lithium-ion manganese	Lithium-ion phosphate
Gravimetric Energy Density (Wh/kg)	45-80	60-120	30-50	150 - 190	100 - 135	90 - 120
Internal Resistance in mΩ	100 to 200 ¹ 6V pack	200 to 300 ¹ 6V pack	<100 ¹ 12V pack	150 - 300 ¹ pack 100 -130 per cell	25 – 75 ² per cell	25 – 50 ² per cell
Cycle Life (to 80% of initial capacity)	1500 ²	300 to 500 ^{3,4}	200 to 300 ³	300 - 500 ³	Better than 300 – 500 ⁴	>1000 lab conditions
Fast Charge Time	1 h typical	2 to 4 h	8 to 16 h	1.5 - 3 h	1 h or less	1 h or less
Overcharge Tolerance	moderate	low	high	Low. Cannot tolerate trickle charge.		
Self-discharge / Month (room temperature)	20% ⁵	30% ⁵	5%	<10% ⁶		
Cell Voltage Nominal Average	1.25V ⁷	1.25V ⁷	2V	3.6V 3.7V ⁶	Nominal 3.6V Average 3.8V ⁶	3.3V
Load Current peak best result	20C 1C	5C 0.5C or lower	5C ⁹ 0.2C	<3C 1C or lower	>30C 10C or lower	>30C 10C or lower
Operating Temperature ¹⁰ (discharge only)	-40 to 60°C	-20 to 60°C	-20 to 60°C	-20 to 60°C		
Maintenance Requirement	30 to 60 days	60 to 90 days	3 to 6 months ¹¹	not required		
Safety	Thermally stable, fuse recommended	Thermally stable, fuse recommended	Thermally stable	Protection circuit mandatory; stable to 150°C	Protection circuit recommended; stable to 250°C	Protection circuit recommended; stable to 250°C
Commercial use since	1950	1990	1970	1991	1996	2006
Toxicity	Highly toxic, harmful to environment	Relatively low toxicity, should be recycled	Toxic lead and acids, harmful to environment	Low toxicity, can be disposed in small quantities		

SLIKA: Primerjava baterij po gostoti energije, notranji upornosti, času polnenja, itd. Vir: www.cadex.com

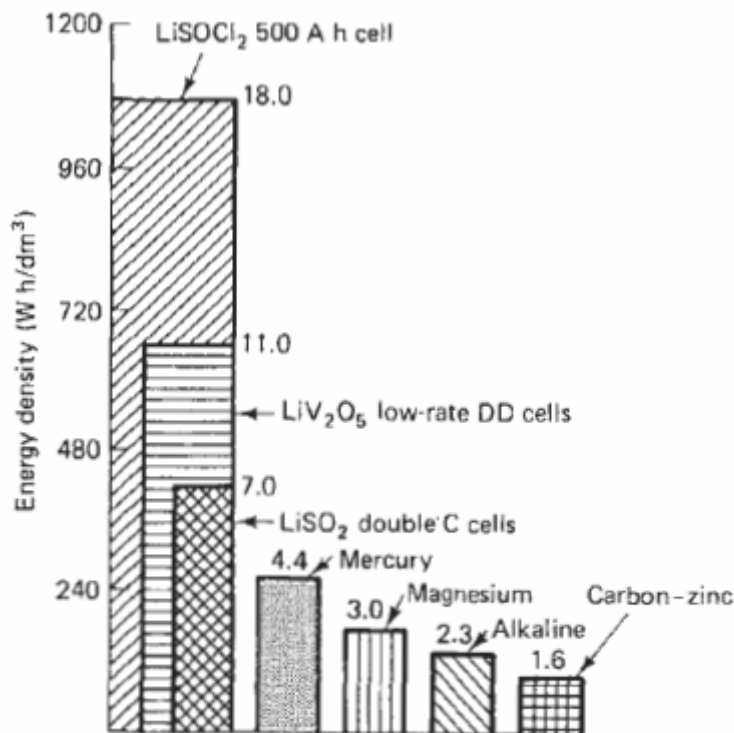


Figure 9.1 Comparison of energy density of lithium cells and other types of cell (Courtesy of Honeywell)

SLIKA: Primerjava prednosti Litijevih baterij pred ostalimi glede na gostoto energije.

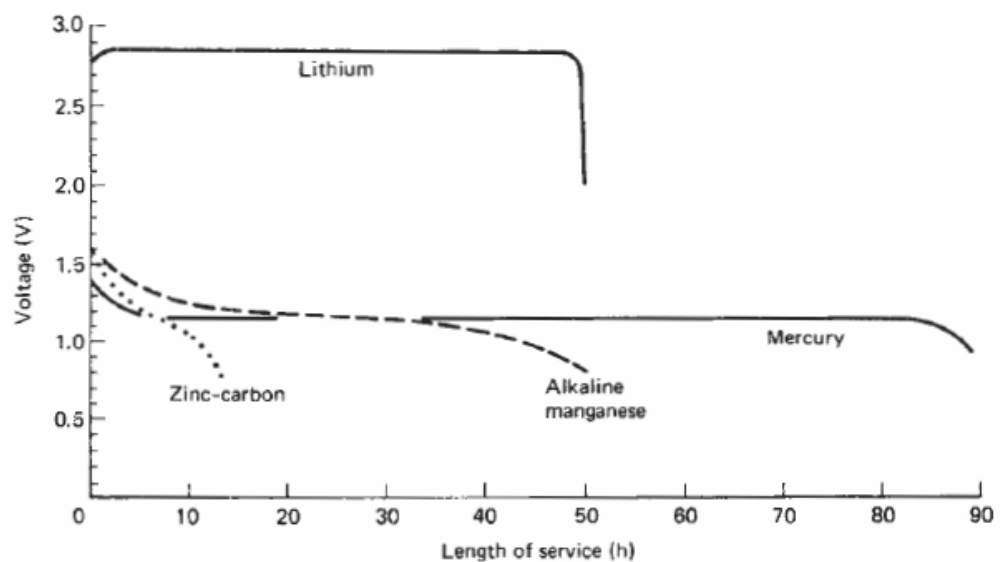


Figure 9.4 Typical voltage characteristics on medium load of lithium and other types of battery (Courtesy of Honeywell)

SLIKA: Baterija iz bakrove in cinkove elektrode z elektrolitom iz razredčene žveplene kisline.

Galvani in Volta. Zanimiva je zgodba nastanka Voltinovega izuma, ki je povezana s poskusi Luigija Galvanija, Voltinega sonarodnjaka, ki je presenečeno ugotavljal, da mrtvi žabji kraki reagirajo na dotik s kovino, kar je razlagal z živalsko elektriko. Volta je tej teoriji nasprotoval in dokazal, da je to posledica zunanje generirane napetosti, kar je tudi dokazal z uporabo elektrike shranjene v Leidenski flaši ali pa z bimetalom, torej s stikom dveh različnih kovinskih materialov. Dandanes vemo, da smo tudi ljudje sestavljeni iz celic, ki za svoje delovanje uporabljajo elektrokemijske principe in da je prenašanje signalov živčnih celic električne narave. Torej je imel delno Galvani prav, obstaja živalska elektrika, le da je bila njegova interpretacija napačna. V njegovem primeru je bil rezultat trzljenja električni sunek, ki je bil zunanje (ekstrinzično) in ne notranje kreiran. Voltini eksperimenti in dognanja so mu prinesli pomembna priznanja (nagrada Royal Society leta 1791, Copleyjeva nagrada leta 1974) in veliko slavo. Raziskave je nadaljeval v smeri povečanja napetosti, ki je bila zelo šibka (manj kot 1 V) in jo je bilo težko zaznati s tedaj najpopolnejšimi elektrometri. Uspelo mu je z zaporedno povezavo šalčk z elektrolitom in bimetalnimi elektrodami. Povezal je diske iz cinka in srebra ter vmes dodal šibko kislino ali slano vodo in dobil Voltino kaskado, pri kateri se je napetost na skrajnih koncih povečevala v sorazmerju s številom uporabljenih členov. Zgodovinsko je morda zanimivo, da je njegovo delo močno podprl Napoleon, ki mu je podelil naziv vitez (Conte) in dal penzijo. Hkrati je Napoleon, ki se je zavedal pomena novih odkritij razpisal nagrado 60000 frankov za vsakogar, ki bi dosegel podobne dosežke kot Franklin in Volta. Leta 1881 na prvem internacionalnem električnem (elektrotehničnem) kongresu v Parizu, so v čast Volti po njemu poimenovali enoto za napetost.



SLIKA: Voltine šalčke z elektrolitom in različnima elektrodama ter Voltina kaskada.

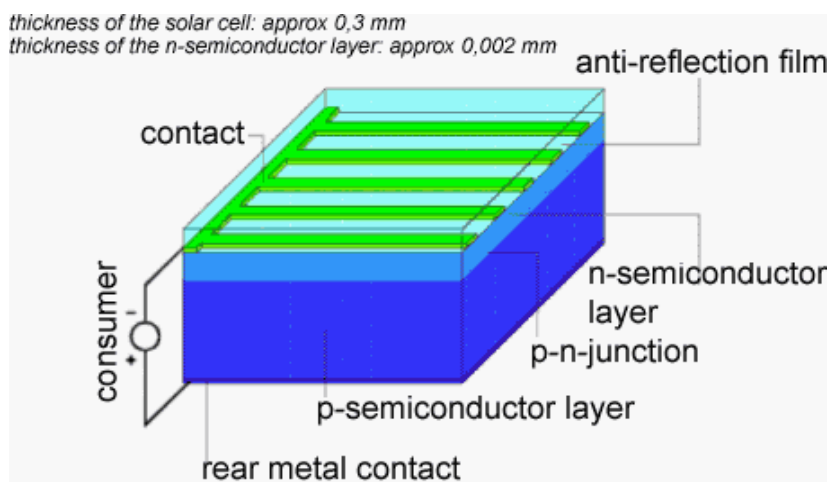
Obstaja mnogo načinov generiranja električne napetosti. Poleg baterij je najbolj pomemben princip uporabe generacija izmenične napetosti z elektrodinamskim načinom, ki pa ga bomo bolj natančno spoznali pri predmetu OE2.



SLIKA: Volta na »starem« bankovcu za 10000 lir.

Sončna celica.

Osnovni princip delovanja sončne celice je generacija parov elektron - vrzel pod vplivom visoko energijskih sončnih žarkov. Vrzel predstavlja pomanjkanje elektronov v dopiranem polprevodniškem materialu oziroma nezaključene vezi med atomi polprevodnika in dopanta. Vrzel se obnaša ekvivalentno pozitivnemu naboju in lahko potuje po polprevodniku, če nanj deluje električna sila. Njeno potovanje pa je počasnejše, kot potovanje prostih elektronov (rečemo, da je mobilnost vrzeli manjša od mobilnosti vrzeli). Poleg tega je v polprevodnikih potrebno upoštevati tok, ki je posledica krajevne razlike v koncentracijah nabojev, tako elektronov kot vrzeli. Ravno ta tok povzroči, da pri stiku dveh polprevodnikov različnega tipa pride do prerazporeditve naboja in s tem do vgrajenega električnega polja.



SLIKA: Sončna celica sestavljena iz polprevodniškega pn spoja. Na površini je antirefleksni sloj, ki povečuje absorpcijo svetlobne energije.

Čisti, nedopiran, polprevodniški material (recimo Si ali Ge) je izolator. Njegova specifična prevodnost je zelo majhna. Če pa ga dopiramo z določenimi atomi, recimo fosforja ali bora, se ti atomi vgradijo v kristalno strukturo silicija. Dopiranje se vrši na zelo visoki temperaturi (čez 1000°C). Z dopiranjem vnesemo v kristalno strukturo silicija atome (primesi), ki s sosednjimi atomi silicija tvorijo nezaključene vezi, kar v končni obliki pomeni, da je v primeru vgrajenega atoma fosforja na mestu fosforja višek elektrona, ki je zelo šibko vezan na atom in je praktično prosto gibljiv. Na ta način lahko s kontrolo množine (koncentracije) dopiranih atomov uravnavamo prevodnost polprevodniškega materiala. Tak tip polprevodnika imenujemo n (negative) tip. Kljub določeni koncentraciji prostih (šibko vezanih) elektronov v snovi, pa je ta material še vedno električno nevtralen. Če podobno dopiramo silicij z atomi bora, tvori atom bora z okoliškimi vezmi silicija nezaključeno vez, kar predstavlja pomanjkanje elektrona oziroma vrzel. Tak tip polprevodnika imenujemo p (positive) tip. Tudi tak tip polprevodnika je prevoden, le da je mobilnost vrzeli manjša kot mobilnost elektronov. Zanimiv pa je stik dveh polprevodnikov različnega tipa. Ob stiku se tvori t.i. pn spoj. Tu pride zaradi izenačenja potenciala na meji do prerazporeditve nabojev, kar pomeni, da postane del prevodnika na meji brez nosilcev naboja in s tem ne več nevtralen. Ostane vezan naboj, ki ustvari vgrajeno električno polje. To polje kaže od n-tipa proti p-tipu polprevodnika. To vgrajeno polje se veča z večanjem t.i. zaporne napetosti, torej tedaj, ko je na zunanji sponki n-tipa bolj pozitiven potencial kot na zunanji sponki p-tipu polprevodnika. V tem primeru skozi prevodnik teče le majhen, zaporni tok. V nasprotnem primeru pa zunanja napetost povzroči zmanjšanje vgrajenega polja in poveča prevodno progo. Ko zunanji vir vgrajeno polje (pri pn diodi iz Si pri cca. 0,7 V) izniči postane pn spoj prevoden in tok hitro (eksponentno) naraste. pn dioda je tipičen nelinearen element.

Kot smo že omenili je za delovanje sončne celice pomembna generacija parov elektron-vrzel. Če ta generacija nastopi v osiromašenem področju (kjer je vgrajeno polje), to polje potegne elektrone v nasprotni smeri polja, vrzeli (pozitivni naboj) pa v smeri polja. Ti naboji predstavljajo zmanjšanje vgrajenega polja vendar obenem presežek negativnih nabojev v n-tipu in presežek vrzeli v p-tipu polprevodnika. Povzročijo neravnotežje, ki ga lahko zmanjšamo, če tako diodo kratko sklenemo ali pa, če nanjo priključimo določeno breme. Skozi breme steče tok, ki povzroči ponovno vzpostavitev ravnotežja. Če je fotogeneracija konstantna, je konstanten tudi tok, ki teče skozi priključeno breme. Dobili smo generator toka. Več toka bomo seveda dobili če bo večja generacija parov elektron-

vrzel, kar lahko omogočimo tako z izboljšanjem materialov kot z večjo površino celice, ki je izpostavljena soncu. Osnovni princip je ta, da je potrebno povečati osiromašeno področje, kjer je vgrajeno polje in omogočiti, da v to področje »zaide« čim več fotonov sončne svetlobe. Ena od idej je, da se med p in n tipom polprevodnika obdrži nedopiran (intrinzični) tip silicija, v katerem je osiromašeno področje zelo veliko. Težava, ki jo je potrebno upoštevati je ta, da se sončna svetloba v polprevodnikih tipa Si ali Ge zelo hitro absorbira, torej že v površinskem sloju. Kar pomeni, da je potrebno osiromašeno področje zagotoviti zelo blizu površine. Itd...

Običajno je tako, da je najvažnejše razmerje med ceno celico in sposobnostjo generacije električnega toka in ne med izkoristkom celice. Ceneje kot iz čistega silicija je izdelovanje sončnih celic iz amorfnega silicija ali polisilicija. V Sloveniji je začelo izdelovati panele s sončnimi celicami podjetje Biosol.

Naloge iz elektrostatike (OE1) po tematikah iz izpitov in kolokvijev

<http://torina.fe.uni-lj.si>

črta V pomeni naloge na visokošolskem študiju

- 1) Sila in električna poljska jakost na točkaste in preme naboje
1KV2.12.2004, 1K26.11.2003, 1KV16.12.2002, 1K11.12.2002, 1KV9.12.2002,
1KV13.12.2001, K12.12.2001, I11.9.2003, I5.6.2002, I3.12.2001,
- 2) Izračun električne poljske jakosti in sile za porazdeljene naboje
K12.12.2001, I5.6.2002,
- 3) Gaussov stavek
1KV2.12.2004, 1K17.12.2002, 1K11.12.2002, 1KV9.12.2002, K12.12.2001,
K11.12.2000, IV28.1.2005, I12.9.2001,
- 4) Delo. Potencial in napetost
1K15.12.2004, 1KV6.12.2004, 1K17.12.2003, 1K17.12.2002, 1KV16.12.2002,
K11.12.2000, IV18.1.2005, I7.6.2004, I6.2.2004, I3.12.2001, I6.6.2001, I5.6.2001,
- 5) Povezava med električno poljsko jakostjo in potencialom
K12.12.2001, IV19.11.2004, I5.6.2003, I17.4.2003, I8.4.2002,
- 6) Točkasti dipol, navor
1K15.12.2004,
- 7) Zrcaljenje, ekscentričnost

1K15.12.2004, 1K17.12.2003, 1K26.11.2003, 1K17.12.2002, 1K11.12.2002,
K11.12.2000, I8.9.2005, I4.2.2005, IV19.11.2004, I9.9.2004, I7.6.2004, I25.3.2004,
I27.1.2004, I11.9.2003, I5.6.2003, I17.4.2003, I6.6.2001, I5.6.2001,
- 8) Električno polje v snovi, mejni pogoji
1K17.12.2003, 1K11.12.2002, KV11.12.2001, K11.12.2000, I8.9.2005, IV3.9.2004,
I7.6.2004, I27.1.2004, I5.6.2003, I17.4.2003,
- 9) Kapacitivnost
1K15.12.2004, 1K17.12.2003, IV2.9.2005, I4.2.2005, I9.9.2004, I6.2.2004, I5.6.2001,
- 10) Energija, delo in gibalni procesi
K12.12.2001, KV11.12.2001, I8.9.2005, I4.2.2005, IV28.1.2005, IV3.9.2004,
I6.2.2004, I27.1.2004, I11.9.2003, I5.6.2003, I5.6.2002, I8.4.2002, I3.12.2001,
I12.9.2001,
- 11) Kondenzatorska vezja
I8.9.2005, IV18.1.2005, I25.3.2004, I11.9.2003, I8.4.2002, I12.9.2001, I6.6.2001,
- 12) Tokovno polje
I4.2.2005, I25.3.2004, I6.2.2004, I27.1.2004, I5.6.2003,

