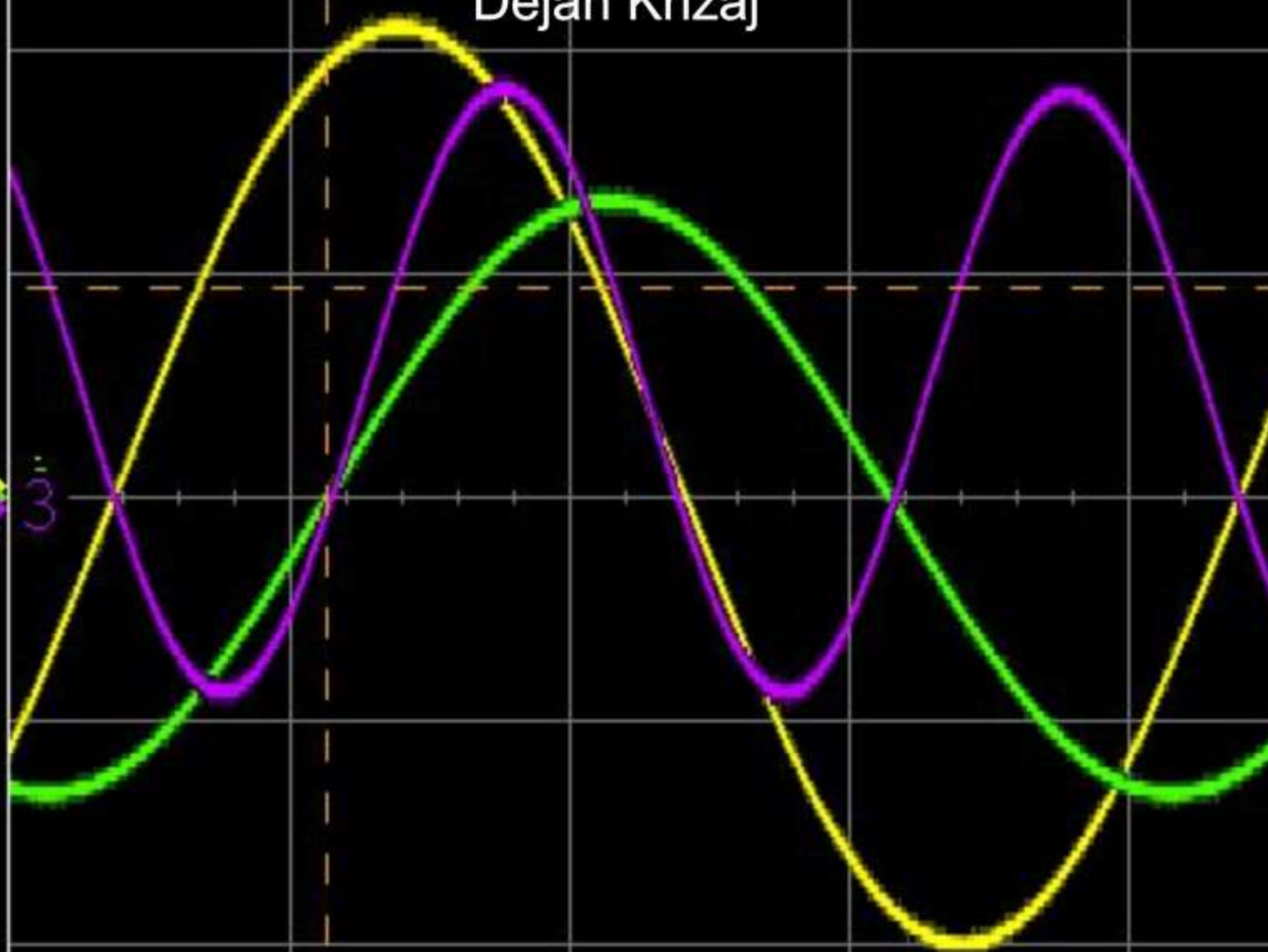


Osnove elektrotehnike II

VEZJA

Dejan Križaj



CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

621.3.011.7(075.8)

KRIŽAJ, Dejan, 1962-

Osnove elektrotehnike I in II. Električna vezja / Dejan Križaj. - 1. izd. - Ljubljana : Založba FE, 2016

ISBN 978-961-243-309-3

284411904

Copyright © 2016 Založba FE. All rights reserved.

Razmnoževanje (tudi fotokopiranje) dela v celoti ali po delih
brez predhodnega dovoljenja Založbe FE prepovedano.

Založnik: Založba FE, Ljubljana

Izdajatelj: Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana

Urednik: prof. dr. Sašo Tomažič

Natisnil: Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana

Naklada: 100 izvodov

1. izdaja

Predgovor

Ta skripta vsebuje snov drugega dela predmeta Osnove elektrotehnike II in se posveča predvsem vezjem z izmeničnimi signali. Pred tem smo si obširno pripravili teren z raziskovanjem magnetnih in še prej elektrostatičnih pojavov. Spoznali smo torej konceptne elemente kondenzatorja in tuljave, s katerimi lahko elektrostatične in magnetne vplive zajamemo v obliki »strnjenih« elementov. Na ta način si močno poenostavimo sicer kompleksne povezave med električnimi in magnetnimi pojavi v prostoru tako, da jih analiziramo kot vezje. Pri tem nas zanimajo predvsem pojmi kot so tok in napetost na elementih vezja, pa tudi moč in energija.

Najprej si pogledamo, kako se analizira tok in napetost na tuljavi ali kondenzatorju pri časovni spremembi vzbujalnega signala. Ugotovimo, da pride do t.i. prehodnega pojava, ki s časom izzzveni v stacionarno stanje. Pri tem se ne moremo izogniti reševanju diferencialnih enačb. Tem se lahko izognemo šele pri vzbujanju vezij z izmeničnimi signali, saj pretvorimo diferencialne enačbe v zapis s kompleksnimi števili. Tok in napetost tako ne obravnavamo več kot časovna signala pač pa kot dve kompleksni števili. Sistem diferencialnih enačb preide v sistem algebraskih enačb zapisan s kompleksnimi števili, ki pa ga je mnogo enostavneje rešiti. Pri vzbujanju vezij z izmeničnimi signali spoznamo pomemben koncept impedance kot kompleksne upornosti, ki ima tako realni in imaginarni del oziroma amplitudo in fazo. Nadalje spoznamo, da pri izmeničnih signalih ločimo delovno, jalovo in navidezno moč, ugotavljamo načine za kompenzacijo jalove moči in podobno. Če imamo v vezju vsaj dva aktivna elementa (kondenzator + tuljava) pride pri določeni frekvenci vzbujalnega signala v vezju do izrazitega povečanja toka ali napetosti - govorimo o resonančnem pojavu. Bolj podrobno si bomo pogledali le zaporedni in vzporedni resonančni tokokrog.

Nadalje bomo ugotovili, da so metode za analizo vezij z izmeničnimi signali enake, kot pri enosmernih vezjih, le s kompleksnim zapisom jih je potrebno upoštevati. Tudi stavki – teoremi so isti, kot pri enosmernih vezjih, le da so pri tem uporabljeni kompleksorji toka in napetosti.

Posebno zanimivo vezje je vezje dveh tuljav na (običajno) skupnem feromagnetnem jedru. Govorimo o transformatorju, ki z velikim izkoristkom izkorišča princip indukcije za transformacijo napetosti/toka iz nižje na višjo in obratno.

Vrtilno magnetno polje omenimo bolj na kratko, čeprav je to osnovni koncept za vse vrste motorjev in generatorjev, ki izkoriščajo princip superpozicije magnetnega polja tako, da iz dveh ali več izmeničnih magnetnih polj vzpostavijo sumarno vrtilno magnetno polje.

Nazadnje si pogledamo še temelje trifaznih sistemov, ki jih v osnovi analiziramo kot vezje s tremi generatorji, ki imajo fazno zamaknjene napetostne vire. Te lahko vežemo na več načinov, najbolj pogosto sta v uporabi vezava v zvezdo in vezava v trikot. V prvem primeru izkoriščamo fazne napetosti generatorjev, v drugem pa medfazne.

Čeprav predmet obdela mnogo temeljnih področij električnih pojavov, prav vse teorije potrebno za razumevanje vseh področij elektrotehnike ne more pokriti. Je pa kljub temu naravnan tako, da služi kot dobra osnova za nadaljnje raziskovanje električnih pojavov in njihovo izkoriščanje. Ko boste poskusili uporabiti to znanje v praksi boste ugotovili dvoje: da so v praksi pojavi pogosto še bolj zapleteni in prepleteni in zahtevajo še bolj poglobljeno znanje in drugič: da vam to osnovno znanje, ki ste si ga pridobili pri študiju predmetov OE1 in OE2 pride še kako prav.

Upam, da vam bo skripta v pomoč in motivacijo in vam bo pomagala pri boljšem razumevanju in raziskovanju električnih pojavov. Pogumno na pot.

Dejan Križaj, 2018

KAZALO

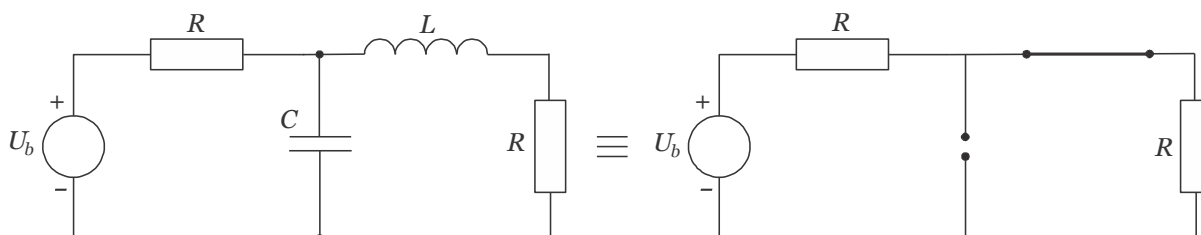
1. PREHODNI POJAVI	8
ZVEZE MED TOKOM IN NAPETOSTJO NA ELEMENTIH VEZJA	9
ZAČETNI POGOJI	10
POLNENJE KONDENZATORJA	10
PRAZNIENJE KONDENZATORJA	14
VKLOP TULJAVE (»POLNENJE« TULJAVE)	15
IZKLOP TULJAVE (»PRAZNIENJE« TULJAVE)	16
DOLOČANJE PREHODNEGA POJAVA Z NASTAVKOM IN IZRAČUNOM ČASOVNE KONSTANTE IZ THEVENINOVE NADOMESTNE UPORNOSTI	17
* ANALIZA PREHODNIH POJAVOV S PROGRAMI ZA SIMULACIJO VEZIJ - SPICE	20
2. OSNOVNI 2626 PRI OBRAVNAVI PERIODIČNIH SIGNALOV	26
EFEKTIVNA VREDNOST SIGNALA	28
USMERJENA VREDNOST	29
FAKTOR OBLIKE	29
* MERJENJE EFEKTIVNE VREDNOSTI SIGNALA V PRAKSI	31
3. UPOR, TULJAVA IN KONDENZATOR PRI IZMENIČNIH SIGNALIH	32
UPOR	32
TULJAVA	34
KONDENZATOR	37
4. IZMENIČNI SIGNALI – MOČ	40
DELOVNA MOČ	40
NAVIDEZNA MOČ	41
JALOVA MOČ	41
5. OBRAVNAVA IZMENIČNIH SIGNALOV S KOMPLEKSNIM RAČUNOM	46
OSNOVE KOMPLEKSNEGA RAČUNA	48
TVORJENJE KOMPLEKSORJEV IZ ČASOVNIH (HARMONIČNIH) SIGNALOV	49
DOLOČITEV ČASOVNEGA SIGNALA IZ KOMPLEKSORJA	50
KOMPLEKSORJI TOKA IN NAPETOSTI NA ELEMENTIH VEZJA	52
KIRCHOFFOVA ZAKONA S KOMPLEKSNIM ZAPISOM	53
IMPEDANCA IN ADMITANCA	55
ZAPOREDNA IN VZPOREDNA VEZAVA IMPEDANC IN ADMITANC	57
MERILNIKI IMPEDANCE – LCR METRI	61
6. MOČ S KOMPLEKSNIM RAČUNOM	63
BILANCA MOČI	65
KOMPENZACIJA JALOVE MOČI	66
PRILAGODITEV BREMENA – MAKSIMALNA DELOVNA MOČ	68
7. RESONANČNI POJAV	70
ZAPOREDNI NIHAJNI KROG – TOKOVNA REZONANCA	70
VZPOREDNI NIHAJNI KROG – NAPETOSTNA REZONANCA	76
* NIZKOPREPUSNI R-C FILTER	78
8. METODE REŠEVANJA VEZIJ	83
METODA KIRCHOFFOVIH ZAKONOV	84
METODA ZANČNIH TOKOV	87

METODA SPOJIŠČNIH POTENCIALOV	87
STAVKI	88
STAVEK SUPERPOZICIJE.....	88
THEVENINOV IN NORTONOV NADOMESTNO VEZJE	88
TELLEGENOV STAVEK	90
MAKSIMALNA MOČ	91
9. TRANSFORMATOR	92
NAPETOSTNA PRESTAVA IN MAKSIMALNI FLUKS V JEDRU	94
MAGNETILNI TOK.....	94
OBREMENJEN TRANSFORMATOR	95
PONAZORITEV TOKOV IN NAPETOSTI NA NEOBREMENJENEM IN OBREMENJENEM TRANSFORMATORJU S KAZALCI (KOMPLEKSORJI)	96
REDUCIRANE VREDNOSTI NAPETOSTI IN TOKOV	96
MOČ	97
VHODNA IMPEDANCA TRANSFORMATORJA.....	97
REALNI TRANSFORMATOR Z ŽELEZNIJEM JEDROM	98
* OSNOVE DIMENZIONIRANJA TRANSFORMATORJEV V PRAKSI	98
10. VRTILNO MAGNETNO POLJE	100
UPORABA VRTILNEGA MAGNETNEGA POLJA	100
11. TRIFAZNI SISTEMI	102
SISTEM TRIFAZNIH NAPETOSTI.....	102
EFEKTIVNE VREDNOSTI IN PRIKAZ S KAZALCI (KOMPLEKSORJI)	103
MEDFAZNE NAPETOSTI.....	104
VEZAVA BREMEN	105
VEZAVA BREMENA V ZVEZDO Z NIČELNIM VODNIKOM	105
VEZAVA BREMENA V ZVEZDO BREZ NIČELNEGA VODNIKA	107
POTENCIAL ZVEZDIŠČA	107
VEZAVA BREMENA V TRIKOT	109
SIMETRIČNO BREME	110
PRIMERI ČASOVNIH POTEKOV MOČI NA RAZLIČNIH TIPIH BREMEN.....	111

1. PREHODNI POJAVI

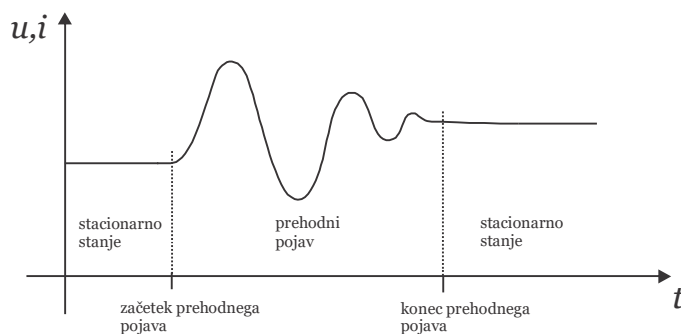
Vsebina poglavja: Stacionarno stanje – prehodni pojav, zveze med tokom in napetostjo na uporu, tuljavi in kondenzatorju, začetni pogoji, zapis in oblika rešitve diferencialne enačbe, polnenje in praznjenje kondenzatorja in tuljave, časovna konstanta, »obrnitiška metoda«, uporaba programov za analizo vezij.

Z analizo vezij, priključenih na enosmerne vire, smo se že spoznali. Pri tem smo obravnavali le vezja, sestavljena izključno iz uporov. Če bi poleg uporov vsebovala še tuljave in kondenzatorje, bi morali ugotoviti, da v enosmernih razmerah kondenzatorji predstavljajo odprte sponke (upornost izolatorja/dielektrika je izredno velika), tuljave pa kratek stik (če zanemarimo Ohmsko upornost navitja). Take razmere nastopijo v vezju tudi po preteku prehodnega pojava.



Slika 1.1: Vezje z upori, idealnimi kondenzatorji in idealnimi tuljavami priključenimi na enosmerni vir v stacionarnih razmerah.

Popolnoma drugačne razmere pa imamo tedaj, ko vire šele priklopimo ali odklopimo z vezja. V prvem trenutku po priklopu vira se na elementih vezja še ne bodo vzpostavile razmere, kot so v enosmernih razmerah. Ugotovili bomo, da tok skozi tuljavo ne more sunkovito narasti, saj mu to preprečuje inducirano polje, ki je večje ob večji spremembi toka. Prav tako ne more hipoma narasti napetost na kondenzatorju, saj je le ta odvisna od naboja med elektrodama, ta pa mora priteči s tokom. V tem primeru pride do t.i. **prehodnega pojava**.

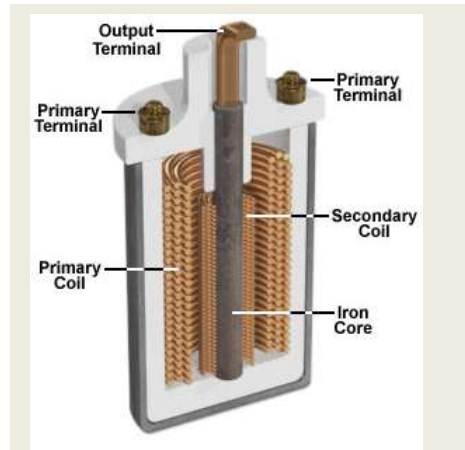


Slika 1.2: Prehod med dvema stacionarnima stanjema imenujemo prehodni pojav.

Prehodne pojave srečujemo na vsakem koraku. Dobesedno. Z drsenjem čevljev ob tla se le ti naelektrijo, ob vsakem stiku s tlemi pa razelektrijo. Če ostanemo naelektrjeni in se približamo določenemu prevodnemu objektu (recimo kljuki), pride do razelektritve¹. Podoben pojav je razelektritev med oblakom in zemljo, kar vidimo kot udar strele².

¹Ta razelektritev nastopi pri napetostih 5 do 15 kV z maksimalnim tokom do 1 A. To je precejšen tok, ki pa traja izredno malo časa (reda μs), poleg tega je koncentriran le pri mestu nastopa razelektritve, potem pa se razširi na večje območje¹. To neprijetnost lahko zmanjšamo z zmanjšanjem upornosti med telesom in zemljo. Ta upornost naj ne bi bila večja od 100 M Ω , kjer pa je verjetnost razelektritve posebno velika, pa naj ne bo manjša od 50 k Ω . V posebnih primerih (nevarnost eksplozij) je potrebno uporabiti oblačila, katerih upornost ne sme preseči veliksoti G Ω . V primeru naravnih materialov to običajno ni

Tako kot se prehodni pojavi dogajajo v naravi, jih najdemo tudi pri čisto »elektrotehniških« problemih. Ti nas navsezadnje še najbolj zanimajo. Vzemimo vžigalni sistem v avtomobilu s tuljavo z zelo velikim številom ovojjev. Če skozi tuljavo teče enosmeren tok, je padec napetosti na tuljavi odvisen le od upornosti ovojjev tuljave. Če pa ta tok v hipu prekinemo, pride do inducirane napetosti na tuljavi, ki je lahko ob hipni spremembi toka zelo velika, saj velja $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$. Ta učinek lahko še zvečamo tako, da uporabimo dve navitji (glej sliko). S prehodnim pojavom imamo opravka pri vsakem električnem vezju, ki ga občasno priključimo na napajanje ali pa izklopimo. Elemente vezja je torej potrebno dimenzionirati tudi za delovanje pri teh razmerah in ne le v stacionarnem stanju.



Vžigna tuljava z dvema navitjema. Zaradi transformatorskega principa (prva z manjšim in drugo z zelo velikim številom ovojjev) je ob tokovnem pulzu izhodna napetost dovolj velika (več 10 kV), da sproži iskro. Iskra pa povzroči malo eksplozijo stisnjene bencina, ta premik bata - in že se premikamo.

http://www.2carpros.com/how_does_it_work/ignition.htm

ZVEZE MED TOKOM IN NAPETOSTJO NA ELEMENTIH VEZJA

Za analizo prehodnega pojava se moramo vrniti k osnovnim zvezam med napetostjo in tokom na elementih vezja, ki so strnjene v spodnji razpredelnici:

UPOR	$u(t) = R \cdot i(t) \Leftrightarrow i(t) = G \cdot u(t)$	(1.1)
KONDENZATOR	$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_{C0} \Leftrightarrow i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	(1.2)
	velja tudi $Q(t) = Cu(t)$	(1.3)
TULJAVA	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i_{L0}$	(1.4)

Poleg teh osnovnih zvez moramo upoštevati še oba Kirchoffova zakona ter začetne pogoje, ki določajo kontinuiteto toka ali napetosti ob prehodnem pojavu.

problem, je pa potrebno to upoštevati pri umetnih materialih. Znan nam je tudi pojav razelektritve ob stiku s karoserijo avta, ki nas neprijetno strese.

²Zamislimo si razelektritev kondenzatorja, ki se naelektri na napetost med 10 MV in 100 MV. Take napetosti so med zemljo in ionosfero, občasno pa tudi med zemljo in naelektrnim oblakom. Takrat lahko pride do hipne razelektritve, kar se odraža v obliki strele. Tokovi razelektritve so velikosti nekaj deset do 150 kA, dogodek pa lahko traja nekaj sto mikrosekund.

ZAČETNI POGOJI

Napetost na kondenzatorju je integral toka skozi kondenzator. Tudi če se tok skozi kondenzator hipoma spremeni (hipna sprememba pritekanja ali odtekanja naboja), se lahko napetost oz naboj ($Q = Cu$) spremeni le postopoma, zvezno. To pa tudi pomeni, da bo morala biti **napetost na kondenzatorju tik pred spremembo enaka napetosti tik po spremembi**, kar lahko zapišemo kot

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) . \quad (1.5)$$

Enake trditve ne moremo postaviti tudi za tok skozi kondenzator. Le ta se lahko spremeni tudi hipoma preprosto tako, da se spremeni smer premikanja nabojev.

Začetni pogoj za tok ali napetost na tuljavi ugotovimo s podobnim razmislekom, le da se **pri tuljavi ne more hipoma spremeniti tok skozi tuljavo** (lahko pa se napetost). Zato velja

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) \quad (1.6)$$

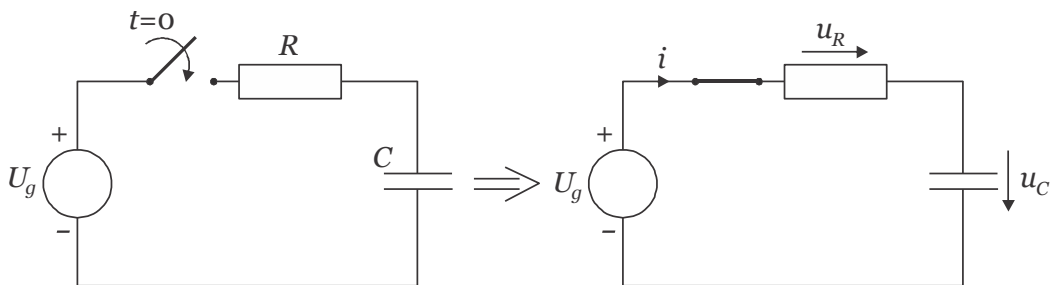
Ta dva pogoja nam zadostujeta, da z razmislekom ugotovimo vrednost napetosti ali toka na poljubnih elementih v vezju ob prekopu.

ANALIZA VEZIJ PRI PREHODNEM POJAVU

Prehodni pojav analiziramo tako, da zapišemo enačbe vezja po preklopu z uporabo Kirchoffovih zakonov. Tako tvorimo sistem (ene ali več) diferencialnih enačb, ki jih je potrebno rešiti. V ta namen potrebujemo še začetne pogoje, to je stanje na elementih vezja tik po preklopu (ob začetku prehodnega pojava).

POLNJENJE KONDENZATORJA

Ob času $t = 0$ s priklopimo kondenzator in zaporedno vezan upor na enosmerni vir napetosti U_g .



Slika 1.3: Shema vezja pred (levo) in po (desno) preklopu.

Uporabimo 2 Kirchoffov zakon $U_g = u_R(t) + u_C(t)$ in zvezi med tokom in napetostjo na upor in kondenzatorju $U_g = iR + \frac{1}{C} \int i dt$. Z odvajanjem celotne enačbe dobimo diferencialno enačbo za tok skozi kondenzator³ $0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$. Dobimo diferencialno enačbo prvega reda s konstantnima

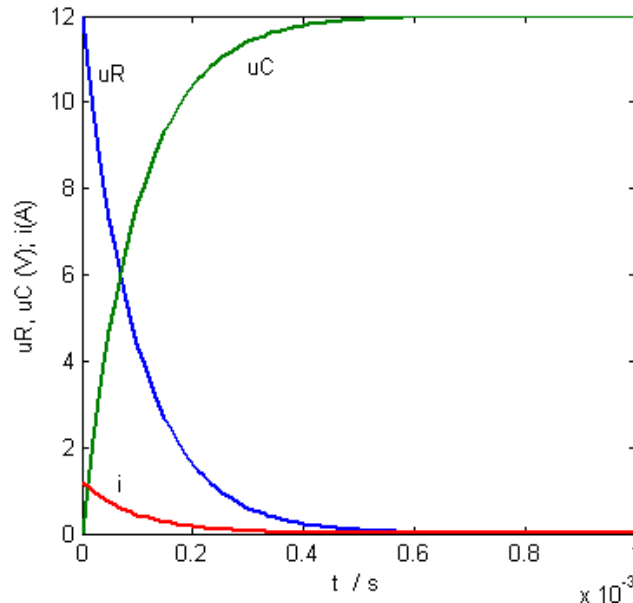
³Ta tok običajno imenujemo kar polnilni tok, saj pri tem prehodnem pojavu elektrimo kondenzator z nabojem. Naboj je sorazmeren napetosti na kondenzatorju, saj velja $Q(t) = C \cdot u(t)$.

koeficientoma, pa še homogeno povrhu (levi del je enak nič). Načinov reševanja takih enačb je več. Pri enostavnih sistemih diferencialnih enačb poznamo t.i. nastavek za rešitev. V konkretnem primeru diferencialne enačbe je rešitev v obliki eksponentne funkcije

$$i = Ae^{\lambda t}. \quad (1.7)$$

Ta nastavek uvrstimo v diferencialno enačbo in dobimo $\left(\lambda + \frac{1}{RC}\right)Ae^{\lambda t} = 0$.

Očitno bo enačbi zadoščeno, če bo $\lambda = -\frac{1}{RC}$. S tem bo rešitev oblike $i(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, kjer je $\tau = RC$. Tau ima enoto časa, zato mu tudi pravimo **časovna konstanta**.



Slika 1.4: Prikaz napetosti na uporu in kondenzatorju (u_R) in (u_C) ter toku pri prehodnem pojavu polnenja kondenzatorja preko upora.

Določiti moramo še konstanto A . V ta namen moramo upoštevati začetni pogoj **Error! Reference source not found.**: napetost na kondenzatorju tik po preklopu mora biti enaka kot tik pred preklopom: $u_C(0^+) = u_C(0^-)$. Zato je $u_C(0^+) = 0\text{ V}$. V trenutku $t = 0^+$ bo torej vsa napetost

na uporu $u_R(0^+) = U_g$, tok pa bo enak $i(0^+) = \frac{u_R}{R} = \frac{U_g}{R}$. To je začetni pogoj, ki ga potrebujemo za končno rešitev. Upoštevamo ga v nastavku (en. **Error! Reference source not found.**) in dobimo

$$i(0^+) = \frac{U_g}{R} = A$$

Rešitev bo torej eksponentno zmanjševanje toka $i(t) = \frac{U_g}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$. Napetost na uporu je sorazmerna temu toku, napetost na kondenzatorju pa lahko dobimo z integracijo toka v skladu z enačbo ali pa kar kot razliko priključene napetosti in napetosti na uporu. Dobimo $u_C(t) = U_g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Prikazuje poteke napetosti in toka pri preklopu.

Primer: Določimo potek toka in napetosti ob preklopu enosmernega napetostnega vira $U_g = 12\text{ V}$ na zaporedno vezavo upora in kondenzatorja. $R = 10\ \Omega$, $C = 100\ \mu\text{F}$.

Izračun: Uporabimo že določene zveze in pišemo $i(0^+) = \frac{U_g}{R} = A = 1,2\text{ A}$, $\tau = RC = 1\text{ ms}$,

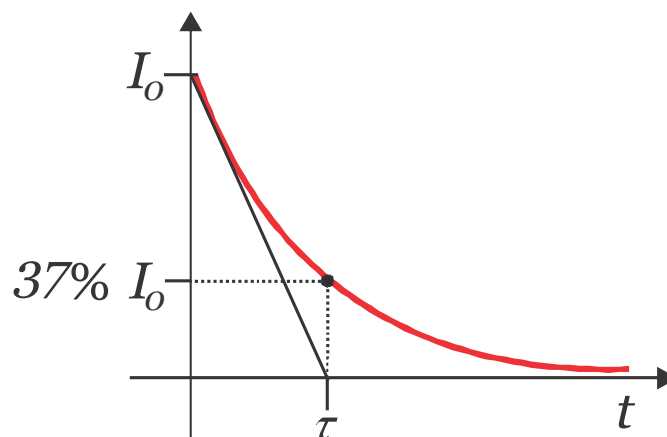
$$i(t) = 1,2e^{-\frac{t}{1\text{ ms}}}\text{ A in } u_C(t) = 12\left(1 - e^{-\frac{t}{1\text{ ms}}}\right)\text{ V}$$

ČASOVNA KONSTANTA

Časovna konstanta predstavlja merilo hitrosti spremembe (toka ali napetosti) pri prehodnem pojavu.

Iz izraza $i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ ugotovimo, da se bo tok v času τ zmanjšal od I_0 na $I_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}} = I_0 e^{-1} \approx 0,37I_0$ oziroma na 37% začetne vrednosti.

Analogno temu lahko rečemo tudi, da se bo zmanjšal v času τ za cca 63%. V času 2τ pade na 13,5% in v času 5τ že pod 1% začetne vrednosti. Časovno konstantno dobimo lahko tudi iz naklona signala v času $t = 0$ (ob preklopu)⁴.

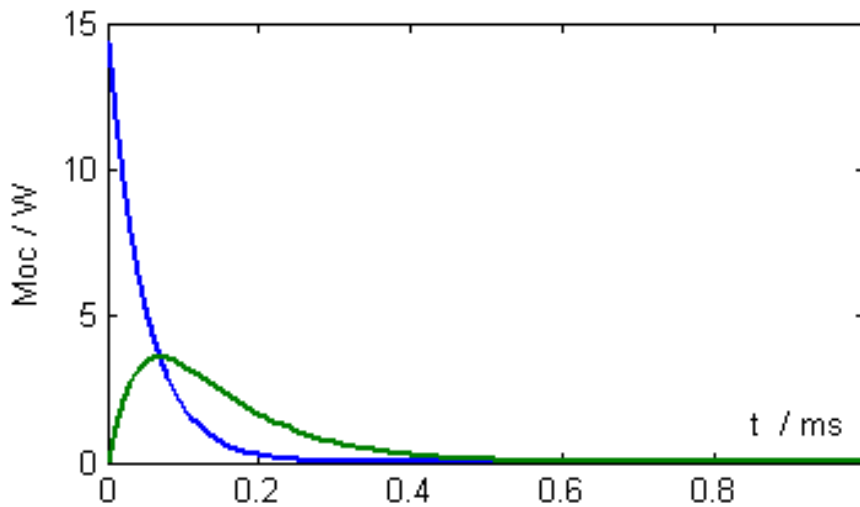


Slika 1.5: Časovna konstanta je čas, ko se zmanjša ali poveča vrednost opazovane veličine za približno 63%.

⁴ $\frac{di}{dt}(t=0) = I_0 e^{-0/\tau} \left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{I_0}{\tau}$ ali tudi $\frac{\Delta i}{\Delta t}(t=0) = \frac{I_0 - 0}{0 - \tau} = -\frac{I_0}{\tau}$

MOČNOSTNE RAZMERE OB VKLOPU RC VEZJA

Moč na uporu je $p_R(t) = i^2 R$, na kondenzatorju pa $p_C(t) = i_C \cdot u_C = C u \frac{du}{dt} = u_C(t) = \frac{U_g^2}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.



Slika 1.6: Moč na uporu (modra) upada s kvadratom toka, na kondenzatorju (zelena) pa narašča, doseže maksimum in upada proti nič.

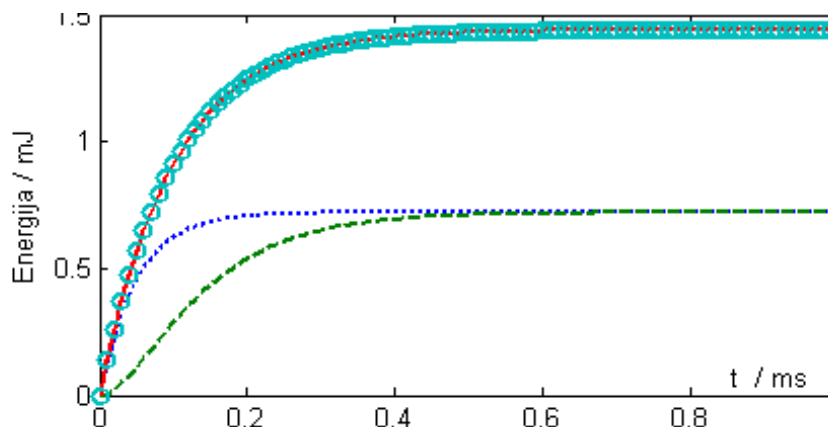
ENERGIJSKE RAZMERE OB VKLOPU RC VEZJA

Energijo dobimo z integracijo moči po času: $W(t) = \int_0^t p(t) dt$.

Energija na uporu je $W_R(t) = \int_0^t R i^2 dt = \frac{U_g^2 C}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$, na kondenzatorju pa

$W_C(t) = C \frac{u_C^2}{2} = \frac{C U_g^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$. Energija na uporu se je med prehodnim pojavom »potrošila« oz.

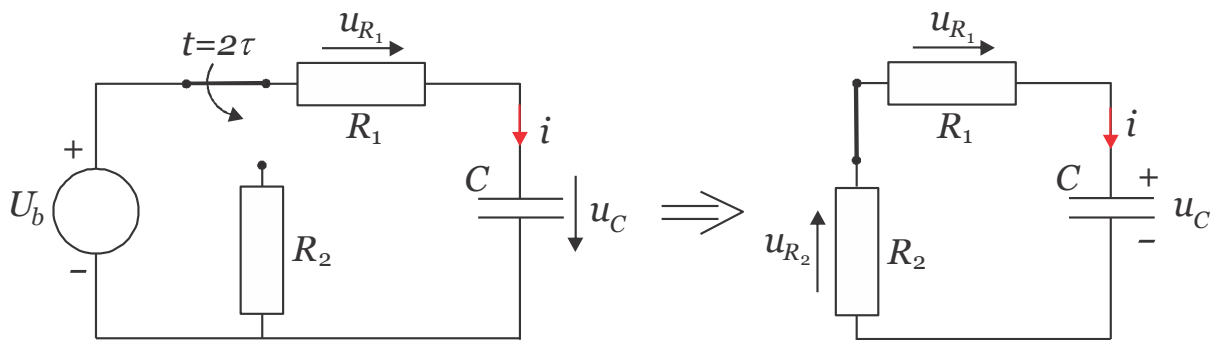
pretvorila v toploto (Joulske izgube), energija na kondenzatorju pa se je shranila v obliki zgrajenega električnega polja oz. v obliki naelektrenosti.



Slika 1.7: Energijske razmere pri polnjenju kondenzatorja: Energija kondenzatorja (črtkana zelena črta) narašča, naraščajo pa tudi joulske izgube (pikčasta modra črta) na uporu. Vsota (polna rdeča črta) je energija, ki je enaka energiji, ki jo elementom zagotavlja vir (krogci).

PRAZNIENJE KONDENZATORJA

Vzemimo, da se je kondenzator polnil do časa $t = 2\tau$, nato pa vir odklopimo in ga hkrati preklopimo na upor $R_2 = 100 \Omega$. Določimo tok praznenja in napetost na kondenzatorju.



Slika 1.8: Shema vezja pred preklopom (levo) in po preklopu (desno).

Izračun: Rešujemo enačbo $0 = (R_1 + R_2) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$. Rešitev bo podobna kot v prejšnjem primeru, torej

$i(t) = Ae^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, kjer pa bo sedaj časovna konstanta daljša, enaka 1,1 ms (prej 1 ms). Ob preklopu bo na kondenzatorju ostala napetost nespremenjena in torej enaka $u_C(t = 2\tau) = U_g (1 - e^{-2}) \approx 0,86U_g$. Ta napetost bo v trenutku preklopa tudi enaka negativni napetosti na obeh uporih saj velja $u_C + u_{R_1} + u_{R_2} = 0$. Tok v času $t = 2\tau$ bo torej

$$i(2\tau^+) = \frac{u_{R_1} + u_{R_2}}{R_1 + R_1} = \frac{-u_C}{R_1 + R_1} = \frac{-0,86 \cdot U_g}{R_1 + R_2} = \frac{-0,86 \cdot 12V}{110\Omega} \approx -0,094 A.$$

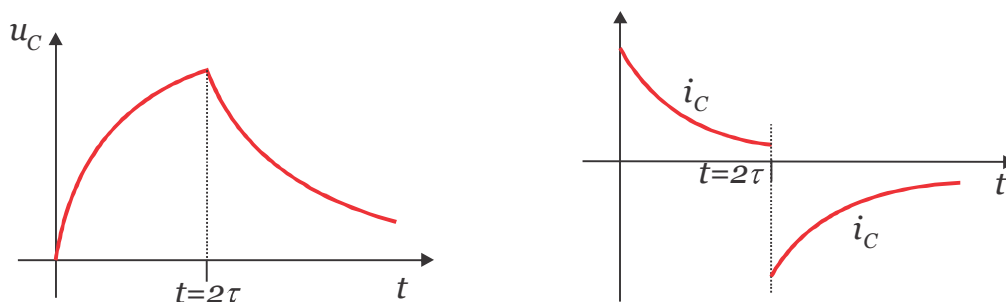
Konstanta A bo torej

$$i(2\tau) = Ae^{-\frac{2\tau}{(R_1+R_2)C}} = Ae^{-2} = -0,094 A \Rightarrow A = -0,697 A.$$

Tok praznjenja je torej

$$i(t) = -0,697 e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} A.$$

Slika 1.9 prikazuje potek napetosti in toka ob prehodnem pojavu.

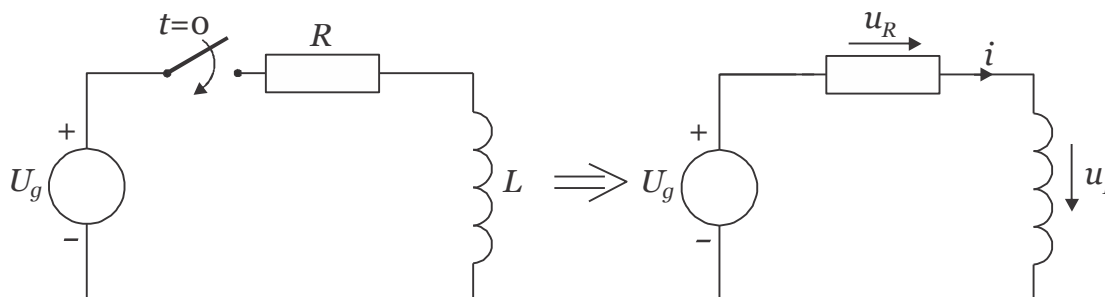


Slika 1.9: Napetost (levo) in tok (desno) pri polnjenju in praznjenju kondenzatorja.

Oglejte si tudi primer simulacije s programom Spice na koncu poglavja. Prvi primer je ravno simulacija polnjenja in praznjenja kondenzatorja, ki je priključen na vir napetosti s periodičnimi pulzi.

VKLOP TULJAVE (»POLNENJE« TULJAVE)

Poglejmo še primer vklopa tuljave in zaporedno vezanega upora na enosmerno napetost U_g ob času $t = 0$ s.



Slika 1.10: Vklp tuljave in upora na napetostni vir.

Ob vklopu bo napetost generatorja enaka vsoti napetosti na uporu in tuljavi:

$U_g = u_R(t) + u_L(t) = iR + L \frac{di}{dt}$. Dobili smo (nehomogeno) diferencialno enačbo prvega reda s konstantnima koeficientoma. Rešitev homogene enačbe zopet iščemo v obliki $i = Ae^{\lambda t}$ in dobimo $\left(\lambda + \frac{R}{L}\right) Ae^{\lambda t} = 0$, od koder je $\lambda = -\frac{R}{L}$ in $i = Ae^{-\frac{t}{L/R}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. τ je **časovna konstanta** in je enaka $\tau = \frac{L}{R}$.

Za rešitev diferencialne enačbe zopet potrebujemo ustrezen začetni pogoj. Ta bo sedaj določen s tokom skozi tuljavo. Ker je bil pred preklopom enak nič, mora biti v skladu z začetnim pogojem $i(0^+) = i(0^-) = 0$ A. Če ta pogoj upoštevamo v enačbi $i = Ae^{\lambda t}$, dobimo $0 = Ae^0$ oziroma $A=0$. Ta rešitev očitno ne bo ustrezna. Pozabili smo namreč na rešitev nehomogenega dela enačbe. En od možnih načinov za določitev prispevka nehomogenega dela enačbe je reševanje z variacijo konstante. Pri takem načinu predstavimo konstanto A kot funkcijo časa $A(t)$. Z odvajanjem enačbe $i = A(t)e^{\lambda t}$ in uvrstitvijo v diferencialno enačbo dobimo

$U_g = R(Ae^{\lambda t}) + L(A'(t)e^{\lambda t} + \lambda Ae^{\lambda t}) = LA'(t)e^{\lambda t}$ oziroma $A' = \frac{U_g}{L} e^{-\lambda t}$. Z integracijo konstante dobimo

$A(t) = \frac{1}{-\lambda} \frac{U_g}{L} e^{-\lambda t} + B = \frac{U_g}{R} e^{-\lambda t} + B$, kjer je B neka nova konstanta. Rešitev torej iščemo v obliki

$i(t) = A(t)e^{\lambda t} = \frac{U_g}{R} + Be^{\lambda t}$. Konstanto B določimo iz začetnega pogoja (tok enak nič) in bo enaka

$B = -\frac{U_g}{R}$. Končni rezultat je torej $i = Ae^{\lambda t} = \frac{U_g}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Napetost na uporu je sorazmerna temu

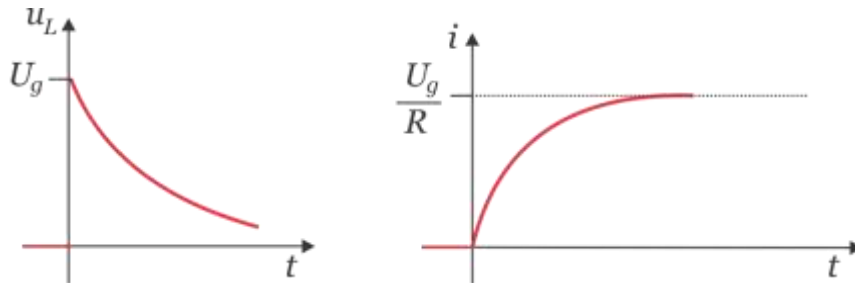
toku $u_R = U_g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, napetost na tuljavi pa odvodu toka: $u_L = L \frac{di}{dt} = U_g e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Drug način reševanja: Diferencialno enačbo zapišemo v obliki $i - \frac{U_g}{R} = -\frac{L}{R} \frac{di}{dt}$, jo delimo z $\left(i - \frac{U_g}{R}\right)$

in množimo z dt : $\frac{di}{i - \frac{U_g}{R}} = -\frac{R}{L} dt$. Sedaj jo integriramo obe strani in dobimo $\int_{i(0^+)}^{i(t)} \frac{di}{i - \frac{U_g}{R}} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$.

Rezultat je $\frac{i(t) - \frac{U_g}{R}}{i(0^+) - \frac{U_g}{R}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$, po preureditvi in upoštevanju začetnega pogoja $i(0^+) = 0\text{A}$ pa dobimo

$i(t) = \frac{U_g}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$. Rezultat je seveda identičen kot v prejšnjem primeru.

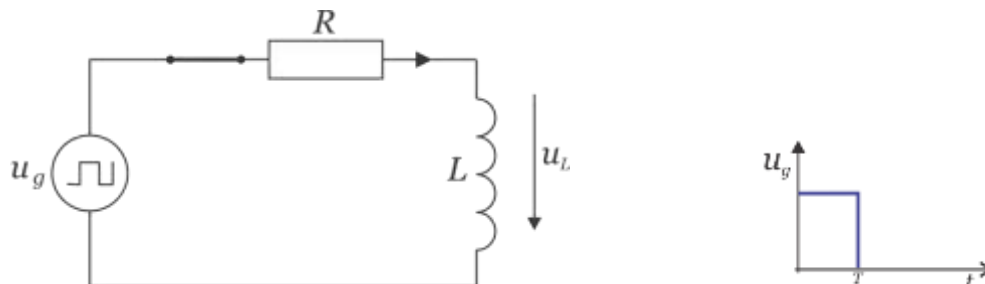


Slika 1.11: Napetost in tok pri vklopu tuljave in upora na napetostni vir.

IZKLOP TULJAVE («PRAZNIENJE» TULJAVE)

Vzemimo primer na sliki, kjer RL vezje priključimo na napetostni vir s pulzno obliko signala pravokotne oblike. Do časa $t = T$ je potek napetosti in toka v vezju enak kot v prejšnjem primeru (vklop tuljave). Ob času $t \geq T$ je napetost vira enaka nič, razmere v vezju opiše enačba

$$0 = u_R(t) + u_L(t) = iR + L \frac{di}{dt}.$$



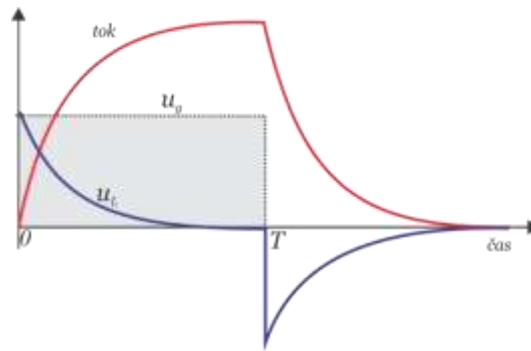
Slika 1.12: Vklop tuljave in upora na pulzni napetostni vir.

Tak tip enačbe smo že reševali. Rešitev iščemo v obliki $i = Ae^{\lambda t}$, od koder sledi $\lambda = -\frac{R}{L}$ in časovna

konstanta $\tau = \frac{L}{R}$. Rešitev je torej oblike $i = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, kjer konstanto A določimo iz »začetnih« pogojev.

Za tuljavo vemo, da se tok hipoma ne more spremeniti, zato je

$$i(t=T^+) = i(t=T^-) = \frac{U_g}{R} \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right) = Ae^{-\frac{T}{\tau}}. \text{ Sledi, da je } A = \frac{U_g}{R} \left(e^{\frac{T}{\tau}} - 1 \right) \text{ in } i(t) = \frac{U_g}{R} \left(e^{\frac{T-t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$



Slika 1.13: Tok in napetost na tuljavi ob vklopu napetostnega pulza pravokotne oblike. Tok narašča do maksimalne vrednosti od izklopa ob času T , ko začne tok upadati, napetost na tuljavi ob izklopu pa skokovito naraste in nato upada.

Primer »praznjenja« tuljave smo na kratko opisali na začetku poglavja: napetostni sunek ob nenadni spremembi toka izkoristimo v vžigalnem sistemu v avtomobilu.

DOLOČANJE PREHODNEGA POJAV Z NASTAVKOM IN IZRAČUNOM ČASOVNE KONSTANTE IZ THEVENINOVE NADOMESTNE UPORNOSTI

Prehodni pojav lahko v primeru uporabe le enega kondenzatorja ali tuljave v vezju vedno zapišemo v obliki diferencialne enačbe prvega reda (s konstantnimi koeficienti), katere **rešitev je vedno oblike**

$$Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B.$$

Določiti moramo le konstanti A , B in časovno konstanto τ .

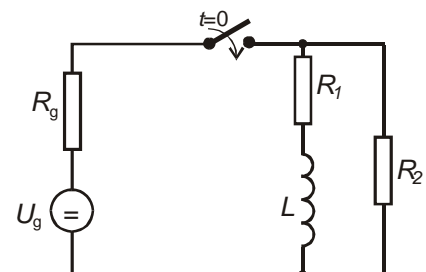
Eno od konstant dobimo iz začetnega pogoja, drugo pa lahko določimo s premislekom o razmerah po prehodnem pojavu – v stacionarnem stanju. Tedaj bodo v primeru vklopa ali izklopa enosmerne napajanja nastopile enosmerne razmere, v katerih ostane le še vpliv ohmskih upornosti. Upornost kondenzatorja je v idealnih enosmernih razmerah neskončna – skozenj ni toka. Upornost tuljave v enosmernih razmerah pa je le v smislu upornosti navitja. To upornost pri idealni tuljavi zanemarimo. Napetost na tuljavi pri enosmernih razmerah je torej enaka nič. Z upoštevanjem teh lastnosti na enostaven način ugotovimo poljubno napetost ali tok ob koncu prehodnega pojava. Ugotoviti moramo le še časovno konstanto τ , ki pa bo vedno oblike RC ali L/R , pri čemer bo R notranja (Theveninova) upornost gledana s sponk kondenzatorja ali tuljave.

Prikažimo uporabo tega načina reševanja na naslednjem primeru.

Primer določitve toka skozi tuljavo z uporabo nastavka:

$$R_g = 10 \Omega, \quad R_1 = 20 \Omega, \quad R_2 = 40 \Omega, \quad L = 20 \text{ mH}, \quad U_g = 10 \text{ V}$$

Začetni pogoj določimo iz toka skozi tuljavo tik po preklopu, ki mora biti enak kot tik pred preklopom, torej 0 A. Ko bo prehodni pojav izzvenel, bodo nastopile enosmerne razmere. Tedaj bo tok skozi upor R_g



$$i_g(t \rightarrow \infty) = \frac{U_g}{R_g + R_1 \parallel R_2} = \frac{10 \text{ V}}{10 \Omega + \frac{20 \cdot 40}{60} \Omega} = 0,4286 \text{ A.} \quad \text{Tok skozi tuljavo pa bo}$$

$$i_L(t \rightarrow \infty) = 0,4286 \text{ A} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 0,29 \text{ A.} \quad \text{Tok skozi tuljavo ob začetku prehodnega pojava bo torej enak}$$

nič, na koncu pa 0,29 A. Ta pogoja vstavimo v splošen nastavek $i = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$ in dobimo

$$i_L(t=0) = 0 \Rightarrow 0 = A + B$$

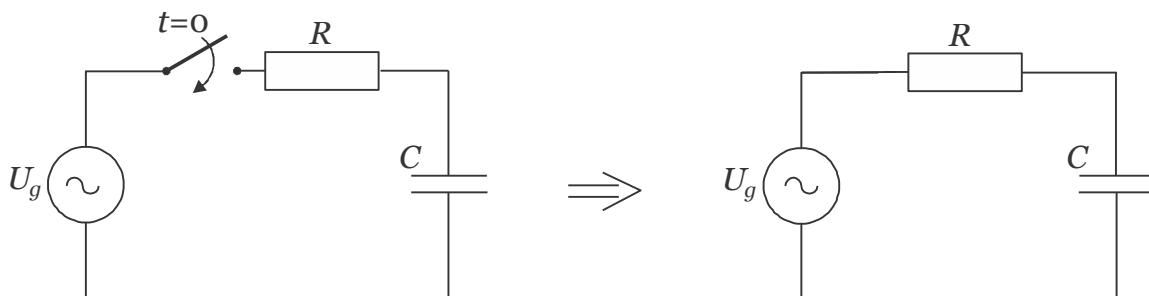
$$i_L(t \rightarrow \infty) = 0,29 \Rightarrow 0,29 = B$$

Tok skozi tuljavo bo torej enak $i_L(t) = \underline{\underline{0,29(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ A}}}$.

Časovno konstanto lahko določimo s pomočjo Theveninove nadomestne upornosti⁵. Ugotovili smo, da je pri vklopu ali izklopu kondenzatorja časovna konstanta vedno oblike $\tau = RC$, pri vklopu ali izklopu tuljave pa bo oblike $\tau = L/R$. Sedaj moramo to ugotovitev le še posplošiti. Če imamo opravka le z enim reaktivnim elementom (C ali L), bo R enak upornosti Thevenina, gledano s sponek reaktivnega elementa (kondenzatorja ali tuljave), torej bo splošna oblika $\tau = R_{Th}C$ ali $\tau = \frac{L}{R_{Th}}$. V

konkretnem primeru je $\tau = \frac{L}{R_{Th}}$, kjer je $R_{Th} = R_g \parallel R_2 + R_1 = \frac{10 \cdot 40}{50} \Omega + 20 \Omega = 28 \Omega$. Časovna konstanta je torej $\tau \approx 0,71 \text{ ms}$.

* VKLOP ZAPOREDNE VEZAVE UPORA IN KONDENZATORJA NA IZMENIČNI VIR NAPETOSTI.



Slika 1.14: Vklop RC člena na izmenični vir napetosti.

Napetostni vir zapišemo v obliki $u_g(t) = U_g \cos(\omega t + \varphi_g)$.

⁵Zakaj je to tako? Lahko si zamislimo primer, ko je v tuljavi ali kondenzatorju pred prehodnim pojavom shranjena energija v obliki magnetnega (tuljava) ali električnega (kondenzator) polja. Ob prehodnem pojavu se ta energija sčasoma pretvori v toplotno s tokom skozi nadomestno vezavo uporov – skozi upore, ki jih »vidi« tuljava ali kondenzator. To pa je ravno nadomestna ali Theveninova upornost, določena s sponki tuljave oz. kondenzatorja.

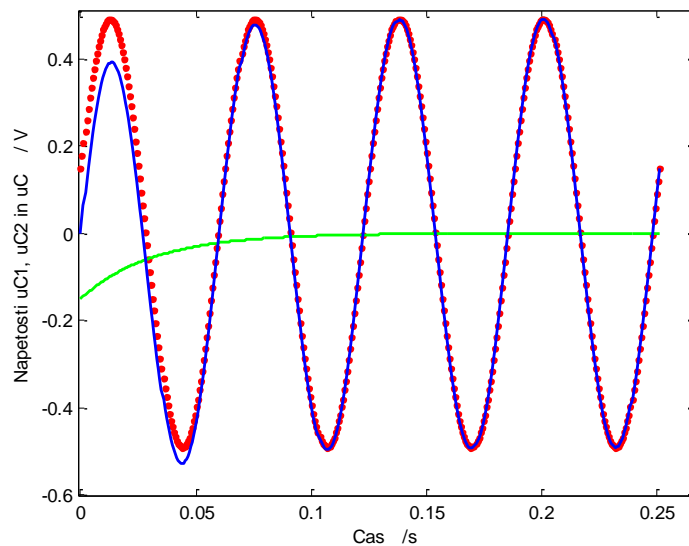
Diferencialna enačba, do katere moramo priti, je praktično identična tisti, ki smo jo že zapisali pri vklopu RC člena na enosmerni vir, saj velja $u_g = iR + \frac{1}{C} \int i dt$. Namesto opazovanja toka lahko zapišemo enačbo za napetost na kondenzatorju. V tem primeru tok izrazimo kot $i = C \frac{du_C}{dt}$ in velja $u_g = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$. Zopet pridemo do nehomogene diferencialne enačbe prvega reda. Rešitev moramo tokrat iskati v obliki funkcije, ki vsebuje tako harmonično nihanje kot tudi eksponentno upadanje:

$$u_C(t) = Ae^{\lambda t} + B \cos(\omega t + \varphi_g - \varphi).$$

Neznane konstante so štiri: A , λ , B in φ . Za določitev teh konstant je potrebno nastavek uvrstiti v diferencialno enačbo ter upoštevati začetni pogoj, ki je določen z $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ V. Časovno konstanto določimo iz homogene enačbe, od koder je $\tau = -\frac{1}{\lambda} = RC$. Določitev ostalih koeficientov je nekoliko bolj »matematična«, zato jo bomo preskočili. Zainteresiran bralec jo najde npr. v A.R. Sinigoj: Osnove elektromagnetike, str. 415. Rešitev je

$$u_C(t) = \frac{U_g}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \left[\cos(\omega t + \varphi_g - \arctg(\omega RC)) - \cos(\varphi_g - \arctg(\omega RC)) e^{-t/\tau} \right]$$

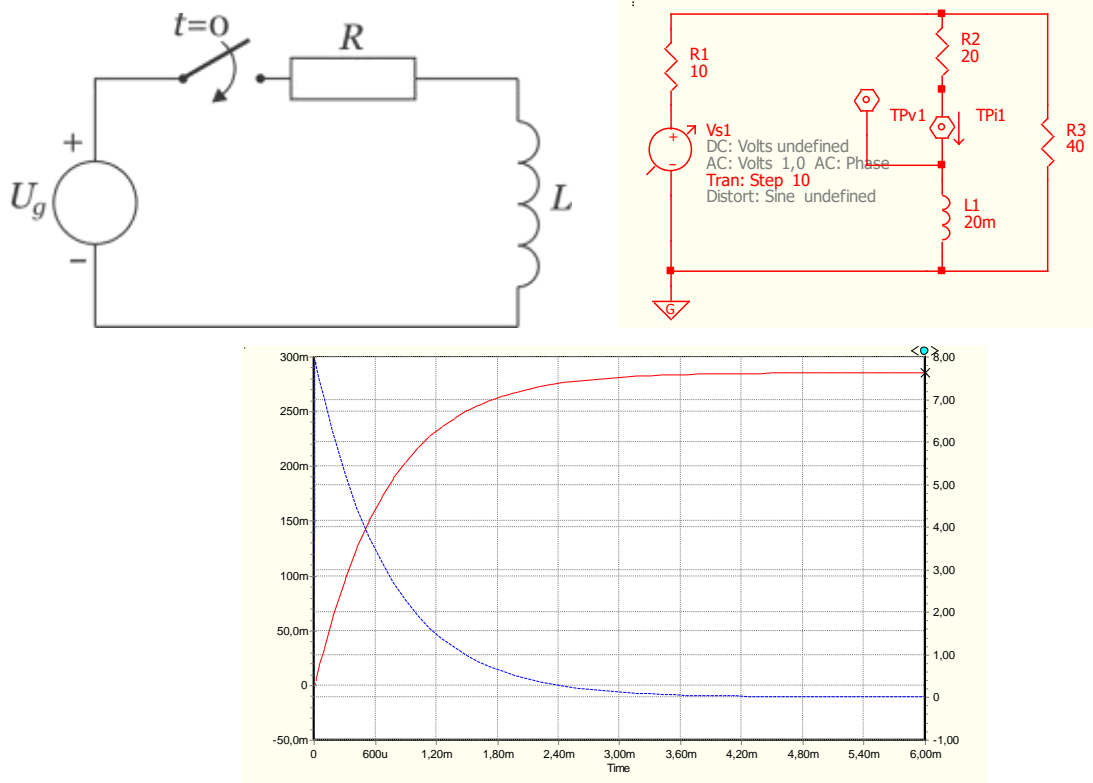
Rezultat je nekoliko daljši pa vendar zanimiv. Ugotovimo lahko, da je sestavljen iz dveh delov: iz harmoničnega nihanja, ki ostane tudi po koncu prehodnega pojava ter drugi člen, ki eksponentno izzveni s časom.



Slika 1.15: Prehodni pojav pri vklopu RC člena na izmenični vir napetosti. Rešitev (modra črta) je sestavljena iz dveh členov: eksponentno upadanje »dušenja« (zeleno črta) in harmonični signal (rdeče pike). Izračun za $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$, $\tau = 0,03 \text{ s}$.

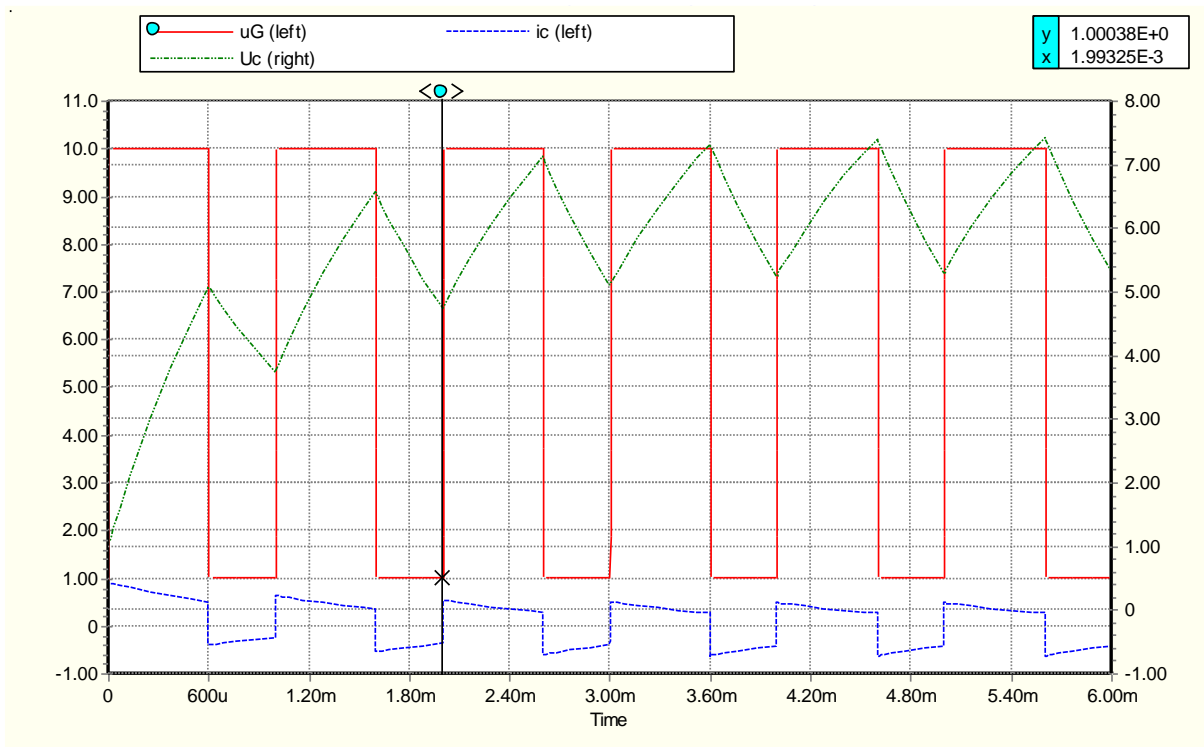
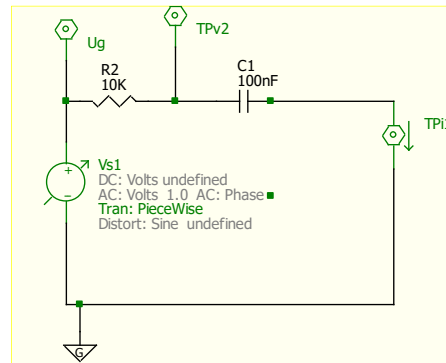
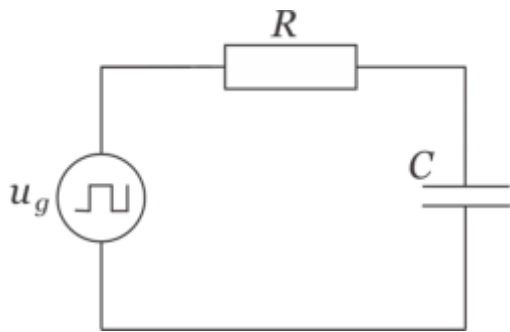
* ANALIZA PREHODNIH POJAVOV S PROGRAMI ZA SIMULACIJO VEZIJ - SPICE

V srednjih šolah je za simulacijo vezij precej popularen program Electronic WorkBench (EWB), bolj izpopolnjena in profesionalna varianta pa je program SPICE. Obstaja mnogo verzij programa, nekatere od njih so brezplačne, druge plačljive. Eno od verzij programa (SPICE OPUS) razvijajo tudi naši fakulteti (fides.fe.uni-lj.si/spice). SPICE omogoča različne načine simulacije, enosmerno, izmenično, tranzientno (prehodni pojavi), pogosto pa omogoča tudi simulacijo šumnih lastnosti, Fourierove analize, analizo občutljivosti itd. Omogoča simulacijo množice različnih elementov, od linearnih do nelinearnih, sklopljenih, pogosto pa omogoča uporabo že prednastavljenih modelov. Nekatere za lažje delo podajo že proizvajalci elementov. Tu predstavljam primer uporabe programa 5Spice, ki je posebno primeren za začetnike, saj omogoča grafično postavitev elementov vezja in je v osnovni verziji brezplačen za uporabo (www.5spice.com).



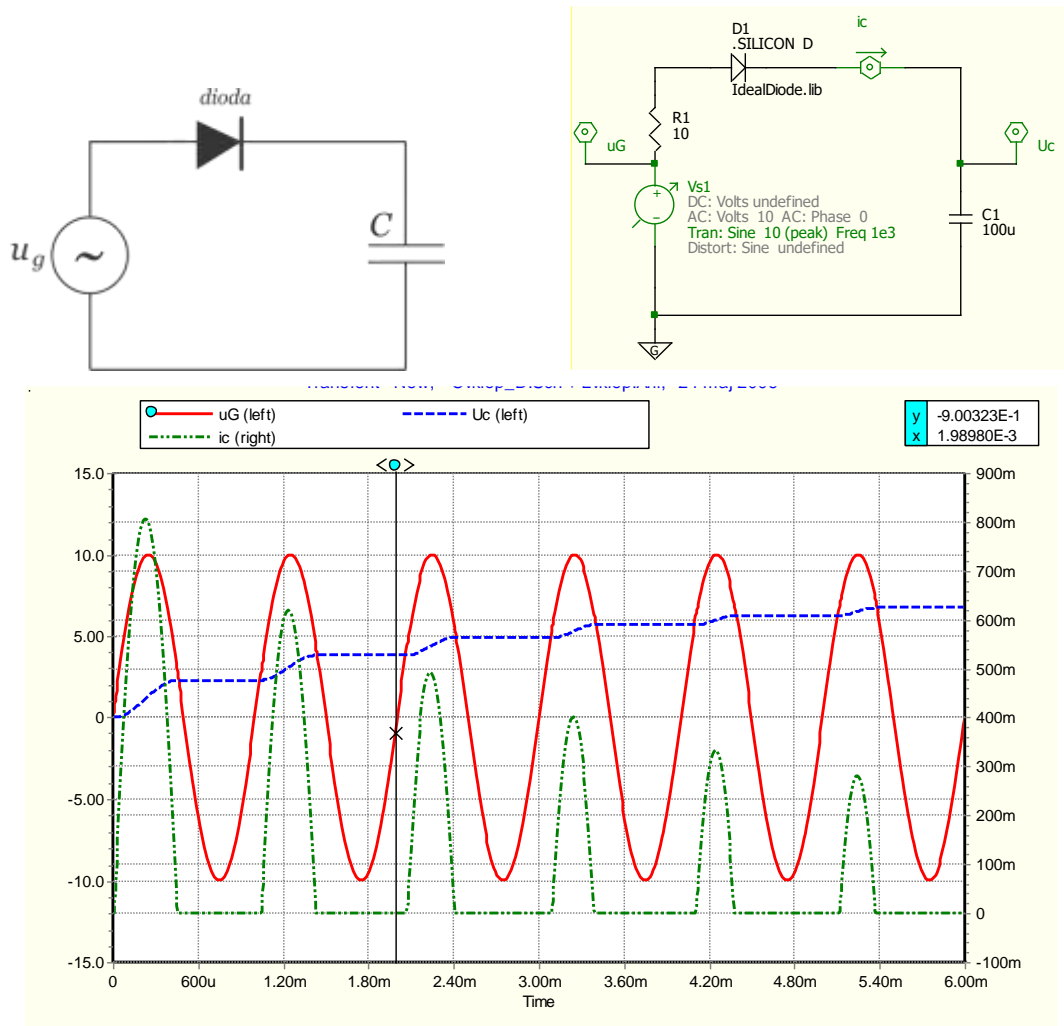
Slika 1.16: Levo zgoraj: Vklon RL vezjana enosmerni vir napetosti. Desno zgoraj: Grafično oblikovanje analiziranega vezja s programom 5Spice. Spodaj tok skozi tuljavo (rdeča polna črta) in napetost na tuljavi (modra črtkana črta).

1.) Priklop zaporedno vezanega kondenzatorja na napetostni generator pravokotnih pulzov amplitude 10 V



Na sliki napetost na generatorju (polna rdeča črta), tok v vezju (modra črtkana) in napetost na kondenzatorju (zelena črtkana). Napetost na kondenzatorju v času trajanja pulza eksponentno narašča v skladu s spoznanimi enačbami, v času izklopa pa upada. V začetku narašča napetost na kondenzatorju hitreje (ker je kondenzator na začetku prazen), v nekaj periodah pa se začne potek ponavljati. V času praznenja kondenzatorja se smer toka obrne. Tok skozi kondenzator se spreminja skokovito, napetost pa zvezno.

2.) Polnjenje kondenzatorja pri zaporedni vezavi kondenzatorja in diode, priključene na izmenični vir napetosti amplitude 10 V



V pozitivni polperiodi dioda prevaja, napetost na kondenzatorju raste (polna modra črta). V negativni polperiodi dioda ne prevaja – tok je enak nič (črtkana zelena črta), ves padec napetosti je na diodi, napetost na diodi ostaja enaka. V realnih razmerah napetost na kondenzatorju v negativni polperiodi nekoliko pada zaradi neidealnega kondenzatorja in zapornega toka diode, ki je majhen, vendar različen od nič.

Pri simulaciji smo uporabili nelinearen element - diodo. Spice programi imajo vgrajene t.i. knjižnice modelov (v bistvu enačbe) najbolj pogostih elementov vezij, med njimi tudi diod. Že preprost model diode lahko vsebuje 10 in več parametrov, ki natančneje opisujejo delovanje diode pri različnih oblikah signalov. Poglej npr. <https://awrcorp.com/download/faq/english/docs/Elements/sdiode.htm>

```

10BQ100
*****
* SPICE Model Diode
*****
.SUBCKT 10BQ100 ANO CAT
D1 ANO 1 CAT
*Define diode model
.model D10BQ100 D(Is=341.4E-06 N=2.664 Rs=3.65E-03 Ikf=37.08E-03 Xti=2 Eg=1.11
+          Cjo=65.57E-12 M=.5751 Vj=4.282 Fc=0.5 Isr=17.26E-27 Nr=5.662
+          Bv=119.9 Ibv=215.5E-06 Tt=43.28E-09)
*****

.ENDS 10BQ100

```

Slika 1.17: Primer SPICE modela Schottky diode 10BQ100 (zaporna napetost 100 V) proizvajalca International Rectifier (<http://www.irf.com/product-info/datasheets/data/10bq100.pdf>). »Preprosto« diodo popišejo z nič manj kot 15 parametri.

ANALIZA VEZIJ Z ZAPOREDNO VEZAVO UPORA, KONDENZATORJA IN TULJAVE

Vsota vseh napetosti je

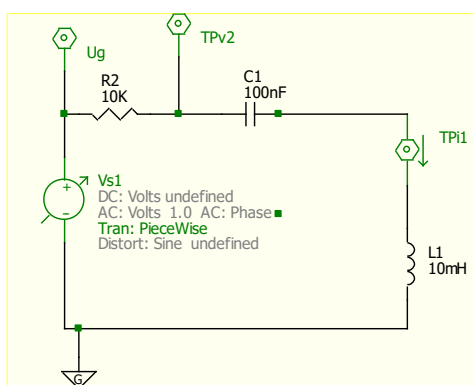
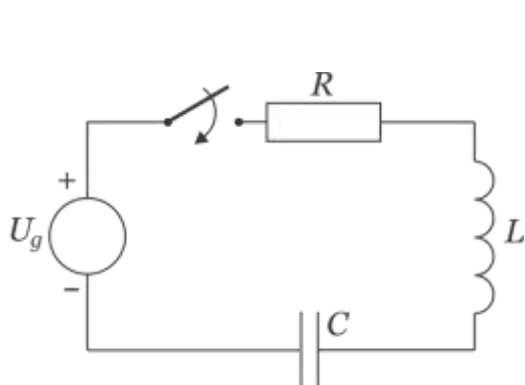
$$u_g = u_R + u_C + u_L, \text{ oziroma}$$

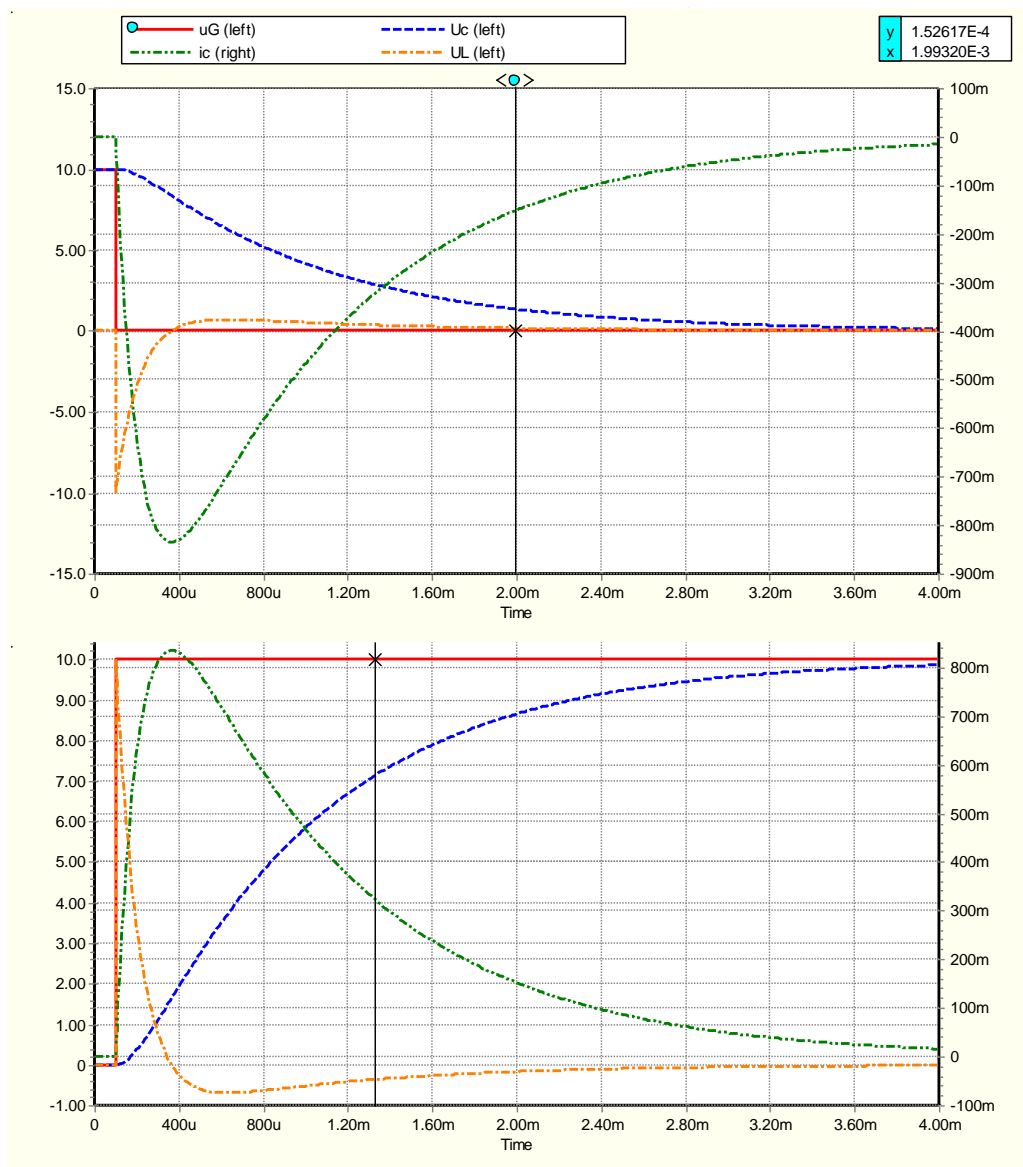
$$u_g = iR + \frac{1}{C} \int idt + L \frac{di}{dt}. \text{ Z odvajanjem dobimo diferencialno enačbo drugega reda}$$

$$0 = \frac{di}{dt} R + \frac{1}{C} i + L \frac{d^2 i}{dt^2}.$$

Rešitve te diferencialne enačbe so lahko zelo razvejane, odvisne so od oblike vzbujanja in vrednosti elementov.

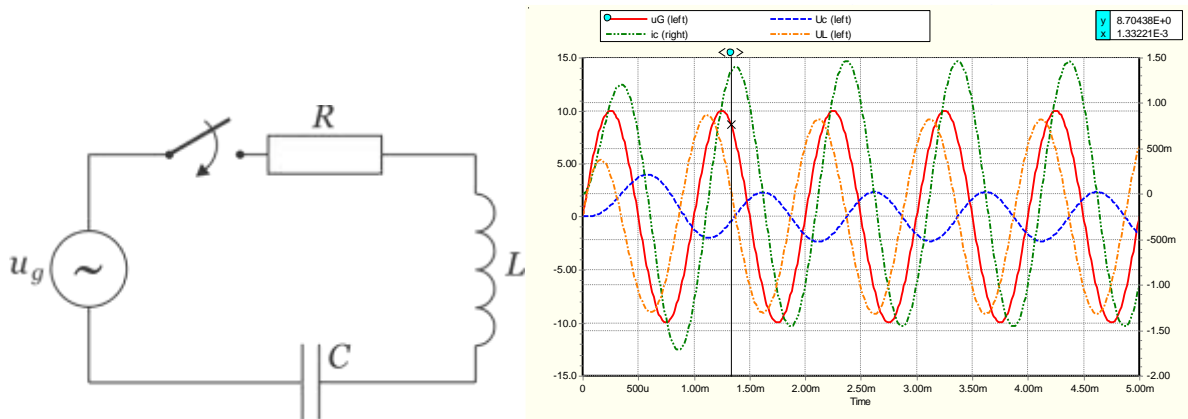
3) Odklop in vklop enosmernega vira od zaporedne vezave upora, kondenzatorja in tuljave





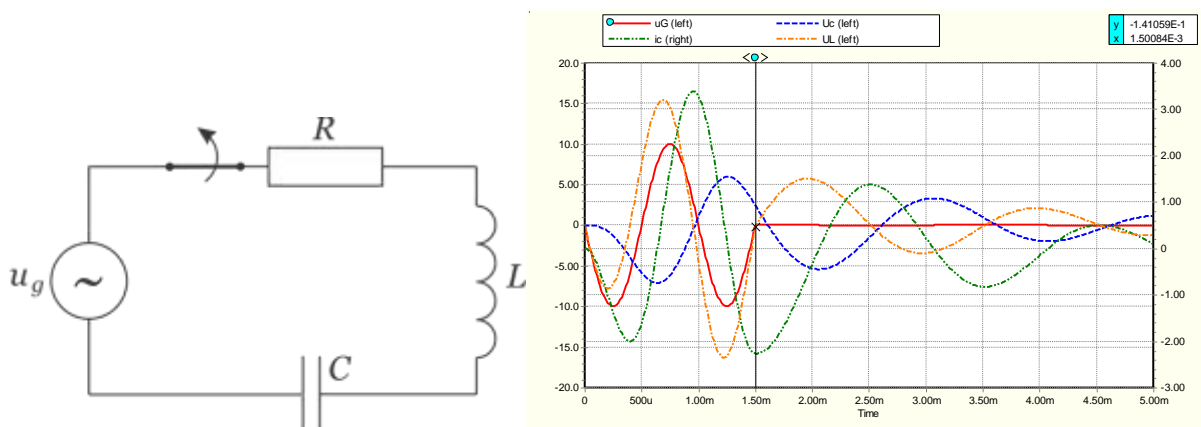
Ob vklopu začne strmo naraščati tok v vezju (zelena črtkana črta), obenem pa močno naraste napetost na tuljavi (oranžna črtkana črta). Tok doseže svoj maksimum in nato pade zlagoma na nič amperov. Napetost na kondenzatorju (polna modra črta) je nič ob vklopu in ob koncu prehodnega pojava doseže napetost vira.

4) Vključitev izmeničnega vira na zaporedno vezavo upora, tuljave in kondenzatorja

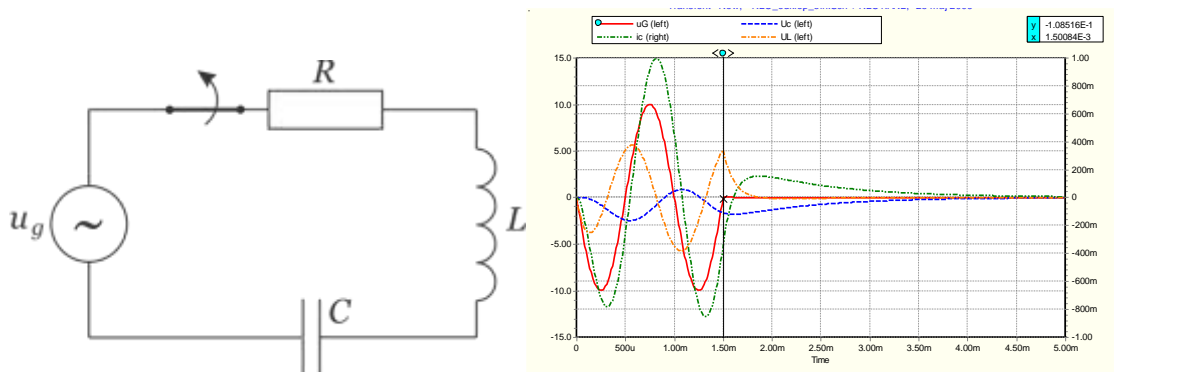


Pri vključitvi izmeničnega vira in po izzvenitvi prehodnega pojava tokovi in napetosti v vezju ohranijo obliko vzbujalnega signala. Napetosti na tuljavi in kondenzatorju sta zamaknjeni za $\frac{1}{4}$ periode glede na tok. Te razmere bomo v nadaljevanju znali določiti z uporabo kompleksnega računa.

5) Izključitev izmeničnega vira na zaporedno vezavo upora, tuljave in Kondenzatorja ($R=1 \Omega$, $L=1 \text{ mH}$, $C = 100 \mu\text{F}$)



6) Izključitev izmeničnega vira na zaporedno vezavo upora, tuljave in kondenzatorja. ($R=10 \Omega$, $L=1 \text{ mH}$, $C = 100 \mu\text{F}$). $10\times$ večja upornost povzroči nadkritično nihanje

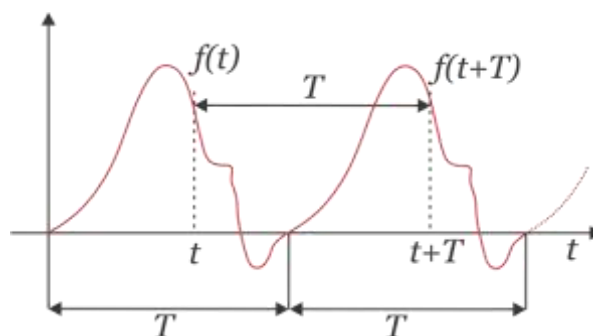


2. OSNOVNI POJMI PRI OBRAVNAVI PERIODIČNIH SIGNALOV

Vsebina poglavja: Opis periodičnih signalov s periodo, frekvenco in krožno frekvenco. Razlaga pojmov amplituda, faza, harmonični signal. Določanje srednje, efektivne in usmerjene vrednosti periodičnih signalov. Pojmi faktor oblike, temenski faktor.

PERIODA SIGNALA

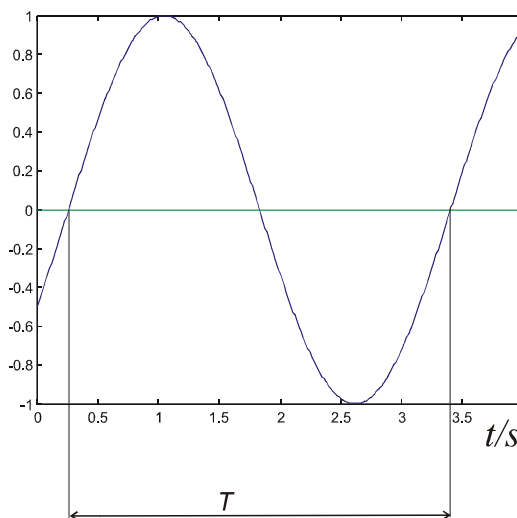
Času, v katerem se začne funkcija ponavljati, pravimo perioda in jo označimo z veliko črko T. Za periodično funkcijo velja $f(t) = f(t+T)$.



FREKVENCA SIGNALA

Frekvenca periodičnega signala je $f = \frac{1}{T}$.

Enota je s^{-1} , pogosteje pa uporabimo ekvivalentno enoto Hz (po Heinrichu Hertzu, ki je s svojimi eksperimenti prvi dokazal pravilnost Maxwellovih enačb). Pogosto uporabimo za opis signala tudi **krožno frekvenco** (kotna frekvenca, v primeru vrtenja zanke kotna hitrost) ω , ki je enaka $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.



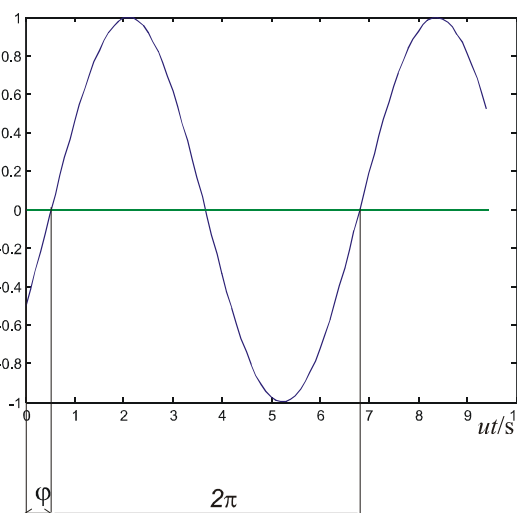
KROŽNA FREKVENCA

Harmonični signal lahko zapišemo v obliki $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, kjer je I_m amplituda, ω PA krožna frekvenca in φ fazni kot.

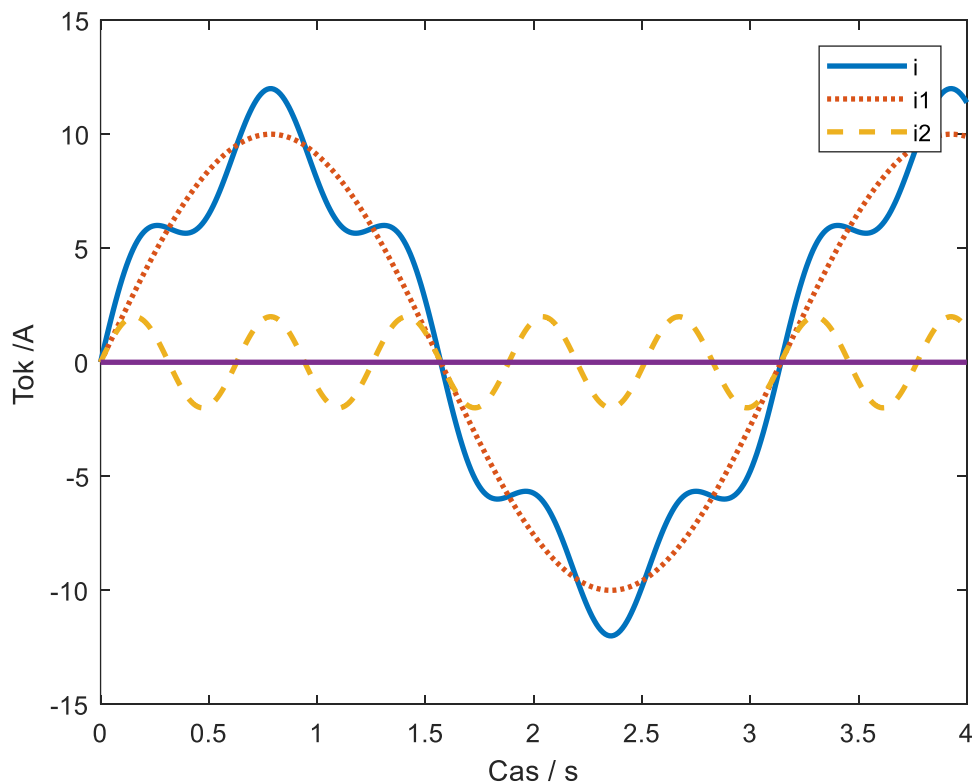
Prikažimo na grafu signal $i(t) / A = 1 \cdot \sin(2s^{-1}t - \pi/6)$.

Perioda signala je $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \text{ s} \cong 3,14 \text{ s}$.

Pogosto namesto prikaza časa na abscisi uporabimo kot spremenljivko produkt krožne frekvence in časa, kar predstavlja fazni kot. V tem primeru je perioda



signala 2π . Prednost tega prikaza je tudi v direktnem odčitavanju faznega kota. V konkretnem primeru je $\varphi = \pi/6 \cong 0,52$ rd.



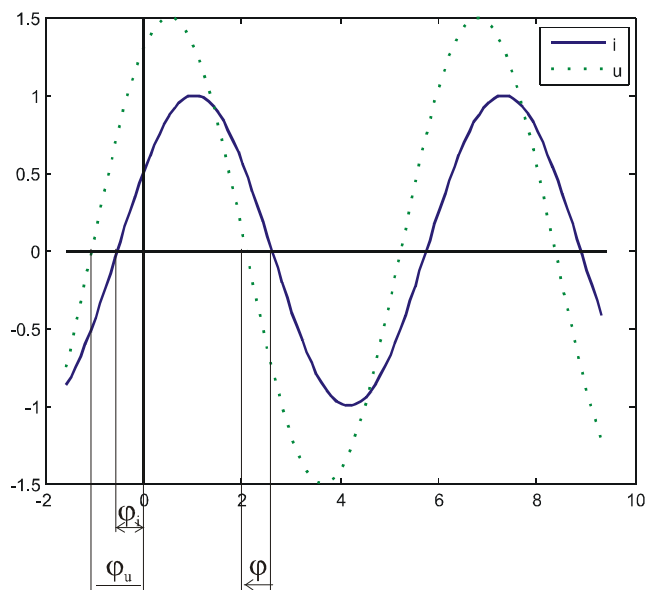
Harmoničen signal je lahko sestavljen iz več sinusnih signalov različnih amplitud in frekvenc. Prikažimo to na primeru harmoničnega signala sestavljenega iz vsote signalov $i_1(t)/A = 10\sin(2s^{-1}t)$ in $i_2(t)/A = 2\sin(10s^{-1}t)$: $i(t)/A = 10\sin(2s^{-1}t) + 2\sin(10s^{-1}t)$.

Zanimivo je, da je mogoče poljuben signal zapisati v obliki vsote sinusnih signalov, kar imenujemo Fourierova vrsta in se pogosto v praksi uporablja za analizo različnih oblik signalov (Fourierova analiza).

FAZNI KOT

S faznim kotom opišemo "prehitevanje" ali "zaostajanje" enega signala v primerjavi z drugim.

Vzemimo primer signala toka $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ in napetosti $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Fazni kot med napetostjo in tokom je $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Če je fazni kot pozitiven, rečemo, da napetost prehiteva tok, če pa je negativen, pa, da tok prehiteva napetost. To seveda ne gre jemati dobesedno, saj imata oba signala ob poljubnem času neko vrednost. Morda je najlažje določiti signal, ki prehiteva drugega tako, da pogledamo na grafu, kateri signal



doseže maksimalno vrednost pred drugim. Pri tem moramo opazovati najkrajšo časovno razliko. Na sliki vidimo, da napetostni signal prehiteva tokovnega ali ekvivalentno tokovni signal zaostaja za napetostnim.

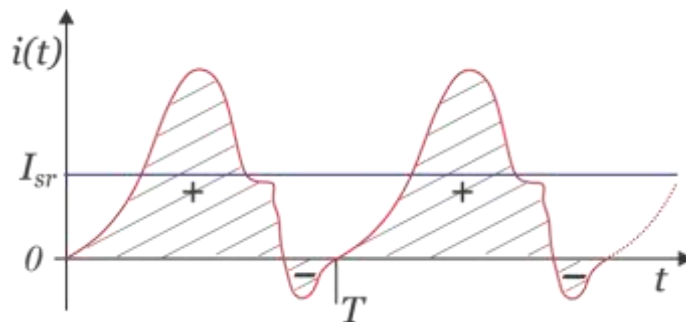
SREDNJA (POVPREČNA) VREDNOST SIGNALA

je določena s površino pod krivuljo signala v eni periodi deljena s periodo signala. Za negativne vrednosti signala je površina negativna. Matematično (za npr. tokovni signal) to zapišemo kot

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad (2.1)$$

Ta zapis pogosto za harmonične signale preuredimo tako, da namesto integracije po času zapišemo integracijo po kotu ωt . V tem primeru je

$$I_{sr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i(t) d(\omega t) \quad (2.2)$$



Slika 2.1: Periodični signal in njegova povprečna vrednost, ki je enaka površini signala deljeni s periodo. Integral signala v eni periodi je torej enak $I_{sr}T$.

Efektivna vrednost signala (ANG. RMS – ROOT MEAN SQUARE)

je določena kot koren iz srednje vrednosti kvadrata signala:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt} \quad (2.3)$$

Primer izračuna srednje in efektivne vrednosti signala:

Določimo srednjo in efektivno vrednost tokovnega signala oblike $i = I_m \sin(\omega t)$.

Izračun:

$I_{sr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} (-\cos(\omega t))_0^{2\pi} = 0$. Srednja vrednost je očitno enaka nič, saj je

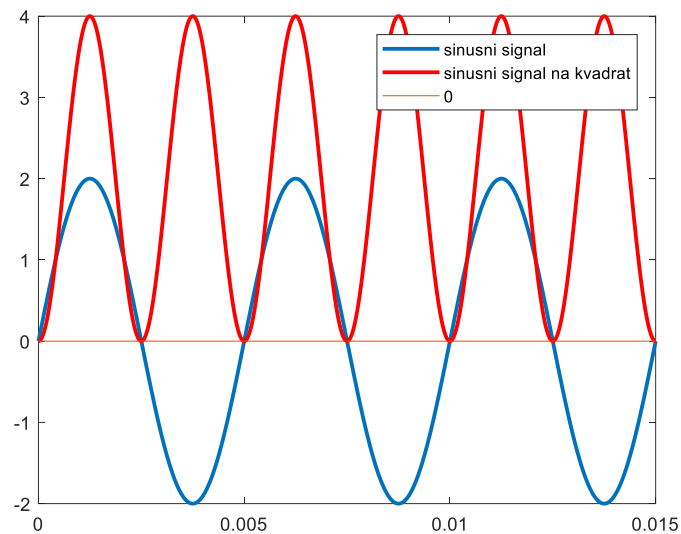
sorazmerna površini pod krivuljo, ki pa je enaka v pozitivni in negativni Y osi. Drugače pa je z efektivno vrednostjo, saj s kvadriranjem postane signal izključno pozitiven. Pri izračunu upoštevamo

zvezo $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))$:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m^2 \sin^2(\omega t) d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m^2 \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) d(\omega t)} = I_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{2} - 0 \right)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Dobimo večini že znan rezultat, da je efektivna vrednost harmoničnega signala enaka maksimalni vrednosti signala (amplitudi) deljeni s $\sqrt{2}$.

Efektivna vrednost signala je posebno pomembna tedaj, ko nas zanima povprečna moč ali energija signala, kar pa je v elektrotehniki pogosto



Slika 2.2: Sinusni signal (polna črta) in kvadrat signala (črčkana črta). Izris in izračun s programom Matlab: $T=5e-3$; $\omega_m=2\pi/T$; $dt=T/1000$; $t=0:dt:3*T$; $\text{plot}(t,\sin(\omega_m.*t),t,(\sin(\omega_m.*t)).^2,'--')$

Usmerjena vrednost (ANG. RECTIFIED)

Usmerjena vrednost je določena kot povprečje usmerjenega signala, torej kot povprečna vrednost absolutne vrednosti signala.

$$I_r = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt \quad (2.4)$$

Faktor oblike (ANG. FORM FACTOR)

Faktor oblike pogosto uporabimo za karakterizacijo oblike signala. Določen je kot kvocient efektivne in usmerjene vrednosti

$$\text{faktor oblike} = FF = \frac{I_{ef}}{I_r} \quad (2.5)$$

TEMENSKI FAKTOR (ANG. CREST FACTOR)

Temenski faktor je definiran kot kvocient maksimalne in efektivne vrednosti

$$\text{temenski faktor} = \frac{I_m}{I_{ef}} \quad (2.6)$$

Za sinusni signal je temenski faktor enak $\frac{I_m}{I_m / \sqrt{2}} = \sqrt{2} \cong 1,414$.

Primer izračuna periode, frekvence, srednje in efektivne vrednosti :

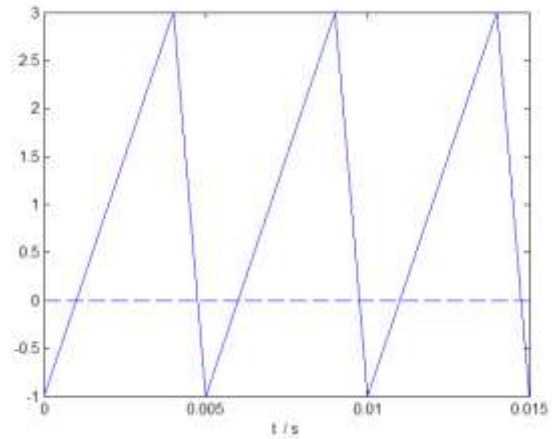
Določimo periodo, frekvenco, srednjo vrednost in efektivno vrednost časovne oblike tokovnega signala na sliki. Signal je naraščajoč v 80% časa periode in v preostalem času padajoč.

Izračun: Perioda signala je $T = 5 \text{ ms}$, frekvenca je

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5 \text{ ms}} = 200 \text{ s}^{-1} = 200 \text{ Hz} . \quad \text{Za izračun}$$

srednje vrednosti moramo signal zapisati v matematični obliki in ga integrirati v času ene periode ter deliti s periodo. Ker je sestavljen iz premic (odsekoma zvezen), mora biti oblike $y = k \cdot t + n$. Iz zapisa v dveh skrajnih točkah od $t = 0$ do $t = 0,8 \cdot 5 \text{ ms} = 4 \text{ ms}$ velja $-1 = k \cdot 0 + n$ in $3 = k \cdot 4 \text{ ms} - 1$, od koder dobimo enačbo

$i(t) = 1 \text{ A} / \text{ms} \cdot t - 1 \text{ A}$. Podobno dobimo za drugi del periode enačbo $i(t) = -4 \text{ A} / \text{ms} + 19 \text{ A}$.



Sedaj uporabimo enačbo za izračun srednje vrednosti in dobimo

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{5 \text{ ms}} \left(\int_0^{4 \text{ ms}} (1 \text{ A} / \text{ms} \cdot t - 1 \text{ A}) dt + \int_{4 \text{ ms}}^{5 \text{ ms}} (-4 \text{ A} / \text{ms} \cdot t + 19 \text{ A}) dt \right) . \text{ Rešitev enačbe je:}$$

$$I_{sr} = \frac{1}{5 \text{ ms}} (8 - 4 - 2(25 - 16) + 19(5 - 4)) \text{ A} \cdot \text{ms} = 1 \text{ A} . \text{ Srednja vrednost tokovnega signala je } 1 \text{ A} . \text{ Z}$$

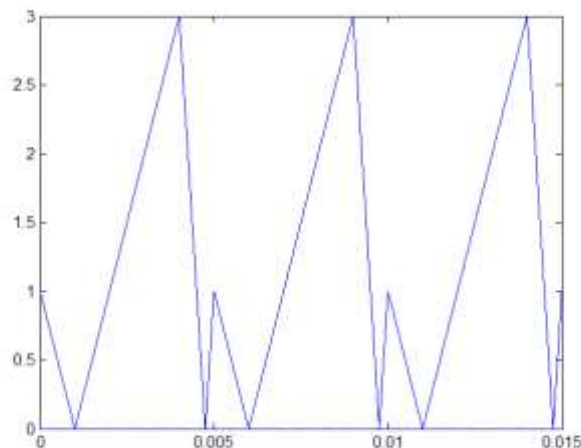
izračunom efektivne vrednosti je nekaj več dela, saj je potrebno rešiti sledeči integral:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{5 \text{ ms}} \left(\int_0^{4 \text{ ms}} (1 \text{ A} / \text{ms} \cdot t - 1 \text{ A})^2 dt + \int_{4 \text{ ms}}^{5 \text{ ms}} (-4 \text{ A} / \text{ms} + 19 \text{ A})^2 dt \right)} . \text{ Rešitev za vajo poskusite}$$

najti sami. Mi jo bomo poiskali kar s programom Matlab, ki da vrednost 1,5275. Usmerjena vrednost

$$\text{je } I_r = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt = \frac{1}{5 \text{ ms}} \left(\int_0^{4 \text{ ms}} |1 \text{ A} / \text{ms} \cdot t - 1 \text{ A}| dt + \int_{4 \text{ ms}}^{5 \text{ ms}} |-4 \text{ A} / \text{ms} + 19 \text{ A}| dt \right) = 1,250$$

$$\text{faktor oblike} = \frac{I_{ef}}{I_r} = 1,222, \text{ temenski faktor} = \frac{I_m}{I_{ef}} = \frac{3}{1,5275} = 1,964 .$$



Slika 2.3: Absolutna vrednost signala: iz te izračunamo usmerjeno vrednost.

Izračun s programom Matlab (signal izrišemo v treh periodah, zato tudi povprečje računamo v treh periodah): `T=5e-3; om=2*pi/T; dt=T/1000; t=0:dt:3*T; i=2*sawtooth(om.*t,0.8)+1; plot(t,i); lsr=trapz(i)*dt/(3*T); hold on; plot([0 0 3*T], [0 0 0], 'b--'); lef=sqrt(trapz(i.^2)*dt/(3*T)); lr=trapz(abs(i)*dt/(3*T)); FF=lef/lr`

Dodatno: Kolikšna moč se troši na bremenu (uporu 3 kΩ), če gre skozi upor tok oblike na sliki (v amperih).

Izračun: Trenutna moč na uporu je $p = u_R i_R = i_R^2 R$. Povprečna moč pa bo $\bar{p} = P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T i_R^2 R dt = R \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i_R^2 dt = R I_{R,ef}^2$.

Povprečno moč običajno označimo z veliko črko P . Očitno je povprečna moč na uporu, sorazmerna kvadratu efektivne vrednosti toka. Tu se že kaže pomembnost definiranja efektivne vrednosti: med drugim določa povprečno moč na uporu pri periodičnih signalih. V konkretnem primeru je povprečna moč na uporu enaka $P = R \cdot I_{R,ef}^2 = 3 \text{ k}\Omega \cdot 1,5275 \text{ A}^2 = \underline{\underline{7 \text{ kW}}}$.

Če bi želeli preračunati moč, ki se na ohmskem bremenu troši z merilnikom, ki določa efektivno vrednost iz usmerjene vrednosti, bi dobili vrednost $1,25 \cdot 1,1107 = 1,3884$ namesto pravilne vrednosti 1,5275. Napaka prikaza bi bila 9,1 %.

* MERJENJE EFEKTIVNE VREDNOSTI SIGNALA V PRAKSI

Cenejši merilni inštrumenti ne merijo prave efektivne vrednosti, pač pa jo določajo iz usmerjene vrednosti ali pa iz maksimalne vrednosti. V primeru signala sinusne oblike je $I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, usmerjena

vrednost pa je $I_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |I_m \sin(\omega t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{\pi} (-\cos(\omega t)|_0^{\pi}) I_m = \frac{2}{\pi} I_m = 0,64 I_m$.

Faktor oblike je torej $FF = \frac{I_{ef}}{I_r} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{I_m 2 / \pi} \cong 1,1107$. Merilni inštrument za izračun efektivne vrednosti

torej pomnoži izmerjeno usmerjeno vrednost signala s faktorjem 1,1107, pri čemer predvideva, da je signal sinusne oblike. Čim je merjeni signal drugačne oblike, je prikazani rezultat efektivne vrednosti napačen. Boljši inštrumenti merijo t.i. "pravo" efektivno vrednost (ang. true RMS). Na sliki desno je True RMS meter Fluke 114.

Za merjenje prave efektivne vrednosti je mogoče uporabiti več metod. En od principov temelji na uporabi termistorja, ki meri spremembo temperature na elementu, ta pa je neposredno povezana z efektivno vrednostjo toka. Na tržišču obstajajo tudi čipi, ki opravljajo množenje (kvadriranje) signala in s tem močno olajšajo delo. Primer takega elementa je čip AD8361 podjetja Analog Devices, www.analog.com. Vse več inštrumentov pa že zajema signale s pomočjo analogno/digitalne pretvorbe, kjer je izračun efektivne vrednosti mogoč z enostavno numerično integracijo kvadriranega signala. Vir: http://en.wikipedia.org/wiki/True_RMS_converter.



3. UPOR, TULJAVA IN KONDENZATOR PRI IZMENIČNIH SIGNALIH

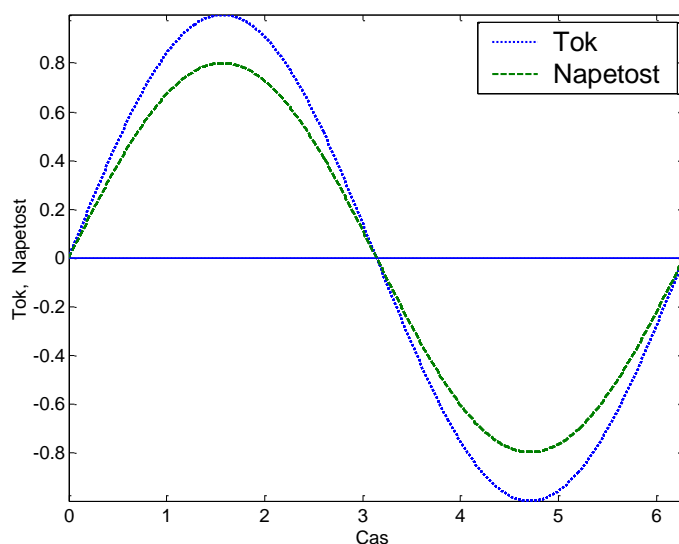
Vsebina poglavja: Zveze med tokom in napetostjo na uporu, tuljavi in kondenzatorju pri vzburjanju z izmeničnimi signali. Časovni poteki toka, napetosti, moči in energije na posameznih elementih. Zaostajanje ali prehitevanje signalov napetosti in toka – fazni kot. Povprečne vrednosti moči in energije. Maksimalna energija. Karakter vezja.

UPOR

Velja zveza $u(t) = Ri(t)$. (3.1)

Če je tok sinusne oblike $i = I_m \sin(\omega t)$, je napetost tudi sinusne oblike

$u = RI_m \sin(\omega t) = U_m \sin(\omega t)$, kjer je $U_m = RI_m$. (3.2)



Slika 3.1: Tok in napetost na uporu sta v fazi.

MOČ

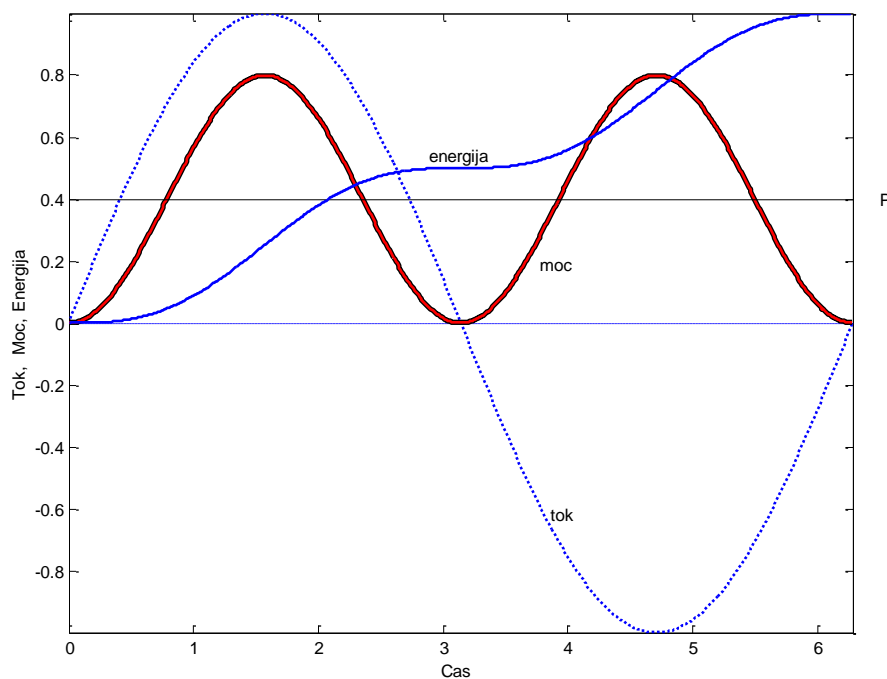
Moč na uporu dobimo kot zmnožek toka in napetosti na uporu

$$p = u \cdot i = i^2 R = I_m^2 R \sin^2(\omega t) \quad (3.3)$$

Za lažji prikaz lahko uporabimo zvezo $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$, od koder sledi

$$p = \frac{I_m^2 R}{2}(1 - \cos(2\omega t)) \quad (3.4)$$

Ugotovimo, da ima (trenutna) moč na uporu tudi sinusno obliko, vendar niha z dvojno frekvenco osnovnega signala, povprečna vrednost pa je $P = \frac{I_m^2 R}{2} = I_{ef}^2 R$. Povprečno vrednost moči določa efektivna vrednost (tokovnega ali napetostnega) signala.



Slika 3.2: Časovni potek toka, moči in energije na uporu.

ENERGIJA

Določimo še energijo v eni periodi (toplotna energija ali jouslske izgube), ki bo

$$W_T = \int_0^T p dt = PT = I_{ef}^2 RT \quad (3.5)$$

Skupne ugotovitve za upor:

- 1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na uporu $u = U_m \sin(\omega t)$. **Napetost na uporu je v fazi s tokom**, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.
- 2) Amplituda napetosti je $U_m = I_m R$.
- 3) Upornost (R) je neodvisna od frekvence tokovnega (in napetostnega) signala.
- 4) Moč na uporu niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala „okoli“ enosmerne komponente, ki predstavlja povprečno moč in je enaka $P = \frac{I_m^2 R}{2} = I_{ef}^2 R$.

TULJAVA

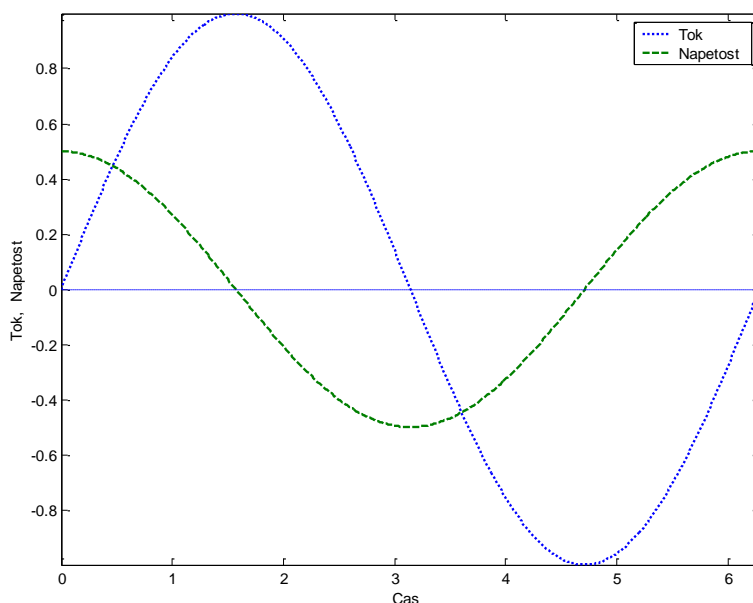
Zveza med tokom skozi tuljavo in napetostjo na tuljavi je

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (3.6)$$

Če je tokovni signal oblike $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na tuljavi

$$u = L \frac{d}{dt}(I_m \sin(\omega t)) = LI_m \omega \cos(\omega t) = U_m \cos(\omega t) \text{ ali tudi } u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.7)$$

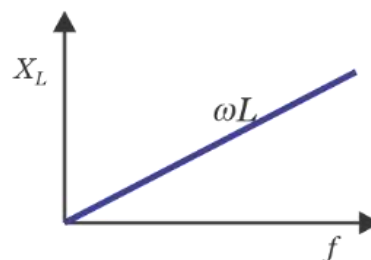
Napetostni signal je časovno zamaknjen glede na tokovni signal. Rečemo, da napetost prehiteva tok za kot $\frac{\pi}{2}$. To lahko prikažemo tako s časovnim potekom, kot tudi s kazalčnim diagramom ali kasneje – s kompleksorji v kompleksni ravnini.



Slika 3.3: Časovni potek in kazalčni diagram faznega prehitevanja napetosti na tuljavi pred tokom.

Amplituda napetosti bo torej $U_m = I_m \omega L$, kjer $\omega L = X_L$ imenujemo reaktanca oz. upornost tuljave pri izmeničnih signalih. **Upornost tuljave (reaktanca) pri izmeničnih signalih se večja**

linearno s frekvenco in je enaka $\frac{U_m}{I_m} = X_L = \omega L$.



MOČ

Trenutna moč je zmnožek trenutne napetosti in toka na tuljavi, torej

$$p = iu = I_m \sin(\omega t) \cdot U_m \cos(\omega t) = \frac{I_m U_m}{2} \sin(2\omega t) \quad (3.8)$$

Trenutna moč niha z dvojno frekvenco vendar je brez enosmerne komponente. Povprečna (izgubna) moč je 0 W.

ENERGIJA

Energijo v tuljavi dobimo z integracijo moči $W(t) = \int_0^t p dt = \frac{I_m U_m}{2} \int_0^t \sin(2\omega t) dt = \frac{I_m U_m}{2 \cdot 2\omega} (1 - \cos(2\omega t))$.

Energija, ki se akumulira v magnetnem polju tuljave, niha z dvojno frekvenco osnovnega signala. V vsakem trenutku je pozitivna in v povprečju velika

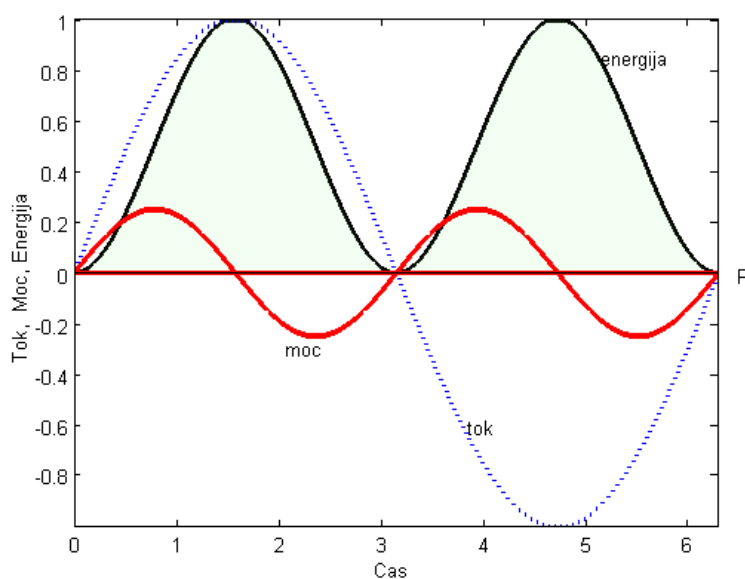
$$W_{sr} = \frac{I_m U_m}{4\omega} = \frac{LI_m^2}{4}. \quad (3.9)$$

Spomnimo se še druge oblike zapisa trenutne energije. V poglavju (13) smo obravnavali energijo v magnetnem polju tuljave in ugotovili, da jo lahko zapišemo kot $W(t) = \int_{t_0}^t p(t) dt = \int_{t_0}^t L \frac{di}{dt} i dt = \int_{i(t_0)}^{i(t)} L i di$,

od koder smo zapisali enačbo za trenutno energijo v magnetnem polju tuljave z induktivnostjo L v obliki $W = \frac{Li^2}{2}$.

Maksimalna energija v tuljavi nastopi tedaj, ko je tok maksimalen. Tedaj je

$$W_{max} = \frac{LI_m^2}{2} \quad (3.10)$$



Slika 3.4: Časovni potek toka, moči in energije na tuljavi.

Skupne ugotovitve za tuljavo:

- 1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na tuljavi $u = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. **Napetost na tuljavi prehiteva tok** za četrtnino periode signala, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.
- 2) Amplitudo napetosti lahko zapišemo tudi kot $U_m = I_m \omega L$, kjer je ωL upornost tuljave pri izmeničnih signalih, kar imenujemo tudi **reaktanca** $X_L = \omega L$. Reaktanca se linearno veča s frekvenco.

- 3) Za lažjo predstavo lahko tuljavo pri zelo nizkih frekvencah (enosmerne razmere) nadomestimo s kratkim stikom (zelo majhna upornost), pri zelo visokih pa z odprtimi sponkami (zelo velika upornost).
- 4) Moč na tuljavi niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala, povprečna moč je enaka nič.
- 5) Energija v magnetnem polju tuljave niha z dvojno frekvenco osnovnega signala, je vedno pozitivna in v povprečju velika $\overline{W} = W_{sr} = \frac{LI_m^2}{4}$. Trenutna vrednost je sorazmerna kvadratu toka $W = \frac{Li^2}{2}$, maksimalna energija v tuljavi nastopi vsako četrtno periode signala, ko je velika $W_{max} = \frac{LI_m^2}{2}$.
- 6) Za vezja, v katerih napetost prehiteva tok rečemo, da imajo **induktivni karakter**.

Primer izračuna toroidnega jedra:

Na toroidno jedro okroglega preseka površine 1 cm^2 , s srednjim polmerom 2 cm in $\mu_r = 100$, navijemo 500 ovojev. Kolikšna je napetost na tuljavi, če jo vzbujamo s tokom $i = 0,4 \cos(100\text{s}^{-1}t) \text{ A}$? Določimo še povprečno in maksimalno moč na tuljavi.

Izračun: Induktivnost toroida je $L = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 A}{2\pi r_s} = 25 \text{ mH}$, torej je induktivna upornost

$X_L = \omega L = 2,5 \Omega$, maksimalna napetost je $U_m = I_m X_L = 0,4 \text{ A} \cdot 2,5 \Omega = 10 \text{ V}$. Če bi želeli zapisati napetost na tuljavi v obliki časovnega signala, bi morali upoštevati, da napetost na tuljavi tok prehiteva za fazni kot $\frac{\pi}{2}$, torej bo $u(t) = 10 \cos(100\text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{2}) \text{ V}$. Povprečna moč je enaka nič vatov,

maksimalna moč je $\frac{I_m U_m}{2} = 2 \text{ W}$, povprečna energija je $W_{sr} = \frac{LI_m^2}{4} = 1 \text{ mJ}$, maksimalna pa 2 mJ .

Dodatno: Tak izračun velja predvsem v teoriji. V praksi imamo opravka z neidealnimi elementi. Od debeline žice in števila ovojev je odvisna ohmska upornost, ki ni nujno zanemarljiva v primerjavi z induktivno upornostjo (reaktanco). Nadalje se v jedru ob časovnih spremembah toka pojavijo izgube zaradi histereze materiala, pri višjih frekvencah pa tudi vrtilčne izgube, parazitne kapacitivnosti med ovoji itd. To pomeni, da je v določenih primerih že delovanje enega samega elementa lahko odvisno od mnogih parametrov. Bolj kot se tega zavedamo in te procese poznamo, boljše jih lahko upoštevamo in obvladujemo.

KONDENZATOR

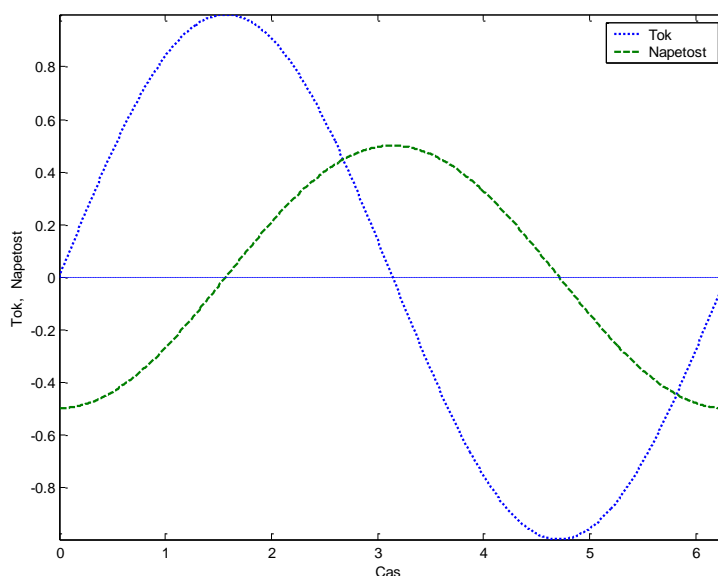
Zopet vzemimo sinusno obliko toka $i = I_m \sin(\omega t)$. Tok izrazimo s časovno spremembo naboja na ploščah kondenzatorja $i = \frac{dQ}{dt}$ in upoštevamo zvezo med nabojem na ploščah in napetostjo

$Q(t) = Cu(t)$ in dobimo $i = C \frac{du}{dt}$. Ker tok poznamo, zanima pa nas napetost, izrazimo napetost na

kondenzatorju kot¹ $\int_0^t du = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$. Za sinusno obliko toka bo napetost enaka

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I_m \sin(\omega t) dt + u(0) = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t) = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ oziroma}$$

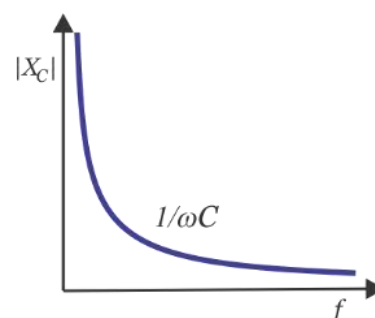
$u = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. Napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtno periode.



Slika 3.5: Časovni potek in kazalčni diagram faznega zaostajanja napetosti na kondenzatorju pred tokom.

Amplituda napetosti je torej $U_m = \frac{I_m}{\omega C}$.

Člen $\frac{1}{\omega C}$ ima enoto upornosti in tudi predstavlja upornost kondenzatorja pri izmeničnih signalih (reaktanca). Na sliki desno je prikaz spreminjanja reaktance² kondenzatorja s frekvenco.



¹ Zakaj dodamo $u(0)$? Pri veličinah, ki so določene z integralom, je potrebno upoštevati "zgodovino" integranta. Torej bi bilo vedno potrebno slediti integrirano veličino od $-\infty$, torej $u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u(0)$.

² V splošnem je reaktanca definirana kot imaginarni del impedance, kar bomo obravnavali nekoliko kasneje. Ugotovili bomo tudi, da je glede na definicijo reaktanca kondenzatorja negativna, torej enaka $-\frac{1}{\omega C}$.

MOČ

Trenutna moč je zmnožek trenutne napetosti in toka na kondenzatorju, torej

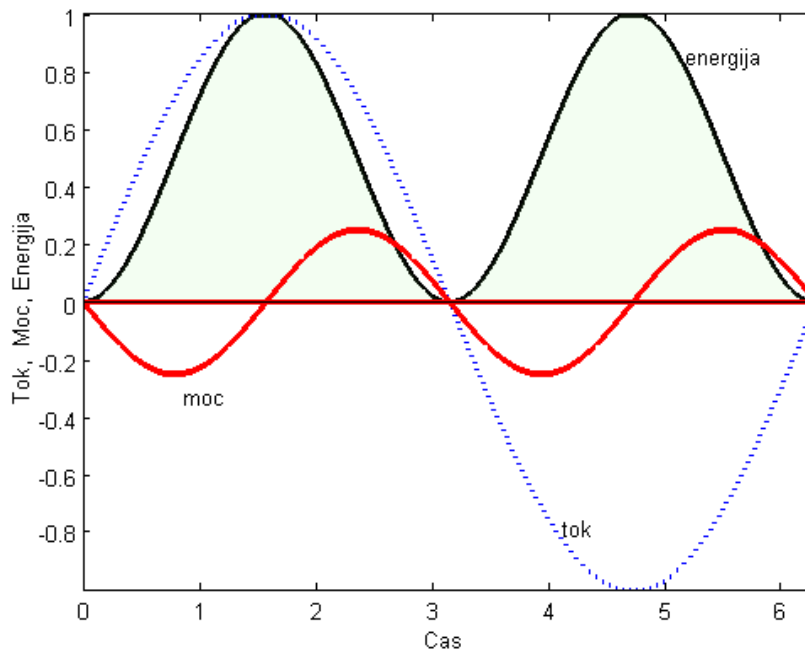
$$p = iu = -I_m \sin(\omega t) \cdot U_m \cos(\omega t) = -\frac{I_m U_m}{2} \sin(2\omega t) \quad (3.11)$$

Trenutna moč niha z dvojno frekvenco vendar brez enosmerne komponente, enako kot pri tuljavi. Povprečna (izgubna) moč je tako kot na tuljavi enaka nič vatov.

ENERGIJA

Podobno kot pri tuljavi energija v kondenzatorju niha z dvojno frekvenco osnovnega signala. Je vedno pozitivna, v povprečju enaka $W_{sr} = \frac{CU_m^2}{4}$. Maksimalna energija shranjena v polju kondenzatorja pa je

$$W_{\max} = \frac{CU_m^2}{2}. \quad (3.12)$$



Slika 3.6: Časovni potek toka, moči in energije na kondenzatorju.

Skupne ugotovitve za kondenzator:

- 1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na kondenzatorju $u = U_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

Tok na kondenzatorju prehiteva napetost za četrtno periode signala, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.

- 2) Amplitudo napetosti lahko zapišemo tudi kot $U_m = \frac{I_m}{\omega C}$, kjer je $\frac{1}{\omega C}$ upornost kondenzatorja pri izmeničnih signalih³. Upornost kondenzatorja se manjša s frekvenco.
- 3) Za lažjo predstavo lahko kondenzator pri zelo nizkih frekvencah (enosmerne razmere) nadomestimo z odprtimi sponkami (zelo velika upornost), pri zelo visokih pa s kratkim stikom (zelo majhna upornost).
- 4) Moč na kondenzatorju niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala, povprečna moč je enaka nič.
- 5) Energija niha z dvojno frekvenco osnovnega signala, v povprečju je enaka $W_{sr} = \frac{CU_m^2}{4}$, maksimalna energija v kondenzatorju nastopi vsako četrtno periode signala, ko je velika $W_{max} = \frac{CU_m^2}{2}$. Energija je akumulirana v električnem polju kondenzatorja.
- 6) Za vezja, v katerih napetost zaostaja za tokom rečemo, da imajo **kapacitivni karakter**.

Primer uporabe kondenzatorja pri izmeničnih signalih:

Na kondenzator kapacitivnosti 8 μF priključimo vir napetosti sinusne oblike amplitude 1 V. Kolikšna mora biti frekvenca napetostnega signala, da bo imel tok kondenzatorja amplitudo 2,5 mA?

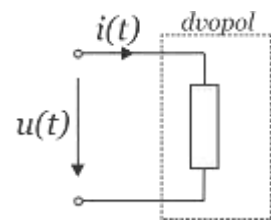
Izračun: Iz $U_m = \frac{I_m}{\omega C}$ dobimo $\frac{1}{\omega C} = \frac{1 \text{ V}}{2,5 \text{ mA}} = 400 \Omega$, od koder je $\omega = \frac{1}{400 \Omega \cdot 8 \mu\text{F}} = 312,50 \text{ s}^{-1}$
 oziroma $f = \frac{312,50}{2\pi} \text{ Hz} \approx 50 \text{ Hz}$.

³ Pogosto se uporablja zapis reaktance kondenzatorja kot $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Kasneje bomo ugotovili, da je reaktanca definirana

kot imaginarni del impedance in je v primeru kondenzatorja negativna, torej $X_C = -\frac{1}{\omega C}$.

4. IZMENIČNI SIGNALI – MOČ

Vsebina poglavja: časovna oblika moči za poljubni linearni dvopol, nihanje z dvojno frekvenco osnovnega signala, razdelitev moči na več komponent, delovna moč (faktor delavnosti), jalova moč, navidezna moč, trikotnik moči, odčitek S in P iz časovne oblike signala moči.



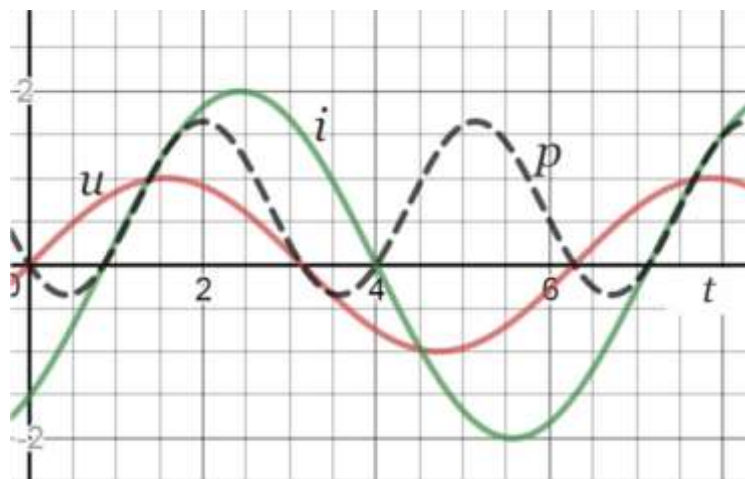
Zanima nas potek trenutne moči v linearnem dvopolnem (dve zunanji sponki) vezju, kjer je napetost na zunanjih sponkah enaka $u = U_m \sin(\omega t)$, tok pa je zamaknjen za nek poljuben kot $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$. Trenutna moč v vezje je enaka zmnožku napetosti in toka

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (4.1)$$

Z uporabo zveze $\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ zapišemo moč vezja kot

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)] \quad (4.2)$$

Vidimo, da lahko trenutno moč vezja opišemo kot vsoto dveh komponent moči, ene enosmerne in ene izmenične, ki niha z dvojno frekvenco. S povprečenjem moči preko periode dobimo povprečno moč, ki bo očitno kar enaka tej enosmerni komponenti moči, ki jo imenujemo **delovna moč**.



Slika 4.1: Prikaz časovnega poteka moči (črtkana črta) na bremenu induktivnega karakterja vezja (napetost (rdeča) prehiteva tok (zelena)).

DELOVNA MOČ

Delovna moč (ang. true power) je definirana kot povprečna moč $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$. Iz enačbe vidimo, da je delovna moč enaka

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi) = U_{ef} I_{ef} \cos(\varphi) \quad \text{DELOVNA MOČ} \quad (4.3)$$

»Okoli« te vrednosti niha signal trenutne moči.

Delovna moč je tista moč, ki se pretvarja v neko drugo obliko, na uporu v toplotno (Joulske izgube), v motorjih pa v mehansko (in toplotno).

Faktor $\cos(\varphi)$ pogosto imenujemo tudi **faktor delavnosti** ali **faktor moči**.

NAVIDEZNA MOČ

Trenutna moč niha z dvojno frekvenco okoli povprečne (delovne) moči. Amplituda nihanja moči (brez enosmerne komponente) je

$$S = \frac{I_m U_m}{2} \quad (4.4)$$

in jo imenujemo **navidezna moč** (ang. apparent power). Navidezna moč je običajno tista, ki nam pove, koliko smemo obremenjevati napravo.

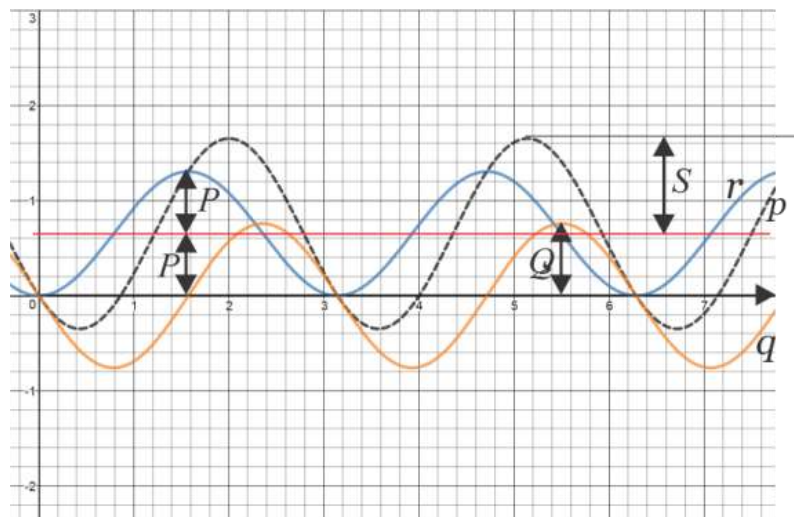
JALOVA MOČ

Nihanje moči okoli enosmerne komponente (povprečne moči) lahko razstavimo v skladu z zvezo $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$. Dobimo

$\cos(2\omega t - \varphi) = \cos(2\omega t) \cdot \cos(\varphi) + \sin(2\omega t) \cdot \sin(\varphi)$. Ob vstavitvi tega člena v enačbo **Error! Reference source not found.** dobimo

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(\varphi)(1 - \cos(2\omega t)) - \sin(\varphi)\sin(2\omega t)] = r(t) + q(t) \quad (4.5)$$

kjer je $r(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(\varphi)(1 - \cos(2\omega t))]$ in $q(t) = \frac{U_m I_m}{2} [-\sin(\varphi)\sin(2\omega t)]$. Razdelitev signala moči na dva signala prikazuje tudi spodnja slika. $r(t)$ predstavlja nihanje moči okoli povprečne (delovne) moči, $q(t)$ pa nihanje moči okoli ničle.



Slika 4.2: Razdelitev časovnega poteka trenutne moči p (črna črtkana črta) v vezju induktivnega karakterja na dva dela: moč r , ki niha okoli povprečne (delovne) moči P (modra barva), ki predstavlja ohmske »izgube« in moč q , ki niha okoli ničle (oranžna barva) in predstavlja moč na reaktivnih elementih (kondenzatorjih in tuljavah). Amplituda tega signala je Q - jalova moč.

Moč $r(t)$ predstavlja vsoto vseh moči na uporih v vezju in niha okoli povprečne vrednosti $P = \frac{I_m U_m}{2} \cos(\varphi)$ z amplitudo P .

Moč $q(t)$ predstavlja moč na vseh reaktivnih elementih v vezju (kondenzatorjih in tuljavah) in niha okoli ničle z amplitudo

$$Q = \frac{I_m U_m}{2} \sin(\varphi), \quad (4.6)$$

ki jo imenujemo **jalova moč** (ang. reactive power).

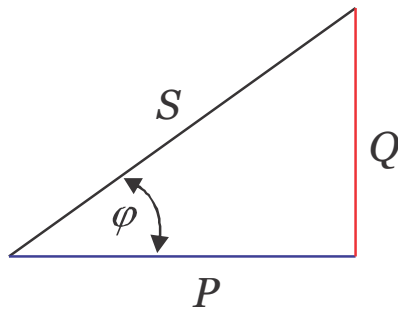
Očitno je, da velja

$$S^2 = P^2 + Q^2, \quad (4.7)$$

kar običajno prikažemo s pravokotnim trikotnikom s stranicami P , Q in S . Velja tudi

$$P = S \cos \varphi$$

$$Q = S \sin \varphi$$



Slika 4.3: Trikotnik moči sestavljajo delovna (P), jalova (Q) in navidezna (S) moč.

Zaradi pomembnosti moči v elektrotehnik in lažje prepoznavnosti, za delovno moč uporabljamo enoto W (Watt), za jalovo VAR (Volt – Amper reaktivno), za navidezno pa VA (Volt - Ampere).

Primer izračuna delovne, jalove in navidezne moči motorja:

Motor priključimo na izmeničen vir napetosti $u = 400 \sin(\omega t)$ V in med delovanjem izmerimo efektivno vrednost toka 3,68 A, ki za napetostnim signalom zaostaja za fazni kot 25° . Določite delovno, jalovo in navidezno moč motorja.

Izračun: Maksimalna vrednost toka bo $I_m = I_{ef} \sqrt{2} = 5,2$ A. Delovna moč bo $P = \frac{I_m U_m}{2} \cos(\varphi) \cong 961$ W, jalova $Q = \frac{I_m U_m}{2} \sin(\varphi) \approx 448$ VAR in navidezna $S = \frac{I_m U_m}{2} = 1060$ VA.

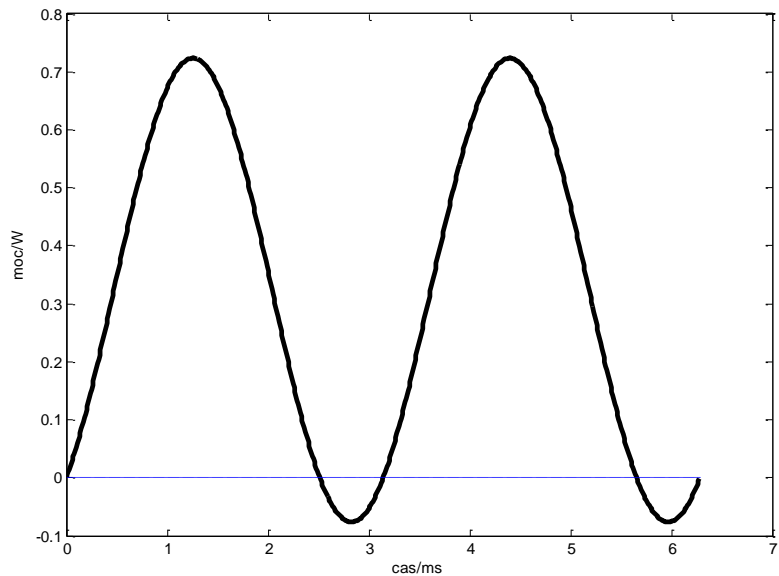
Primer izračuna delovne in jalove moči:

Navidezna moč električnega aparata je 550 VA, faktor delavnosti pa je 0,8. Določimo delavno in jalovo moč aparata.

Izračun: Iz trikotnika moči lahko razberemo, da je delovna moč $P = S \cos(\varphi) = 440 \text{ W}$. Ker poznamo P in S lahko Q določimo iz $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 330 \text{ VAr}$.

Primer določitve trikotnika moči iz časovnega poteka moči:

Iz grafa trenutne moči določimo delovno, jalovo in navidezno moč ter frekvenco in fazni kot med napetostjo in tokom. Vrišimo delovno in navidezno moč v sliko. Določimo še amplitudo napetosti, če je amplituda toka $2A$.



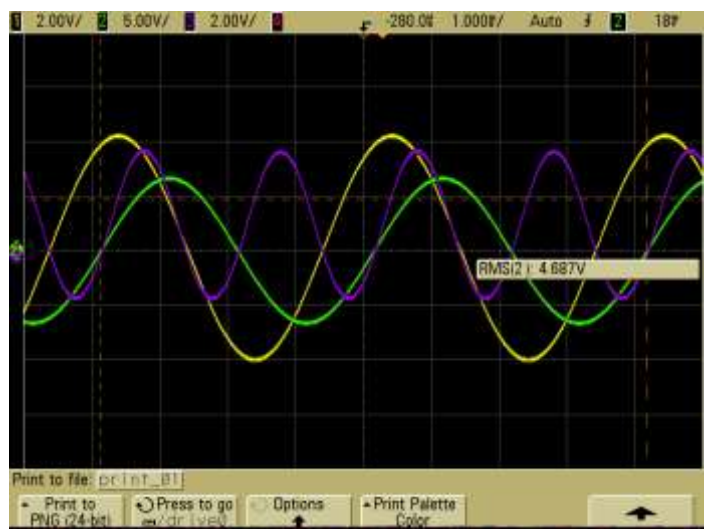
Izračun: Amplituda moči je navidezna moč, ki niha okoli enosmerne komponente, ki je enaka delovni moči. Iz vršnih vrednosti lahko razberemo navidezno moč. Spodnja temenska

vrednost moči je $-0,08 \text{ W}$, zgornja pa $0,72 \text{ W}$, $S = \frac{0,72 - (-0,08)}{2} = 0,4 \text{ VA}$. Če to vrednost odštejemo od zgornje vršne vrednosti ali pa prištejemo spodnji, dobimo delovno moč $P = 0,72 \text{ W} - 0,4 \text{ W} = 0,32 \text{ W}$, jalova moč bo torej $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 0,24 \text{ VAr}$.

Razberemo še periodo signala, ki je $3,2 \text{ ms}$, od koder je frekvenca signala moči $f_{moc} = \frac{1}{3,2 \text{ ms}} = 312,5 \text{ s}^{-1}$. Moč niha z dvojno frekvenco toka (napetosti), tok bo torej nihal s kotno frekvenco $156,3 \text{ Hz}$. Ugotoviti moramo še fazni zamik med napetostjo in tokom. Že iz prejšnjega primer smo ugotovili, da je $S = P \cos(\varphi)$ od koder je $\varphi = \text{Arccos}\left(\frac{S}{P}\right) = 18^\circ$. Določimo še amplitudo

napetosti: iz $S = \frac{I_m U_m}{2}$ sledi $U_m = \frac{2S}{I_m} = 0,4 \text{ V}$.

Primer izrisa trenutne moči za induktivni karatker vezja iz osciloskopa pri laboratorijski vaji. Razloči signal napetosti, toka, moči, določi periodo, frekvenco, delovno moč, navidezno moč. Kako določimo jalovo moč? Kaj izmerimo z ampermetrom in voltmerom?



DODATEK: Matlab program za prikaz moči na bremenu kapacitivnega, ohmskega ali induktivnega značaja

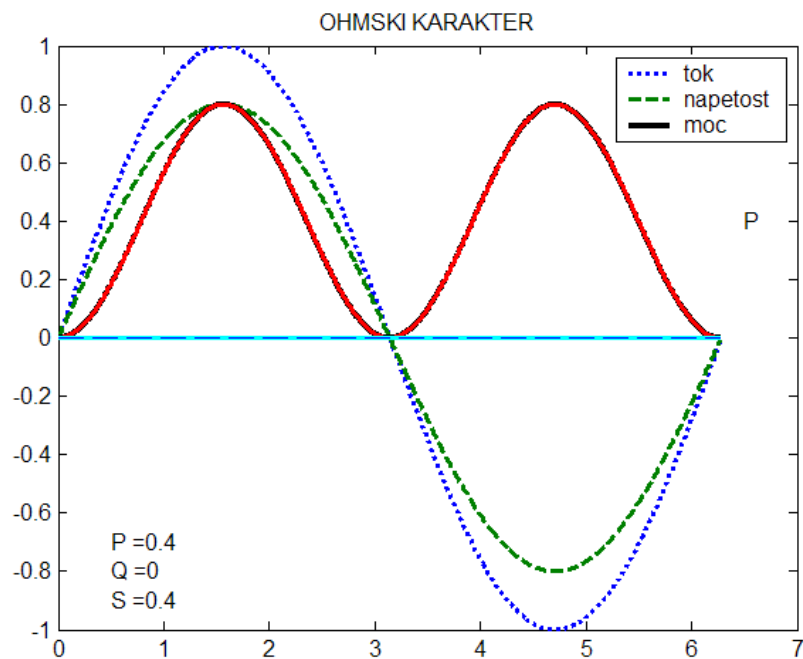
```

% Moc na bremenu, fazo spreminjamo od -pi/2 do +pi/2
Im=1; Um=0.8;
x=0:0.01:2*pi;
axis auto
for ii=-1:0.2:1
fi=ii*pi/2;
i=Im*sin(x);
u=Um.*sin(x+fi);
P=Um*Im*cos(fi)/2;
Q=Um*Im*sin(fi)/2;
S=Um*Im/2;

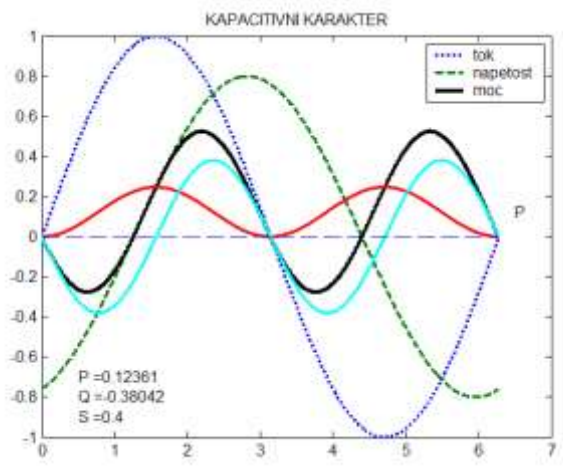
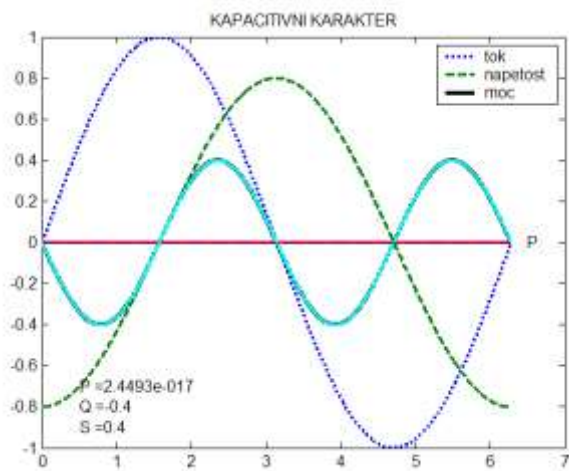
plot(x,i,': ',x,u,'--','LineWidth',2);
hold on
plot(x,u.*i,'k','LineWidth',3)
end

plot(x,P*(1-cos(2*x)), 'r',x,Q*sin(2*x),'c','LineWidth',2)
plot([0 2*pi], [0 0], 'Color','b','LineStyle','-')
plot([0 2*pi], [P P], 'Color','k','LineStyle','-')
%axis off
title('OHMSKI KARAKTER')
if fi<0 title('KAPACITIVNI KARAKTER'); end
if fi>0 title('INDUKTIVNI KARAKTER'); end
if fi==0 title('OHMSKI KARAKTER'); end
legend('tok','napetost','moc')
text(0.5,-0.7, strcat('P = ', num2str(P)));
text(0.5,-0.8, strcat('Q = ', num2str(Q)));
text(0.5,-0.9, strcat('S = ', num2str(S)));
text(6.5,P,'P');
k = waitforbuttonpress
hold off

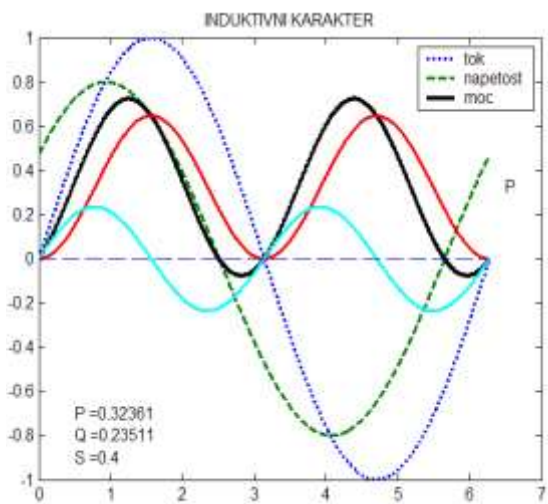
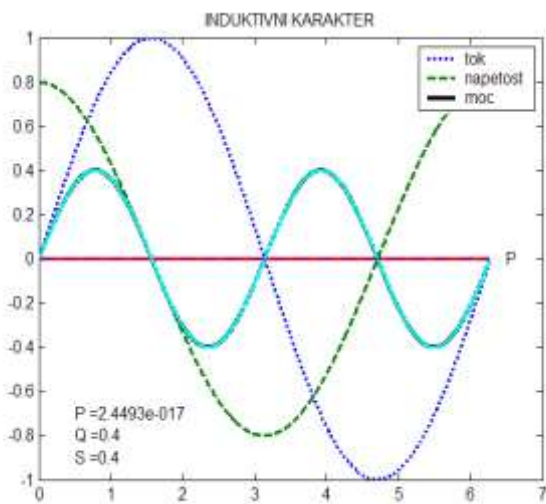
```



SLIKA: Moč na uporu



SLIKA: Moč na kondenzatorju.



SLIKA: Moč na tuljavi

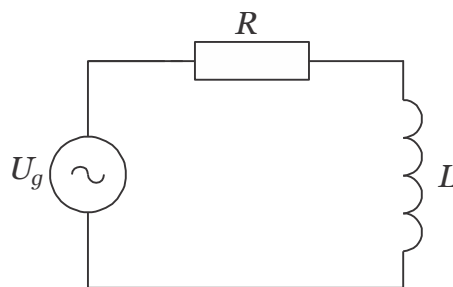
5. OBRAVNAVA IZMENIČNIH SIGNALOV S KOMPLEKSNIM RAČUNOM

Vsebina poglavja: Reševanje vezja z diferencialnimi enačbami. Osnove kompleksnega računa: kompleksno število, osnovne operacije, konjugacija, Eulerjev obrazec. Povezava med časovnim signalom sinusne oblike in kompleksnim zapisom - v obe smeri. Prikaz kompleksorjev v kompleksni ravnini. Povezava med kompleksorji toka in napetosti na uporu, kondenzatorju in tuljavi. Kirchoffova zakona s kompleksorji, kompleksna upornost in prevodnost (impedanca, admitanca), reaktanca, susceptanca.

Spoznali smo že zveze med tokom in napetostjo na posameznih elementih pri vzbujanju z izmeničnimi signali. Običajno imamo opravka z vezji, v katerih imamo pri napajanju z izmeničnimi signali priključene tako upore kot tudi kondenzatorje in tuljave. Kako v takih primerih analizirati vezje? Vzemimo kar preprost primer tuljave, ki je preko zaporedno vezanega upora priključena na izmenični napetostni generator. Kako določiti tok v vezju ali napetost na tuljavi?

Primer določanja tokov in napetosti v vezju z reševanjem diferencialne(ih) enačb

Upor $R = 2 \Omega$ je zaporedno s tuljavo z induktivnostjo $L = 10 \text{ mH}$ priključen na vir izmenične napetosti $u_g = 10\sin(\omega t) \text{ V}$; $\omega = 50 \text{ Hz}$. Določimo tok v vezju.



Slika 5.1: Zaporedna vezava upora in tuljave priključena na vir izmenične napetosti.

Pri izračunu moramo upoštevati osnovne zveze med tokom in napetostjo na posameznem elementu in Kirchoffova zakona. Odtod sledi $u_g = u_R + u_L$. Sedaj napetosti na uporu in tuljavi izrazimo s tokom:

$$u_g = Ri + L \frac{di}{dt}. \quad (5.1)$$

Dobimo diferencialno enačbo, katere rešitev bo tok v vezju. Obstaja vrsta načinov reševanja diferencialnih enačb, morda najpreprostejši je kar z uporabo t.i. »nastavka«, to je vnaprej poznane oblike rešitve. V konkretnem primeru bo le ta oblike $i = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$. Ta nastavek uporabimo v diferencialni enačbi in dobimo (za enostavnejše računanje ne upoštevamo enot)

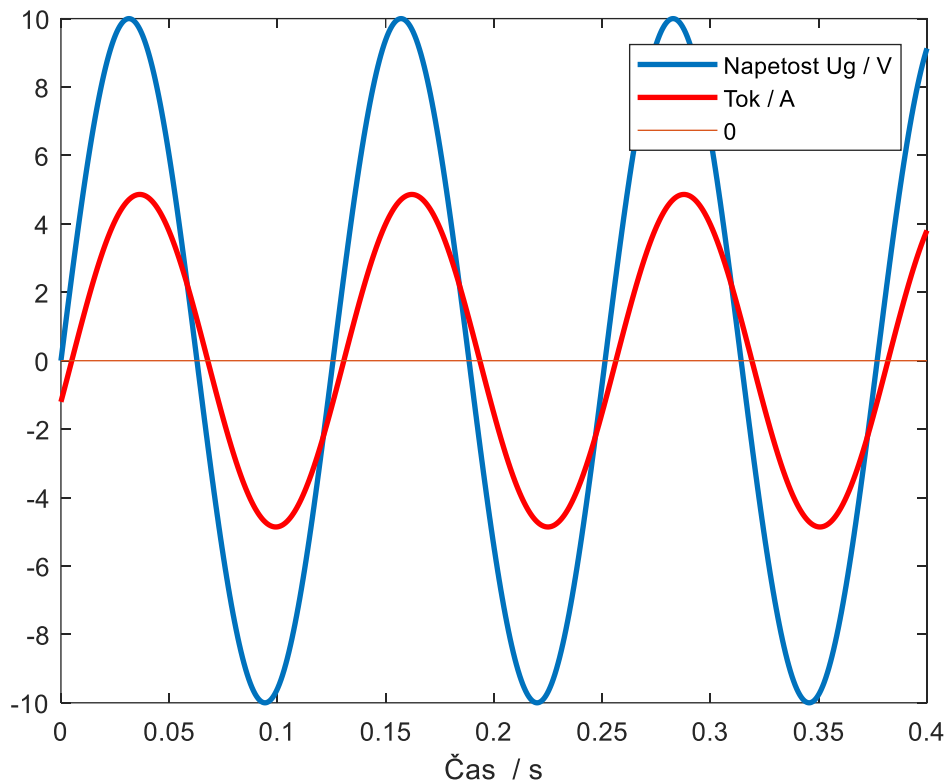
$10\sin(\omega t) = 2(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) + 0,01 \cdot (A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t))$. Sedaj moramo le še združiti člene, ki sodijo skupaj (sinusne in kosinusne člene) in dobimo:

$10\sin(\omega t) = 2A\sin(\omega t) - 0,01B\omega\sin(\omega t)$, od koder mora veljati $10 = 2A - 0,5B$ in hkrati

$0 = 2B\cos(\omega t) + 0,01A\omega\cos(\omega t)$, od koder mora veljati $0 = 2B + 0,5A$. Dobimo sistem dveh enačb, od koder določimo konstanti A in B , ki sta $B = -1,1765$ in $A = 4,7059$. Rešitev je torej $i \cong 4,71\sin(\omega t) - 1,18\cos(\omega t)$. To rešitev lahko zapišemo tudi v obliki $i = K\sin(\omega t + \varphi)$, kjer je

$$K = \sqrt{A^2 + B^2} \cong 4,86 \text{ in } \varphi = \text{Arc tan} \frac{B}{A} \cong -0,25 \text{ v radianih oziroma } \varphi \cong -0,25 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -14^\circ, \text{ torej}$$

$$\underline{\underline{i = 4,86 \sin(\omega t - 14^\circ) \text{ A.}}}$$



Slika 5.2: Napetost (modra polna črta) in tok (zelena črtkana črta).

Rezultat je zanimiv in pričakovan. Če bi bil na vir priključen le upor, bi bil tok v fazi z napetostjo, če bi bila priključena le idealna tuljava, bi tok zaostajal za 90° , če pa sta zaporedno priključena oba elementa, pa tok zaostaja za napetostjo za določen fazni kot, ki je med 0 in 90° . V konkretnem primeru tok zaostaja za napetostjo za fazni kot 14° .

Dodatno: Ali bi bila situacija podobna, če bi na napetostni vir priključili vzporedno vezana upor in tuljavo?

Odgovor: Da, tudi v tem primeru bi tok zaostajal za napetostjo. Poskusite preveriti sami!

Ugotovitev: Za analizo tudi že preprostega vezja, ki je priključeno na izmenični vir, potrebno zapisati diferencialno(e) enačbo(e) in poiskati njeno rešitev. To pa ni vedno enostavno. V nadaljevanju bomo ugotovili, da je najbolj učinkovita metoda za analizo vezij vzbujanih z izmeničnimi signali z uporabo kompleksnega računa. S pomočjo kompleksnega računa lahko v osnovi diferencialne enačbe »prevedemo« na preproste algebrske. Poleg analitičnega pristopa nam bo v veliko pomoč tudi grafičen prikaz s t.i. kompleksorji (kazalci) v kompleksni ravnini.

OSNOVE KOMPLEKSNEGA RAČUNA

Kompleksno število sestavlja realni in imaginarni del. Običajno kompleksna števila označimo s črtico pod črko. Primer takega števila je npr. $\underline{Z} = 2 + j3$. 2 je realni del, 3 pa imaginarni del kompleksnega števila.

j je **imaginarno število** in je enako $j = \sqrt{-1}$ oziroma, $j^2 = -1$. V matematiki ga pogosto označimo s črko i , ki pa jo v elektrotehniki pogosto uporabljamo kot simbol za tok.

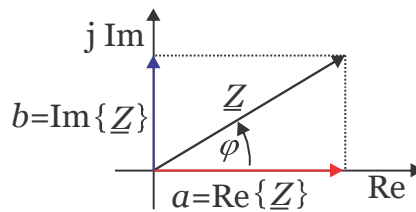
Kompleksno število prikažemo v t.i. kompleksni ravnini kot točko s koordinatama na realni in imaginarni osi (2, j3). Še bolj pogosto tako število prikažemo s kazalcem – **kompleksorjem** v kompleksni ravnini.

Poljubno kompleksno število zapišemo z realnim in imaginarnim delom kot

$$\underline{Z} = \text{Re}\{\underline{Z}\} + j \text{Im}\{\underline{Z}\} = a + jb. \quad (5.2)$$

a je realni del, b pa imaginarni del kompleksnega števila.

Pogosto zapišemo kompleksno število tudi v **polarni obliki**, z amplitudo in faznim kotom. Velja $|\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, fazni kot pa je $\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$. Narišemo ga s kazalcem (kompleksorjem) v kompleksni ravnini. Velikost kazalca je Z in je od realne osi »zasukan« za kot φ .



Slika 5.3: Prikaz kompleksnega števila v kompleksni ravnini kot točka ali v obliki kazalca (vektorja). Določen je z realnim in imaginarnim delom ali pa z amplitudo in faznim kotom.

EULERJEV OBRAZEC

Za tvorjenje kompleksnih signalov (kompleksorjev) in za pretvarjanje iz polarne zapisa v realni in imaginarni del kompleksnega števila uporabimo t.i. Eulerjev obrazec

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \quad (5.3)$$

Velja torej

$$\underline{Z} = \text{Re}\{\underline{Z}\} + j \text{Im}\{\underline{Z}\} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = Ze^{j\varphi}$$

Primeri računanja s kompleksnimi števili:

$$\underline{Z}_1 = 2 + j3; \underline{Z}_2 = 4 - j5$$

$$\text{Vsota: } \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 2 + j3 + 4 - j5 = 6 - j2$$

$$\text{Razlika: } \underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = (2 + j3) - (4 - j5) = -2 + j8$$

$$\text{Produkt: } \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = (2 + j3) \cdot (4 - j5) = 2 \cdot 4 - j^2 15 + j(12 - 10) = 23 + j2$$

Kvocient: $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 = \frac{(2 + j3)}{(4 - j5)} = \frac{(2 + j3)(4 + j5)}{(4 - j5)(4 + j5)} = \frac{-7 + j22}{4^2 + 5^2} = \frac{-7 + j22}{41} \cong -0,17 + j0,54$

Kvocient s pomočjo polarnega zapisa:

$$\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 = \frac{(2 + j3)}{(4 - j5)} \cong \frac{3,6e^{j56^\circ}}{6,4e^{-j51^\circ}} \cong 0,562e^{j107^\circ} \cong 0,562(\cos(107^\circ) + j\sin(107^\circ)) = -0,164 + j0,54.$$

Razlika med prvim in drugim izračunom nastopi zaradi različnega zaokroževanja. Polarni zapis je bolj primeren za množenje in deljenje. Pri pretvarjanju v polarni zapis je potrebno biti previden v primeru, ko je realni del negativen, saj se to število (kazalec) nahaja v drugem ali tretjem kvadrantu. V tem primeru je potrebno kotu dodati 180° oz. π . Primer: Pretvorimo kompleksno število

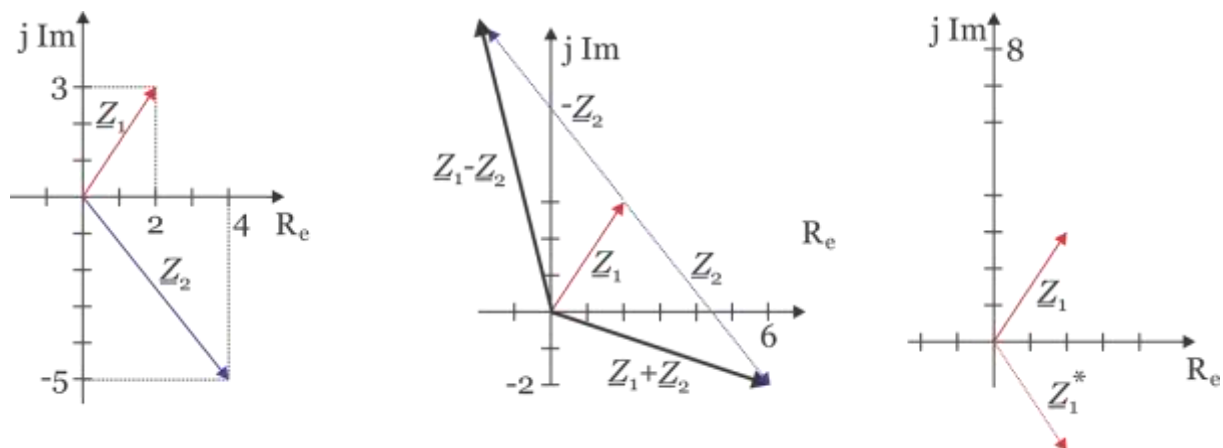
$$-2 + j2 = 2\sqrt{2}e^{j\left(\pi + \text{Arc tan } \frac{2}{-2}\right)} = 2\sqrt{2}e^{j(3\pi/4)}.$$

Konjugacija: $\underline{Z}_1^* = 2 - j3$. Pri konjugaciji obrnemo predznak imaginarnemu delu. Posebno primerna je uporaba konjugacije za izračun absolutne vrednosti kompleksnega števila:

$$|\underline{Z}_1| = \sqrt{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_1^*} = |2 + j3| = \sqrt{(2 + j3)(2 - j3)} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

PRIKAZ KOMPLEKSORJEV V KOMPLEKSNI RAVNINI

Posamezne kompleksorje lahko prikažemo v kompleksni ravnini, jih seštevamo ali odštevamo na enak način kot vektorje.



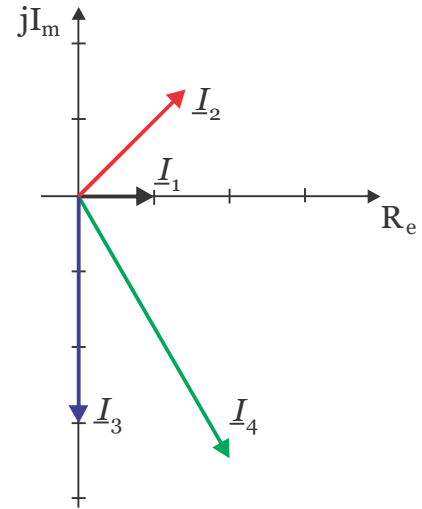
Slika 5.4: Primer seštevanja in odštevanja dveh kompleksorjev v kompleksni ravnini. Princip je enak kot pri seštevanju vektorjev. S konjugacijo se kompleksor prezrcali preko realne osi.

TVORJENJE KOMPLEKSORJEV IZ ČASOVNIH (HARMONIČNIH) SIGNALOV

S pomočjo Eulerjevega obrazca **Error! Reference source not found.** lahko zapišemo poljuben harmoničen signal, pri čemer pa poleg realnega dela pridobimo še imaginarni del. Vzemimo primer tokovnega signala oblike $i(t) = 2\cos(\omega t) A$. Ta tok lahko zapišemo z upoštevanjem Eulerjevega obrazca kot $\underline{i}(t) = 2(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) A = 2e^{j\omega t} A$. Tak kompleksen zapis toka seveda nima posebnega fizikalnega pomena. Fizikalno ima pomen le njegov realni del, torej $i(t) = \text{Re}\{\underline{i}(t)\} = \text{Re}\{2(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) A\} = 2\cos(\omega t) A$. V nadaljevanju bomo spoznali, da nam to »kompliciranje« z vpeljavo kompleksnih števil olajša obravnavo vezij vzbujanih s harmoničnimi signali.

Vzemimo sedaj bolj splošen zapis toka $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$ in ga zapišimo z upoštevanjem Eulerjevega obrazca kot $\underline{i}(t) = I(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)) = I e^{j(\omega t + \varphi)} = I e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t}$. Tvorili smo kompleksor harmonične funkcije $\underline{I} = I e^{j\varphi}$, ki opisuje amplitudo in fazo (fazni kot) toka, kar pa je tudi popolna informacija o toku v vezju. Frekvenca signala se namreč pri linearnih vezjih vzbujanih s harmoničnim signalom ne spreminja. Dovolj bo torej, da bomo poznali le amplitudo in fazo (fazni kot) signala, seveda relativno na druge signale v vezju. Če pa bi nas zanimal trenutni (časovni) potek signala, kompleksor pomnožimo s členom $e^{j\omega t}$ in upoštevamo le realni del.

Kompleksorje tvorimo iz časovnih harmoničnih signalov tako, da upoštevamo le amplitudo in fazo (fazni kot) signala, relativno glede na kosinusno funkcijo in ga zapišemo v obliki $\underline{I} = I e^{j\varphi}$.



Primeri tvorjenja kompleksorjev iz časovnih signalov:

Tvorimo kompleksorje toka za sledeče oblike tokov:

$$i_1(t) = 1 \cos(\omega t) \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_1 = 1 \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_2 = 2 e^{j45^\circ} \text{ A}$$

$$i_3(t) = 3 \sin(\omega t) \text{ A} = 3 \cos(\omega t - \pi/2) \text{ A} \\ \Rightarrow \underline{I}_3 = 3 e^{-j\pi/2} \text{ A} = 3(\cos(-\pi/2) + j \sin(-\pi/2)) \text{ A} = -j3 \text{ A}$$

$$i_4(t) = 4 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ A} = 4 \cos(\omega t - 90^\circ + 30^\circ) \text{ A} = 4 \cos(\omega t - 60^\circ) \text{ A}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_4 = 4 e^{-j60^\circ} \text{ A} = 4(\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ)) \text{ A} = 4\left(\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ A} \cong (2 - j3,46) \text{ A}$$

DOLOČITEV ČASOVNEGA SIGNALA IZ KOMPLEKSORJA

Iz znanega kompleksorja vedno lahko dobimo časovno obliko signala. Kompleksor je potrebno pomnožiti z $e^{j\omega t}$ in upoštevati le realni del signala. Vzemimo kot primer kompleksor toka $\underline{I}_2 = 2 e^{j45^\circ} \text{ A}$, ki ga pomnožimo z $e^{j\omega t}$ in upoštevamo Eulerjev obrazec. Časovno obliko toka dobimo iz realnega dela izraza

$$i_2(t) = \text{Re}\{2 e^{j45^\circ} e^{j\omega t} \text{ A}\} = \text{Re}\{2 e^{j(\omega t + 45^\circ)} \text{ A}\} = 2 \text{Re}\{\cos(\omega t + 45^\circ) + j \sin(\omega t + 45^\circ)\} \text{ A} = 2 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$$

Primer analize zaporedne vezave upora in tuljave z uporabo kompleksnega računa:

Izračun: Napetostni signal oblike $u_g = U_m \sin(\omega t) = U_m \cos(\omega t - \pi/2)$ zapišemo kot $\underline{u}_g = U_m e^{j(\omega t - \pi/2)} = \underline{U} e^{j\omega t}$, kjer je $\underline{U} = U_m e^{-j\pi/2} = -j U_m$. Rešitev pričakujemo v obliki $\underline{i} = I e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{I} e^{j\omega t}$, kjer je $\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$.

Vstavimo ta zapisa v diferencialno enačbo $u_g = Ri + L \frac{di}{dt}$ in dobimo

$\underline{U} e^{j\omega t} = R \underline{I} e^{j\omega t} + L \frac{d}{dt}(\underline{I} e^{j\omega t})$ in po odvajanju $\underline{U} e^{j\omega t} = R \underline{I} e^{j\omega t} + L j \omega \underline{I} e^{j\omega t}$. Člen $e^{j\omega t}$ lahko v enačbi pokrajšamo in tako postane enačba enostavna algebrajska: $\underline{U} = R \underline{I} + j \omega L \underline{I}$. Iz enačbe določimo kompleksor toka $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j \omega L}$. Razstavimo enačbo na realni in imaginarni del. Če se želimo »znebiti«

imaginarnega dela v imenovalcu, moramo imenovalc pomnožiti z njegovo konjugirano kompleksno vrednostjo, to je z $R - j\omega L$. Dobimo

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}(R - j\omega L)}{(R + j\omega L) \cdot (R - j\omega L)} = \frac{\underline{U}(R - j\omega L)}{R^2 - (j\omega L)^2} = \frac{\underline{U}(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2}$$
. To je že rešitev, ki jo lahko izrišemo v kompleksni ravnini. Narišemo kompleksor napetosti, ki je

$$\underline{U} = U_m e^{-j\pi/2} = -jU_m$$
, kompleksor toka pa je
$$\underline{I} = \frac{-jU_m(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} = -\frac{U_m(\omega L + jR)}{R^2 + (\omega L)^2}$$
 in ima negativen

tako realni kot imaginarni del. Vsota teh dveh kompleksorjev je kompleksor toka, ki zaostaja za kompleksorjem napetosti za kot, ki ga dobimo iz zapisa toka v polarni obliki: $\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$. Amplituda toka

je
$$I = \left| \frac{\underline{U}}{R + j\omega L} \right| = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$
, fazni kot pa⁹ $\varphi_i = \text{Arctan}\left(\frac{\text{Im}\{\underline{I}\}}{\text{Re}\{\underline{I}\}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{-R}{-\omega L}\right)$. Z vstavitvijo

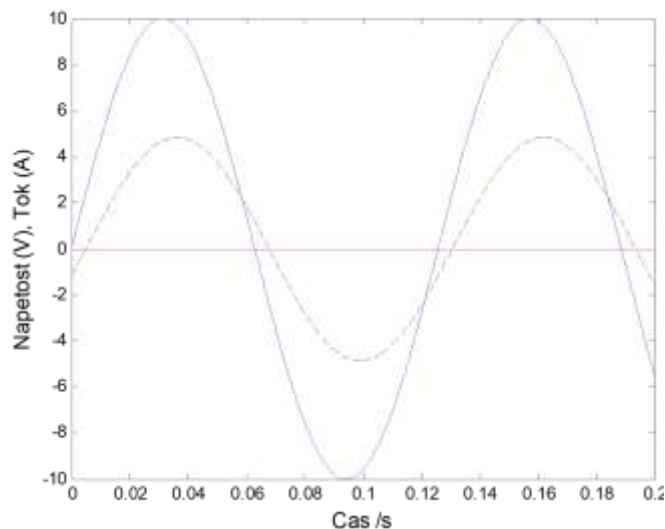
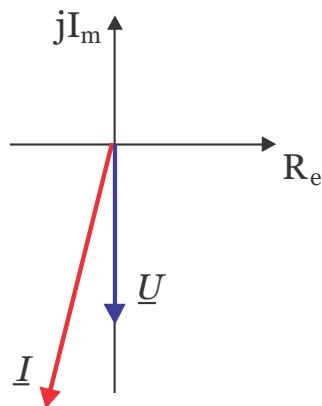
vrednosti dobimo $I = 4,85 \text{ A}$ in $\varphi_i \cong 76^\circ + 180^\circ = 256^\circ$. Kompleksor toka je torej $\underline{I} \cong 4,85 e^{j256^\circ} \text{ A}$.

Spomnimo se lahko, da je bil kompleksor napetosti $\underline{U} = U_m e^{-j\pi/2} = U_m e^{j3\pi/2} = U_m e^{j270^\circ}$. Fazni kot med tokom in napetostjo je torej $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 270^\circ - 256^\circ = 14^\circ$. Kazalec napetosti prehiteva kazalec toka za fazni kot 14° . To predstavlja **induktivni karakter vezja**.

Tok v časovni obliki dobimo tako, da kompleksor toka pomnožimo z $e^{j\omega t}$ in upoštevamo le realni del:

$$i(t) = \text{Re}\{\underline{I} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{4,85 e^{j256^\circ} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{4,85 e^{j(\omega t + 256^\circ)}\} = \underline{4,85 \cos(\omega t + 256^\circ) \text{ A}}$$
, kar lahko zapišemo tudi s sinusom:

$$i(t) = 4,85 \sin(\omega t + 90^\circ + 256^\circ) \text{ A} = 4,85 \sin(\omega t + 346^\circ) \text{ A} = \underline{4,85 \sin(\omega t - 14^\circ) \text{ A}}$$



Slika 5.5: Levo: kazalca (kompleksorja) napetosti in toka. Desno: časovni potek signalov.

⁹Dobljenemu kotu je potrebno prišteti kot 180° , saj sta tako realni kot imaginarni del negativna.

KOMPLEKSORJI TOKA IN NAPETOSTI NA ELEMENTIH VEZJA

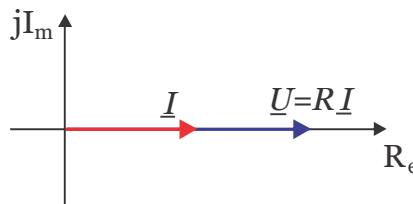
Kako si torej pomagamo s kompleksnim računom pri analizi vezij s harmoničnimi signali? Oglejmo si zveze med kompleksorji toka in napetosti na posameznih elementih vezja:

UPOR

Vzemimo $i(t) = I \cos(\omega t)$, kompleksor bo kar $\underline{I} = Ie^{j0} = I$. Tokovni signal pa lahko zapišemo kot $i(t) = \text{Re}\{\underline{I}e^{j\omega t}\}$. Napetost na uporu bo $u(t) = \text{Re}\{\underline{U}e^{j\omega t}\}$ in bo enaka $u(t) = R \cdot i(t)$ oziroma $\text{Re}\{\underline{U}e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{R\underline{I}e^{j\omega t}\}$, od koder sledi zapis s kompleksorji:

$$\underline{U} = R\underline{I}. \quad (5.4)$$

Ponovno vidimo, da sta kompleksorja toka in napetosti na uporu v fazi.

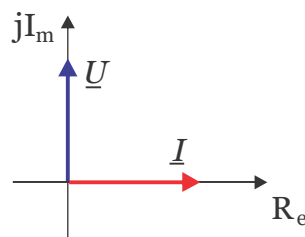


Slika 5.6: Kompleksor napetosti in toka na uporu.

TULJAVA

Vzemimo zopet $i(t) = I \cos(\omega t)$ s kompleksorjem $\underline{I} = Ie^{j0} = I$. Ugotovili smo že, da napetost na tuljavi prehiteva tok za četrtno periode in bo torej enaka $u(t) = I\omega L \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Če ta signal zapišemo kot kompleksor, dobimo $\underline{U} = \underline{I}\omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = \underline{I}\omega L \cdot j$, kar v splošnem zapišemo v obliki

$$\underline{U} = j\omega L\underline{I} \quad (5.5)$$



Slika 5.7: S prikazom v kompleksni ravnini pokažemo, da napetost na tuljavi prehiteva tok za četrtno periode signala.

Drugačna razlaga: Tvorimo kompleksni časovni signal (pravi je realni del tega): $\underline{i}(t) = \underline{I}e^{j\omega t}$. Ker velja $u = L \frac{di}{dt}$, mora veljati tudi $\underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt}$. Po odvajanju dobimo $\underline{u}(t) = L\underline{I}j\omega e^{j\omega t} = \underline{U}e^{j\omega t}$. Veljati mora $\underline{U} = j\omega L\underline{I}$.

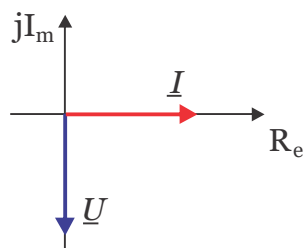
KONDENZATOR

Vzemimo zopet $i(t) = I \cos(\omega t)$ s kompleksorjem $\underline{I} = I e^{j0} = I$. Ugotovili smo že, da napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtno periode in bo torej enaka $u(t) = \frac{I}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. Če ta signal zapišemo kot kompleksor, dobimo $\underline{U} = \frac{\underline{I}}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{\underline{I}}{e^{j\frac{\pi}{2}} \omega C} = \frac{\underline{I}}{j\omega C}$, kar v splošnem zapišemo v obliki

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{j\omega C} \quad (5.6)$$

ali tudi

$$\underline{U} = -j \frac{\underline{I}}{\omega C}$$



Slika 5.8: S prikazom v kompleksni ravnini pokažemo, da napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtno periode signala.

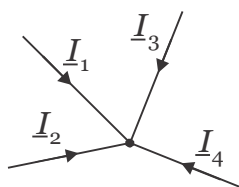
Drugačna razlaga: Tvorimo kompleksni časovni signal (pravi je realni del tega): $\underline{i}(t) = \underline{I} e^{j\omega t}$. Ker velja $u = \frac{1}{C} \int i dt$, mora veljati tudi $\underline{u} = \frac{1}{C} \int \underline{i} dt$. Po integraciji dobimo $\underline{u}(t) = \frac{1}{C} \underline{I} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t}$. Veljati mora torej $\underline{U} = \frac{\underline{I}}{j\omega C}$.

KIRCHOFFOVA ZAKONA S KOMPLEKSNIM ZAPISOM

Pri vezjih z enosmernimi signali je za 1 K.Z. veljalo $\sum_{k=1}^m I_k = 0$, kar bi pri vezjih z izmeničnimi signali lahko zapisali v obliki $\sum_{k=1}^m i_k(t) = \sum_{k=1}^m I_k \cos(\omega t + \varphi_k) = 0$ oziroma izraženo s kompleksnim zapisom $\sum_{k=1}^m \text{Re}\{\underline{I}_k e^{j\omega t}\} = 0$. To bo veljalo, če bo

$$\sum_{k=1}^m \underline{I}_k = 0. \quad (5.7)$$

Z besedami: vsota vseh kompleksorjev toka v spojišče je enaka nič.

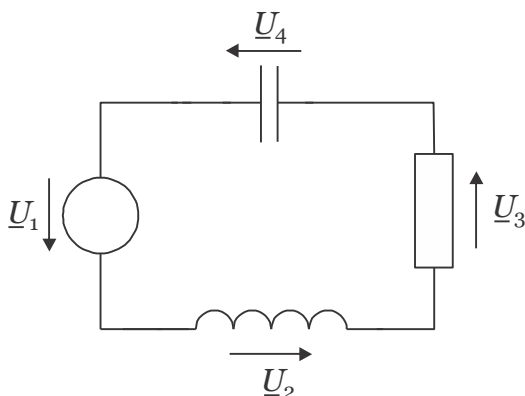


Slika 5.9: Vsota vseh kompleksorjev toka v spojišču je enaka nič.

Podobno bi lahko pokazali, da za drugi K.Z. velja

$$\sum_{j=1}^n \underline{U}_j = 0, \quad (5.8)$$

oziroma, da je vsota vseh kompleksorjev napetosti v zanki je enaka nič.



Slika 5.10: Vsota vseh kompleksorjev napetosti v zanki je enaka nič.

Kirchoffove zakone torej lahko uporabimo tudi pri zapisu tokov in napetosti s kompleksorji.

Primer uporabe 1. Kirchoffovega zakona:

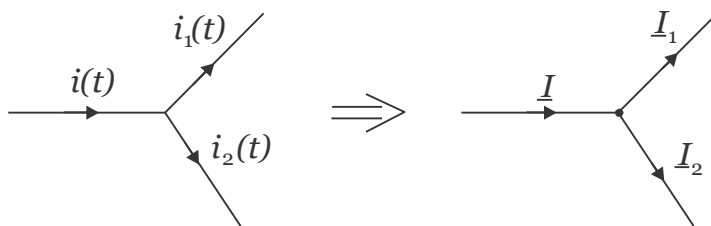
Tok $i(t) = 3 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ A}$ se razdeli v dve veji. Kolikšen je tok v drugi veji, če je v prvi veji tok enak $i_1(t) = 2 \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ A}$?

Izračun: Tokove zapišemo kot kompleksorje $\underline{I} = 3e^{j30^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_1 = 2e^{-j45^\circ} \text{ A}$ in ker mora biti vsota vseh tokov v spojišču enaka nič, bo to veljalo tudi za kompleksorje $\underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1$. Torej lahko zapišemo

$$\underline{I}_2 = 3e^{j30^\circ} \text{ A} - 2e^{-j45^\circ} \text{ A} = 3(\cos(30^\circ) + j\sin(30^\circ)) \text{ A} + 2(\cos(-45^\circ) + j\sin(-45^\circ)) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = (2,6 + j1,5) \text{ A} - (1,414 - j1,414) \text{ A} = (1,18 + j2,9) \text{ A} = 3,15e^{j67,9^\circ} \text{ A} .$$

Če želimo zapisati tok v drugi veji v časovni obliki, pomnožimo kompleksor z $e^{j\omega t}$ in upoštevamo le realni del signala $i_2(t) = \text{Re}\{3,155e^{j67,9^\circ} \text{ A} \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{3,15e^{j(\omega t + 67,9^\circ)} \text{ A}\} = 3,15 \cos(\omega t + 67,9^\circ) \text{ A} .$



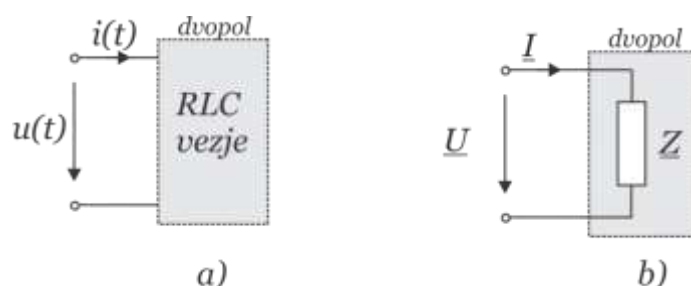
IMPEDANCA IN ADMITANCA

Vzemimo tokovni signal oblike $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$, ki ga opišemo s kompleksorjem $\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$, ki na sponkah v dvopolno vezje povzroča padec napetosti oblike $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u)$, ki ga opišemo s kompleksorjem $\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$. Kvocien kompleksorjev napetosti in toka imenujemo **impedanca** ali **kompleksna upornost** (včasih rečemo tudi polna upornost):

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}. \quad (5.9)$$

Velja

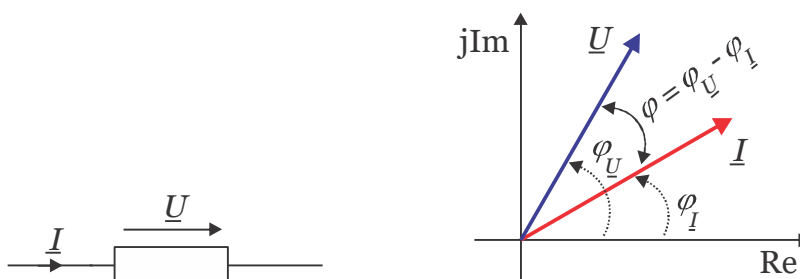
$$\underline{Z} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{I e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi}.$$



Slika 5.11: RLC vezje med dvema sponkama (a) lahko v primeru analize pri izmeničnih signalih predstavimo z impedanco \underline{Z} .

Govorimo lahko o Ohmovem zakonu pri izmeničnih signalih zapisan v obliki

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \quad (5.10)$$



Slika 5.12: Levo: dvopol z napetostjo \underline{U} in tokom \underline{I} . Desno: Primer prikaza kompleksorjev napetosti in toka v kompleksni ravnini.

Impedanca je izražena kot kompleksno število z enoto ohm. Absolutna vrednost impedance je kvocien med amplitudo napetosti in toka, argument pa je razlika med faznima kotoma napetostnega in tokovnega signala. Inverzna impedanci je **admitanca** ali kompleksna prevodnost

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}, \quad (5.11)$$

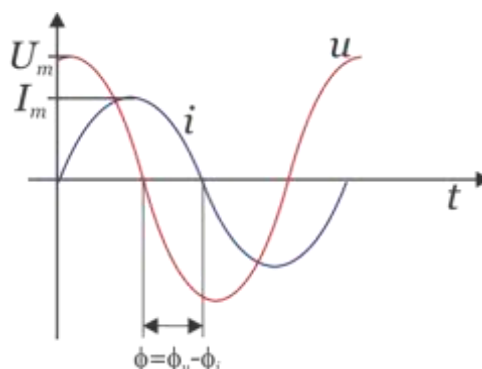
ki jo tudi lahko predstavimo kot $\underline{Y} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = Y e^{-j\varphi}$. Enota admittance je S (Siemens).

Pogosto se uporablja tudi pojma reaktanca in susceptanca. **Reaktanca** predstavlja imaginarni del impedance in je za tuljavo $X_L = \omega L$ in za kondenzator¹⁰ $X_C = -\frac{1}{\omega C}$. **Susceptanca** predstavlja imaginarni del admittance in je za tuljavo $B_L = -\frac{1}{\omega L}$ in za kondenzator $B_C = \omega C$.

Zapišimo kompleksne upornosti in prevodnosti za posamezne elemente vezja v razpredelnici:

	Impedanca \underline{Z}	Reaktanca $\text{Im}\{\underline{Z}\}$	Admitanca \underline{Y}	Susceptanca $\text{Im}\{\underline{Y}\}$
Upor	R		$G=1/R$	
Tuljava	$j\omega L = jX_L$	$\omega L = X_L$	$\frac{1}{j\omega L} = jB_L$	$-\frac{1}{\omega L} = B_L$
Kondenzator	$\frac{1}{j\omega C} = jX_C$	$-\frac{1}{\omega C} = X_C$	$j\omega C = jB_C$	$\omega C = B_C$

Iz časovnega poteka signalov toka in napetosti impedanco najlažje določimo tako, da poiščemo amplitudi napetosti in toka ter razliko faz med signaloma. Če napetost prehiteva tok je faza pozitivna, sicer pa negativna (Slika 5.13).



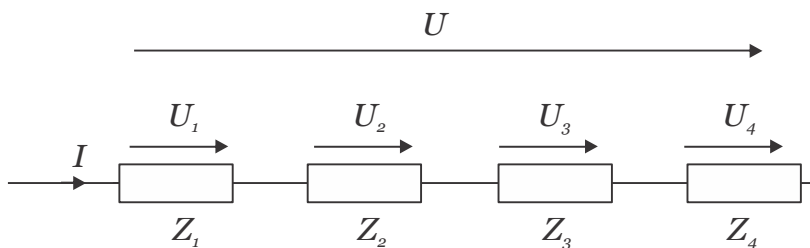
Slika 5.13: Impedanco dvopola, skozi katerega teče harmoničen tok $i(t)$ in je na njem napetost $u(t)$ lahko določimo iz kvocienta amplitud signalov in njune fазne razlike: $\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi}$. Impedanca dvopola (razen, če je upor) je odvisna od frekvence harmoničnega signala, saj se s frekvenco lahko spreminjajo tako amplitude kot fазni kot med signaloma.

¹⁰ Pogosto se v literaturi pojem reaktance enači s pojmom upornosti pri izmeničnih signalih. V tem smislu se uporablja za reaktanco kondenzatorja pozitivno vrednost. Glede na definicijo (reaktanca je imaginarni del impedance), mora biti reaktanca kondenzatorja negativna.

ZAPOREDNA IN VZPOREDNA VEZAVA IMPEDANC IN ADMITANC

Če so impedance vezane zaporedno, jih lahko seštevamo tako, kot smo seštevali zaporedno vezane upornosti pri enosmernih vezjih

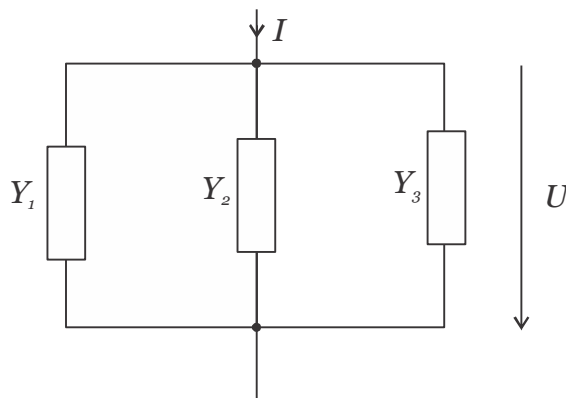
$$\underline{Z}_{zaporedno} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \dots \quad (5.12)$$



Slika 5.14: Zaporedna vezava impedanc.

Enako lahko seštevamo tudi vzporedno vezane kompleksne prevodnosti

$$\underline{Y}_{vzporedno} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \dots \quad (5.13)$$



Slika 5.15: Vzporedna vezava impedanc (admitanc).

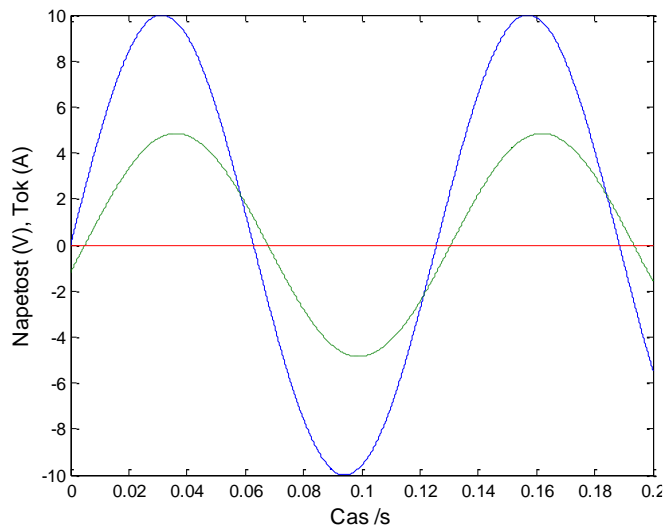
Primer določitve impedance iz časovnega signala:

Za zaporedno vezavo upora in tuljave smo že izračunali povezavo med napetostjo in tokom. Sedaj določimo še njuno impedanco, če poznamo časovni potek napetosti (modra polna črta) in toka (zelena črtkana črta).

Izračun: impedanca je definirana kot kvocient kompleksorja napetosti s kompleksorjem toka, kar pomeni, da moramo določiti velikost (absolutno vrednost) in fazni kot impedance. To naredimo tako, da določimo amplitudo in fazni kot vsakega signala posebej. Dobimo:

$$U_m = 10\text{V}, I_m \approx 5\text{A}, \varphi_U = 0^\circ, \varphi_I = -15^\circ$$

$$\underline{Z} = \frac{Ue^{j\varphi_U}}{Ie^{j\varphi_I}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} = Ze^{j\varphi} = \frac{10\text{V}}{5\text{A}} e^{j(0^\circ + 15^\circ)} = 2e^{j15^\circ} \Omega \quad \varphi$$



Dodatno: če vemo, da vezje sestavlja zaporedna vezava upora in (idealne) tuljave, kako bi izračunali upornost upora in induktivnost tuljave?

Odgovor: Iz odziva na sliki moramo določiti še frekvenco signala: perioda $T \approx 125\text{ms}$ torej je $f \approx 1/T = 8\text{Hz}$ oziroma $\omega = 2\pi f \approx 50\text{s}^{-1}$. Zgoraj določeno impedanco razstavimo na realni in imaginarni del in dobimo $\underline{Z} = 2e^{-j15^\circ} \Omega = 2(\cos(15^\circ) + j\sin(15^\circ)) \Omega \approx (1,93 + j0,52) \Omega$, kar mora biti enako $\underline{Z} = R + j\omega L$. Torej bo $R \approx 1,92 \Omega$ in $L \approx 0,52 \Omega / 50\text{s}^{-1} \approx 10\text{mH}$. Rezultat lahko primerjamo s podatki iz naloge na strani 46.

Primer izračuna impedance zaporedno vezanega upora in kondenzatorja:

Določimo impedanco zaporedno vezanega upora $R = 100 \Omega$ in kondenzatorja $C = 2 \mu\text{F}$ pri frekvenci $\omega = 10^3 \text{s}^{-1}$.

Izračun: Ker imamo zaporedno vezavo, pišemo $Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 100 \Omega + \frac{1}{j10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \Omega = (100 - j500) \Omega$. Določimo lahko še amplitudo in fazo

impedance kot $Z = \sqrt{100^2 + (-500)^2} \Omega = 510 \Omega$ in fazni kot $\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{-500}{100}\right) = -78,7^\circ$.

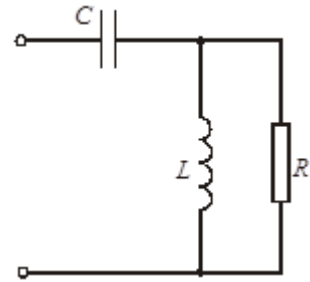
Primer izračuna admittance vzporedne vezave upora in kondenzatorja:

Določimo admitanco vzporedne vezave upora in kondenzatorja iz prejšnjega primera.

Izračun: Tokrat seštevamo prevodnosti, rezultat bo $\underline{Y} = G + j\omega C$, številčno pa $\underline{Y} = 0,01\text{S} + j0,002\text{S} = 0,01(1 + j0,2)\text{S} = 1,02 \cdot 10^{-2} e^{j11,3^\circ} \text{S}$

Primer uporabe kompleksnega računa za analizo vezja:

Na sponke vezja na sliki priključimo napetostni vir z amplitudo 400 V in frekvenco 50 Hz. Določimo impedanco vezja, tok v vezje in delovno moč. ($C = 100 \mu\text{F}$, $L = 20 \text{ mH}$, $R = 20 \Omega$)



Izračun: Izračunamo impedanco vezja $\underline{Z} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_L \parallel R$, kjer je

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j31,3 \Omega, \quad \underline{Z}_L = j\omega L = j6,28 \Omega \text{ in}$$

$$\underline{Z}_L \parallel R = \frac{j6,28 \cdot 20}{j6,28 + 20} \Omega = (1,79 + j5,7) \Omega. \text{ Impedanca vezja je torej}$$

$$\underline{Z} = (-j31,3 + 1,79 + j5,7) \Omega = (1,79 - j25,58) \Omega = 26,2e^{-j86^\circ} \Omega. \text{ Tok v vezje je}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{400 \text{ V}}{26,2 \cdot e^{-j86^\circ}} \text{ S} \cong 15,3e^{j86^\circ} \text{ A}. \text{ Delovno moč dobimo iz}$$

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi) = \frac{400 \text{ V} \cdot 15,6 \text{ A}}{2} \cos(-86^\circ) = 213,45 \text{ W}.$$

Primer uporabe kompleksnega računa za analizo vezja:

Tok v vezje vzporedne vezave kondenzatorja in upora iz prejšnjega primera je $i(t) = 20 \cos(10^3 \text{ s}^{-1} \cdot t) \text{ mA}$. Določimo napetost na sponkah vezja.

Izračun: Admitanco smo že izračunali v prejšnjem primeru, tvorimo le še kompleksor tokovnega signala $\underline{I} = 20 \text{ A}$ in upoštevamo $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \frac{20 \text{ mA}}{1,02 \cdot 10^{-2} e^{j11,3^\circ} \text{ S}} = 1,96e^{-j11,3^\circ} \text{ V}$. Da dobimo »nazaj«

napetostni signal, moramo kompleksor napetosti pomnožiti z $e^{j\omega t}$ in upoštevati le realni del: $u(t) = \text{Re}\{1,96e^{-j11,3^\circ} \cdot e^{j\omega t}\} = 1,96 \cos(10^3 \text{ s}^{-1} t - j11,3^\circ) \text{ V}$.

Primer uporabe kompleksnega računa za analizo vezja:

Tok v zaporedno vezavo dveh elementov je $i(t) = 5 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$, napetost pa $u(t) = 20 \cos(\omega t - 10^\circ) \text{ V}$. Določimo vrednosti elementov, če je $\omega = 5 \text{ kHz}$.

Izračun: Tvorimo kompleksorja toka in napetosti: $\underline{I} = 5e^{j45^\circ} \text{ A}$ in $\underline{U} = 20e^{-j10^\circ} \text{ V}$. Določimo

impedanco: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{20e^{-j10^\circ} \text{ V}}{5e^{j45^\circ} \text{ A}} = 4e^{-j55^\circ} \Omega$. Sedaj zapišemo impedanco v obliki realnega in

imaginarnega dela: $\underline{Z} = 4(\cos(-55^\circ) + j\sin(-55^\circ)) \cong (2,29 - j3,28) \Omega$. Očitno bo en element upor vrednosti $2,29 \Omega$, drug element pa bo kondenzator z reaktanco $-3,28 = -\frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = 6,1 \mu\text{F}$.

Dodatno: Določite elementa vzporedne vezave dveh elementov za enak tok in napetost v vezje.

Izračun: $R \cong 6,98 \Omega$ $C \cong 97,66 \mu\text{F}$.

POGOSTE NAPAKE PRI UPORABI IN RAČUNIH Z IMPEDANCAMI

Pri razumevanju uporabe kompleksnega računa pogosto prihaja do sledečih napak:

- Pri izračunu ne upoštevamo kompleksnega računa. Impedanco tuljave napačno računamo kot ωL , pravilno je $j\omega L$, impedanco kondenzatorja napačno računamo kot $\frac{1}{\omega C}$, pravilno je $-j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$.
- Ne znamo tvoriti kompleksorja iz časovnega signala in obratno. Primer: $i(t) = 3\cos(\omega t + 30^\circ)A \Rightarrow \underline{I} = 3e^{j30^\circ} A$.
- V kompleksnem prostoru se »izgubi« informacija o času. Zapis $i(t) = 3e^{j30^\circ} A$ je napačen. Časovni signal dobimo iz kompleksorja tako, da kompleksor pomnožimo z $e^{j\omega t}$ in upoštevamo le realni del signala:
$$i(t) = \operatorname{Re}\{\underline{I}e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{3e^{j30^\circ} e^{j\omega t}\} A = \operatorname{Re}\{3e^{j(\omega t + 30^\circ)}\} A = 3\cos(\omega t + 30^\circ)A.$$
- S kompleksorji lahko analiziramo le vezja vzbujana s harmoničnimi signali. Za analizo prehodnega pojava ali nelinearnih vezij ta način ni primeren. V teh primerih uporabimo drugačne pristope, npr. Laplaceovo transformacijo.
- Včasih vidimo zapis $Z(t) = \frac{u(t)}{i(t)}$. To je popolnoma napačno. Impedanca je razmerje kompleksorjev harmoničnega napetostnega in tokovnega signala ne pa kvocient med napetostnim in tokovnim signalom. Impedanca kot funkcija časa eventualno nastopa le, če ponavljamo izračun (meritve) impedance pri časovnih spremembah določenega parametra v vezju (strukturi).

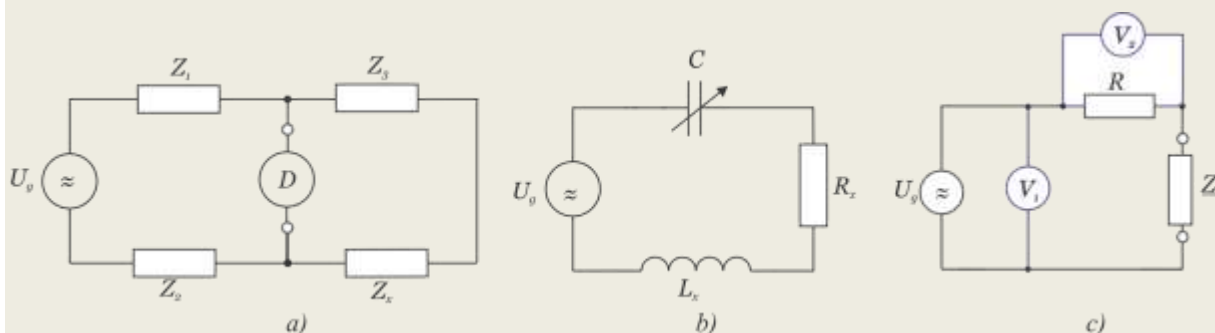
MERILNIKI IMPEDANCE – LCR METRI

Impedanco lahko merimo z različnimi merilnimi metodami. Nekaj od njih prikazuje spodnja slika. Včasih se je najpogosteje uporabljala metoda merilnih mostičev (Wheatstone-ov, Maxwell-ov, etc), kjer se je v mostičnem vezju (a) spreminjalo znane impedance toliko časa, dokler ni detektor D (voltmeter ali ampermeter (galvanometer)) pokazal uravnoveženost mostiča – tok oz. napetost med sponkama D enaka nič. Tedaj se neznano impedanco izračuna kot $Z_x = \frac{Z_1}{Z_2} Z_3$. Ta metoda je lahko

dokaj natančna vendar tudi zamudna. Druga možnost je uporaba resonančne metode, kot prikazuje primer b). V tem primeru spreminjamo kapacitivnost toliko časa, da dosežemo stanje resonance – pri določeni frekvenci. Iz frekvence signala, znane kapacitivnosti in izmerjene napetosti na kondenzatorju določimo neznana L_x in R_x . Tretja metoda temelji na merjenju toka in napetosti na

referenčnem uporu. Za idealna voltmetra je $Z_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{V_1 - V_2}{V_2 / R}$. Pri tem je potrebno poznati tako

fazo kot amplitudo izmerjenega signala, zato je ta metoda najbolj primerna ob uporabi digitalnih metod merjenja. Posebno primerna je tako imenovana digitalna lock-in metoda, kjer merjeni signal pomnožimo z znanim referenčnim sinusnim signalom enake frekvence kot je vzbujalna. Če to naredimo 2x s signaloma, ki sta fazno zamaknjena za četrto periodo, dobimo na izhodu povprečni vrednosti signalov, ki sta sorazmerni produktu amplitude merjenega signala in sinusa in kosinusa faznega kota: $U_x \sin(\varphi)$ in $U_x \cos(\varphi)$. S kvadriranjem in seštevanjem dobimo amplitudo U_x , iz kvocienta pa dobimo $\tan(\varphi)$.



Slika: tri metode merjenja impedance: a) metoda z mostičnim vezjem, b) metoda z resonančnim vezjem, c) I-V metoda z merjenjem toka in napetosti preko znanega merilnega upora.



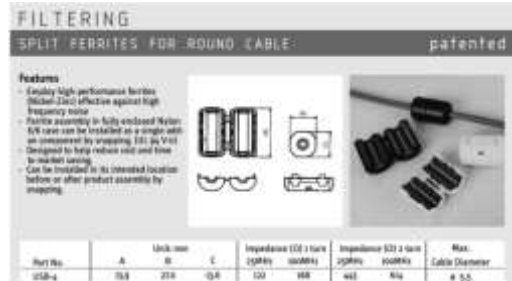
SLIKA: Impedančna merilnika podjetja Keysight: levo ročni, desno namizni. Namizni merilniki so običajno bolj natančni in omogočajo merjenje v večjem frekvenčnem razponu.

Za merjenje impedance pri višjih frekvencah se uporablja tudi posebno prilagojene metode, na primer t.i. vektorski analizator vezij (vector network analyzer), ki v neznano impedanco pošlje signal (pulz) in izmeri poslani in zakasneni signal zaradi odboja ter iz rezultatov določi impedanco.

Več o merjenju impedance na: <http://literature.cdn.keysight.com/litweb/pdf/5950-3000.pdf>

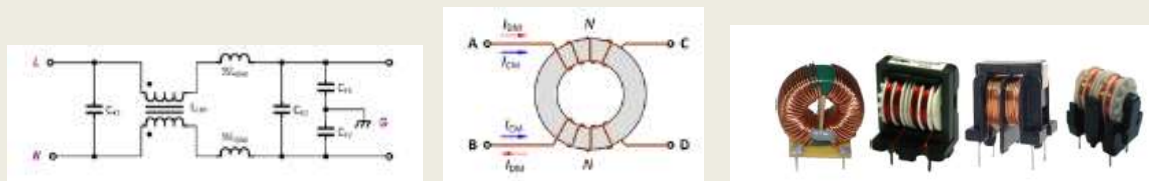
DUŠILKE ZA FILTRIRANJE MOTENJ

Kot že ime dušilka nakazuje, gre za element, ki »duši« signale. Ime dušilka se v elektrotehniko uporablja za navitja, ki so namenjena filtriranju signalov, predvsem visokofrekvenčnih. Upornost tuljave pri izmeničnih signalih linearno narašča s frekvenco, saj je reaktanca tuljave $X_L = \omega L$. Če se torej v veji vezja pojavi visokofrekvenčna motnja, jo lahko odpravimo (zmanjšamo) tako, da v vejo vključimo tuljavo, ki ima pri frekvenci motnje dovolj veliko induktivno upornost (reaktanco), da omeji (zmanjša) tok v tej veji pri frekvenci. Izberemo tako veliko induktivnost tuljave, da bo padec napetosti na tuljavi (dušilki) za signale znotraj frekvenc motnje velik, padec napetosti zaradi koristnega signala pa majhen.



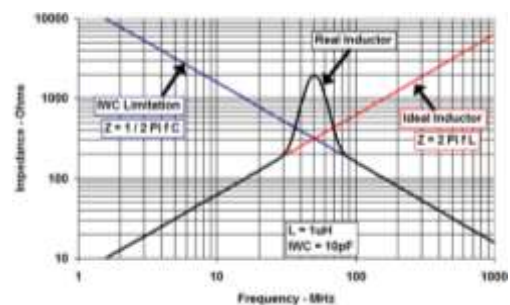
Primer dušilke, ki jo srečamo na skoraj vsakem napajalnem kablu ali na primer USB priključku, je prikazan na sliki desno. V bistvu gre le za napajalni kabel, ki je obkrožen s feritnim materialom, kar si lahko predstavljamo, kot da imamo »tuljavo« s polovico ovoja okoli feritnega jedra. Element deluje kot dušilka za visoke frekvence. Kot kaže prospekt, je reaktanca take dušilke za en sam ovoj pri 25 MHz 122 Ω , za 2 ovoja pa že 443 Ω . (Induktivnost (in s tem reaktanca) se povečuje približno s kvadratom števila ovojev.)

Zanimiva je tudi uporaba tuljave za zmanjševanje t.i. sofaznih signalov (motenj). To so motnje, ki potujejo po liniji/vodniku v smeri bremena v isti smeri. Te motnje zmanjšamo z uporabo t.i. common mode choke konfiguracije, kjer uporabimo toroid ali drugo obliko običajno feritnega jedra v transformatorskem načinu tako, da se sofazna fluksa, ki ju povzročata toka v vodniku in povratnem vodniku v jedru odštejeta. Vplivi sofaznih tokov, ki so posledica zunanjih motenj se tako odštejeta.



SLIKA: Levo: tipična uporaba filtra za zmanjšanje sofaznih motenj z navitjema na feritnem jedru, tako, da se fluksa odštejeta. Sredina: primer sofaznega navitja. Desno: primeri takih dušilk.

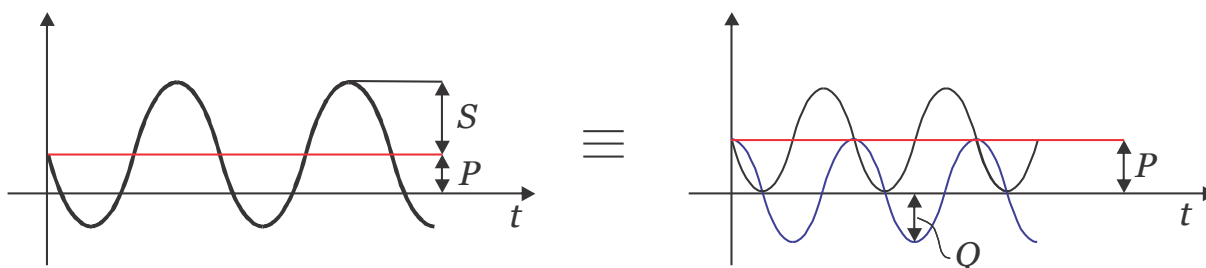
Ključni parameter dušilk je torej njihova induktivnost. Če je dušilka zračna tuljava, bo za enako induktivnost kot za tuljavo s feromagnetnim jedrom potrebnih mnogo več ovojev, ne bo pa imela taka dušilka nelinearnosti, ki lahko nastopajo pri uporabi feromagnetnih materialov. Nelinearnosti se lahko zmanjša z zračno režo, s čemer pa se zmanjša tudi induktivnost. Gre torej za različne kompromise, ki jih moramo delati v praksi. Nadalje se je potrebno zavedati, da tuljava nima le induktivne komponente pač pa tudi ohmsko, ki se povečuje s številom ovojev, hkrati pa lahko ohmske izgube nastajajo tudi zaradi gretja feromagnetnega materiala (vrtinčne in histerezne izgube). Pri visokih frekvencah postanejo pomembne še izgube zaradi izriva toka (kožni efekt – ang. skin effect). Poleg vsega naštetega se feromagnetnemu materialu relativna permeabilnost manjša z višanjem frekvence, zato se začne induktivnost zmanjševati, hkrati pa začnejo vplivati še kapacitivnosti med ovoji. Pri določeni frekvenci pride do resonance, ko dušilka praktično izgubi svoje induktivne lastnosti in navzven deluje kot čisto ohmsko breme (glej primer spremembe impedance tuljave v odvisnosti od frekvence vzbujalnega signala na desni. Vir: splet.



6. MOČ S KOMPLEKSNIM RAČUNOM

Vsebina poglavja: Zapis moči s kompleksnim računom, delovna, jalova, navidezna moč, bilanca moči, kompenzacija jalove moči, maksimalna moč.

Ugotovili smo že, da moč poljubnega (linearnega) dvopola niha z dvojno frekvenco vzbujačnega signala okoli povprečne – delovne moči $P = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi)$. Moč niha z amplitudo $S = \frac{U_m I_m}{2}$ okoli povprečne (delovne) moči. Amplituda nihanja S je navidezna moč. Jalove moči, definirane kot $Q = \frac{U_m I_m}{2} \sin(\varphi)$, ne moremo razbrati direktno iz časovnega signala moči (razen če je breme čisto kapacitivno ali induktivno), lahko pa jo določimo iz t.i. trikotnika moči, saj velja $S^2 = P^2 + Q^2$. Lahko pa časovni signal moči razdelimo na dva signala: enega, ki je vedno pozitiven in niha okoli povprečne (delovne) moči in predstavlja skupno moč na uporih, in drugega, ki niha okoli ničle in predstavlja skupno moč na (idealnih) tuljavah in kondenzatorjih. Slednji je v povprečju enak nič, amplituda pa je jalova moč $Q = \frac{U_m I_m}{2} \sin(\varphi)$.



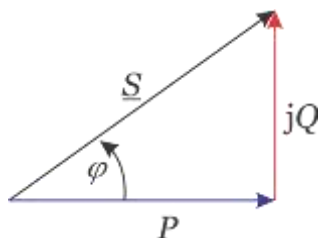
Slika 6.1: Levo: Prikaz časovnega signala moči s prikazano navidezno in delovno močjo. Desno: razdelitev signala moči na levi na dva signala: enega, ki predstavlja moč na uporih s povprečno vrednostjo P (delovna moč) in enega, ki predstavlja moč na tuljavah in kondenzatorjih z amplitudo Q (in povprečno močjo $=0$).

Navidezno moč lahko zapišemo tudi s kompleksorjem v obliki

$$\underline{S} = P + jQ, \quad (6.1)$$

oziroma

$$\underline{S} = S(\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)) = S e^{j\varphi} \quad (6.2)$$



Slika 6.2: Prikaz trikotnika moči s kompleksorji.

Fazni kot je razlika faznih kotov napetostnega in tokovnega signala: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Če to upoštevamo v enačbi **Error! Reference source not found.**, lahko kompleksor moči zapišemo v obliki $\underline{S} = \frac{I_m U_m}{2} e^{j\varphi_u} e^{-j\varphi_i}$, oziroma kot

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{U} \underline{I}^* \quad (6.3)$$

pri čemer sta $\underline{U} = U_m e^{j\varphi_u}$ in $\underline{I} = I_m e^{j\varphi_i}$ kompleksorja napetosti in toka. Pri izračunu moči s kompleksorji je torej potrebno upoštevati konjugirano vrednost kompleksorja toka.

Če pri enačbi **Error! Reference source not found.** upoštevamo še Ohmov zakon v kompleksnem zapisu, dobimo uporabne zveze:

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{I} \underline{Z} \underline{I}^* = \frac{1}{2} |\underline{I}|^2 \underline{Z} = \frac{1}{2} I^2 \underline{Z} = \frac{1}{2} U^2 \underline{Y}^* \quad (6.4)$$

Delovna moč predstavlja realno, jalova pa imaginarno komponento kompleksorja navidezne moči,

$$P = \text{Re}\{\underline{S}\} = \text{Re}\left\{\frac{1}{2} I^2 \underline{Z}\right\} = \frac{1}{2} I^2 \text{Re}\{\underline{Z}\} \quad (6.5)$$

$$Q = \text{Im}\{\underline{S}\} = \text{Im}\left\{\frac{1}{2} I^2 \underline{Z}\right\} = \frac{1}{2} I^2 \text{Im}\{\underline{Z}\} \quad (6.6)$$

Tabela enačb za izračun moči na uporu, kondenzatorju in tuljavi:

	$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{I} ^2 \underline{Z}$	$\underline{S} = \frac{1}{2} U^2 \underline{Y}^*$
UPOR	$\frac{1}{2} I^2 R$	$\frac{1}{2} U^2 G$
KONDENZATOR	$-j \frac{I^2}{2\omega C}$	$-j \frac{U^2}{2} \omega C$
TULJAVA	$j \frac{I^2}{2} \omega L$	$j \frac{U^2}{2\omega L}$

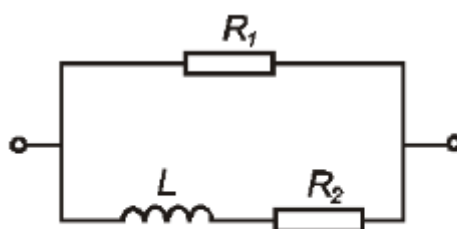
Primer izračuna delovne, jalove in navidezne moči s kompleksnim računom:

Izračunajmo delovno, jalovo in navidezno moč vezja na sliki, ki je vzbujano z napetostnim signalom $u(t) = 50 \sin(\omega t)$ V.

$R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $L = 100$ mH, $\omega = 50$ s⁻¹.

Izračun: V konkretnem primeru je najenostavneje izračunati admitanco vezja, ki je enaka

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L}, \text{ kar je z vstavitvijo vrednosti}$$



enako $\underline{Y} = \frac{1}{10 \Omega} + \frac{1}{(5 + j50 \cdot 0,1) \Omega} = 0,1 \text{ S} + \frac{1-j}{10} \text{ S} = 0,1(2-j) \text{ S}$. Za določitev moči zadostuje poznavanje absolutne vrednosti napetosti (ali toka). Dobimo

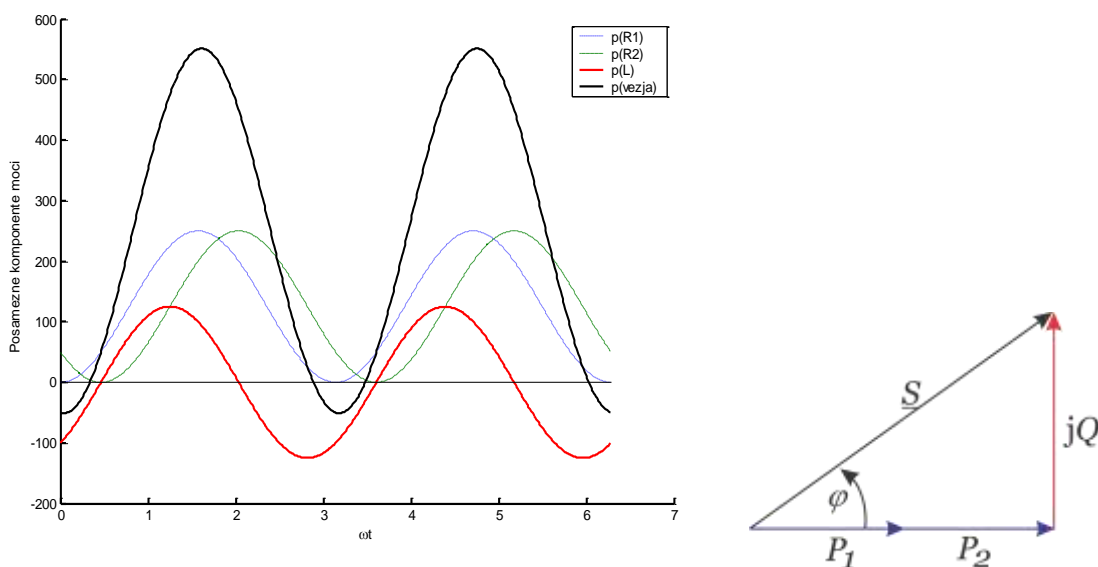
$\underline{S} = \frac{1}{2} U^2 \underline{Y}^* = \frac{1}{2} (50 \text{ V})^2 \cdot 0,1(2+j) \text{ S} = 125(2+j) \text{ VA}$, torej je delovna moč 250 W, jalova 125 Var-ov, navidezna pa 279,5 VA. Faktor moči je $\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = 0,45$.

Dodatno: vprašajmo se o močeh na posameznih elementih vezja. Naredimo primerjavo tako, da izračunamo posebej moč na uporih R_1 in R_2 . Moč na uporih R_1 lahko izračunamo neposredno, saj je na tem uporih celotna priključena napetost in je torej $P_{R1} = \frac{U^2}{2R_1} = \frac{(50 \text{ V})^2}{2 \cdot 10 \Omega} = 125 \text{ W}$. Moč na uporih R_2

dobimo iz toka skozi ta upor, ki je $I_2 = \frac{U}{R_2 + j\omega L}$, oziroma amplituda toka

$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} = 7,07 \text{ A}$. Moč na tem uporih bo torej $P_{R2} = \frac{1}{2} (7,07 \text{ A})^2 5 \Omega = 125 \text{ W}$.

Oglejmo si še sliko, ki prikazuje posamezne prispevke moči v vezju ter seštevek.



SLIKA: Posamezne komponente moči na elementih vezja in skupna moč. Skupna moč (črna polna črta) niha z dvojno frekvenco, na uporih (črtkana in pikčasta črta) je vedno pozitivna, na tuljavi (rdeča polna črta) pa niha okoli ničle. Amplituda izmenjalne moči je jalova moč (125 VAR-ov), amplitudi posameznih delovnih moči pa sta tudi 125 W, skupaj 250 W. (moc2.m)

Pozor: Pri izračunu moči je potrebno biti previden v toliko, da se zavedamo, da smo tvorili kompleksorje toka in napetosti z upoštevanjem amplitude časovnega signala. Pogosto se v literaturi pojavljajo tudi oblike zapisa moči z upoštevanjem efektivnih vrednosti toka in napetosti, ki so od maksimalnih pri harmoničnih signalih manjše za $\sqrt{2}$. Primer zapisa z efektivnimi vrednostmi toka in napetosti bi torej bil $\underline{S} = \underline{U}_{ef} \underline{I}_{ef}^*$, pri čemer se pogosto indeks *ef* kar izpušča. Za pravilno uporabe formule za moč moramo torej vedeti, da pri uporabi amplitud signalov upoštevamo faktor $\frac{1}{2}$, pri efektivnih pa je že upoštevan.

BILANCA MOČI

Vzemi primer iz prejšnjega poglavja in izračunajmo moč, ki jo v vezje pošilja napetostni generator. Ugotovimo lahko, da je ta moč $p_g(t) = u_g(t) \cdot i_g(t)$ enaka moči vezja. Torej je moč, ki jo generator pošilja v vezje enaka potrošeni moči. Lahko ugotovimo še več: to moč lahko razdelimo v jalovo in delovno in ugotovimo, da mora veljati tudi ta bilanca. Poleg tega velja tudi splošno, za več generatorjev.

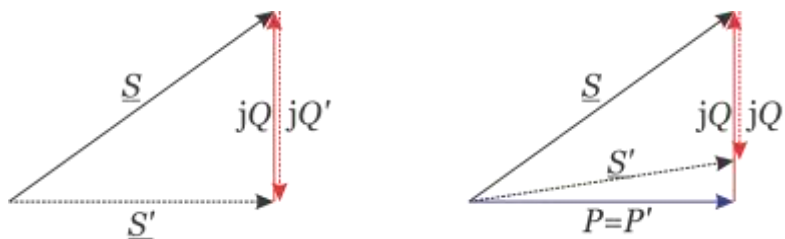
Vsota moči virov (generatorjev) = vsota moči na bremenih vezja

Primer izračuna bilance moči:

Kot primer lahko vzamemo kar prejšnji primer, kjer smo že ugotovili, da je moč na uporih enaka $2 \times 125 \text{ W}$, na tuljavi pa 125 Var-ov , skupaj torej $\underline{S} = 125(2 + j) \text{ VA}$. Tok v vezje dobimo iz admittance in bo $\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = 50 \text{ V} \cdot 0,1(2 - j) \text{ S} = 5(2 - j) \text{ A}$. Moč v vezje bo torej $\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \frac{1}{2} U^2 \underline{Y}^*$, kar pa je ista enačba, s katero smo že izračunali moč vezja.

KOMPENZACIJA JALOVE MOČI

Večina električnih naprav ima induktivni karakter, saj za pretvarjanje iz električne v mehansko energijo običajno vsebujejo navitja. To so predvsem razni motorji, transformatorji, dušilke, varilni aparati, indukcijske peči, fluorescenčne svetilke in podobno. Ti potrebujejo energijo za vzpostavljanje in »zmanjševanje« magnetnega polja, ki se manifestira v izmenjalni moči, ta pa v jalovi moči, ki je definirana kot amplituda te izmenjalne moči. Jalova moč je potrebna za delovanje električnih naprav, torej se ji ne moremo izogniti. Bremeni pa ta moč električno omrežje in jo v tem smislu porabnik tudi plačuje. Jalovo moč je navzven mogoče do določene mere kompenzirati, to pomeni, da bremenu dodamo elemente, ki izmenjujejo energijo z bremenom. V ta namen se najpogosteje uporablja vzporedno vezavo kondenzatorjev. Ločimo **popolno in nepopolno kompenzacijo**. Pri popolni kompenzaciji breme navzven deluje kot ohmsko, torej je jalova moč navzven enaka nič. Pri nepopolni kompenzaciji pa jalovo moč le zmanjšamo do določene mere. Pogosto za mero kompenzacije uporabimo faktor delavnosti $\cos(\varphi)$. Popolna kompenzacija terja, da je faktor delavnosti enak 1. Pogosto ne želimo ali pa ne potrebujemo popolne kompenzacije delovne moči. V tem primeru uporabimo kondenzatorje za zmanjšanje, ne pa tudi izničenje jalove moči. Poglejmo kar primer.

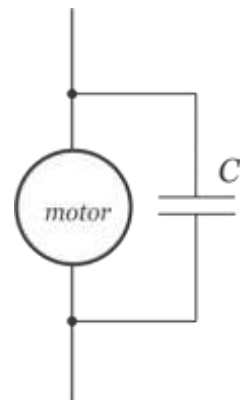


Slika 6.3: Trikotnik moči pri popolni kompenzaciji (levo) in delni kompenzaciji (desno)

Primer izračuna velikosti kompenzacijskega kondenzatorja:

Določimo velikost kompenzacijskega kondenzatorja (kondezatorjev) za popolno kompenzacijo motorja, ki ima impedanco iz primera 1. Kondenzator(je) vežemo vzporedno motorju.

Izračun: Tudi pri priključenem kondenzatorju je (jalova) moč tuljave še vedno enaka 125 Var-ov , zapišimo jo kot $Q_L = 125 \text{ VAr}$. Ta je pozitivnega predznaka, ki jo kompenziramo z reaktivno (jalovo) močjo kondezatorja, ki bo



$$jQ_c = \frac{1}{2}U^2 Y_c^* = \frac{1}{2}U^2(-j\omega C), \text{ oziroma } Q_c = -\frac{1}{2}U^2\omega C. \text{ Veljati mora } Q_L + Q_c = 0, \text{ oziroma}$$

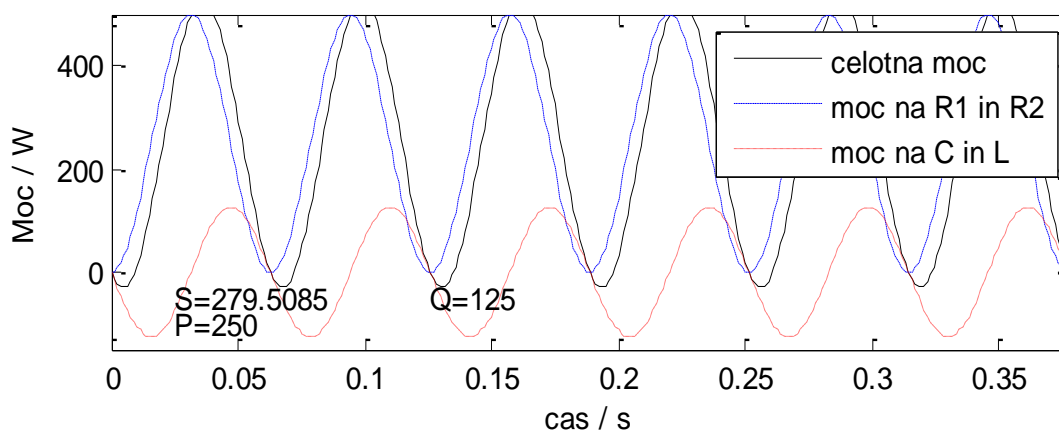
$$C = \frac{2 \cdot 125 \text{ VAr}}{U^2 \omega} = 2 \text{ mF}^1.$$

Primer izračuna kompenzacije:

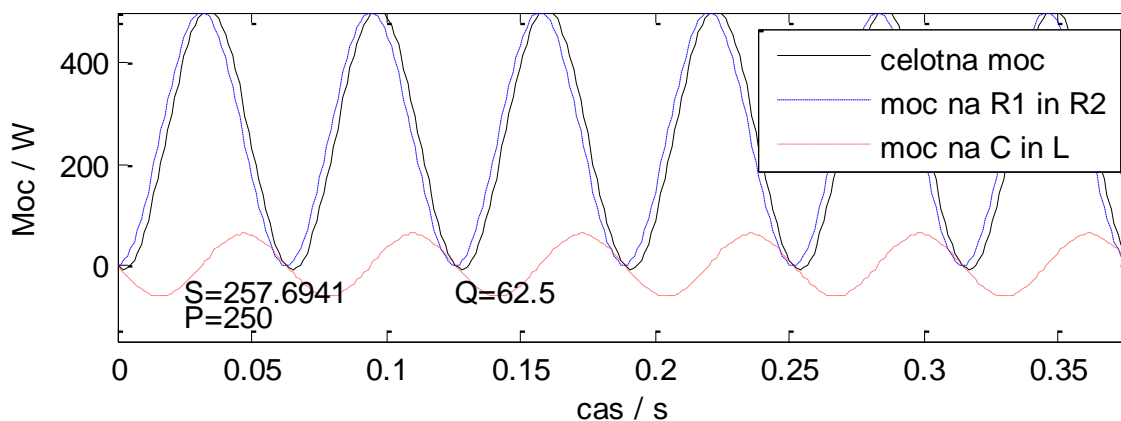
Vzemimo, da želimo za kompenzacijo moči iz primera 1 in 2 uporabiti kondenzator s kapacitivnostjo 0,5 mF. Za koliko procentov bomo zmanjšali jalovo energijo? Izračun: Z uporabo enakih zvez kot v primeru 2 ugotovimo jalovo komponento moči na kondenzatorju, ki bo $Q_c = -\frac{1}{2}U^2\omega C = -31,25 \text{ VAr}$

. Celotno jalovo komponento bomo zmanjšali za $125 \text{ VAr} - 31,25 \text{ VAr} = 93,75 \text{ VAr}$, kar je za 25%.

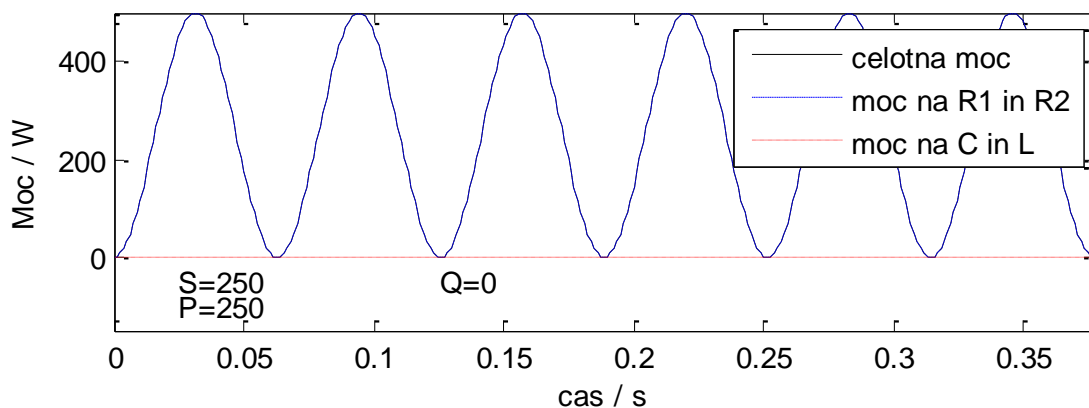
Izračunajmo še faktor moči, ki bo sedaj $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 267 \text{ VA}$ in $\cos(\varphi) = \frac{P}{S} \cong 0,94$.



a)

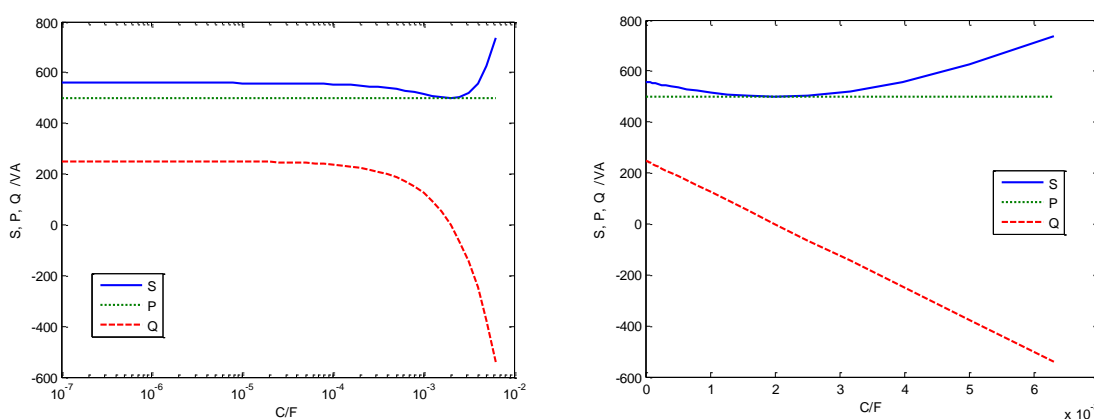


b)



c)

Slika 6.4: Celotna moč, moč na uporih R1 in R2 ter moč na C in L pri a) nekompenziranem vezju, b) delno kompenziranem vezju ($C = 1 \text{ mF}$) in c) popolnem kompenziranem vezju ($C = 2 \text{ mF}$). (RRL_kompencija_moci.m)

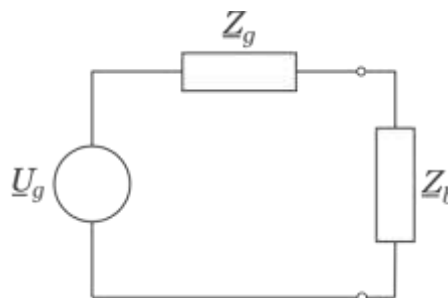


Slika 6.5: Spreminjanje S , P in Q s spreminjanjem vrednosti kompenzacijskega kondenzatorja. Na desni linearna, na levi logaritemska skala abscise. Ko je $Q = 0$ Varov, je navidezna moč (S) najmanjša in enaka delovni moči (P). (RRL_kompencija_moci.m)

PRILAGODITEV BREMENA – MAKSIMALNA DELOVNA MOČ

Kdaj bo moč na bremenu največja? Enako vprašanje smo si zastavili tudi pri enosmernih vezjih in prišli do zaključka, da bo to tedaj, ko bo upornost bremena enaka nadomestni notranji upornosti gledano s sponk bremena. Pogosto smo jo določili kot Theveninovo ali Nortonovo nadomestno upornost. Tudi pri vezjih z izmeničnimi signali ni dosti drugače.

Ogledati si moramo razmere, ko na realni vir, ki ga lahko opišemo s kompleksorjema napetosti generatorja \underline{U}_g in notranje kompleksne upornosti generatorja \underline{Z}_g , priključimo kompleksno breme \underline{Z}_b .



Slika 6.6: Kompleksno breme priključeno na vir s kompleksno impedanco.

Moč na bremenu dobimo kot realni del kompleksorja navidezne moči $P = \text{Re}\{\underline{S}_b\}$ in je $P = \frac{1}{2} I^2 \text{Re}\{\underline{Z}_b\} = \frac{1}{2} I^2 R_b$. Amplitudo toka dobimo iz preproste zveze $\underline{U}_g = \underline{I}(\underline{Z}_g + \underline{Z}_b) = \underline{I}(R_g + R_b + j(X_g + X_b))$ od koder izpeljemo

$$P_b = \frac{1}{2} R_b \frac{U_g^2}{(R_g + R_b)^2 + (X_g + X_b)^2}. \quad (6.7)$$

Sedaj se vprašamo, v katerem primeru bo ta moč največja. Vsekakor tedaj, ko bo imenovalc čim manjši, to pa bo tedaj, ko bo

$$X_g = -X_b. \quad (6.8)$$

Najprimernejši ohmski upornosti pa bi dobili z odvajanjem moči po določeni upornosti. Ugotovili bi podobno kot pri enosmernih vezjih, da bo delovna moč največja tedaj, kot bosta ohmski upornosti bremena in generatorja enaki:

$$R_g = R_b. \quad (6.9)$$

Če združimo ugotovitve o reaktivnih in ohmskih komponentah v en zapis, lahko zapišemo pogoj za maksimalno delovno moč na bremenu

$$\underline{Z}_g = \underline{Z}_b^* \quad (6.10)$$

Velja tudi obratno: $\underline{Z}_b = \underline{Z}_g^*$. Ko to velja rečemo tudi, da je **breme prilagojeno na harmoničen vir**.

Pogoja za maksimalno moč **Error! Reference source not found.** in **Error! Reference source not found.** vstavimo v enačbo **Error! Reference source not found.** in dobimo izraz za maksimalno moč na prilagojenem vezju¹¹

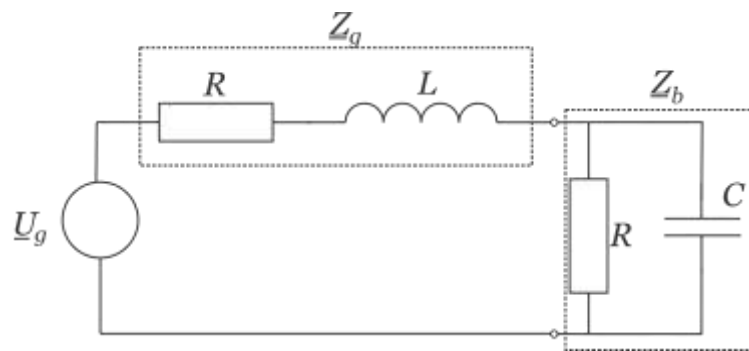
$$P_{b,\max} = \frac{U_g^2}{8R_g} \quad (6.11)$$

Primer izračuna prilagoditve bremena:

Vir z notranjo upornostjo, ki jo predstavimo z zaporedno vezavo upora $R_g = 10\Omega$ in tuljave z $X_L = \omega L = 10\Omega$ je priključen na breme iz vzporedno vezanega upora in kondenzatorja. Določimo vrednosti bremenskih upornosti, da bo na bremenu maksimalna moč. $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$.

Izračun: Veljati mora $\underline{Z}_b = \underline{Z}_g^*$, torej tudi $\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_g^*} = \frac{1}{R_b - j\omega L} = \frac{1}{10 - j10} \text{ S} = \frac{1+j}{20} \text{ S}$. Ker je $\underline{Y}_b = G_b + j\omega C$, mora biti ob izpolnitvi pogoja za maksimalno moč na bremenu $G_b = \frac{1}{20} \text{ S} \Rightarrow R_b = 20\Omega$ in $C = \frac{1}{\omega \cdot 20} = 5 \mu\text{F}$.

¹¹Če je kompleksor napetosti določen iz efektivne vrednosti, velja $U_{g,ef} = U_g / \sqrt{2}$ in $P_{b,\max} = \frac{U_{g,ef}^2}{4R_g}$.



Slika 6.7: Vezje priključeno na kompleksno breme.

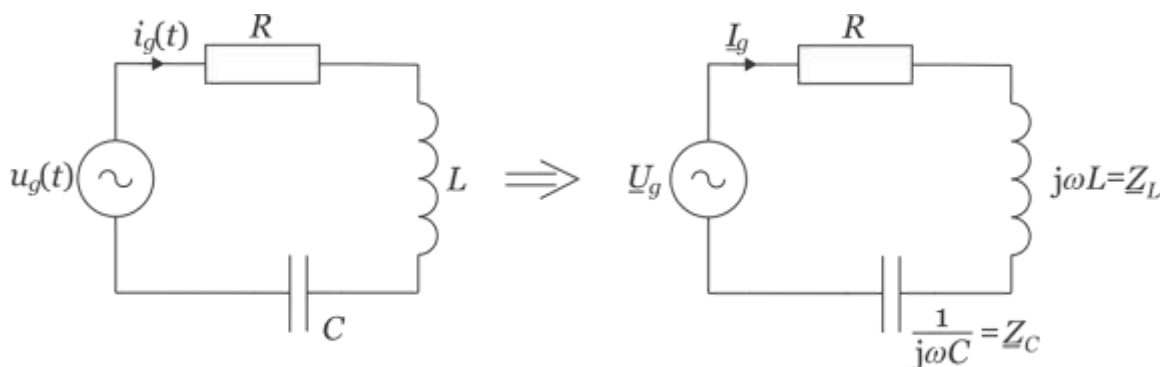
7. REZONANČNI POJAV

Vsebina poglavja: Zaporedni in vzporedni nihajni krog ali tokovna in napetostna resonanca. Pogoji za resonanco in določitev resonančne frekvence in bočnih frekvenc. Dodatni pojmi kot npr. pasovna širina, normirana pasovna širina, kvaliteta vezja, dušenje, razglašenost.

V vezjih s harmoničnimi signali je posebno zanimiv pojav, ko na zunanjih sponkah vezja (pa tudi na določenih elementih vezja) pri določeni frekvenci dosežemo izrazito visoke napetosti ali toke. Tej frekvenci rečemo resonančna frekvenca, vezje pa je tedaj v resonanci. Podrobneje si bomo ogledali le vezji z zaporedno ali vzporedno vezavo upora, kondenzatorja in tuljave. Ti vezji imenujemo tudi zaporedni in vzporedni nihajni krog.

Resonančne pojave v elektrotehniki pogosto koristno uporabimo za različna filtriranja ali prilagoditve, lahko pa so tudi nezaželeni (samozagon motorjev, itd).

ZAPOREDNI NIHAJNI KROG - TOKOVNA REZONANCA



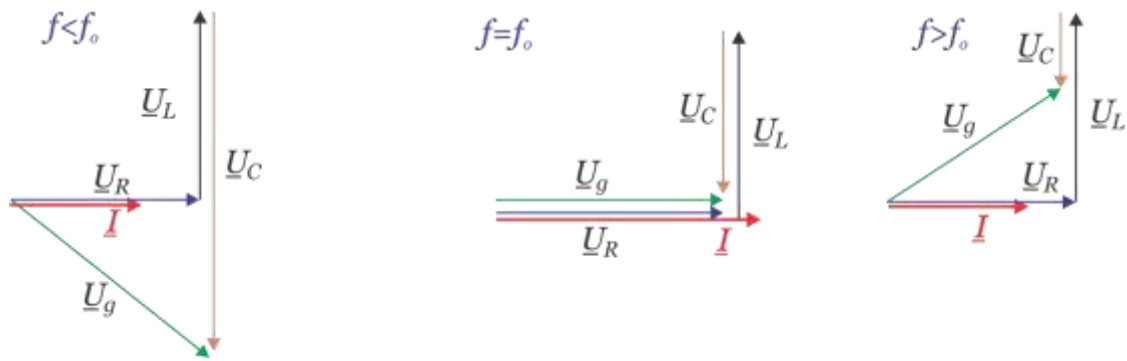
Slika 7.1: Zaporedni nihajni krog.

Vzemimo najprej primer zaporednega nihajnega kroga, ki ga sestavljajo zaporedna vezava kondenzatorja, upora in tuljave. Na vhod priključimo napetostni harmonični vir $u(t) = U \cos(\omega t)$.

Napetosti na kondenzatorju in tuljavi sta fazno zamaknjeni za π , rečemo tudi, da sta v protifazi. Ko je trenutna moč na tuljavi v naraščanju, je na kondenzatorju v upadanju. Njuna vsota je v resonanci enaka nič. Kompleksorji napetosti na posameznih elementih vezja so:

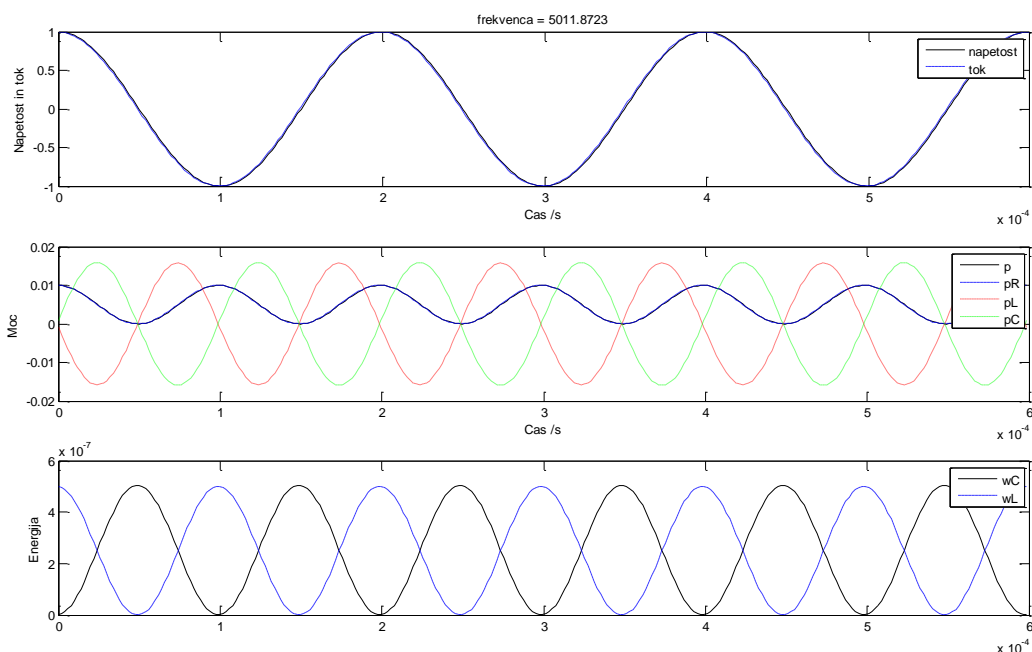
$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= \underline{I}R \\ \underline{U}_L &= \underline{I}j\omega L \\ \underline{U}_C &= \underline{I} \frac{1}{j\omega C} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Moči določimo kot $P = \frac{1}{2} I^2 R$, $Q_L = \frac{1}{2} I^2 \omega L$ in $Q_C = -\frac{1}{2} I^2 \frac{1}{\omega C}$. Pri nizkih frekvencah (pred resonančno frekvenco) je amplituda moči na kondenzatorju velika, saj je na njem velika napetost. Z višanjem frekvence se povečuje moč na tuljavi, ki je ves čas v protifazi z močjo na kondenzatorju (ti moči se torej (gledano iz zunanjih sponk) odštejeta). Z bližanjem resonančni frekvenci se povečuje tok skozi zaporedno vezavo in s tem tudi moč na uporu. V resonanci sta moči na tuljavi in kondenzatorju v protifazi in se s stališča zunanjih sponk popolnoma kompenzirata. Tedaj je »breme« čisto ohmsko, napetost in tok sta v fazi, tok je maksimalen in enak U/R .



Slika 7.2: Kompleksorji napetosti in toka pred, pri in po resonančni frekvenci f_0 .

Energija je integral moči. Na uporu se energija porablja, na tuljavi in kondenzatorju pa se shranjuje v obliki magnetnega oziroma električnega polja. V resonanci je vezje čisto ohmsko, energija tuljave in kondenzatorja se izmenjuje 2x v periodi (spodnja slika).



Slika 7.3: Prikaz napetosti in toka (zgoraj), moči na posameznih elementih vezja (sredina) in energija na kondenzatorju in tuljavi v resonanci. Tok in napetost na zunanjih sponkah sta v fazi, moči na tuljavi in kondenzatorju sta v protifazi in se odštejeta, energija med kondenzatorjem in tuljavo se izmenjuje 2x v periodi signala.

IZRAČUN REZONANČNE FREKVENCE IN TOKA PRI REZONANCI

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{I}R + \underline{I}j\omega L + \underline{I}\frac{1}{j\omega C} = \underline{I}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \underline{I}\underline{Z}.$$

Impedanca vezja je torej: $\underline{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$.

Tok v vezje je $|I| = \left| \frac{U}{Z} \right| = \frac{U}{\left| R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$. Tok bo maksimalen, ko bo

absolutna vrednost impedance najmanjša, ta pa bo tedaj, ko bo $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 0$, kar bo pri t.i.

resonančni frekvenci $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Pri tej frekvenci bo imaginarni del impedance enak nič, impedanca vezja bo čisto ohmska, tok v vezje pa bo največji. Enak bo

$$I(f = f_0) = I_0 = U / R.$$

Vezje bo torej v resonanci tedaj, ko bo navzven (na zunanjih sponkah) čisto ohmsko: tok in napetost bosta v fazi. Pogoj za resonanco zaporedne vezave RLC je

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0, \quad (7.2)$$

oziroma, ko je

$$\text{Im}\{Z\} = 0 \quad (7.3)$$

oziroma, ko je

$$\text{Im}\{Y\} = 0. \quad (7.4)$$

Za izračun resonance vezja je primerna enačba **Error! Reference source not found.** ali **Error! Reference source not found.** ali **Error! Reference source not found.**, odvisno pač od tega, s katero obliko lažje pridemo do rezultata. Potrebno pa je poudariti, da je lahko pri vezjih, ki niso primer zaporedne ali vzporedne vezave upora, kondenzatorja in tuljave maksimum amplitude toka ali napetosti dosežen tudi pri različnih vrednostih kot izhajajo iz gornjih pogojev. Značilnost resonančnega pojava je v tem, da tedaj prihaja do usklajenega prehajanja energije iz elementov vezja, ki shranjujejo energijo v magnetnem polju (tuljave) v elemente, ki shranjujejo energijo v električnem polju (kondenzatorji). Zaradi tega so napetosti ali toki na elementih vezja v resonanci lahko mnogo večji kot na vhodnih sponkah. Razlog, da le te niso največje na vhodnih sponkah je v tem, da so ti toki ali napetosti v vezju v protifazi (zamaknjeni za 180° ali blizu) in se navzven med seboj odštevajo.

LASTNOSTI RESONANČNEGA VEZJA

Lastnosti resonančnega vezja opisujemo z naslednjimi parametri:

Razglašenost vezja je določena z izrazom

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}, \quad (7.5)$$

Kvaliteta vezja je določena s kvocientom moči na reaktivnem elementu in delovno močjo

$$Q = \frac{Q_{x_0}}{P} \quad (7.6)$$

kjer je $Q_{x_0} = \frac{1}{2} I^2 \omega_0 L = \frac{1}{2} I^2 \frac{1}{\omega_0 C}$ in $P = \frac{1}{2} I^2 R$, torej

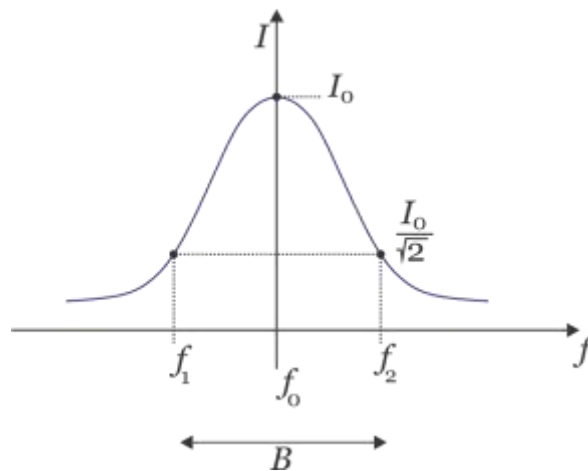
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} \quad (7.7)$$

Kvaliteta vezja je mera za »ozkost« resonančne krivulje. Bolj kot je krivulja ozka (strma okoli resonančne frekvence), večja je njena kvaliteta. V primeru zaporedne vezave elementov R, L, C je kvaliteta večja pri manjši upornosti.

Dušenje je soroden pojem kot kvaliteta, saj je definiran kot recipročna vrednost kvalitete

$$D = 1/Q.$$

Bočni frekvenci in pasovna širina



Slika 7.4: Prikaz tokovne resonance in ključnih parametrov: Označimo resonančno frekvenco f_0 , največji tok pri resonančni frekvenci $I_0 = I(f = f_0)$, ter spodnjo in zgornjo bočno frekvenco (f_1 in f_2), ki nastopita pri $I_0/\sqrt{2}$ ter pasovno širino.

Bočni frekvenci (f_2 in f_1) sta določeni pri vrednostih toka, ki je od maksimalne vrednosti (pri resonančni frekvenci) manjši za $\sqrt{2}$.

Razlika med zgornjo in spodnjo bočno frekvenco je **pasovna širina** vezja

$B = f_2 - f_1$. Poznamo tudi normirano pasovno širino, ki je pasovna širina deljena z resonančno frekvenco: $B_{\text{norm}} = \frac{f_2 - f_1}{f_0}$. Kvaliteta je definirana tudi kot recipročna vrednost normirane pasovne

$$\text{širine } Q = \frac{1}{B_{\text{norm}}} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}.$$

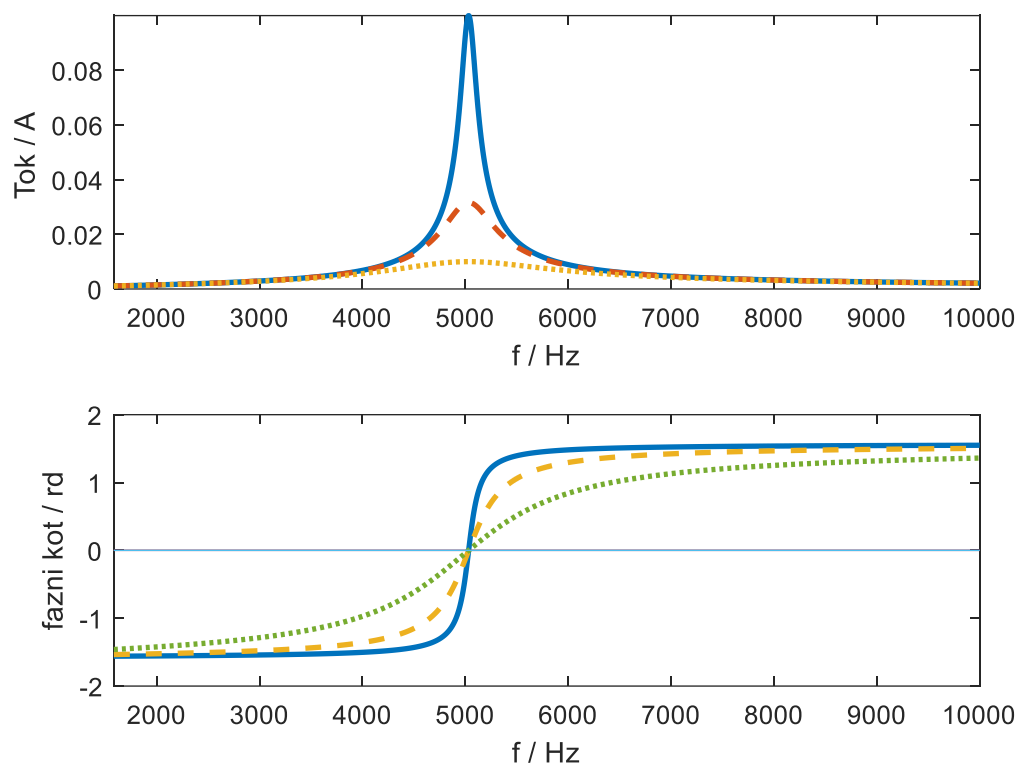
Določimo pasovno širino za serijsko resonančno vezje. Poiskati moramo frekvenci, pri kateri pade amplituda za $\sqrt{2}$. Veljati mora $I(\omega_{1,2}) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}}$. Enačbi bo zadoščeno,

$$\text{če bo } R^2 + \left(\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C}\right)^2 = 2R^2 \text{ oziroma } \left|\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C}\right| = R, \text{ to pa bo tedaj, ko bo } \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R$$

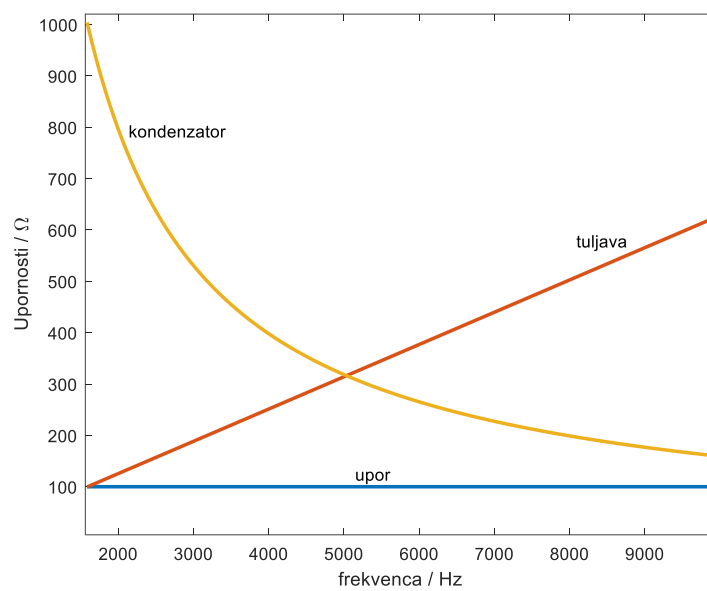
in $\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R$. Če enačbi seštejemo, dobimo zvezo $LC = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} = \frac{1}{\omega_0^2}$ oziroma $f_0^2 = f_1 f_2$. Če pa enačbi odštejemo izpeljemo zvezo $B_{\text{norm}} = \frac{R}{\omega_0 L}$.

Da bi določili pasovno širino, moramo rešiti kvadratno enačbo, saj iz $\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R$ sledi

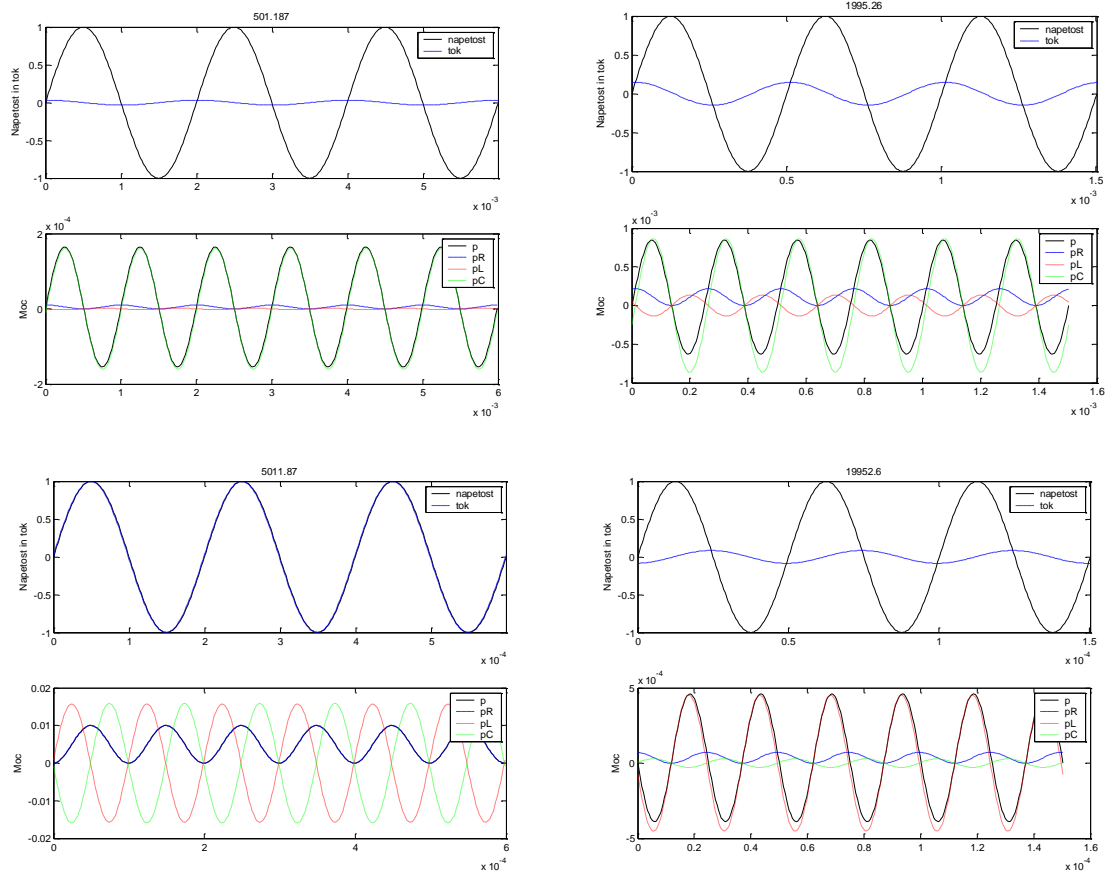
$$\omega_1^2 L - \frac{1}{C} = \omega_1 R. \text{ Rešitvi za } \omega_1 \text{ in } \omega_2 \text{ sta: } \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} + \frac{R}{2L} \text{ in } \omega_1 = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} - \frac{R}{2L}.$$



Slika 7.5: Primer zaporedne resonance pri vrednostih elementov $L = 10 \text{ mH}$, $C = 10 \text{ } \mu\text{F}$, $R = 100 \text{ } \Omega$ (polna črta), $316 \text{ } \Omega$ (prekinjena črta) in $1000 \text{ } \Omega$ (pikčasta črta). Pri manjši upornosti je krivulja toka bolj ozka, kar določimo tudi s pasovno širino ali kvaliteto nihanjega kroga. Na spodnji sliki vidimo spreminjanje faznega kota, ki je pri resonančni frekvenci enak nič. Skala na abscisi je logaritemska. (RLC2.m)



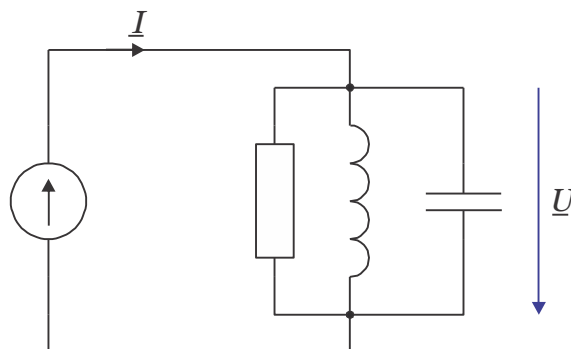
Slika 7.6: Spreminjanje posamezne upornosti s frekvenco. Pri resonančni frekvenci sta reaktanci tuljave in kondenzatorja enaki. (RLC2.m)



Slika 7.7: Zgoraj: prikaz časovnega signala napetosti in toka pred (levo zgoraj, $f = 901$ Hz), tik pred (desno zgoraj, $f = 2000$ Hz) pri (levo spodaj, $f = 5011.87$ Hz) in za (desno spodaj, $f = 901$ Hz) resonančno frekvenco. Spodaj: Moč na uporu (p_R), moč na tuljavi (p_L), moč na kondenzatorju (p_C) in skupna moč (p): Jalova moč v resonanci je enaka nič, na posameznih reaktivnih elementih (tuljava, kondenzator) pa je jalova moč velika vendar v protifazi. (RLC3.m)

VZPOREDNI NIHAJNI KROG - NAPETOSTNA REZONANCA

Imamo vzporedno vezavo upora, kondenzatorja in tuljave.



Slika 7.8: Vzporedni nihajni krog.

Napetost na sponkah vezja je $|\underline{U}| = |\underline{I}| |\underline{Z}| = \frac{|\underline{I}|}{|\underline{Y}|} = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$. Napetost na sponkah vezja bo

maksimalna, ko bo izpolnjen pogoj $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$. To pa je tudi tedaj, ko bo admittance vezja ($\underline{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$) čisto realna, oziroma, ko bo imaginarni del admittance enak nič. Iz tega sledi, da

bo resonančna frekvenca $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, kar je enako kot pri zaporedni resonanci.

Admittanca tega vezja je $\underline{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$. Vezje bo v resonanci, ko bo imaginarni del admittance enak nič, to je, ko bo $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$.

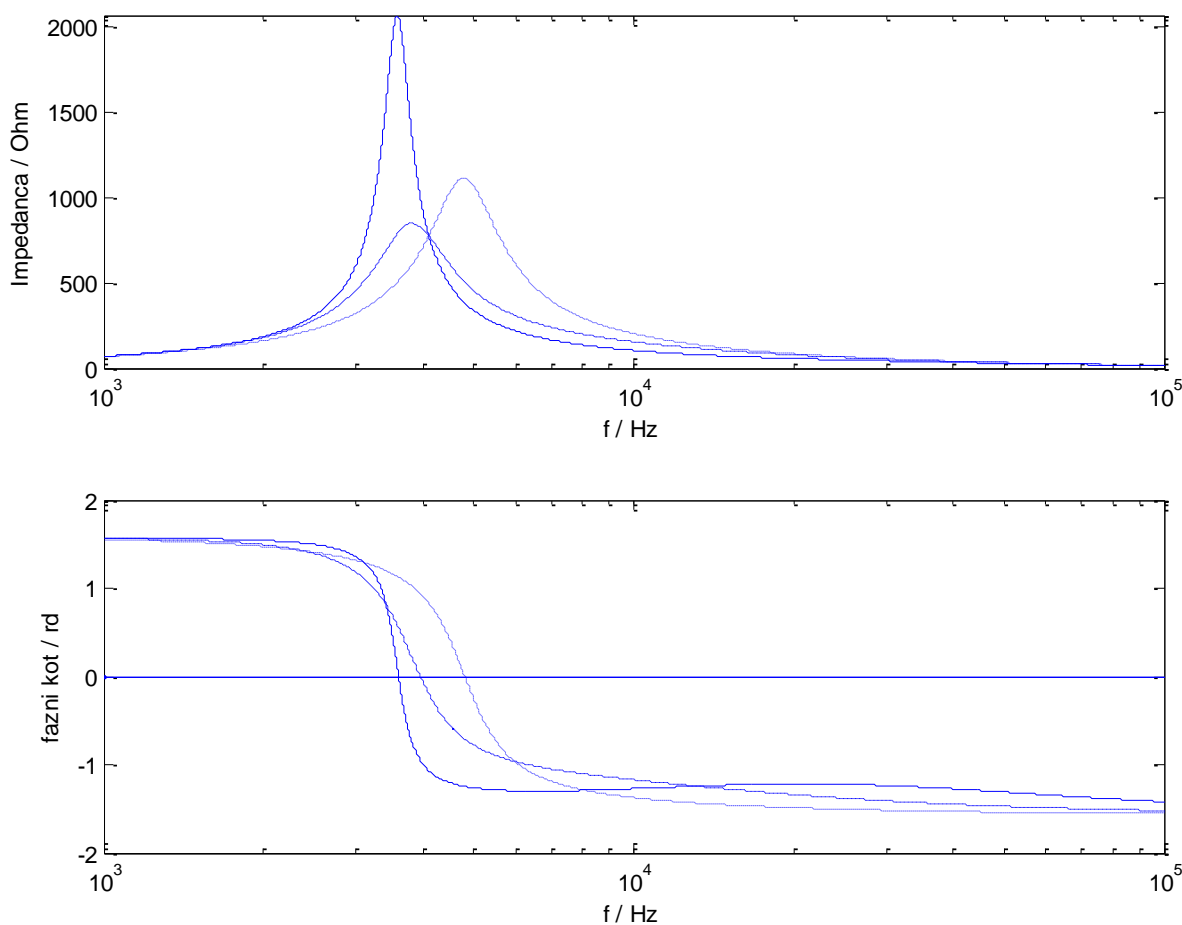
V čem je torej razlika med »vzporedno« in »zaporedno« resonanco? Razlika je v tem, da je sedaj pri resonančni frekvenci na zunanjih sponkah maksimalna napetost, pri zaporedni resonanci pa tok. Vzporedno resonanco zato tudi imenujemo napetostna, zaporedno pa tokovna resonanca.

Tudi pri vzporedni resonanci lahko govorimo o razglašenosti $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$, kvaliteti $Q = \frac{\omega_0 C}{G}$ in pasovni širini $B = \frac{1}{Q}$. Analogno zaporedni resonanci lahko izpeljemo zvezo med bočnima frekvencama in resonančno frekvenco $f_0^2 = f_1 f_2$.

DRUGA VEZJA

Vzemimo primer vezja vzporedno vezanih dveh impedanc: upora in kondenzatorja v eni veji in tuljave in kondenzatorja v drugi veji. Admitanca vezja bo $\underline{Y} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R + j\omega L}$. S pomočjo

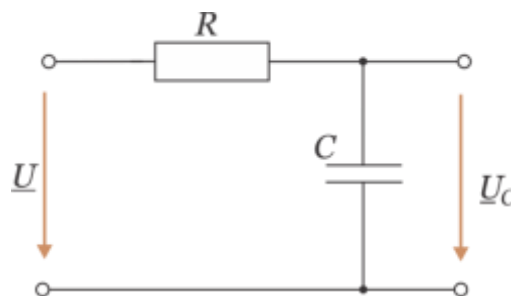
analize admitance lahko ugotovimo, da gre za primer napetostne resonance, ki pa nima maksimuma vedno pri faznem kotu enakem nič. Pri $R = 100 \Omega$ (polna črta) je pri maksimumu impedance (toka) fazni kot enak 60° , pri 316Ω (prekinjena črta) $11,8^\circ$ in pri 1000Ω (pikčasta črta) $1,7^\circ$. Vidimo tudi, da se pri različnih vrednostih upornosti ne spreminja le amplituda impedance (napetosti), pač pa tudi resonančna frekvenca.



Slika 7.9: Primer resonance vezja pri faznem kotu, ki je različen od nič. (RLC.m)

* NIZKOPREPUSTNI R-C FILTER

Napetostni harmonični vir priklopimo na zaporedno vezana upor in kondenzator. Zanima nas napetost na izhodu (kondenzatorju) v odvisnosti od napetosti na vohdu pri različnih frekvencah vzbujalnega signala.



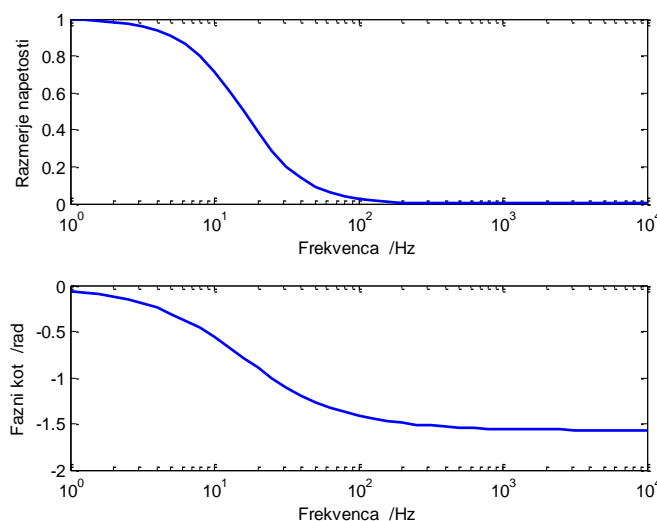
Slika 7.10: Zaporedna vezava RC člena priključena na napetostni vir.

Kompleksor izhodne napetosti je (delilnik napetosti):

$$\underline{U}_C = \underline{U} \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \underline{U} \frac{1}{1 + j\omega RC}. \quad (7.8)$$

Razmerje med amplitudama napetosti na kondenzatorju in vhodne napetosti lahko označimo kot ojačanje ali tudi **prenosna funkcija**:

$$A = \left| \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \text{ fazni kot med napetostnima signaloma pa je } \varphi = \text{Atan}(-\omega RC).$$



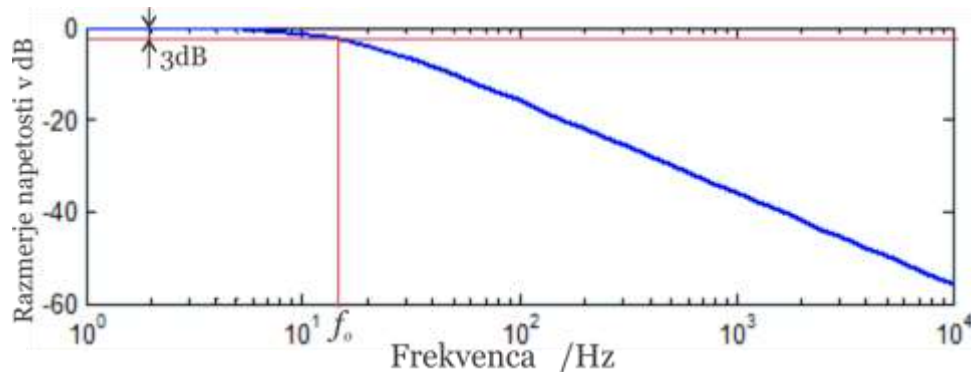
Slika 7.11: Zgoraj: razmerje napetosti na kondenzatorju in na vohdu kot funkcija frekvence. Spodaj: fazni kot kot funkcija frekvence. $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$

Ojačanje in fazni kot na sliki opisuje zmanjšanje napetosti na kondenzatorju pri višjih frekvencah. To je tudi sicer pričakovano, saj se upornost kondenzatorja pri izmeničnih signalih s frekvenco manjša $\left(\frac{1}{\omega C}\right)$, torej se manjša tudi padec napetosti na njej. Hkrati se spreminja fazni kot izhodnega signala, ki je v konkretnem primeru enak razliki med faznim kotom napetosti na kondenzatorju in faznim kotom vhodnega napetostnega signala. Ta je pri nizkih frekvencah enak nič, saj je tedaj na kondenzatorju praktično vsa vhodna napetost. Pri visokih frekvencah pa bo praktično vsa napetost na uporu, le majhen del pa na kondenzatorju.

Ker je napetost na kondenzatorju pri višjih frekvencah zelo nizka, tako vezje obravnavamo kot primer preprostega nizkofrekvenčnega (prepustnega) RC filtra (sita), ki »ohrani« nizkofrekvenčne signale, visokofrekvenčne pa zmanjša oz. »izloči«.

Običajno določimo frekvenco, pri kateri se začne napetost bistveno zmanjševati pri vrednosti $U_c = U/\sqrt{2} = 0,707 \cdot U$. To imenujemo tudi **mejna frekvenca** f_0 :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_0 RC)^2}} \Rightarrow 2 = 1 + (2\pi f_0 RC)^2 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$



Pogosto uporabimo logaritemsko merilo za prikaz »ojačanja« filtra in sicer kot $A_{dB} = 20\log(A)$. Pri ojačanju ena je logaritem enak nič, pri mejni frekvenci pa je ojačanje enako $20\log(1/\sqrt{2}) \cong -3$ dB. Razmerje v dB prikazuje zgornji graf, ki ga imenujemo tudi **Bodejev diagram (ang. Bode plot)**. Vidimo, da se po mejni frekvenci ojačanje (slabljenje) dejansko precej linearno zmanjšuje s frekvenco. Za frekvence, ki so mnogo večje od mejne, lahko enačbo prenosne funkcije aproksimiramo z

$$A = \left| \frac{U_c}{U} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \approx \frac{1}{\omega RC}. \text{ Če to izrazimo z ojačanjem v decibelih dobimo}$$

$A_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\omega RC}\right) = -20\log(\omega RC) = -20\log(\omega) - 20\log(RC)$. Iz enačbe ugotovimo, da se ojačanje zmanjšuje za 20 decibelov pri vsakem povečanju frekvence za 10x. Rečemo, da je **slabljenje filtra -20 dB/dekado**. Takemu filtru rečemo tudi **filter prvega reda**. V praksi pogosto uporabimo tudi filtre višjega reda, ki omogočajo bolj učinkovito dušenje. Filter drugega reda ima slabljenje -40dB/dekado itd.

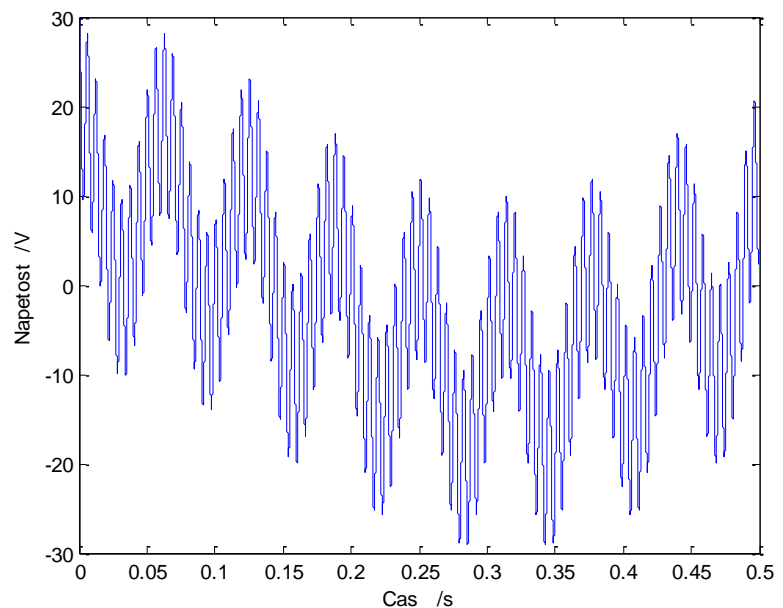
Poglejmo si preprost primer, ko imamo na vhodu zaporednega RC vezja napetostni signal sestavljen iz treh frekvenc:

$u(t) = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t) + U_3 \cos(\omega_3 t)$. Vzemimo, da so vse amplitude enake 10 V, krožne frekvence pa so

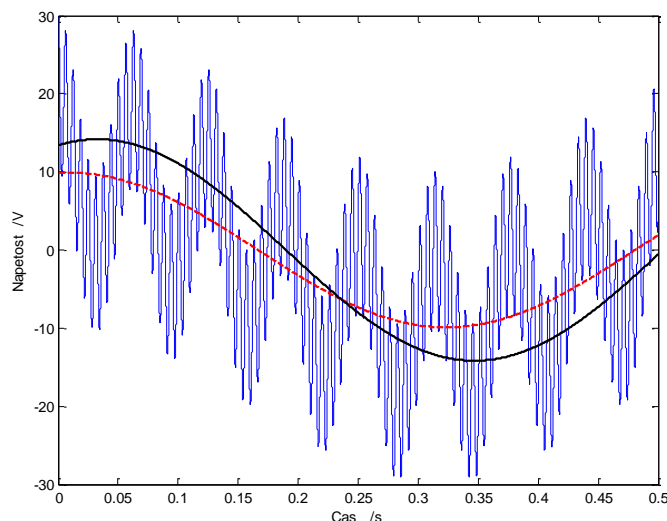
$$\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}, \omega_2 = 10^2 \text{ s}^{-2}, \omega_3 = 10^3 \text{ s}^{-3}$$

. Vzemimo še filter s podatki $R = 1 \text{ k}\Omega, C = 10 \mu\text{F}$. Vhodni signal vidimo na sliki desno. Iz njega želimo s pomočjo RC filtra izločiti le nizkofrekvenčni signal,

torej tistega z $\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}$.



Ta signal priključimo na RC filter in opazujemo napetost na izhodu (kondenzatorju) ¹². Ta je prikazana skupaj z nizkofrekvenčnim signalom na spodnji sliki.

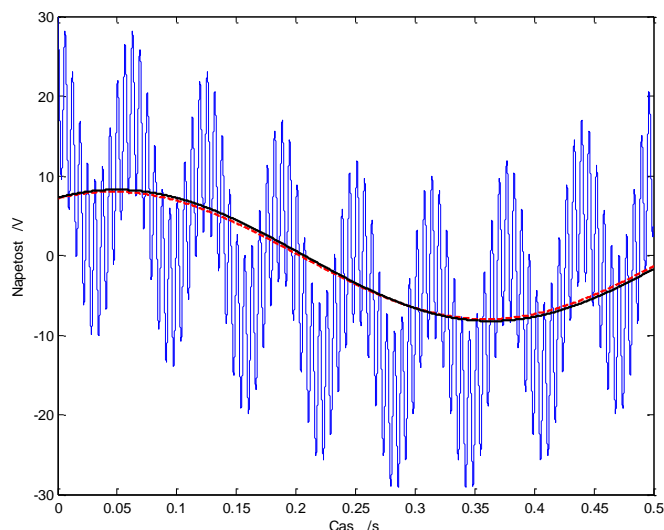


Slika 7.12: Vhodni signal (modra črta) vključuje signal nizke frekvence ω_1 (rdeča črta). Izhodno napetost (na kondenzatorju) pri filtru z $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$, ki ima mejno frekvenco 16 Hz, prikazuje črna črta.

Vidimo, da že preprost RC filter lepo prepusti signal nizke frekvence in mnogo manj komponent visokih frekvenc. V primerjavi z delom vhodnega signala nizke frekvence pa lahko ugotovimo, da izhodni signal ni popolnoma identičen vhodnemu nizkofrekvenčnemu, pač pa ima nekoliko drugačno fazo in tudi amplitudo. To bi lahko pričakovali glede na frekvenčno odvisnost faze in ojačanja filtra.

Pri tem nismo imeli mejne frekvence optimalno nastavljene, saj je bila približno $f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \cong 16 \text{ Hz}$.

Če povečamo upornost na $5 \text{ k}\Omega$, dobimo mejno frekvenco 3 Hz, ki lepo ohrani nizkofrekvenčni signal in ga tudi mnogo manj »premakne v fazi«.



Slika 7.13: Vhodni signal (modra črta), ki vključuje signal nizke frekvence (rdeča črta). Izhodna napetost na kondenzatorju pri filtru z $R = 5 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$ (črna črta) in mejno frekvenco 3 Hz.

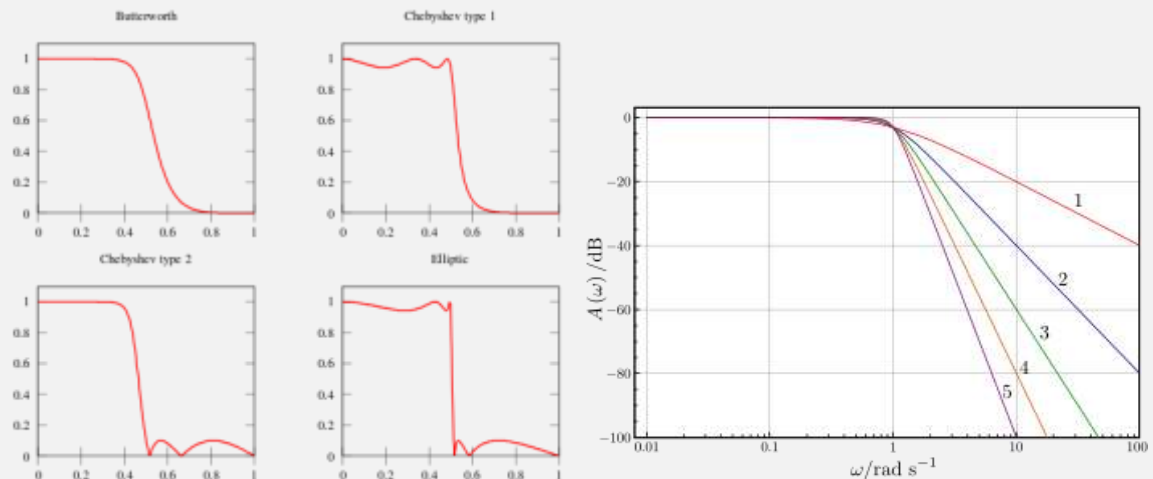
¹² Za izračun določimo kompleksor izhodne napetosti (na kondenzatorju) za vsako frekvenco posebej, kompleksorje pretvorimo v časovni signal in časovne signale seštejemo. Zaradi različnih frekvenc signalov ne smemo seštevati posameznih kompleksorjev izhodnih signalov, pač pa jih moramo najprej pretvoriti v časovni prostor!

BUTTERWORTHOV FILTER

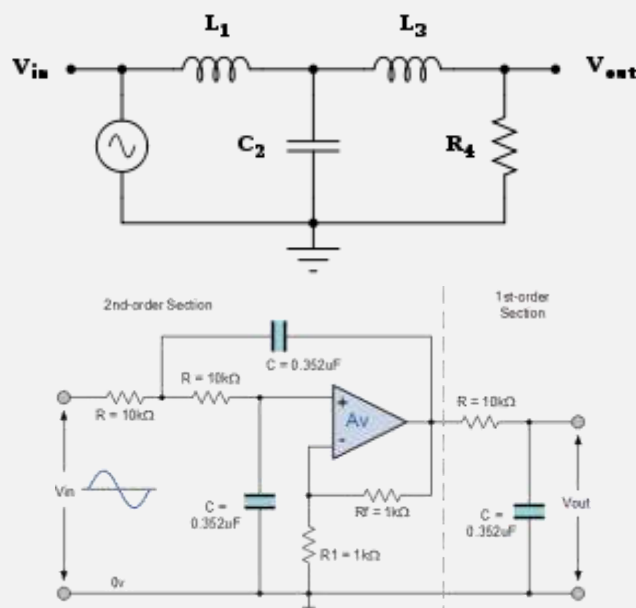
V praksi poznamo še mnogo drugih filtrov za dušenje signalov, na primer filter Chebisheva, eliptični filter, Besselov filter, Gaussov filter itd. Vsak ima svoje prednosti in pomanjkljivosti (**Error! Reference source not found.**). Na kratko omenimo le t.i. Butterworthov filter, katerega značilnost je gladkost (majhna valovitost) prenosne funkcije v prepustnem pasu. **Error! Reference source not found.** desno prikazuje slabljenje (atenuacijo) signalov za Butterworthove filtre, ki jih podaja

prenosna funkcija $A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_o}\right)^{2n}}}$, kjer je f_o mejna frekvenca, n pa red Butterworthovega

filtra. Ta red hkrati predstavlja potrebno število kondenzatorjev in tuljav, ki jih potrebujemo za realizacijo filtra. Tak filter lahko realiziramo na več načinov, s kombinacijo uporov, kondenzatorjev (pasivnimi elementi) ali pa tudi z uporabo aktivnih elementov. Prednost uporabe pasivnih elementov je, da tak filter ne potrebuje dodatnega napajanja, je enostavno izvedljiv tudi za večje tokove, je enostaven za realizacijo, lahko dela do zelo visokih frekvenc, itd. Ne omogoča pa ojačitve signala, poleg tega je lahko njihova vhodna impedanca zelo majhna, izhodna zelo visoka, kar ni zaželeno v določenih aplikacijah. Poleg tega za realizacijo zahtevajo uporabo tuljav (dušilk), kar lahko poveča ceno (še posebno, če se zahteva veliko natančnost), potreben prostor je večji, niso dobavljivi v poljubnih vrednosti induktivnosti itd. Te pomanjkljivosti odpravijo aktivni filtri, realizirani z uporabo operacijskih ojačevalnikov.



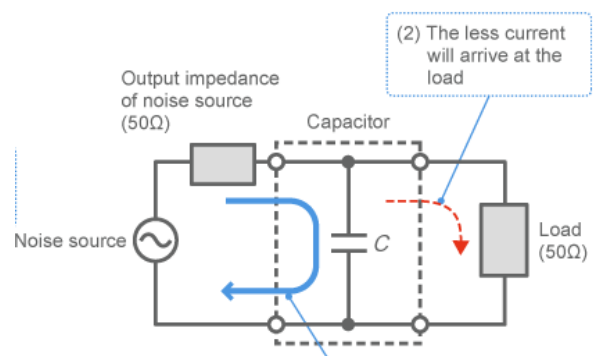
Slika 7.14: Levo: Prikaz ojačanja/slabenja različnih tipov filtrov. Desno: Ojačanje/slabenje Butterworthovega filtra v odvisnosti od reda filtra.



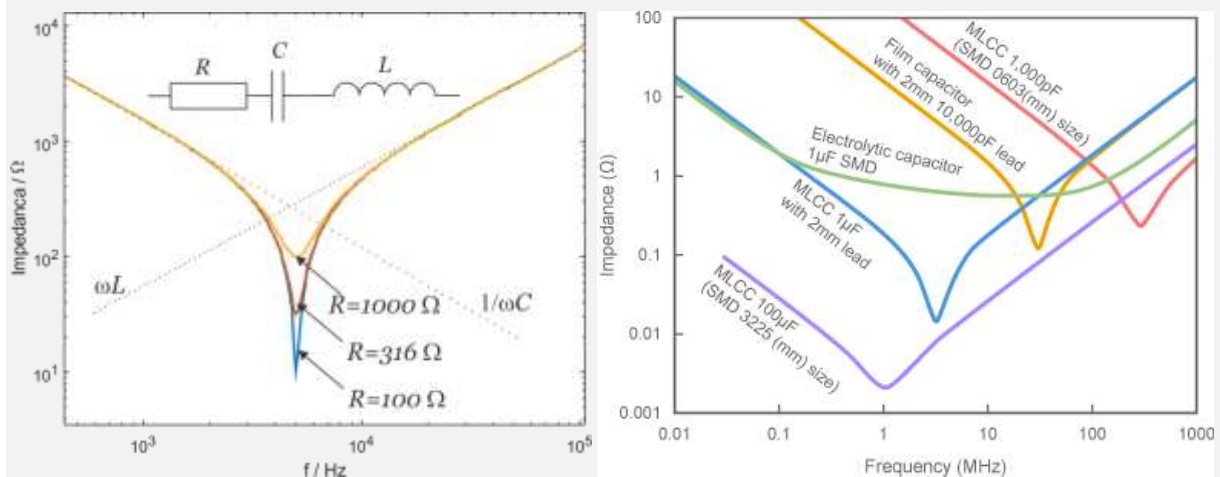
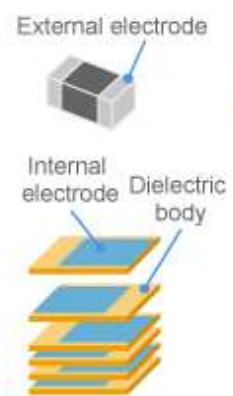
Slika 7.15: Butterworthov filter tretjega reda izveden z uporabo pasivnih elementov (levo) in (desno) s kombinacijo z aktivnim elementom (operacijskim ojačevalnikom).

KONDEZATOR KOT FILTER VISOKOFREKVENČNIH MOTENJ

Visokofrekvenčne motnje lahko odpravimo tako, da vzporedno z bremenom vežemo kondenzator, ki odvede stran od bremena tok amplitude $I = U\omega C$, kjer je U amplituda napetosti na bremenu (in kondenzatorju) in I amplituda toka skozi kondenzator pri določeni frekvenci vzbujačnega signala. Vzporedno vezan kondenzator torej predstavlja nizko-ohmsko upornost $\frac{1}{\omega C}$ za visoko-frekvenčne signale. Pri tem kako načrtovati pravilno velikost in tip kondenzatorja, je potrebno upoštevati električne lastnosti realnih kondenzatorjev, ki imajo zaradi neidealnega dielektrika določene ohmske izgube, predvsem pa pri višjih frekvencah postanejo pomembne induktivne lastnosti, ki so posledica oblikovanja elektrodne strukture.



Enostaven nadomestni model kondenzatorja je vzporedna vezava kondenzatorja, upora in tuljave (slika spodaj). V bistvu dobimo razmere, ki so značilne za zaporedno resonančno vezje. Impedanca nadomestnega vezja kondenzatorja pada s frekvenco (v logaritemskem merilu linearno), pri visokih frekvencah pa se zopet povečuje na račun impedance tuljave, ki s frekvenco narašča. Kapacitivni karakter ima tak kondenzator le do resonančne frekvence. Kvaliteta kondenzatorja je odvisna tudi od ohmskih izgub, ki se kažejo z globino »lijaka«, ki ga ustvari $Z(f)$ graf. Večje kot so ohmske izgube, bolj je graf »sploščen«. Desna slika prikazuje izmerjene impedance različnih tipov kondenzatorjev (Vir: Murata). Ugotovimo lahko, da imajo elektrolitski kondenzatorji precej »sploščen« $Z(f)$ graf, kar pomeni, da imajo večje ohmske izgube. MLCC kondenzatorji so večplastni keramični kondenzatorji (Multi Layer Ceramic Capacitors), ki lahko dosegajo velike kapacitivnosti (majhna impedanca!) in majhne ohmske izgube.



Slika: Levo: prikaz impedance kondenzatorja modeliranega kot kondenzatorju zaporedno vezana upor in tuljava. Desno: prikaz impedance različnih tipov kondenzatorjev (folijskega, elektrolitskega in večplastnega keramičnega).

8. METODE REŠEVANJA VEZIJ

Vsebina poglavja: Metode za analizo vezij z izmeničnimi signali (metoda Kirchoffovih zakonov, metoda zračnih tokov, metoda spojiščnih potencialov), stavki (superpozicije, Theveninovo in Nortonovo nadomestno vezje, Tellegen). Posebnost pri izmeničnih vezjih – obravnava sklopljenih tuljav.

Različne načine analize enosmernih vezij smo že spoznali pri OE1. Pri vezjih z izmeničnimi signali lahko ugotovimo, da smo z vpeljavo kompleksorjev toka in napetosti vpeljali sorodne relacije: s kompleksorji smo zapisali Ohmov zakon ter oba Kirchoffova zakona. Za reševanje vezij z izmeničnimi signali lahko torej uporabimo iste metode reševanja kot pri enosmernih, le s kompleksorji jih moramo pisati.

Pri izmeničnih signalih imamo še en poseben slučaj. In sicer magnetno sklopljene elemente, ki nastopajo v primeru obravnave vezij z najmanj dvema tuljavama, ki si delita del (ali celoten) fluksa. Ti elementi imajo zaradi sklopitve dodaten padec napetosti na tuljavi, ki se padcu napetosti zaradi lastne induktivnosti prišteva ali pa odšteva.

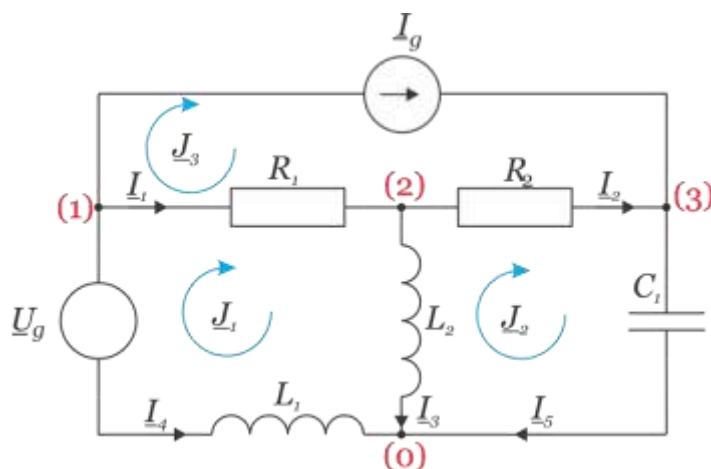
OSNOVNE METODE ZA ANALIZO VEZIJ:

- 1) Metoda Kirchoffovih zakonov
- 2) Metoda zračnih tokov
- 3) Metoda spojiščnih potencialov

STAVKI (TEOREMI):

- 1) Stavek superpozicije
- 2) Stavek Thevenina / Nortona
- 3) Stavek Tellegena
- 4) Stavek o največji moči

Vse omenjene metode analize in stavkov bomo prikazali na sledečem primeru vezja:



Slika 8.1: Primer vezja za analizo vezij: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $C = 166,67 \mu F$, $L_1 = 16,61 mH$, $L_2 = 50 mH$, $u_g = 100 \cos(\omega t) V$, $i_g = 1 \cos(\omega t + \pi/2) A$, $\omega = 33,34 s^{-1}$. (Matlab: metode.m)

METODA KIRCHOFFOVIH ZAKONOV

Metoda temelji na uporabi prvega in drugega Kirchoffovega zakona:

$$1.K.Z.: \sum_{k=1}^m \underline{I}_k \Big|_{\text{v spojišču}} = 0 \text{ vsota vseh (kompleksorjev) toka v spojišču je enaka nič}$$

$$2 K.Z.: \sum_{j=1}^n \underline{U}_j \Big|_{\text{v zanki}} = 0 \text{ vsota vseh (kompleksorjev) napetosti v zanki je enaka nič}$$

Upoštevajmo 1K.Z. za tri spojišča v vezju:

$$\text{spojišče (1): } \underline{I}_1 + \underline{I}_4 + \underline{I}_g = 0$$

$$\text{spojišče (2): } -\underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_2 = 0$$

$$\text{spojišče (3): } -\underline{I}_2 + \underline{I}_5 - \underline{I}_g = 0$$

spojišče (0): ni potrebno, odvečna enačba

Upoštevajmo 2.K. Z. za dve zanki v vezju:

$$\text{zanka } J_1: \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_3 \underline{Z}_{L2} + (-\underline{I}_4 \underline{Z}_{L1}) - \underline{U}_g = 0$$

$$\text{zanka } J_2: -\underline{I}_3 \underline{Z}_{L1} + \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_5 \underline{Z}_C = 0$$

zanka J_3 : ni potrebna, niti je ne moremo zapisati

Po metodi Kirchoffovih zakonov potrebujemo sledeče število enačb:

- Število enačb z uporabo 1 KZ je enako številu spojišč -1
- Število enačb z uporabo 2 KZ je enako številu dopolnilnih vej

V konkretnem primeru potrebujemo $4-1=3$ enačbe z uporabo 1KZ in 2 enačbi z uporabo 2KZ. Skupno število enačb bo torej $3+2=5$.

Reševanje takega sistema »na papirju« je lahko zamudno, zato običajno le pripravimo sistem enačb v ustrezni (matrični) obliki, ki jo nato prenesemo v ustrezen računalniški program in jo rešimo z uporabo metod za reševanje sistemov enačb. V konkretnem primeru bo uporabljen program Matlab.

Določimo kompleksorje impedanc bremen in virov

$$\underline{Z}_{L_1} = j\omega L = j5 \Omega, \underline{Z}_{L_2} = j15 \Omega, \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j20 \Omega, \underline{U}_g = 100 \text{ V}, \underline{I}_g = j1 \text{ A}$$

in zapišemo sistem enačb v matrični obliki (zaradi preglednejšega zapisa zapisujemo matematično, brez enot):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & j15 & -j5 & 0 \\ 0 & 5 & -j15 & 0 & -j20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j1 \\ 0 \\ j1 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

To je zapis v obliki $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ Pogledajmo si primer reševanja takega sistema s programom Matlab. Tvorimo matriko A, ki bo $\mathbf{A} = [1,0,0,1,0; -1,1,1,0,0; 0,-1,0,0,1; 10,0,15j,-5j,0; 0,5,-15j,0,-20j]$ in vektor b, ki bo $\mathbf{b} = [-j; 0; j; 100; 0]$. Matlab ponuja različne načine reševanja sistemov enačb. Še najbolj enostavno dobimo rešitev tako, da invertiramo matriko A in jo pomnožimo z vektorjem b: Dobimo rešitev v obliki vektorja z iskanimi toki. Matlab: $\mathbf{x} = \text{inv}(\mathbf{A}) * \mathbf{b}$

Rezultat je pet kompleksnih števil za toke od I_1 do I_5 :

$$1.0873 - 2.3450i$$

-0.1135 + 3.1485i
 1.2009 - 5.4934i
 -1.0873 + 1.3450i
 -0.1135 + 4.1485i

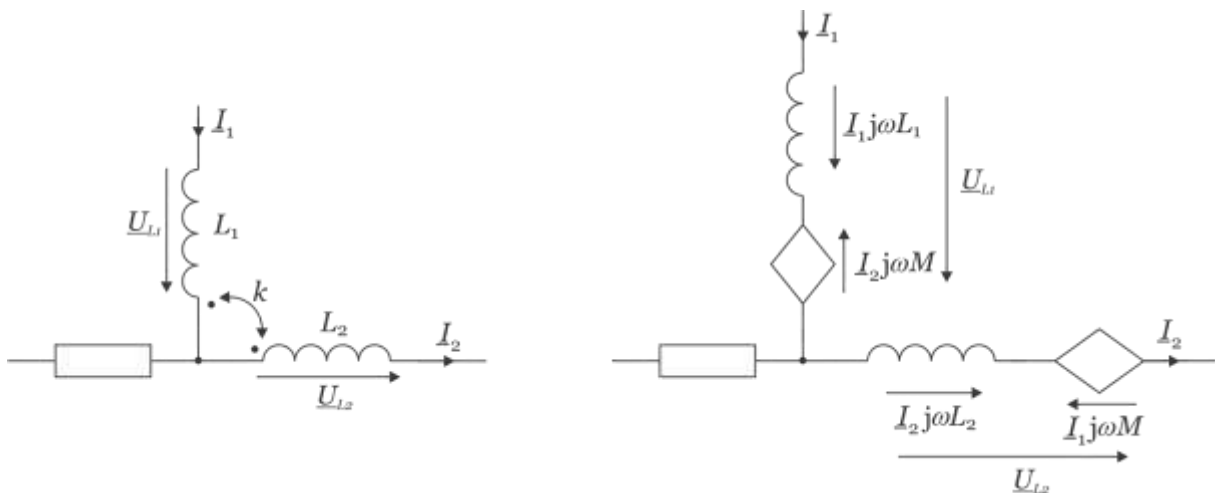
Tok I_1 bo torej (1,0873-j2,3450) A itd.

Drugi načini reševanja sistema enačb: Lahko uporabimo tudi Kramerjevo pravilo z reševanjem z determinanto in poddeterminantami, ki pa je nekoliko bolj zamudno. Determinanto dobimo z ukazom **det(A)**, pri poddeterminantah pa moramo najprej sekvenčno menjati stolpce z vektorjem b. To naredimo s sledečimi ukazi: **D1=A, D1(:,1)=b, I1=det(D1)/det(D)**. Dobimo 1.0873 - 2.3450i, kar je seveda rešitev za tok I_1 . Tretji način je tako imenovana Gaussova eliminacija (več pri matematiki), kjer enak rezultat dobimo s preprostim Matlab ukazom **x=A\b**.

ANALIZA VEZJA S SKLOPLJENIMI TULJAVAMI

O označevanju podpiranja fluksov smo že govorili v prejšnjih poglavjih, torej tu samo na kratko: podpiranje (seštevanje) fluksov označimo tako, da postavimo piko v obeh sklopljenih elementih na začetek ali konec elementa glede na tok v element.

Ta dodatni padec napetosti lahko označimo s posebnim simbolom (romb) in ga imenujemo **tokovno krmiljen napetostni vir**. S takimi in podobnimi elementi si pomagamo tudi pri nadomestnih vezjih bolj zahtevnih elementov, kot so različni tipi nelinearnih elementov (tranzistorjev, ...).



Slika 8.2: Levo: magnetno sklopljeni tuljavi v vezju. Desno: napetost zaradi medsebojne induktivnosti lahko predstavimo s tokovno krmiljenim napetostnim virom.

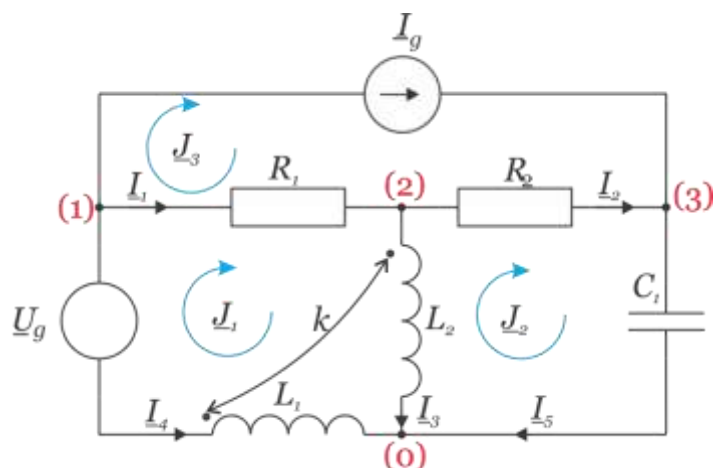
Primer upoštevanja medsebojne induktivnosti:

V veji s tokom $I_1 = 10\text{ A}$ je tuljava z $X_{L1} = 10\ \Omega$, ki ima magnetni sklep ($k = 0,8$) s tuljavo z $X_{L2} = 90\ \Omega$ v sosednji veji s tokom $I_2 = (2 + j5)\text{ A}$. Fluksa se podpirata. Kolikšna je napetost na tuljavama?

Izračun: Določiti moramo medsebojno induktivnost oziroma upornost zaradi medsebojne induktivnosti $\omega M = \omega k \sqrt{L_1 L_2} = k \sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2} = k \sqrt{X_{L1} X_{L2}}$, ki bo $24\ \Omega$. Nato določimo še padec napetosti kot

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot jX_{L1} + \underline{I}_2 \cdot jX_M = 10\text{ A} \cdot j10\ \Omega + (2 + j5)\text{ A} \cdot j24\ \Omega = (-120 + j148)\text{ A}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot jX_{L2} + \underline{I}_1 \cdot jX_M = (2 + j5)\text{ A} \cdot j90\ \Omega + 10\text{ A} \cdot j24\ \Omega = (-450 + j420)\text{ A}$$



Slika 8.3: Enako kot predhodno vezje, le da sta tuljavi sklopljeni s faktorjem sklopa $k=0,8$.

Pokažimo spremembe še na primeru prvotnega vezja, ki ga analiziramo, le da sta sedaj tuljavi v vezju sklopljeni. V konkretnem primeru na sliki gre v obeh tuljavah tok najprej mimo pik in nato skozi tuljavo, zato se prispevka prištejeta. Določiti je potrebno kompleksno upornost zaradi medsebojne induktivnosti, ki je:

$$j\omega M = j\omega k\sqrt{L_1 L_2} = jk\sqrt{\omega L_1 \omega L_2} = j0,8\sqrt{5\Omega \cdot 15\Omega} \cong j6,93\Omega$$

Napetosti na tuljavi L_1 se prišteje prispevek $\underline{I}_3 \underline{Z}_M = \underline{I}_3 j\omega M$, napetosti na tuljavi L_2 pa se prišteje prispevek $\underline{I}_4 \underline{Z}_M = \underline{I}_4 j\omega M$.

Za vsoto napetosti v zankah sedaj dobimo enačbe:

$$\text{zanka } J_1: \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_3 \underline{Z}_{L2} + \underline{I}_4 \underline{Z}_M + (-\underline{I}_4 \underline{Z}_{L1}) + (-\underline{I}_3 \underline{Z}_M) - \underline{U}_g = 0$$

$$\text{zanka } J_2: -\underline{I}_3 \underline{Z}_{L1} - \underline{I}_4 \underline{Z}_M + \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_5 \underline{Z}_C = 0$$

zanka J_3 : ni potrebna, niti je ne moremo zapisati

Nova matrika bo torej (spremenjeni sta le zadnji dve vrstici):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & j8,07 & j1,93 & 0 \\ 0 & 5 & -j15 & -j6,93 & -j20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j1 \\ 0 \\ j1 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev je sedaj seveda drugačna: $I_1=2.0536 - 3.6033i$, $I_2=-2.9026 + 6.8662i$, itd.

METODA ZANČNIH TOKOV

Označimo zanke z zančnimi toki in zapišemo enačbe v skladu z 2 K.Z. Vejske toke zapišemo z zančnimi. Število potrebnih enačb je enako številu dopolnilnih vej (ponovi pojme graf, drevo, veje, dopolnilne veje,... iz OE1).

$$(\underline{J}_1 - \underline{J}_3)R_1 + (\underline{J}_1 - \underline{J}_2)\underline{Z}_{L2} + \underline{J}_1\underline{Z}_{L1} - \underline{U}_g = 0$$

$$(\underline{J}_2 - \underline{J}_1)\underline{Z}_{L2} + (\underline{J}_2 - \underline{J}_3)R_2 + \underline{J}_2\underline{Z}_C = 0$$

$$\underline{J}_3 = \underline{I}_g$$

Dobimo sistem treh enačb, ki pa je pravzaprav le sistem dveh, saj je tok v tretji zanki določen kar s tokom \underline{I}_g . Če to upoštevamo v naslednjem koraku, dobimo matrični sistem oblike¹³

$$\begin{bmatrix} R_1 + \underline{Z}_{L2} + \underline{Z}_{L1} & -j\underline{Z}_{L2} \\ -\underline{Z}_{L2} & R_2 + \underline{Z}_{L2} + \underline{Z}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_g + \underline{I}_g R_1 \\ \underline{I}_g R_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ozioroma } \begin{bmatrix} 10 + j20 & -j15 \\ -j15 & 5 - j5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + j10 \\ j5 \end{bmatrix}$$

Tudi ta sistem enačb lahko preprosto rešimo z eno od zgoraj omenjenih načinov. Matrika A bo $A = [10+20j, -15j; -15j, 5-5j]$, b pa $b = [100+10j; 5j]$. Rešitev dobimo z ukazom $X = \text{inv}(A) * b$ in dobimo

$$1.0873 - 1.3450i$$

$$-0.1135 + 4.1485i$$

Zančni tok \underline{J}_1 je torej (1,0873-j1,3450) A. Ta tok je tudi enak toku $-\underline{I}_4$, kar se lahko prepričamo iz prejšnje rešitve sistema petih enačb.

METODA SPOJIŠČNIH POTENCIALOV

Število enačb je enako številu spojišč -1. Izhajamo iz tega, da izrazimo toke v vejah s potenciali spojišč.

Če je v veji upor, izrazimo tok v veji s padcem napetosti na tem uporu, le-to pa izrazimo s potenciali spojišč, na katera je priključen. Če je v veji le napetostni vir, tok v tej veji izrazimo s toki v sosednje spojišče (v skladu s 1 KZ). Potencial enega od spojišč lahko poljubno izberemo (običajno ozemljimo).

$$\text{spojišče (1): } \frac{V_1 - \underline{U}_g}{\underline{Z}_{L1}} + \frac{V_1 - V_2}{R_1} + \underline{I}_g = 0$$

$$\text{spojišče (2): } \frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_2}{\underline{Z}_{L2}} + \frac{V_2 - V_3}{R_2} = 0$$

$$\text{spojišče (3): } \frac{V_3 - V_2}{R_2} + \frac{V_3}{\underline{Z}_C} - \underline{I}_g = 0$$

Dobimo sistem treh enačb, ki jih zapišemo v matrični obliki

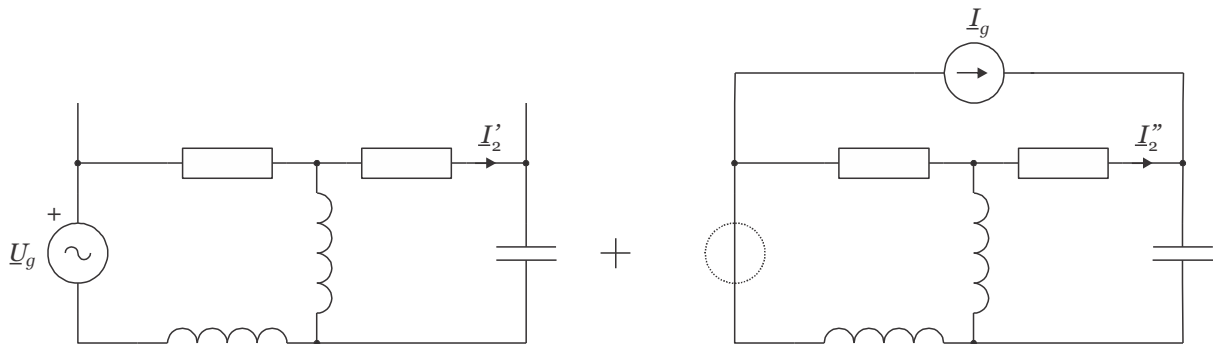
$$\begin{bmatrix} 1/j5 + 1/10 & -1/10 & 0 \\ -1/10 & 1/10 + 1/5 + 1/j15 & -1/5 \\ 0 & -1/5 & 1/5 - 1/j20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j + 100/j5 \\ 0 \\ j \end{bmatrix}$$

Rešitev so spojiščni potenciali, iz katerih lahko nato izračunamo vejske toke, itd.

STAVKI

STAVEK SUPERPOZICIJE

Če imamo več različnih virov v vezju, lahko pri linearnem vezju odklopimo določen vir in analiziramo vezje kot vsoto več poenostavljenih vezij. Če so viri različnih frekvenc, ne smemo izračunanih kompleksorjev tokov preprosto sešteti, saj gre za časovne signale različnih frekvenc. Seštejemo lahko časovne signale. Z metodo superpozicije lahko analiziramo tudi vezje, ki vključuje enosmerne in izmenične vire. Odklopljen napetostni vir nadomestimo s kratkim stikom, tokovni vir pa z odprtimi sponkami.



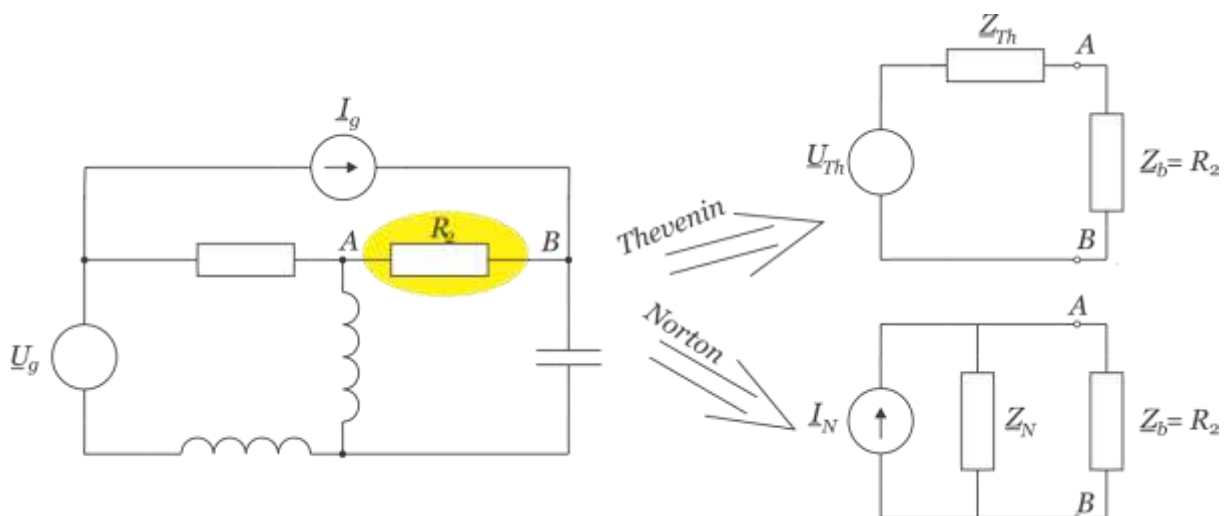
Slika 8.4: Razdelitev vezja v dve vezji s posameznimi vključenimi viri.

Velja $I_2 = I_2' + I_2''$. Če imata vira različne frekvence, je potrebno seštevati časova signala, ne kompleksorje!

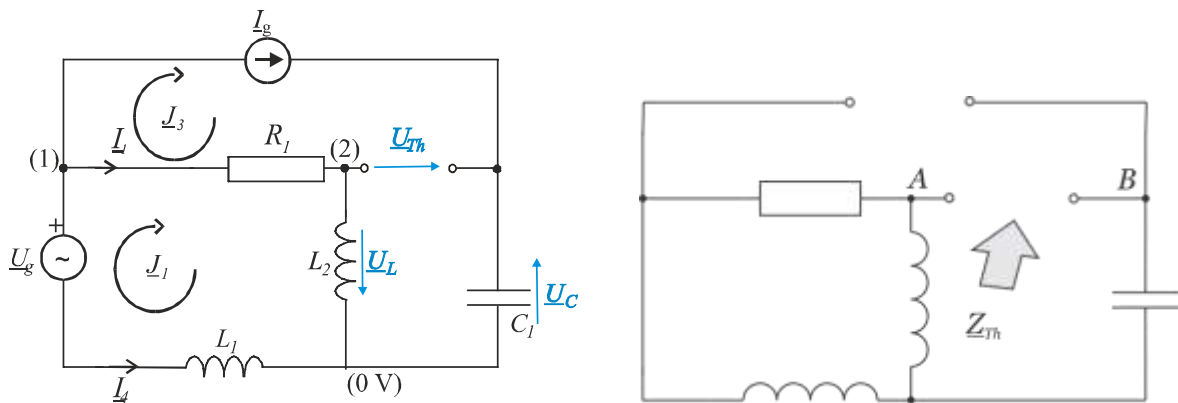
THEVENINOVO IN NORTONOVO NADOMESTNO VEZJE

Enako kot je veljalo za enosmerne vezja, lahko pri (linearnih) izmeničnih vezjih vezje med poljubnima dvema sponkama nadomestimo z realnim napetostnim ali tokovnim virom. Nortonovo nadomestno vezje je ekvivalentno Theveninovemu, le da ga predstavimo z realnim tokovnim virom. Velja

$$\underline{I}_N = \frac{U_{Th}}{Z_{Th}} \text{ in } \underline{Z}_{Th} = \underline{Z}_N = 1 / \underline{Y}_N.$$



Slika 8.5: Vezje med sponkama A in B (upor R_2) nadomestimo z realnim napetostnim virom (Theveninovo nadomestno vezje) ali pa z realnim tokovnim virom (Nortonovo nadomestno vezje).



Slika 8.6: Levo: Vežje za izračun Theveninove napetosti med sponkama A in B. Desno: Vežje za izračun Theveninove upornosti med sponkama A in B.

Osnovna pravila za izračun elementov Theveninovega (ali Nortonovega) nadomestnega vezja:

- Theveninovo (ali Nortonovo) nadomestno upornost določimo kot kompleksno upornost med sponkama, kjer želimo določiti nadomestno vezje. Pri tem napetostne vire v vezju kratko sklenemo, tokovne pa odklopimo. Za lažje pomnjenje si lahko pomagamo z vedenjem, da je notranja upornost idealnega napetostnega vira enaka nič, tokovnega pa neskončna. Velja $\underline{Z}_{Th} = \underline{Z}_N = 1 / \underline{Y}_N$.
- V primeru bolj kompleksnega vezja (če ni mogoče kar preprosto seštevati zaporedno in vzporedno vezane elemente vezja) moramo Theveninovo upornost določiti tako, da med sponki priključimo poljubno napetost (npr. Kar 1 V) in določimo tok v vezju. Razmerje med njima pa je vhodna impedanca oziroma Theveninova nadomestna (kompleksna) upornost. Tak primer vezja so tudi vezja s sklopljenimi elementi.
- Theveninovo nadomestno napetost določimo kot napetost odprtih sponk med sponkama (seveda pri priključenih virih).
- Vrednost Nortonovega tokovnega vira določimo kot tok kratkega stika med priključnima sponkama ($\underline{I}_N = \underline{I}_{k.s.}$) ali iz Theveninove napetosti: $\underline{I}_N = \underline{U}_{Th} / \underline{Z}_{Th}$

Primer izračuna toka skozi upor R_2 z nadomestitvijo vezja med sponkama upora s Theveninovim nadomestnim virom:

Recimo, da nas zanima le en tok v vezju, ki ga analiziramo. Naj bo to tok skozi upor R_2 v že analiziranem vezju. Poiščimo nadomestno Theveninovo upornost in napetost. Theveninova upornost je notranja upornost vezja gledana s sponk upora R_2 , pri čemer tokovni vir odklopimo (odprte sponke), napetostnega pa kratko sklenemo. Dobimo $\underline{Z}_{Th} = (R_1 + \underline{Z}_{L1}) \parallel \underline{Z}_{L2} + \underline{Z}_C$. Zopet si pomagajmo z Matlabom `>> ZT=1/(1/(10+5j)+1/(15j))-20j`. Rezultat je $\underline{Z}_{Th} = 4,5 - j14 \Omega$.

Napetost Thevenina dobimo kot napetost med sponkama odklopljenega upora. Uporabiti moramo določeno metodo reševanja tudi za izračun te napetosti. Vzemimo za vajo metodo spojiščnih potencialov, pri kateri upoštevamo, da mora biti vsota tokov v spojiščnenaka nič:

$$\frac{V_1 - \underline{U}_g}{\underline{Z}_{L1}} + \underline{I}_g + \frac{V_1}{R_1 + \underline{Z}_{L2}} = 0 \Rightarrow V_1 \left(\frac{1}{\underline{Z}_{L1}} + \frac{1}{R_1 + \underline{Z}_{L2}} \right) = -\underline{I}_g + \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_{L1}}$$

Rešitev z Matlabom: `>> V1=(-j+100/5j)/(1/5j+1/(10+15j))`. Rezultat je $\underline{V}_1 = (84 - j10,5)V$.

$$\text{Napetost Thevenina je } \underline{U}_{Th} = \underline{U}_{L2} + \underline{U}_C = \underline{V}_1 \frac{\underline{Z}_{L2}}{R_1 + \underline{Z}_{L2}} - \underline{I}_g \underline{Z}_C$$

Rešitev z Matlabom >> $U_{Th} = V_1 * 15j / (10 + 15j) - j * (-20j)$. Rezultat je $U_{Th} = (43 + j31,5) \text{ V}$.

Tok skozi upor R_2 je torej $I_{R_2} = \frac{U_{Th}}{Z_T + R_2} = \frac{43 + j31,5 \text{ V}}{4,5 - j14 + 5 \Omega} = (-0,1135 + j3,1485) \text{ A}$.

Rezultat je enak kot z metodo Kirchoffovih zakonov.

Poskusimo še z metodo zančnih tokov (pri čemer je sedaj upor R_2 odklopljen): Napetost Thevenina bo $U_{Th} = (J_1 - I_g)Z_{L2} + (-I_g)(Z_C)$. Tok J_1 dobimo iz zančne enačbe

$-U_g + J_1(R_1 + Z_{L1} + Z_{L2}) - I_g(R_1 + Z_{L2}) = 0$, od koder >> $J_1 = (100 + j*(10 + 15j)) / (10 + 20j)$
 $J_1 = (2,1 - j3,2) \text{ A}$ in >> $U_{Th} = (J_1 - j) * 15j - j * (-20j)$. Rezultat je $U_{Th} = (43 + j31,5) \text{ V}$.

TELLEGENOV STAVEK

Tellegenov stavek pravi, da je vsota moči virov enaka vsoti moči bremen

$$\sum_i S_{gen,i} = \sum_j S_{b,j} \quad (8.1)$$

V obravnavanem vezju bo moralo veljati

$$\frac{1}{2} U_g (-I_4^*) + \frac{1}{2} (V_3 - V_1) I_g^* = \frac{1}{2} I_4^2 Z_{L1} + \frac{1}{2} I_3^2 Z_{L2} + \frac{1}{2} I_5^2 Z_C + \frac{1}{2} I_2^2 R_2 + \frac{1}{2} I_1^2 R_1.$$

Izračunamo z Matlabom: >> $PV = 0.5 * 100 * (-I(4)) + 0.5 * j * (V(3) - V(1))$.

Dobimo $S_{virov} = (50,5 - j122,4) \text{ VA}$.

Moč na bremenih pa je >> $PB = 0.5 * (I(4)^2 * 5j + I(3)^2 * 15j + I(5)^2 * (-20j) + I(2)^2 * 5 + I(1)^2 * 10)$.

Dobimo $S_{bremen} = (50,5 - j122,4) \text{ VA}$.

Vidimo, da sta moči enaki, kar je tudi dober način preverjanja pravilnega rezultata analize vezja.

Vprašanje: Zakaj smo množili z $-I_4^*$ in ne z I_4^* . Odgovor: Zato, ker moramo upoštevati tok, ki izhaja iz + sponke.

MAKSIMALNA MOČ

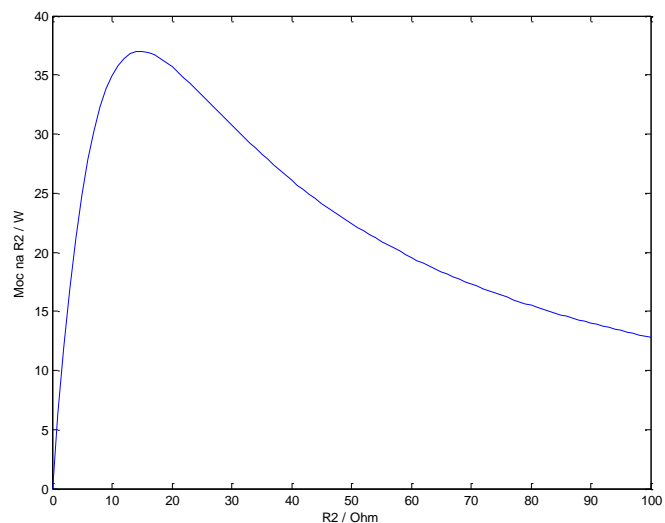
O maksimalni moči smo že govorili v poglavju o moči (PONOVI). Zato tokrat bolj na kratko.

Vzemimo primer optimiranja upornosti R_2 iz obravnavanega primera tako, da bo na njem (delovna) moč maksimalna. Iz teorije vemo, da bo to tedaj, ko bo upornost bremena (upora) enaka absolutni vrednosti Theveninove upornosti, ki je $|Z_{Th}| = |4,5 - j14| \Omega = 14,7 \Omega$. Maksimalna moč pa bo¹⁴>> **$P_{max} = U_{Th} \cdot \text{conj}(U_{Th}) / (4 \cdot (5 + 14,7))$**

$$P_{b,max} = \frac{U_{Th}^2}{4(R_2 + Z_{Th})} \approx 36 \text{ W}.$$

Poleg uporabljene metode lahko uporabimo tudi klasično analizo vezij za določitev maksimalne moči. Uporaba programov Matlab je dobrodošla tudi v primeru optimiranja elementov, saj je izračunavanje (linearnih) sistemov enačb izredno hitro. Naredimo preprost programček, ki povečuje vrednost upora R_2 od 1 do 100 Ω , vsakič izračunamo toke in moč na uporu R_2 ter na koncu izrišemo graf. Iz grafa ugotovimo, da bo največja moč dejansko pri upornosti R_2 med 10 in 20. Glede na natančnost izračuna, dobimo maksimum pri vrednosti upora 15 Ω . Poleg tega odčitamo maksimalno moč približno 36 W.

Slika 8.7: Moč na uporu R_2 ima maksimum pri vrednosti, ki je enaka absolutni vrednosti Theveninove nadomestne upornosti. (Matlab: Moc_na_R2.m)



```
% Program v Matlabu za izris moči na
uporu R2
P=[]; % prazen array
for R2=0:1:100 % povečujem upornost
od 0 do 100
A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-
1,0,0,1;10,0,15j,-5j,0;0,R2,-15j,0,-20j]; %
matrika
b=[-j;0;j;100;0];
I=inv(A)*b; % resitev tokov, I(2) je tok
skozi upor R2
PR2=0.5*I(2).*conj(I(2))*R2 % izracun
moci
P=[P PR2] % shranjevanje vrednosti moci
v vektor P
end
plot(0:1:100,P) % izris
xlabel('R2 / Ohm')
ylabel('Moc na R2 / W')
```

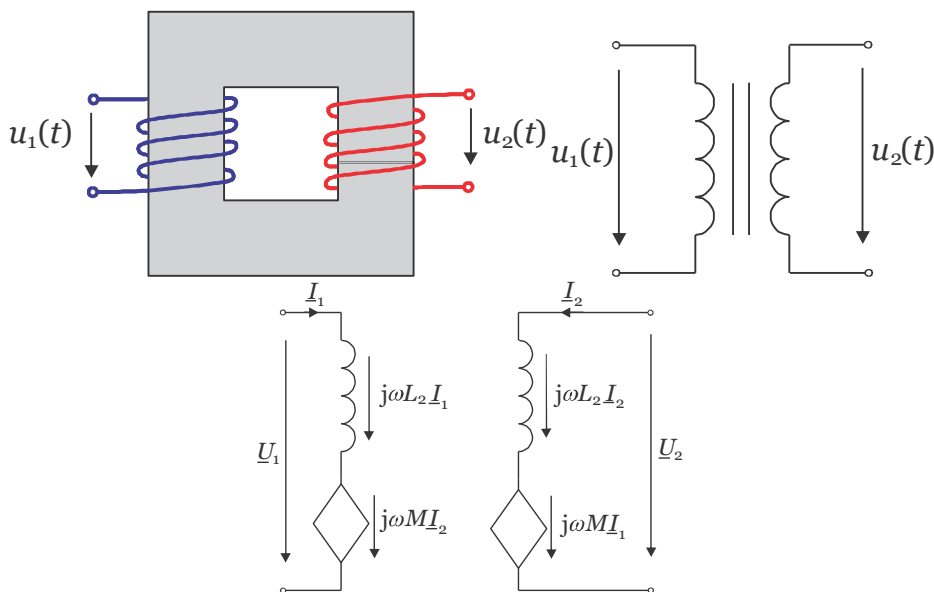
¹⁴ S »polovičko« pri izrazih za moč je potrebno biti vedno nekoliko previden. Včasih so moči izražene z efektivnimi vrednostmi, tedaj je izraz za moč brez polovičke, če pa so z maksimalnimi, pa je potrebno v izrazu upoštevati ½.

9. TRANSFORMATOR

Vsebina poglavja: Zapis enačb transformatorja kot dveh sklopljenih tuljav, napetostna prestava, povezava med maksimalnim fluksom in napetostjo, neobremenjen transformator in magnetilni tok, obremenjen transformator in ravnotežni tok, tokovna prestava, enačba magnetnega ravnotežja, ponazoritev tokov in napetosti na neobremenjenem in obremenjenem transformatorju s kazalci (kompleksorji), reducirane vrednosti (sekundarne napetosti, toka in impedance bremena), moč na primarju in bremenu, vhodna impedanca, realni transformator.

Transformator je primer posebno zanimive električne naprave, ki jo lahko obravnavamo kot posebno obliko vezja s sklopljenima tuljavama (lahko tudi več sklopljenih tuljav). Zanimiv ni le teoretično, temveč predvsem zaradi njegove pogoste uporabe. S transformatorjem lahko zvišamo ali znižamo izmenično napetost, prilagodimo breme, ga uporabimo za merjenja, kot ločilni transformator, itd.. Ne vsebuje gibljivih delov, zato je njegova življenjska doba dolga, poleg tega pa z dokaj dobrim magnetnim sklepom omogoča relativno majhne izgube pri pretvarjanju iz višje v nižjo napetost in obratno.

V osnovi lahko transformator predstavimo kot dvovhodno vezje s sklopljenima tuljavama. Vhodna in izhodna stran sta v principu enakovredni, saj lahko z zamenjavo strani zvišamo ali znižamo izhodno napetost, impedanco, tok.



Slika 9.1: Transformator je naprava, ki ima dve navitji na skupnem jedru iz feromagnetnega materiala. Ločimo primarno in sekundarno navitje. a) transformator v obliki dveh navitij na jedru, b) transformator predstavljen s koncentriranimi elementi in c) transformator kot dvovhodno vezje.

V obliki koncentriranih elementov ga lahko predstavimo s sklopljenima tuljavama. Vzemimo idealno sklopljeni tuljavi s faktorjem sklopa enak 1. Tedaj bo zveza med lastnima induktivnostima navitij in medsebojno induktivnostjo sledeča: $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Vhodno napetost na eni strani zapišemo kot

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2. \quad (9.1)$$

To stran bomo imenovali **primarna**, drugo stran pa **sekundarna**. Primarna stran je običajno priključena na napajalno napetost (vir), sekundarna pa na breme. Ker smo toka in pike označili tako, da se fluksa obeh tuljav podpirata, bo napetost na drugi strani (sekundarni) enaka

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1. \quad (9.2)$$

Če iz te enačbe izrazimo vhodni tok, dobimo

$$I_1 = \frac{\underline{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} I_2. \quad (9.3)$$

Če sedaj to enačbo vstavimo v prvo **Error! Reference source not found.**, dobimo:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \left(\frac{\underline{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} I_2 \right) + j\omega M I_2 \quad (9.4)$$

S preureditvijo dobimo

$$\underline{U}_1 = \frac{j\omega L_1}{j\omega M} \underline{U}_2 + j\omega \left(M - \frac{L_1 L_2}{M} \right) I_2 \quad (9.5)$$

Ker pa je pri idealnem sklepu ($k = 1$) $M = \sqrt{L_1 L_2}$, je drugi člen enačbe **Error! Reference source not found.** enak nič, in je

$$\underline{U}_1 = \frac{L_1}{M} \underline{U}_2 = \frac{L_1}{\sqrt{L_1 L_2}} \underline{U}_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \underline{U}_2. \quad (9.6)$$

Pridemo do zanimivega zaključka, da je **izhodna napetost odvisna le od razmerja lastnih induktivnosti tuljav**. Za te pa vemo, da so sorazmerne kvadratu ovojev, saj velja $L = \frac{N^2}{R_m}$, kjer je R_m magnetna upornost tuljave in bo torej

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{N_1^2/R_m}{N_2^2/R_m}} = \frac{N_1}{N_2} = n \quad (9.7)$$

To enačbo lahko zapišemo tudi samo z amplitudami vhodne in izhodne napetosti:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = n. \quad (9.8)$$

Dobili smo mnogim srednješolcem znan izraz, da je razmerje med vhodno in izhodno napetostjo enako razmerju števila ovojev n . Temu razmerju rečemo tudi **napetostna prestava**.

Primer izračuna števila ovojev sekundarja:

Na primarju s100 ovoji imamo priključen generator izmenične napetosti z amplitudo 320 V. Kolikšno število ovojev potrebujemo za sekundarno navitje, da bo amplituda izhodne napetosti 50 V?

Izračun: $N_2 = N_1 \frac{U_2}{U_1} = 100 \frac{50 \text{ V}}{320 \text{ V}} \approx 15,6.$

NAPETOSTNA PRESTAVA IN MAKSIMALNI FLUKS V JEDRU

Do izraza za napetostno prestavo lahko pridemo tudi na nekoliko bolj preprost način, če predpostavimo idealni transformator brez priključenega bremena. Potem je inducirana napetost na primarni strani enaka časovni spremembi magnetnega sklepa, torej $u_{i1} = -N_1 \frac{d\Phi_{gl}}{dt}$, na sekundarni pa

$u_{i2} = -N_2 \frac{d\Phi_{gl}}{dt}$. Če trenutne vrednosti napetosti izrazimo z maksimalnimi (ali efektivnimi), dobimo

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$. Pogosto se zapis inducirane napetost s spremembo fluksa izkoristi za izpeljavo zveze

med inducirano napetostjo in fluksom. Če izraz zapišemo s kompleksorji v obliki $\underline{u}_{i1} = -N_1 \frac{d\Phi_{gl}}{dt}$ in predpostavimo, da se glavni fluks spreminja harmonično, bo kompleksor inducirane napetosti na primarni strani

$$\underline{U}_{i1} = -N_1 j\omega \underline{\Phi}_{gl} \quad (9.9)$$

Fluks običajno zapišemo z maksimalno vrednostjo, napetost pa z efektivno. V tem smislu bo efektivna vrednost inducirane napetosti na primarni strani

$$U_{i1,ef} = |\underline{U}_{i1,ef}| = N_1 2\pi f \frac{\Phi_{gl,max}}{\sqrt{2}} = 4,44 f N_1 \Phi_{gl,max} \quad (9.10)$$

Na enak način bi lahko zapisali za sekundarno stran $U_{i2,ef} = 4,44 f N_2 \Phi_{gl,max}$. Ti enačbi pogosto zasledimo v učbenikih, pa tudi v priročnikih, saj lahko služijo oceni velikosti gostote magnetnega pretoka v jedru, to pa je pomembno za pravilno dimenzioniranje transformatorja. Enačba je »nerodna« le v toliko, da je inducirana napetost izražena z efektivno, fluks pa z maksimalno vrednostjo.

MAGNETILNI TOK

Vrnimo se še malo na naš zapis enačb transformatorja z lastnimi in medsebojnimi induktivnostmi. Če so na sekundarni strani sponke odprte, teče na primarni strani tok

$$I_1 = \frac{U_1}{j\omega L_1} = I_{1m} \quad (9.11)$$

Temu toku rečemo **magnetilni tok**, ki je očitno tok, ki povzroča fluks v jedru transformatorja. Ta tok je v fazi s fluksom.

Primer izračuna gostote polja:

Enofazni 50 Hz transformator ima na primarni strani 25, na sekundarni pa 300 ovojev. Jedro ima presek 300 cm^2 . Določimo največjo gostoto pretoka v jedru, če je transformator na primarni strani priključen na napetost 250 V (efektivno).

Izračun: $250 \text{ V} = 4,44 \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 25 \cdot B \cdot 300 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 1,5 \text{ T}$.

Komentar: v smislu načrtovanja transformatorja bi morali sedaj preveriti, ali smo pri ocenjeni vrednosti polja posegli v področje magnetilne krivulje, ki se približuje ali celo presega nasičenje. V tem primeru lahko zaradi izrazite nelinearnosti induktivnosti v tem območju pričakujemo tudi nelinearno (popačeno glede na vhodni signal) izhodno napetost. Rešitev moramo v tem primeru iskati v primerni izbiri materiala za jedro, večjem preseku jedra, ...

OBREMENJEN TRANSFORMATOR

Če na sekundarno navitje transformatorja priključimo breme, rečemo, da je transformator **obremenjen**. Tedaj tok I_2 ni več enak nič, pač pa je $-I_2 = I_b = \frac{U_2}{Z_b}$. Sedaj bomo imeli dva toka, ki magnetita jedro. Celotna magnetna napetost bo torej (glede na označbe) vsota posameznih magnetnih napetosti:

$$\underline{\Theta} = N_1 I_1 + N_2 I_2. \quad (9.12)$$

Ta magnetna napetost bo neodvisna od bremenskega toka, saj se priključena napetost in s tem inducirana napetost na primarni strani (ki je v idealnih razmerah enaka priključeni napetosti) ni spremenila. Nespremenjena magnetna napetost bo torej enaka

$$\underline{\Theta} = N_1 I_{1m}, \quad (9.13)$$

kjer je I_{1m} magnetilni tok, kismo ga že določili ob odprtih sponkah na sekundarju. Veljati mora torej $N_1 I_{1m} = N_1 I_1 + N_2 I_2$ oziroma s preureditvijo $N_1 (I_1 - I_{1m}) = -N_2 I_2$. Razliko celotnega toka v primarju in magnetilnega toka imenujemo **ravnotežni tok**: $I_{1r} = I_1 - I_{1m}$. To je tok, ki mora teči v primarnem navitju poleg magnetilnega (saj je $I_1 = I_{1m} + I_{1r}$). Velja torej

$$N_1 I_{1r} = -N_2 I_2. \quad (9.14)$$

Ta tok bo očitno »držal ravnotežje« vplivu toka I_2 na primarni strani, tako, da bo inducirana napetost nespremenjena.

Povzemimo: Če je transformator neobremenjen, je vhodni tok enak magnetilnemu toku, ki je potreben za magnetenje (in razmagnetenje jedra). Če pa je transformator obremenjen, je tok primarja vsota magnetilnega in ravnotežnega toka, pri čemer je magnetilni tok običajno dosti manjši od ravnotežnega:

$$I_1 = I_{1m} + I_{1r} \approx I_{1r} = -\frac{N_2}{N_1} I_2 \quad (9.15)$$

¹⁵Ta pomemben rezultat, da bo razmerje tokov (približno) obratno sorazmerno številu ovojev zapišimo še enkrat:

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{n} \quad (9.16)$$

Ta izraz imenujemo tudi **tokovna prestava**.

Če upoštevamo le absolutne vrednosti tokov, je enačba enaka le brez minusa: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{n}$.

Združeni enačbi **Error! Reference source not found.** in **Error! Reference source not found.** imenujemo **enačba magnetnega ravnotežja**

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = N_1 I_{1m}, \quad (9.17)$$

saj »pove«, da je v idealiziranem transformatorju celotna magnetna napetost konstantna – neodvisna od obremenitve. To pa tudi pomeni, da je v idealnem transformatorju glavni fluks v jedru neodvisen od obremenitve, enak je v primeru, ko je transformator neobremenjen kot tedaj, ko je

¹⁵ Negativen predznak pri tokovni prestavi se pogosto v literaturi ne pojavlja. Tu je posledica tega, da tokove pišemo s kompleksorji in da smo označili tok I_2 v nasprotni smeri kot tok bremena.

obremenjen. Pri realnem transformatorju se zaradi izgub glavni fluks pri obremenitvi celo nekoliko zmanjša.

Primer izračuna transformatorja:

Idealni transformator je priključen na izmenično napetost z efektivno vrednostjo 240 V in ima na sekundarju z napetostjo 12 V (efektivno) priključeno 150 W žarnico. Določimo napetostno prestavo, tok bremena in tok primarja.

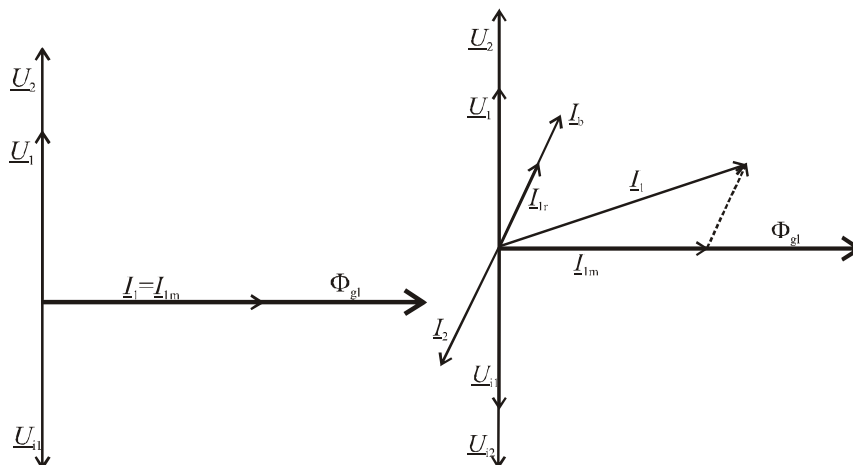
Izračun: $n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{240\text{ V}}{12\text{ V}} = 20$. $I_b = \frac{P_b}{U_2} = \frac{150\text{ W}}{12\text{ V}} = 12,5\text{ A}$, $I_1 = \frac{I_b}{n} = \frac{12,5\text{ A}}{20} = 0,625\text{ A}$.

PONAZORITEV TOKOV IN NAPETOSTI NA NEOBREMENJENEM IN OBREMENJENEM TRANSFORMATORJU S KAZALCI (KOMPLEKSORJI)

Neobremenjen transformator: Običajno rišemo kazalce (kompleksorje) tako, da postavimo kazalec glavnega fluksa v jedru v smeri realne osi (predpostavimo, da je kosinusna funkcija). Kazalec inducirane napetosti na primarju v skladu z enačbo $\underline{U}_{i1} = -N_1 j \omega \Phi_{gl}$ zaostaja za $\frac{\pi}{2}$. Hkrati ugotovimo, da je kazalec priključene napetosti pri neobremenjenem transformatorju ravno nasprotnega predznaka od inducirane napetosti: $\underline{U}_1 = -\underline{U}_{i1}$ in torej prehiteva kazalec fluksa za $\frac{\pi}{2}$.

Magnetilni tok je v fazi z glavnim fluksom, saj je to tok, ki ta fluks povzroča. V skladu z napetostno prestavo je kazalec inducirane napetosti sekundarja enako usmerjen kot kazalec inducirane napetosti primarja, kar je hkrati tudi napetost na zunanjih sponkah sekundarja.

Obremenjen transformator: Vzemimo, da obremenimo transformator z bremenom induktivnega značaja. V tem primeru tok I_b zaostaja za napetostjo sekundarja za določen kot φ_2 . Kot kompenzacija teče v primarju ravnotežni tok, ki je nasprotnega predznaka glede na tok I_2 in enakega kot I_b . Tok primarja je sedaj vsota ravnotežnega in magnetilnega toka.



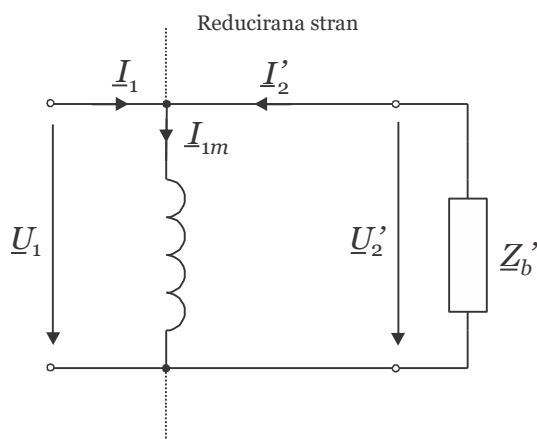
Slika 9.2: Kompleksorji glavnega fluksa, priključene napetosti, induciranih napetosti in napetosti na bremenu: a) neobremenjen transformator, b) obremenjen transformator.

REDUCIRANE VREDNOSTI NAPETOSTI IN TOKOV

Za analizo delovanja se pogosto uporabljajo t.i. reducirane veličine, ki jih dobimo na sledeči način: enačbo **Error! Reference source not found.** delimo z N_1 in dobimo enačbo oblike

$$\underline{I}_1 + \underline{I}'_2 = \underline{I}_{1m}, \quad (9.18)$$

kjer smo zapisali tok \underline{I}'_2 zapisali kot $\underline{I}'_2 = \frac{N_2}{N_1} \underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_2}{n}$. Ta tok **imenujemo reducirana vrednost sekundarnega toka**, namen tega zapisa pa je predvsem v tem, da lahko tvorimo preprosto nadomestno vezje z nereducirano primarno stranjo in reducirano sekundarno stranjo. Pri tem je potrebno »reducirati« tudi sekundarno napetost kot $\underline{U}'_2 = n\underline{U}_2$, pa tudi bremensko upornost, saj velja $\underline{Z}'_b = \frac{\underline{U}'_2}{\underline{I}'_2} = n^2 \underline{Z}_b$.



Slika 9.3: Nadomestna shema idealnega transformatorja prikazana z reduciranimi vrednostmi.

MOČ

Kompleksor moči na primarju je

$$\underline{S}_1 = \frac{1}{2} \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \frac{1}{2} \underline{U}_1 (\underline{I}_{1m}^* + \underline{I}'_2)^* = \frac{1}{2} \underline{U}_1 \underline{I}_{1m}^* - \frac{1}{2} \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \underline{S}_{1m} + \underline{S}_2 \quad (9.19)$$

Moč na bremenu je manjša od moči na vходу za jalovo moč magnetenja \underline{S}_{1m} . Le-ta pa je običajno dosti manjša od moči na bremenu, torej bo veljalo

$$\underline{S}_1 \cong \underline{S}_2 \quad (9.20)$$

Kar pomeni, da je v idealnih razmerah moč na bremenu enaka moči na primarju.

VHODNA IMPEDANCA TRANSFORMATORJA

Vhodno impedanco dobimo iz kvocienta

$$\underline{Z}_{vh} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \quad (9.21)$$

S preureditvijo osnovnih enačb transformatorja dobimo

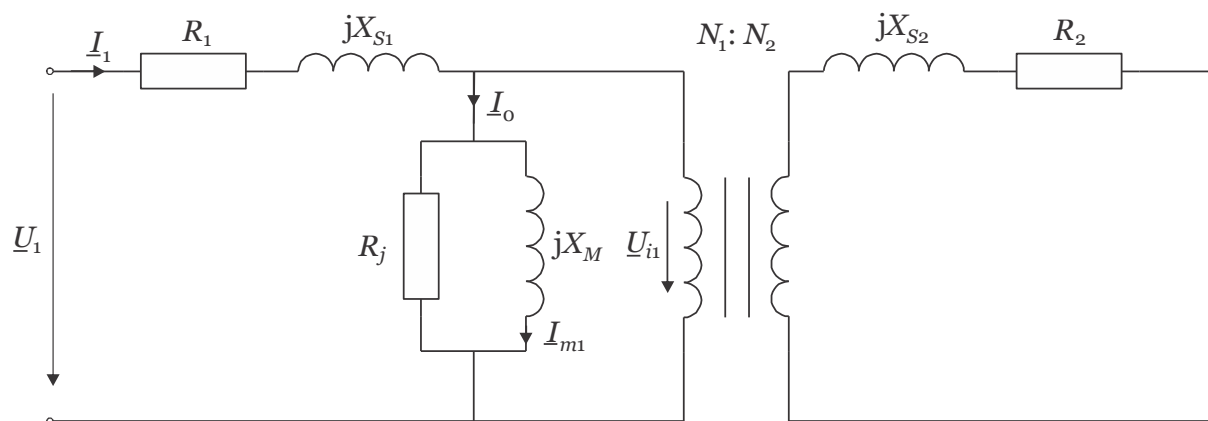
$$\underline{Z}_{vh} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = -n^2 \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_b}$$

$$\underline{Z}_{vh} \approx n^2 \underline{Z}_b \quad (9.22)$$

Dobimo rezultat, ki bi ga pričakovali tudi iz nadomestnega vezja idealnega transformatorja z reduciranimi komponentami.

REALNI TRANSFORMATOR Z ŽELEZNIJEM JEDROM

Realni transformator se od idealnega razlikuje predvsem po tem, da pri upoštevanju še ohmske upornosti primarnega in sekundarnega navitja ter sipana magnetna pretoka primarne in sekundarne tuljave (tisti pretok, ki gre le skozi ovoje ene, ne pa tudi druge tuljave). To lahko v nadomestnem vezju predstavimo z ohmskima upornostima ter induktivnostima v primarnem (sekundarnem) tokokrogu.



Slika 9.4: Nadomestna shema realnega transformatorja z upoštevanjem ohmske upornosti primarnega in sekundarnega navitja in sipanih magnetnih pretokov primarne in sekundarne tuljave (navitja).

* OSNOVE DIMENZIONIRANJA TRANSFORMATORJEV V PRAKSI

Za optimalno načrtovanje transformatorjev je potrebno upoštevati mnogo dejavnikov, od katerih je najpomembnejša moč primarja, ki je določena s produktom toka in napetosti primarja¹⁶ $\frac{1}{2}U_1I_1$, podana v VA. Pravilna izbira jedra bo odvisna od tega, da pri tej moči jedro še ne bo prišlo v nasičenje. V ta namen moramo poznati vrednost gostote magnetnega pretoka v nasičenju oz. točko, do katere je magnetilna krivulja še razmeroma linearna. Do primerne enačbe za potreben presek jedra pridemo z množenjem enačbe **Error! Reference source not found.** z efektivnim tokom primarja. Dobimo

$S_1 = U_{1,ef} I_{1,ef} = 4,44 f N_1 \Phi I_{1,ef} = 4,44 f B^2 A_{Fe}^2 \frac{1}{\Phi} N_1 I_{1,ef}$. S preureditvijo enačbe dobimo aproksimativni izraz, ki je znan v praksi, to je, da je primerna površina preseka jedra približno

$$A_{Fe} = C \sqrt{S_1 / f} \quad (9.23)$$

kjer je konstanta C odvisna od oblike transformatorja. Po praksi in izkušnjah je njena vrednost enaka $7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 / \sqrt{\text{Ws}}$, kar pri gostoti 1 T in frekvenci 50 Hz da znan aproksimativni izraz $A_{je} \approx \sqrt{S_1}$ v cm^2 . Iz enačbe **Error! Reference source not found.** je razvidno, da je potreben presek jedra manjši pri

¹⁶ Pogosto se pri dimenzioniranju transformatorjev uporabljajo efektivne vrednosti tokov in napetosti. To smo ugotovili že pri enačbi **Error! Reference source not found.**, kjer je bila inducirana napetost izražena kot efektivna vrednost, fluks v jedru pa kot maksimalni.

višjih frekvencah. To je t.i. čisti presek jedra, ki ne upošteva površine laminacije, za določitev končnega (geometričnega preseka) je potrebno upoštevati še t.i. polnilni faktor jedra.

elma tt Einphasen Transformatoren auf EI Kernen
Transformateurs monophasés sur noyaux EI
Single-phase transformers on EI cores

Größe Grandeur Size	Leistung Puissance Power	Max. Maße in mm Dimensions max. in mm Max. dimension in mm	Gewicht Poids Weight
	VA	A x B x C	kg
EI 30/10-10	0,5-2	30 35-35 35	0,10-0,20
EI 30/13	2	35 31 50	0,15
EI 42/14-20	3-5	42 32-35 55	0,20-0,30
EI 40/16-20	5-10	45 43-51 59	0,25-0,35
EI 54/18	8-15	54 45 74	0,40
EI 60/21-25-31	12-30	60 55-59-65 82	0,50-0,60
EI 65/23-34	25-35	65 59-71 87	0,75-1,0
EI 70/27-35	30-50	75 64-73 101	1,1-1,5
EI 84/29-32	50-75	84 65-69 107	1,5-1,8
EI 84/35-43-52	70-110	84 75-82-85 107	1,9-2,2
EI 95/35-45-59	100-240	95 77-87-101 121	2,3-3,7
EI 105/37-45-60	140-320	105 79-87-102 134	2,7-4,3
EI 105/35-48	150-220	105 86-102 137	2,5-3,5
EI 105/36-52-65	130-270	105 78-82-105 135	3,2-4,5
EI 120/41-53	160-300	120 86-100 149	4,5-5,5
EI 120/61-73	280-500	120 105-120 149	5,5-7,3
EI 135/42-52-57	320-480	135 95-105-115 163	5,5-7,2

Slika 9.5: Primer različnih tipov transformatorjev podjetja Elma TT. Osnovni informaciji sta navidezna moč in dimenzije transformatorja. <http://www.elmatt.si/>

Tudi število ovojev primarja določimo iz enačbe **Error! Reference source not found.**, ki jo zapišemo v obliki $U_{i,ef} = 4,44 f N_1 B A_{Fe}$. Površino A_{Fe} smo določili iz **Error! Reference source not found.**, gostota magnetnega pretoka je okoli 1 do 1,2 T za vroče valjano silicijevo-železno pločevino. Za število ovojev sekundarja lahko upoštevamo napetostno prestavo, v praksi pa lahko zaradi izgub upoštevamo potrebno povečanje števila ovojev z množenjem s faktorjem 1,1, do 1,2.

Potrebno površino prereza (premera) žice določimo iz toka v primarnem in sekundarnem navitju glede na še dopustno segretje navitja, ki je določeno z gostoto toka. Tok primarja je $I_{1,ef} = \frac{S_1}{U_{1,ef}}$, gostota toka pa $J = \frac{I_{1,ef}}{A_{Cu}}$, od koder je $A_{Cu} = \frac{I_{1,ef}}{J}$. Če vzamemo v praksi pogosto uporabljeno vrednost gostote toka 2,55 A/mm², dobimo za premer žice izraz $\sqrt{0,5I}$ mm.

Vir: F. Mlakar, I Kloar: Mali transformatorji in dušilke, Elektrotehniški vestnik, Ljubljana, 1970. Dostopen v knjižnici FE.

10. VRTILNO MAGNETNO POLJE

Vsebina poglavja: vrtilno magnetno polje, sinhrono in asinhrono vrtenje.

Slika 10.1: Paroma dve tuljavi postavljene pravokotno in napajani s tokom, ki je v fazi premaknjen za $\pi/2$ povzročata v središču vrtilno magnetno polje s konstantno amplitudo.

Vzemimo primer dveh parov tuljav, ki sta postavljene kot kaže skica in napajani s tokoma $i_A(t) = I_m \sin(\omega t)$ in $i_B(t) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos(\omega t)$. Poglejmo, kakšno magnetno polje povzročajo tuljave v središču, ki ga obenem označimo kot središče koordinatnega sistema. Tuljavi s tokom i_A imata os v smeri Y osi, tuljavi s tokom i_B pa imata os v smeri X osi. Polje v osi tuljave (pa tudi izven osi) je sorazmerno in v fazi s tokom tuljave, torej sta polji $\vec{B}_A(0,t) = \vec{e}_y B_m \sin(\omega t)$ in $\vec{B}_B(0,t) = \vec{e}_x B_m \cos(\omega t)$. Skupno polje je vsota obeh polj in je enako $\vec{B} = \vec{B}_A + \vec{B}_B = \vec{e}_y B_m \sin(\omega t) + \vec{e}_x B_m \cos(\omega t)$.

Poglejmo, kolikšna je amplituda polja:

$$|\vec{B}| = \sqrt{(B_m \sin(\omega t))^2 + (B_m \cos(\omega t))^2} = B_m$$

Amplituda tega polja je konstantna in torej neodvisna od časa, oziroma od kotne frekvence.

In kakšna je smer polja?

$$\tan(\alpha) = \frac{B_m \sin(\omega t)}{B_m \cos(\omega t)} = \tan(\omega t) \Rightarrow \alpha = \omega t$$

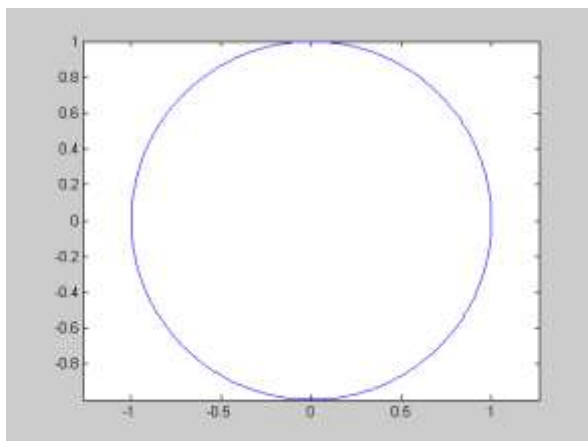
Ves čas konstantno veliko magnetno polje se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω .

UPORABA VRTILNEGA MAGNETNEGA POLJA

Asinhroni stroji delujejo na principu kratko sklenjene vrtljive tuljave (zanke) v vrtilnem magnetnem polju. V kratko sklenjeni tuljavici se pod vplivom časovne spremembe fluksa inducira napetost, ki požene t.i. kratkostični tok v tuljavi. Ta tok povzroča lastno polje tuljave. Vemo, da na vodnike s tokom deluje magnetna sila ($d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$) in navor $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$. Za analizo vrtljivih delov tokovodnikov je bolj primeren izraz za navor na magnetni dipolni moment tuljavice $\vec{m} = \vec{e}_n IA$, ki je $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}_{vrt}$. Na tuljavico torej deluje navor, ki zavrti zanko. Ker magnetni moment nastaja pod vplivom toka v zanki, ta pa je posledica inducirane napetosti v tuljavi (ki zaostaja za tokom, ki tvori vrtilno magnetno polje), se vrteča tuljavica vrti počasneje kot vrtilno magnetno polje. Temu rečemo asinhrono ali nesočasno vrtenje. Asinhroni stroji so predvsem motorji, lahko pa so tudi generatorji. V slednjem primer se moa tuljavica vrteti hitreje od vrtilnega polja, ki ga dobimo v stacionarnih tuljavah.

SINHRONI STROJI

Poleg asinhronih motorjev poznamo tudi sinhrono motorje. Pri teh je na rotorju trajni magnet ali pa ima dodatno navitje, ki je napajano z enosmernim tokom (elektromagnet). Tak rotor se vrtilno sinhrono vrti v vrtilnem magnetnem polju. Zopet bi lahko upoštevali zapis za navor $\bar{T} = \bar{m} \times \bar{B}_{vrt}$. Sinhrono motorje uporabljamo predvsem kot generatorje. V tem primeru magnetni dipolni moment prehiteva vektor vrtilnega magnetnega polja. Kot motorje jih uporabljamo za kompenzacijo jalove moči. Se pa ti motorji ne morejo vzbuditi sami, zato imajo na rotorju dve navitji, eno kratkostično, ki je potrebno pri zagonu in eno navitje, ki ga napajamo z enosmernim tokom. Ko vklopimo ta tok, potegne rotor v sinhronizem z »zunanjim« vrtilnim poljem.



Slika 10.2: Primer trajektorije vrtilnega magnetnega polja, ki ga dobimo s preprostimi ukazi v Matlabu. Poskusite spreminjati amplitudo in fazo posameznega toka (polja). Na zaslonu dobimo različne oblike elips.

```
% prikaz trajektorije vrtilnega polja s programom Matlab
ot=0:0.01:2*pi; % kotna hitrost
Bx=1*sin(ot);
By=1*cos(ot)
plot(Bx,By)
axis equal

% Bolj dovršen program v Matlabu, ki riše trajektorijo gibanja:
% Definicija tocke, ki se riše na zaslonu
tocka=line('Xdata',[],'Ydata',[],'marker','o','markersize',8,'markerfacecolor','b');
% Definiranje polj
t=[0:0.01:4*pi];
x=zeros(1,length(t)); y=zeros(1,length(t));
% Enacbe, ki mi predstavljajo gibanje elektrona v magnetnem polju v vseh treh koordinatah
x=0.5*sin(t); y=1*cos(t);
% prikaz na zaslonu
grid; axis([min(x) max(x) min(y) max(y)]); axis equal
xlabel('x / m'); ylabel('y / m');
% izris koordinat gibajoce tocke
i=0;
while 1
    i=i+1;
    set(tocka,'Xdata',x(i),'Ydata',y(i),'erasemode','xor');
    % set(tocka1,'Xdata',x(i),'Ydata',y(i),'erasemode','none');
    for j=1:50000; j; end;
    drawnow;
    if i>length(t)-2; i=0; end
end
```

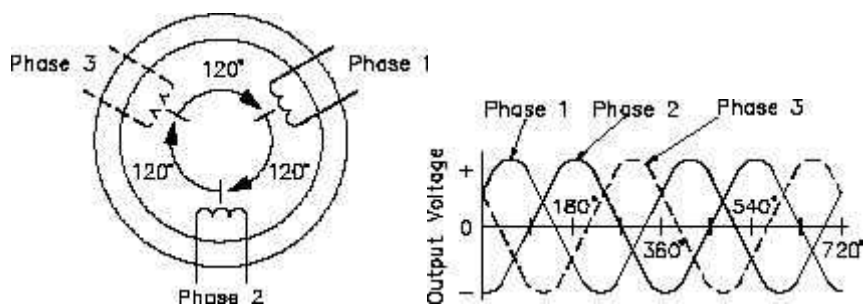

11. TRIFAZNI SISTEMI

Vsebina poglavja: sistem trifaznih napetosti, zapis faznih napetosti, efektivne vrednosti in prikaz kompleksorji. Fazne in medfazne napetosti. Vezava bremena v trikot, vezava bremena v zvezdo z ali brez ničelnega vodnika. Potencial zvezdišča. Simetrično in nesimetrično breme.

Spoznali smo že primer dvofaznega sistema pri vrtilnem magnetnem polju, ki sta ga ustvarjala dva para prečno postavljenih tuljav s fazno zamaknjanim tokom za $\frac{1}{4}$ periode. Ugotovili smo, da bi tako ustvarjeno vrtilno magnetno polje ustvarjalo navor na kratko sklenjeno vrtljivo tuljavico in njeno vrtenje (laboratorijske vaje). Vrtenje tuljavice bi dosegli tudi, če bi vrtljivo tuljavo napajali s konstantnim tokom. V prvem primeru dobimo asinhrono vrtenje (tuljava se vrti z manjšo frekvenco kot je frekvenca vzbujanja), v drugem pa sinhrono (frekvenca vrtenja je enaka frekvenci vzbujanja). Možen pa je tudi obraten postopek: da se vrti magnet ali vrtljiva tuljava, napajana z enosmernim tokom, v stranskih tuljavah pa se inducirajo napetosti, ki so fazno zamaknjene v skladu z lego tuljav. V že obravnavanem primeru bi dobili inducirane napetosti na tuljavah, ki bi bile fazno zamaknjene za četrtino periode. Z ustrežno priključitvijo dobimo dvofazni sistem napetosti. Na podoben način, le z uporabo treh parov navitij na fiksnem delu (statorju) okoli vrtečega dela (rotorja) z (elektro)magnetom, dobimo trifazni sistem napetosti. Za vrtenje rotorja uporabimo recimo vodno energijo (hidroelektrarne). Že Nikola Tesla je ugotovil, da ima trifazni sistem kar nekaj prednosti pred enosmernim, ki ga je v začetnem obdobju elektrifikacije promoviral Edison. Glavna prednost trifaznega sistema je bila lažji prenos energije na večje oddaljenosti, ki je bil v primeru Edisonovega enosmerne zaradi Ohmskih izgub na »omrežju« praktično onemogočen in omejen le na krajše razdalje. Poleg tega večfazni simetrični sistemi omogočajo dodatno zmanjšanje količine materiala, saj lahko en vodnik uporabimo skupno (povratni ali ničelni vodnik). V primeru, da je na simetrični trifazni sistem generatorjev priključeno simetrično trifazno breme, je vsota vseh faznih tokov v skupno spojišče enaka nič, kar pomeni, da v ničelnem vodniku ni toka. V takem primeru bi lahko ta vodnik »izpustili«, lahko pa ga obdržimo za primer, ko breme ni popolnoma simetrično. V takem primeru bo tok v ničelnem vodniku različen od nič, vendar običajno še vedno manjši od tokov v faznih vodnikih. Premer ničelnega vodnika je v takih primerih lahko manjši od faznih vodnikov.

SISTEM TRIFAZNIH NAPETOSTI

V poglavju o vrtilnem polju smo spoznali, da je le-ta posledica krmiljenja sistema zasukanih tuljav s fazno zamaknjanim tokom. Ugotovili smo, da to polje omogoča vrtenje trajnega magneta ali kratkostične tuljavice, kar je osnova za razumevanje delovanja motorjev. Režim motorja lahko tudi obrnemo. Če namesto vzbujanja tuljav s tokom vrtimo rotor, se bo v tuljavah inducirala napetost. Če so tuljave zamenjane za določen kot, bomo dobili več virov napetosti s faznim zamikom določenim z kotom zamika tuljav. Če imamo sistem treh tuljav zavrtenih za kot 120° , dobimo na izhodu tuljav napetosti, ki so fazno zamaknjene za kot 120° .



Slika 11.1: Postavitev tuljav in generacija faznih napetosti.

Glej še:

<http://www.k-wz.de/physik/threephasegenerator.html>

http://en.wikipedia.org/wiki/Three-phase_electric_power

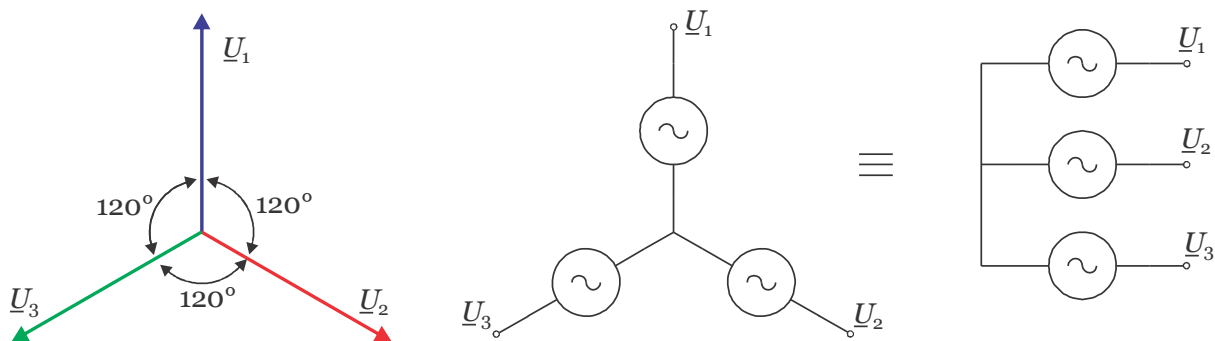
<http://www.windpower.org/en/tour/wtrb/syncgen.htm>

ZAPIS FAZNIH NAPETOSTI

V trifaznem sistemu bomo na sponkah parov tuljav, ki zajemajo šestine oboda statorja, dobili napetosti:

$$\begin{aligned}u_1 &= U_m \cos(\omega t + \alpha), \\u_2 &= U_m \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right), \\u_3 &= U_m \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right).\end{aligned}\tag{11.1}$$

Trifazni sistem s takim zaporedjem faz imenujemo pozitiven, saj se kompleksorji napetosti izmenjujejo v smeri urinega kazalca. V nasprotnem primeru imamo opravka z negativnim trifaznim sistemom. Mi bomo obravnavali na strani generatorjev le simetrične trifazne sisteme, to so taki, katerih amplituda vseh treh virov je enaka, faze pa so zamaknjene za $\frac{2\pi}{3}$.



SLIKA: Trifazni sistem prikažemo kot tri generatorje z enako amplitudo in faznim zamikom za $\frac{1}{3}$ periode $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

. Prikazana je vezava v »zvezdo«, pri kateri vežemo negativne sponke v skupno točko, ki jo ozemljimo.

EFEKTIVNE VREDNOSTI IN PRIKAZ S KAZALCI (KOMPLEKSORJI).

Pri analizi vezij s trifaznimi sistemi si pomagamo s kazalčnimi diagrami (kompleksorji), kjer običajno namesto amplitud napetosti in tokov uporabljamo efektivne vrednosti. Razlog je preprosto v tem, da sta v energetiki prenos in poraba moči izredno pomembni, ti pa sta direktno povezani z efektivnimi vrednostmi signalov. Za kompleksor napetosti harmoničnega signala v poljubni fazi bo torej efektivna vrednost napetosti enaka $U = U_{ef} = U_m / \sqrt{2}$.

Za kot α (glej fazne napetosti **Error! Reference source not found.**) si lahko izberemo poljubno vrednost, saj gre v principu za časovno vrtenje treh fazno zamaknjenih kazalcev. Mi si bomo izbrali $\alpha = \frac{\pi}{2}$, lahko pa bi izbrali tudi drugače (pogosto je v uporabi tudi $\alpha = 0$). V primeru vezave v zvezdo je med ničelnim vodnikom in faznim vodnikom t.i. **fazna napetost**, torej bi lahko pisali tudi $U = U_f$.

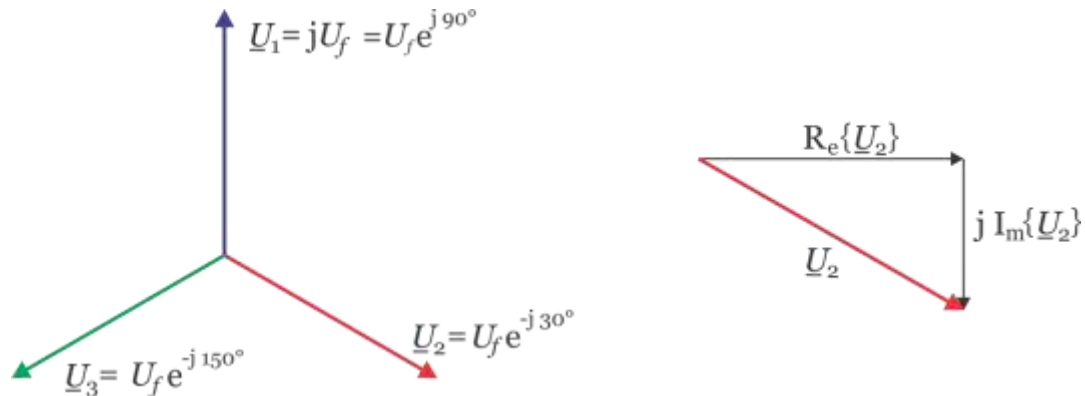
Nam vsem sta znani fazna (efektivna) napetost 230 V in medfazna (efektivna) napetost 400 V, ki jo dobimo iz domače vtičnice. Komplexorji napetosti bodo torej

$$\underline{U}_1 = U_f e^{j\frac{\pi}{2}} = U_f e^{j90^\circ} = jU_f \quad (11.2)$$

$$\underline{U}_2 = U_f e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)} = U_f e^{-j\frac{\pi}{6}} = U_f e^{-j30^\circ} \quad (11.3)$$

$$\underline{U}_3 = U_f e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = U_f e^{-j150^\circ} \quad (11.4)$$

Najlepše to prikažemo na sliki, kjer so kazalci zarotirani za $2\pi/3$ (za 120°).



Slika 11.2: Levo: Kazalčni diagram faznih napetosti simetričnega pozitivnega trifaznega sistema. Desno: Prikaz kompleksorja \underline{U}_2 , sestavljenega iz realne in imaginarne komponente.

Pri izračunih potrebujemo tudi zapise napetosti v obliki realnega in imaginarnega dela. Tedaj pišemo

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= jU_f \\ \underline{U}_2 &= U_f \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\underline{U}_3 = U_f \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right)$$

MEDFAZNE NAPETOSTI

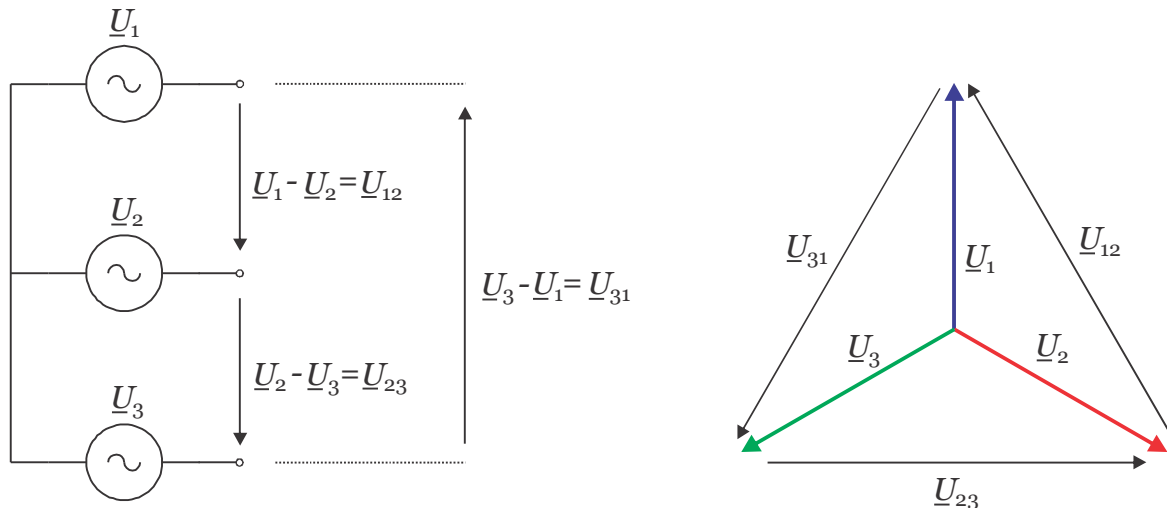
Trifazne vire se lahko priključi na breme tudi tako, da se uporabi medfazne napetosti. Te dobimo tako, da priključimo breme med sponke faznih napetosti. Matematično jih dobimo z odštevanjem kompleksorjev faznih napetosti, kot na primer

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = jU_f - U_f \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = U_f \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{3}{2} \right) = \sqrt{3}U_f \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = U_{mf} e^{j120^\circ} \quad (11.6)$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 = U_f \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3}U_f = U_{mf} \quad (11.7)$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1 = U_f \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) - jU_f = \sqrt{3}U_f \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = U_{mf} e^{-j120^\circ} \quad (11.8)$$

Prikažimo medfazne napetosti še v kompleksni ravnini. Tu dobimo kompleksor medfazne napetosti preprosto z odštevanjem kazalcev dveh faznih napetosti.



Slika 11.3: Prikaz faznih in medfaznih napetosti v kompleksni ravnini.

Tako iz matematičnega zapisa medfaznih napetosti, kot iz prikaza v kompleksni ravnini, lahko ugotovimo, da **so medfazne napetosti za $\sqrt{3}$ večje od faznih ($U_{mf} = \sqrt{3}U_f$)**, kar lahko s pridom izkoriščamo npr. za povečanje moči na bremenu. V drugih primerih pa lahko s tako vezavo uničimo napravo, ki je namenjena priključitvi le na fazne napetosti.

VEZAVA BREMEN

Najpogosteje se uporabljata dva načina vezave bremen na trifazni sistem. Poimenujemo ju **vezava v trikot** in **vezava v zvezdo**. V prvem primeru ločimo še vezavo v **zvezdoz ničelnim vodnikom** in **brez ničelnega vodnika**. Pri vezavi v trikot uporabimo za priklop bremena medfazne napetosti in ničelnega vodnika ne potrebujemo.

VEZAVA BREMENA V ZVEZDO Z NIČELNIM VODNIKOM

Ta vezava je morda najbolj enostavna za obravnavo, saj je vsako od bremen priključeno na eno od faznih napetosti. Fazni toki so zato

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \underline{U}_1 \underline{Y}_1 \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \underline{U}_2 \underline{Y}_2 \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \underline{U}_3 \underline{Y}_3 \end{aligned} \quad (11.9)$$

Vsota faznih tokov je enaka toku v ničelnem vodniku

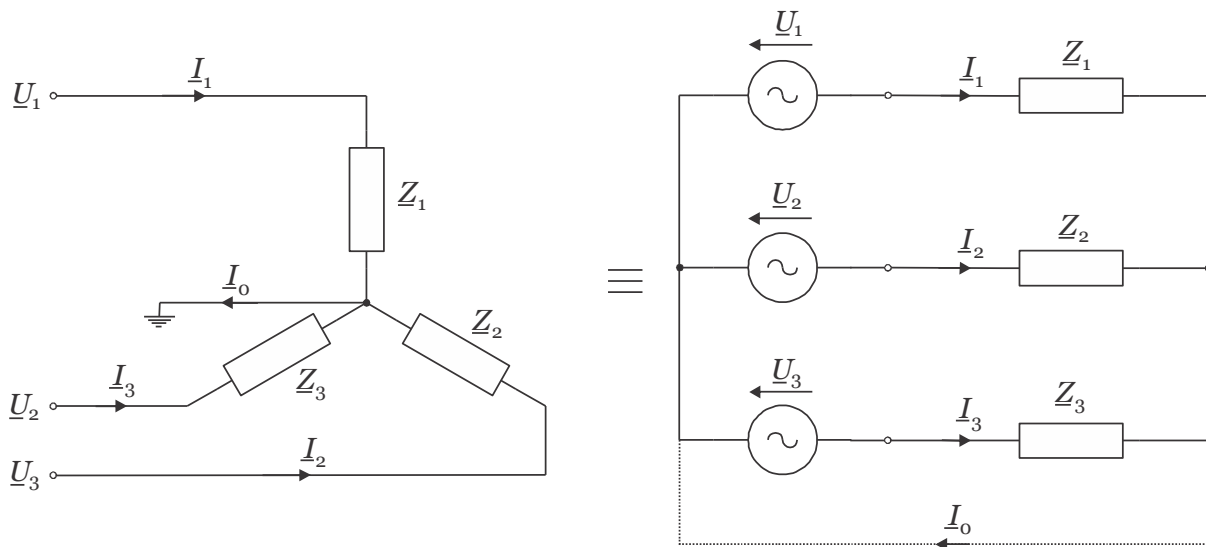
$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \quad (11.10)$$

Moč bremena je enaka vsoti moči posameznih faznih bremen

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3, \quad (11.11)$$

pri čemer lahko posamezno moč določimo z že znanimi zvezami. Npr, moč v fazi 1 je¹⁷

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = I_1^2 \underline{Z}_1 = U_1^2 \underline{Y}_1^* \quad (11.12)$$



Slika 11.4: Vezava bremena na trifazni sistem v vezavi zvezda z ničelnim vodnikom.

Primer trifaznega bremena v vezavi zvezda z ničelnim vodnikom:

Trifazno breme, ki ga sestavljajo impedanice $\underline{Z}_1 = 100 \Omega$, $\underline{Z}_2 = (50 + j50) \Omega$, $\underline{Z}_3 = -j100 \Omega$ priključimo na trifazni sistem 230/400 V v vezavi v zvezdo z ničelnim vodnikom. Določimo delovno moč bremena.

Izračun: Delovno moč lahko izračunamo na enak način, kot smo že spoznali pri enofaznih sistemih. Zopet imamo na razpolago dva načina. Pri prvem uporabimo zvezo $P = UI \cos(\varphi)$, pri drugem pa

$P = \text{Re}\{\underline{S}\} = U^2 \text{Re}\{\underline{Y}^*\}$. V fazi 1 imamo le upor, moč na njem je $P_1 = \frac{(230 \text{ V})^2}{100 \Omega} = 529 \text{ W}$. Za moč na

bremenu v fazi 2 zapišemo impedanco $\underline{Z}_2 = 50\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \Omega$ in $\underline{Y}_2^* = \frac{1}{50\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}} \text{ S} = \frac{1}{50\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ S}$.

Realni del konjugirane admitance je zopet $1/100 \Omega$, torej bo moč bremena v fazi 2 $P_2 = \frac{(230 \text{ V})^2}{100 \Omega} = 529 \text{ W}$. Delovna moč v fazi tri je enaka nič (je le jalova moč). Vsota vseh delovnih moči je torej 1058 W.

Dodatno: Določimo navidezno moč na bremenu:

$$\underline{S}_1 = \frac{(230 \text{ V})^2}{100 \Omega} = 529 \text{ VA}$$

$$\underline{S}_2 = \frac{(230 \text{ V})^2}{50\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \Omega} = 529(1 + j) \text{ VA}$$

$$\underline{S}_3 = \frac{(230 \text{ V})^2}{j100 \Omega} = -j529 \text{ VA}$$

$$\underline{S} = 1058 \text{ VA}$$

¹⁷ Pri zapisu enačb za moč smo upoštevali (kot je v navadi pri obravnavi trifaznih sistemov) efektivne vrednosti tokov in napetosti. V primeru obravnave z maksimalnimi vrednostmi je potrebno izraze pomnožiti z 0,5.

Primer izračuna toka ničelnega vodnika:

Za podatke iz prejšnjega primera določimo tok v ničelnem vodniku.

Izračun: Tok v ničelnem vodniku je enak vsoti posameznih faznih tokov $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$. Izračunati moramo torej vsak fazni tok posebej in jih sešteti:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{j230\text{ V}}{100\Omega} = j2,3\text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{230e^{-j30^\circ}\text{ V}}{50\sqrt{2}e^{j45^\circ}\Omega} = 3,25e^{-j75^\circ}\text{ A} \approx (0,84 - j3,14)\text{ A}$$

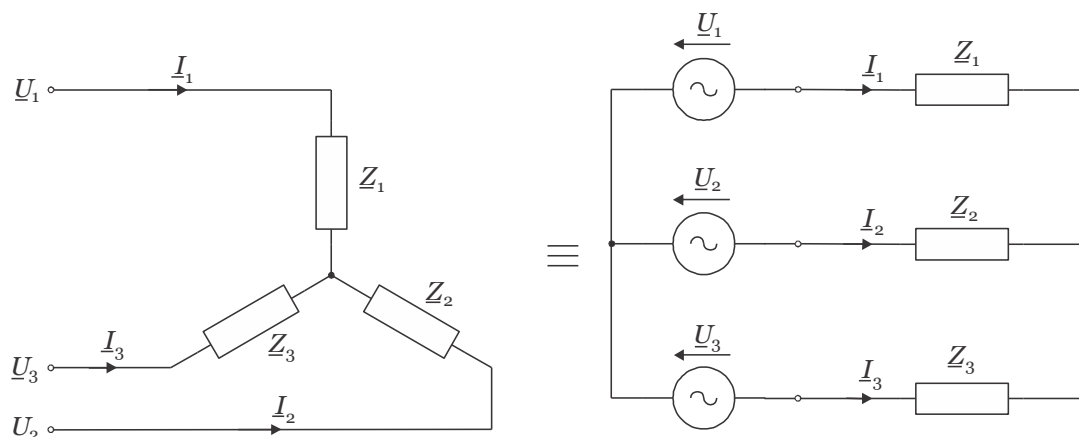
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{230e^{-j150^\circ}\text{ V}}{100e^{-j90^\circ}\Omega} = 2,3e^{-j60^\circ}\text{ A} \approx (1,15 - j2)\text{ A}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \approx (2 - j2,83)\text{ A}$$

VEZAVA BREMENA V ZVEZDO BREZ NIČELNEGA VODNIKA

Iz prejšnjega primera ugotovimo, da tok v ničelnem vodniku ni enak nič. Zakaj ni enak nič oziroma kakšna bremena bi morali imeti priključena, da bi bil enak nič? Odgovori si sam!

Kaj pa, če ničelnega vodnika ni, ali pa recimo izpade? Kakšne bodo razmere v tem primeru? Ali bo delovna moč še vedno enako velika?

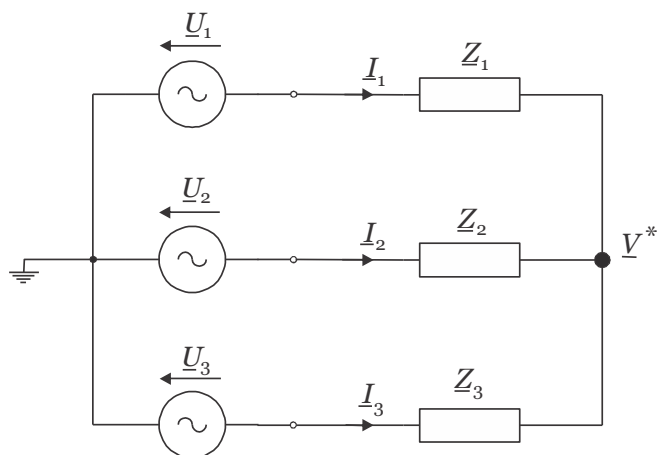


Slika 11.5: Vezava bremena v zvezdo brez ničelnega vodnika.

POTENCIAL ZVEZDIŠČA

Razmere na bremenu vezanem v trikot brez ničelnega vodnika lahko analiziramo s poljubno metodo analize vezij. Najpreprosteje kar z metodo spojiščnih potencialov. En potencial ozemljimo, običajno tistega na strani spojišča generatorjev, potencial drugega pa določimo iz pogoja, da mora biti vsota vseh faznih tokov enaka nič:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \quad (11.13)$$



Slika 11.6: Vezava v zvezdo brez ničelnega vodnika – izračun potenciala zvezdišča.

Te toke izrazimo s tokovi skozi posamezne impedance bremena

$$-(\underline{V}^* - \underline{U}_1)\underline{Y}_1 - (\underline{V}^* - \underline{U}_2)\underline{Y}_2 - (\underline{V}^* - \underline{U}_3)\underline{Y}_3 = 0 \quad (11.14)$$

S preureditvijo dobimo

$$\underline{V}^* (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) = \underline{U}_1 \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 + \underline{U}_3 \underline{Y}_3, \quad (11.15)$$

od koder je

$$\underline{V}^* = \frac{\underline{U}_1 \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 + \underline{U}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \quad (11.16)$$

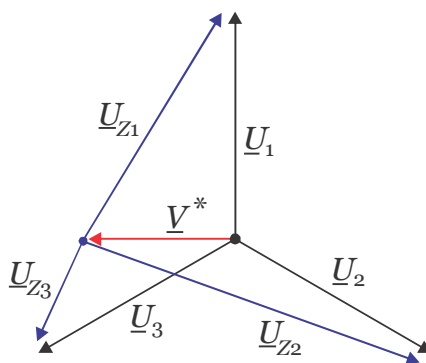
Temu potencialu rečemo **potencial zvezdišča**. Če je ničelni vodnik priključen, je seveda potencial zvezdišča enak nič in predstavlja točko v središču kompleksne ravnine. V nasprotnem primeru pa se ta točka premakne v neko drugo točko, napetosti na elementih pa so določene iz razlike faznih napetosti in potenciala zvezdišča:

$$\underline{U}_{Z1} = \underline{U}_1 - \underline{V}^* \quad (11.17)$$

$$\underline{U}_{Z2} = \underline{U}_2 - \underline{V}^* \quad (11.18)$$

$$\underline{U}_{Z3} = \underline{U}_3 - \underline{V}^* \quad (11.19)$$

Ko izračunamo napetosti na impedancah bremena, je pot do izračuna tokov ali moči na elementih preprosta.



Slika 11.7: Premik potenciala zvezdišča ob odklopu ničelnega vodnika in kompleksorji napetosti na elementih bremena.

Primer izračuna potenciala zvezdišča:

Določimo potencial zvezdišča in moči na elementih bremena iz primera 1 vezanih v zvezdo, če je ničelni vodnik odklopljen.

Izračun: Poiščemo potencial zvezdišča:

$$\underline{V}^* = \frac{\underline{U}_1 \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 + \underline{U}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{\frac{j230\text{V}}{100\Omega} + \frac{230e^{-j30^\circ}\text{V}}{50\sqrt{2}e^{j45^\circ}\Omega} + \frac{230e^{-j150^\circ}\text{V}}{100e^{-j90^\circ}\Omega}}{\frac{1}{100\Omega} + \frac{1}{50\sqrt{2}e^{j45^\circ}\Omega} + \frac{1}{100e^{-j90^\circ}\Omega}} = 230\text{V} \frac{j + \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-j75^\circ} + e^{-j60^\circ}}{1 + \frac{2}{\sqrt{2}}e^{j45^\circ} + j}$$

$$\underline{V}^* = (-21 - j120,6)\text{V}$$

Moči na posameznih bremenih so torej

Matlab: `S2=abs(230*(sqrt(3)/2-0.5j)-(-21-120.6j))^2/(50-50j)`

$$\underline{S}_1 = |\underline{U}_1 - \underline{V}^*|^2 \underline{Y}_1 = |j230 - (-21 - j120,6)|^2 \frac{1}{100\Omega} = 1233,9\text{VA}$$

$$\underline{S}_2 = |\underline{U}_2 - \underline{V}^*|^2 \underline{Y}_2 = \left| 230 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) - (-21 - j120,6) \right|^2 \frac{1}{(50 - j50)\Omega} = 485,13(1 + j)\text{VA}$$

$$\underline{S}_3 = |\underline{U}_3 - \underline{V}^*|^2 \underline{Y}_3 = \left| 230 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) - (-21 - j120,6) \right|^2 \frac{1}{j100\Omega} = -j317,65\text{VA}$$

Ugotovimo lahko, da so se moči na elementih bremena spremenile. Navidezna moč je sedaj $\underline{S} \approx (1719 + j167,7)\text{VA}$, torej je delovna moč enaka 1719 W, kar za 62,5 % več kot pri priključitvi z ničelnim vodnikom.

Komentar: Ugotovimo lahko, da se napetosti na posameznih elementih bremena lahko precej spremenijo ob izklopu ničelnega vodnika. To lahko predstavlja tudi problem v primeru, da napetost na elementu (ali pa moč) preseže dovoljeno vrednost.

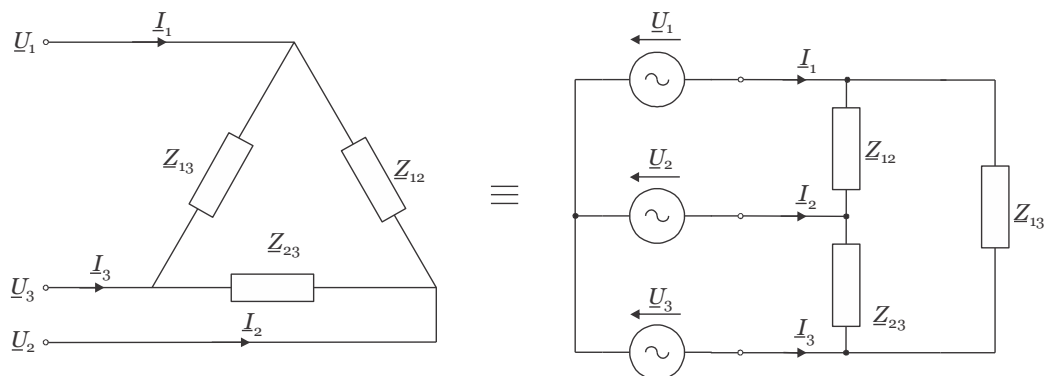
VEZAVA BREMENA V TRIKOT

Pri tej vezavi so elementi bremena priključeni na medfazne napetosti. V tej vezavi torej nimamo možnosti uporabe ničelnega vodnika. Napetosti na posameznih elementih bremena so za $\sqrt{3}$ večji od faznih napetosti: $U_{mf} = \sqrt{3}U_f$. Toki skozi posamezne impedance so torej določeni z medfaznimi napetostmi, npr:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}. \quad (11.20)$$

Fazni toki pa so razlike teh tokov, npr:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}, \text{ itd} \quad (11.21)$$



Slika 11.8: Vezava bremena v trikot (dva različna načina prikaza). Desno: Prikaz medfaznih napetosti s kompleksorji.

Primer izračuna pri vezavi trikot:

Zopet vzemimo elemente bremena iz primera 1: $Z_1 = 100\Omega$, $Z_2 = (50 + j50)\Omega$, $Z_3 = -j100\Omega$ in ga v vezavi trikot priključimo na trifazni sistem 230/400 V. Določimo navidezno moč bremena.

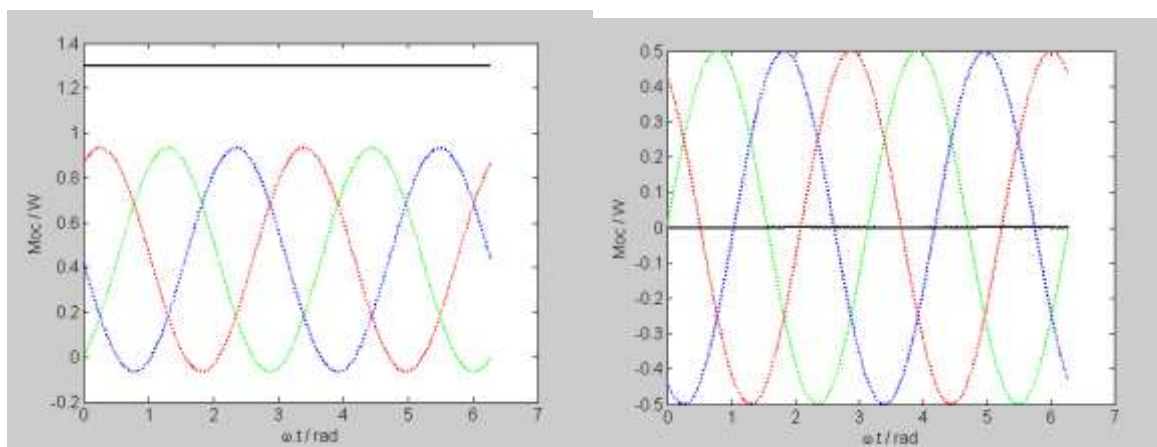
Izračun: Zopet vzemimo formulo $\underline{S} = U^2 \underline{Y}^*$, pri čemer so sedaj elementi bremena na medfazni napetosti, ki je za $\sqrt{3}$ večji od faznih, razlika v izračunu navidezne moči v prvem primeru in tem primeru so le v večji medfazni napetosti. Ker je za moč pomemben kvadrat napetosti, bo **moč v vezavi trikot za 3x večja od tiste pri vezavi v zvezdo z ničelnim vodnikom**. $S_\Delta = 3S_Y$.

$$\underline{S}_1 = \frac{(\sqrt{3} \cdot 230 \text{ V})^2}{100 \Omega} = 3 \frac{(230 \text{ V})^2}{100 \Omega} = 1587 \text{ VA}, \text{ itd.}$$

$$\underline{S} = 3 \cdot 1058 \text{ VA}$$

SIMETRIČNO BREME

Simetrično breme je posebno primerno tedaj, ko nimamo na razpolago ničelnega vodnika, saj ga v primeru simetričnega bremena niti ne potrebujemo (tok v ničelnem vodniku je enak nič). V primeru simetričnega bremena (vse impedance v posameznih fazah (ali medfazah) so enake) bodo bremenski toki zaostajali ali prehitevali fazne ali medfazne napetosti za isti fazni kot. To lahko prikažemo v kompleksni ravnini.



Slika 11.9: Prikaz napetosti in tokov v kompleksni ravnini pri simetričnem trifaznem bremenu (levo upor, desno idealna tuljava)

Trenutne moči na posameznih elementih bremena so:

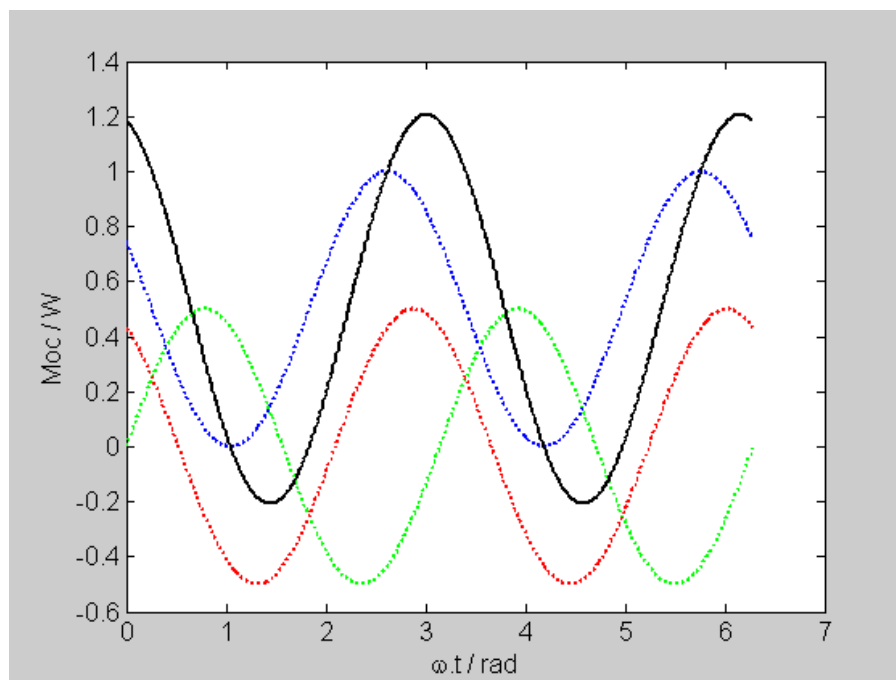
$$\begin{aligned} p_1(t) &= UI \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \beta) \\ p_2(t) &= UI \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \beta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ p_3(t) &= UI \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \beta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (11.22)$$

Celotna moč je vsota vseh treh moči: $p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)$. Z upoštevanjem zveze $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ dobimo pomemben rezultat:

$$p(t) = \frac{3}{2}UI \cos(\beta). \quad (11.23)$$

Pri simetričnem bremenu (impedance v vseh fazah enake) je trenutna moč konstantna. Torej precej različna od enofaznega sistema, ko trenutna moč niha z dvojno frekvenco vira. Poglejte si časovne poteke moči na grafih za različna bremena na naslednji strani.

PRIMERI ČASOVNIH POTEKOV MOČI NA RAZLIČNIH TIPIH BREMEN



Slika 11.10: Na trifazni sistem je priključeno breme z vezavo v zvezdo z ničelnim vodnikom. Levo zgoraj) Breme je simetrično in ohmsko, Desno zgoraj) breme je simetrično in induktivnega značaja: $\underline{Z} = Z e^{j\frac{\pi}{6}}$, Levo spodaj) breme je simetrično in čisto induktivno in Desno spodaj) breme je nesimetrično. Trenutna moč na posameznem elementu bremena niha z dvojno frekvenco vira (prikazana s črtkanimi črtami), celotna trenutna moč bremena je vsota trenutnih moči na posameznih elementih (polna črta). Na zgornjih dveh grafih je trenutna moč bremena konstantna (največja je v primeru čisto ohmskega bremena), v primeru simetričnega čisto induktivnega bremena je delovna moč enaka nič, v primeru nesimetričnega bremena trenutna moč niha z dvojno frekvenco osnovnega signala (toka ali napetosti)

INDEKS

- admitanca, 47
- bilanca moči, 54
- bočna frekvenca, 62
- časovna konstanta, 5
- Delovna moč, 32
- dušenje, 62
- efektivna vrednost, 20
- Eulerjev obrazec, 40
- faktor delavnosti, 33
- faktor moči, 33
- faktor oblike, 21
- fazna napetost, 96
- fazne napetosti, 96, 97
- fazni kot, 19
- frekvenca signala, 18
- impedanca, 47
- jalova moč, 33
- kompensacija jalove moči, 55
- kompleksno število, 40
- kvaliteta vezja, 61
- magnetilni tok, 86
- maksimalna moč, 81
- maksimalni fluks v jedru, 85
- medfazna napetost, 97
- medfazne napetosti, 97
- metoda Kirchoffovih zakonov, 74
- metoda spojiščnih potencialov, 76
- metoda zančnih tokov, 75
- napetostna prestava, 85
- Navidezna moč, 33
- Nortonovo nadomestno vezje, 78
- perioda signala, 18
- potencial zvezdišča, 100
- prehodni pojav, 2
- prilagoditev bremena, 57
- Primer določanja tokov in napetosti v vezju z reševanjem diferencialne(ih) enačb, 38
- ravnotežni tok, 86
- razglašenosť, 61
- reducirane vrednosti, 88
- resonančna frekvenca, 60
- resonančni pojav, 59
- RMS vrednost, 23
- simetrično breme, 103
- sklopljene tuljave, 72
- srednja vrednost, 19
- stavek superpozicije, 78
- Tellegenov stavek, 80
- temenski faktor, 21
- Theveninovo nadomestno vezje, 78
- transformator, 83
- trifazni sistemi, 95
- usmerjena vrednost, 21
- vezava v trikot, 102
- vezava zvezda brez ničelnega vodnika, 100
- vezava zvezda z ničelnim vodnikom, 98
- vrtilno magnetno polje, 92
- vzporedni nihajni krog, 65
- začetni pogoj, 3
- zaporedni nihajni krog, 59