

Dejan Križaj

Osnove elektrotehnike 1

Elektrostatično polje
Tokovno polje
Enosmerna vezja



2019

Grške črke:

grške črke	v slovenščini	nove grške črke
A α	alfa	a
B β	beta	b
Γ γ	gama	g
Δ δ	delta	d
E ε	epsilon	e
Z ζ	dzeta	dz, z
H η	eta	ē
Θ θ	theta	th
I ι	jota	i, j
K κ	kapa	K
Λ λ	lambda	l
M μ	mi	m
N ν	ni	n
Ξ ξ	ksi	x
O ο	omikron	o
Π π	pi	p
P ρ	ro	r
Σ σ	sigma	s
T τ	tau	t
Υ υ	ipsilon	Y
Φ φ	fi	Ph
X χ	hi	ch
Ψ ψ	psi	Ps
Ω ω	omega	ō

Trigonometrija

Kot / stopinje	Kot/ radiani	Sin	Cos	Tan
0	0	0	1	0
30	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	nedoločen
180	π	0	-1	0
270	$3\pi/2$	-1	0	nedoločen

Skalarni produkt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\alpha)$$

Tabela odvodov:

http://sl.wikipedia.org/wiki/Tabela_odvodov

Tabela integralov:

http://sl.wikipedia.org/wiki/Tabela_integralov

Spoštovani študenti!

Pred vami je obnovljena in razširjena skripta/učbenik za predmet Osnove elektrotehnike 1. Zakaj sem se odločil za razširitev že tako obsežne tematike? V bistvu ne gre za razširitev teoretičnega dela, ki ostaja več ali manj enak, pač pa za dodatna podpoglavja, ki so nekako v oporo teoretičnemu delu. Pa ne toliko v smislu razumevanja teorije, pač pa kot njena nadgradnja. Pogosto se študentom dozdeva, da si s poznavanjem osnovne teorije elektrotehnike (elektromagnetike) v praksi ne morejo kaj dosti pomagati, saj se dozdeva, kot da je to predmet, ki študente šele uvaja v osnovne skrivnosti elektrotehnike, v višjih letnikih pa bo mogoče s skupnim znanjem šele kaj resnega narediti. Želim vas prepričati, da to ni res. Da že temeljna znanja, ki jih boste pridobili, omogočajo osnovno razumevanje narave elektromagnetnih pojavov in s tem razumevanje osnovnih principov, ki so v ozadju delovanja določenih naprav. Najprej je torej potrebno razumeti, kako določena naprava deluje. Vse principe delovanja seveda ne moremo obravnavati v predmetu Osnove elektrotehnike 1, ki se posveča predvsem pojavom elektrostatike in enosmernega tokovnega polja. Kljub temu pa zadoščajo za razumevanje delovanja marsikatere naprave ali razumevanje določenega pojava. Na primer za razumevanje principa delovanja fotokopirnega stroja ali laserskega tiskalnika. Za njegovo uporabo v bistvu ne potrebujemo znanja elektrotehnike, drugače pa je, če ga želimo popraviti, kaj šele izboljšati način delovanja. Še višji nivo pa je, da tako napravo izumimo. Včasih izgleda, kot da je že vse izumljeno, kot da ni prostora za nove izume in včasih tudi, da je Slovenija premajhen prostor za kakšne pomembnejše izume. To je delno res, saj razvoj določenega izdelka, recimo farmacevtskega, lahko stane več sto milijonov, prav tako izdelava novega avtomobila, da o raketah ne govorimo. Vedno pa se najde določeno področje ali niša, kjer lahko naredimo preboje, nekaj novega, nekaj, kar se drugi niso spomnili. Zakaj ne bi bili vi tisti, ki bi prišli do neke novosti? Nekaj dopolnilnih podpoglavij se posveča zgodovinskim zanimivostim, nekaj pa je tudi takih, ki kažejo, da so tudi mnoga nova dognanja in rešitve povezana s temelji elektrotehniške znanosti.

Virov znanja je v današnji dobi ogromno, kdor želi priti do virov, jih bo našel. Literature o elektrotehniki je ogromno, že v Sloveniji lahko pridete do različnih virov, tudi na področju osnov elektrotehnike. Ta učbenik je torej le en od mnogih, ki se jih lahko poslužite. V Sloveniji imamo kar bogato zgodovino poučevanja predmeta elektrotehnika. Zanimivo je vzeti v roke delo prof. Milana Vidmarja [Predavanja o znanstvenih osnovah delovne elektrotehnike](#), ki datira iz leta 1952. V tedanjem obdobju je bilo pomembno predvsem področje električnih strojev in elektrifikacije, kasneje je šele sledilo obdobje elektronike, avtomatike, telekomunikacij. Kljub temu so bili osnovni zakoni elektrike tedaj že dodobra znani in se do danes niso spremenili. Spremenil se je morda le poudarek in način poučevanja. Za njim je sledilo mnogo predavateljev Osnov elektrotehnike in vsak je odvel kakšen del in tudi kakšnega dodal. V zadnjem obdobju velja omeniti prispevek kolega Antona Sinigoja z delom Osnove elektromagnetike ([PDF](#)), ki vsebuje tvarino obeh predmetov, tako Osnov elektrotehnike 1 kot Osnov elektrotehnike 2. Delo, ki se bo morda komu zdelo avtorsko nekoliko posebno je sicer precej teoretično, a je z leti postalo prečiščeno in lahko šteje kot referenca za nadaljnja dela na tem področju.

V čem je torej poseben ta učbenik? Vsi učbeniki za osnove elektrotehnike obravnavajo več ali manj isto snov. Gre pa za način predstavitve, ki je pri vsakem avtorju nekoliko drugačen. Gre tudi za različne poudarke. Nekateri želijo biti zelo teoretično koncizni, morda malo »matematični«, drugi pa matematični del zmanjšajo na najmanjšo možno miro. Sam poskušam biti nekje vmes. Preveč poenostavljanja ni pametno, saj so elektromagnetni pojavi dejansko precej zapleteni. V bistvu bi bila obravnava teh pojavov še mnogo bolj zapletena, če ne bi imeli koncepta električnega in magnetnega polja. Če bi želeli direktno izračunati učinke elektromagnetnih sil, npr. silo med telesy, energijo ali inducirano napetost, bi brez uporabe koncepta električnega in magnetnega polja »polomili vse svinčnike«. Električno in magnetno polje torej obravnavamo zato, ker nam olajšajo razumevanje elektromagnetnih pojavov. Moje osnovno vodilo je, da je potrebno tekst napisati čim bolj preprosto, ne pa preveč. Če zadeve preveč poenostavimo, je pač nevarno, da veljajo le v zelo omejenih primerih, kot na primer le za konstantni tok. Razumevanje osnovnih spoznanj elektrotehnike poteka na več nivojih. Osnova je sicer pretvorba fizikalnih zakonitosti v model, ki je najpogosteje v obliki

matematičnega zapisa, pogosto z integrali ali odvodi. To nam omogoča, da predvidimo (izračunamo) učinke električnih pojavov. Ni pa tudi vse v matematiki, računanju. Sicer bi se namesto elektrotehnikov z elektriko bavili matematiki. Ko se enkrat pride do ustrezne enačbe (modela), matematikom ni para, prej pa mora delo opraviti nekdo, ki razume ali poskuša ustrezno razumeti elektromagnetne pojave. Into je drug nivo, če je prvi matematični, je drugi povezan z razumevanjem osnovnih konceptov, povezav. Ključno za ta predmet je določen občutek za električno (in pri OE2 magnetno) polje. Ker gre v določeni meri za abstraktne pojme, je potrebno najti način, da se z njimi »spopademo« ali bolje, da jih sprejmemo, razumemo. Zato je ta učbenik prepreden z dodatnimi grafičnimi prikazi, vsebuje povezave na animacije, simulacije in druga računalniška orodja, ki nam pomagajo razumeti električne pojave.

Morda še beseda o virih napisanih v tujih jezikih. Najpogosteje študenti posegajo po virih v angleškem jeziku, čeprav je jasno, da je mnogo dobre literature tudi v drugih jezikih, npr. nemškem, francoskem, ruskem. Pa nič zato, že angleške dobre literature je vrh glave. Klasičnih tekstov je mnogo, zato bom omenil le nekaj takih za bolj pogumne, ki bi se želeli spopasti s še malo višjim nivojem teorije elektromagnetike. Osnovni problem razumevanja teh tekstov je, da mi obravnavamo osnovne zakone elektrotehnike le z integralskimi enačbami, medtem, ko drugi v večini primerov preidejo tudi na t.i. diferencialni zapis enačb. Uporabo takega zapisa sam sicer običajno malo nakažem, ne spada pa med obvezno znanje, saj nam za obravnavo z diferenciali umanjka matematično znanje. [Nekoliko je problematično, da predmetoma Osnove elektrotehnike I in 2 ne sledi nujno nadaljevanje, ki bi nadgradilo to osnovno znanje teorije še z zapisi v diferencialni obliki in iz tega sledeča pika na i: izpeljava elektromagnetnega valovanja in njegovih posledic. Upam, da bo v prihodnosti več posluha za to nadgradnjo, ki je včasih veljala za klasiko, pa so jo kasneje »povozili modernejši predmeti«]. Učbenik s klasično predstavitvijo teorije elektromagnetike, ki je našemu predznanju še kar dostopen, je [Electromagnetics](#) od Branislava M. Notarosa. Morda nam je njegov način predstavitve bolj domač tudi zato, ker gre za delo profesorja, ki je drgnil šolske klopi v rajni Jugoslaviji, sedaj pa poučuje na Colorado State University. Kakšen izvod bi se našel tudi v naši knjižnici. Od starejših učbenikov, ki pa so pogosto obnovljeni, velja omeniti vsaj **Electricity and Magnetism** E.M. Purcella, ki je leta 1952 dobil Nobelovo nagrado za delo na področju nuklearne magnetne resonance (v bistvu velja za izumitelja te metode). (Obstaja tudi srbo-hrvaška verzija tega učbenika – *Electricitet i Magnetizam*, morda zanimiv za tiste, ki jim slovenščina ni materni jezik). Našel sem tudi PDF verzijo učbenika na spletu ([povezava](#)), ni pa nujno, da bo s časom obstala. Nekonvencionalno delo je tudi **Feynman lectures of physics**, avtorja Richarda P. Feynmana, ki velja za morda najbolj popularen učbenik fizike na svetu. Za elektrotehniko je zanimiv predvsem drugi del, ki obravnava poglavja elektromagnetike. Feynman je bil v vseh pogledih zanimiv človek, slovel je tako po svojem izjemnem fizikalnem znanju - dobil je tudi Nobelovo nagrado (1965) za dela na področju kvantne elektrodinamike, kot tudi po pronicljivosti in radoživosti (avtobiografija *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* ali *What Do You Care What Other People Think?*) in zanimanju za popularizacijo znanosti. Okoli leta 1960 je bil pozvan s strani Caltech univerze (California Institute of Technology), da osveži študij osnov fizike s spoznanji moderne fizike. Tega se je lotil zelo resno in v njegovem samosvojem stilu, od koder izvirajo trije zvezki (lecture notes), ki sicer ne nastopajo v nobenem kurikulumu kot obvezno čtivo, kljub temu pa so zaradi originalnosti misli in prezentacije ostali kot znamenitost in referenca. Feynman je kot predavatelj na Caltech nastopil le eno leto. Dela so dostopna tudi na spletu: <http://www.feynmanlectures.caltech.edu>.

Mnogo je tudi modernih učbenikov za fiziko, ki vključujejo poglavja iz elektrotehnike, torej tudi elektrostatične in tokovnega polja, kar je naše zanimanje pri predmetu OE1. Velja omeniti učbenik **Fundamentals of Physics**, ki je znan kot učbenik avtorjev D. Hallidaya in R. Resnicka (ki tudi nista bila prva avtorja), vendar je trenutno avtor-editor desete izdaje J. Walker. Gre za dobro razdelano delo, tako oblikovno kot strokovno, ki je prešlo mnogo oči in vsebuje mnogo dodatkov, video ilustracij, online pomoči, animacij in podobno. Kakšen izvod bi se našel tudi v naši knjižnici, najde pa se tudi kakšna [PDF verzija](#) na spletu. Primeren je tudi kot dodatna literatura za fizikalne predmete.

Na koncu velja omeniti še študijski material MITOpenCourseWare znamenite ameriške univerze MIT (Massachusetts Institute of Technology), ki je prosto dostopen na spletu. Praktično ni tematike, ki je tam ne bi

našli, za nas pa je zanimiv predvsem [predmet Electricity and Magnetism](#), ki se z leti sicer spreminja, v osnovi pa pokriva področje električnega in magnetnega polja.

Zainteresiranemu bralcu torej literature zagotovo ne bo zmanjkalo. Potrebno je torej najti pravo ravnovesje, med študijem in delovanjem. Problem aktivnega delovanja je morda v sami snovi, ki pogosto zahteva za učinkovito delo določeno opremo, ki študentu ni dostopna. Tu sam vidim dve poti: prva so aktivnosti z uporabo računalnika, ki ga zagotovo tudi sami posedujete. Elektrotehnika se namreč vedno bolj opira na raznorazna računalniška orodja, od preprostejših programov za izračune enačb, do bolj kompleksnih programov za simulacijo elektromagnetnih pojavov. Tehniki se zelo pogosto poslužujemo programov kot so Matlab ali njegovi brezplačni kloni (Octave, SciLab), lahko pa tudi programskih jezikov, od katerih bi izpostavil predvsem programski jezik Python. S temi orodji se da marsikaj postoriti, bolj poglobljeno znanje pa koristi tudi kasneje, pri znanstveno-raziskovalnem delu, pa tudi v podjetjih. Za numerične simulacije lahko poskusimo napisati tudi svoje programe, obstajajo pa tudi bolj zahtevni programi za simulacije (Comsol, Ansys, ..) ali pa nekoliko manj zahtevni, kot npr. [Argos2D](#) ali [FEMM](#). Če imate veselje za raziskovalno delo, pa imate na voljo naslednjo pot: poiščete informacije o laboratoriju, ki se ukvarja s tematiko, ki vam je blizu. Z veseljem vas bodo vključili v njihovo raziskovalno delo, pogosto pa vam lahko tudi omogočijo, da realizirate svojo idejo. Je pa tako kot pri vseh stvareh: potrebno je biti vztrajen in tudi malo pogumen.

Srečno na poti,

Dejan Križaj, 2019

Učbenik je dostopen na spletni strani [Laboratorija za bioelektromagnetiko](#), na [google drive-u](#) in s časom verjetno še kje drugje.

Osnovna pojasnila za uporabo učbenika:

Zvezdica (*) pred naslovom podpoglavja pomeni, da gre za dodatno poglavje, ki ne spada med obvezno snov.

Pomembnejše enačbe so označene z barvami:

- Enačbe označene **zeleno** predstavljajo osnovne zakone in temeljne zveze.
- Enačbe označene **rumeno** sledijo ali se nanašajo na osnovne zakone in temeljne zveze.
- Enačbe označene **turkizno** označujejo konkretne zveze za izračune, izpeljane iz pomembnih zvez ali osnovnih zakonov.

PS: čeprav gre za obnovljeno/razširjeno verzijo učbenika, se še vedno prikadejo napake. Nekaj starih je odstranjenih, verjetno pa so se prikradle nove. Ker sem se odločil dati to verzijo na splet v PDF formatu v celoti, ne bo težko dopolniti ali popraviti teksta, če se pojavi potreba. Zato vas pozivam, da javite napake, pa tudi predloge za dopolnitve ali spremembe. Morda bo namesto mene urejal nadgradnje kdo drug, zato odpiram poseben email naslov osnove.elektrotehnike.dk@gmail.com, ki bo vaše pripombe javljal trenutnemu urejevalcu. Hvala.

KAZALO POGLAVIJ

0. Uvod.....	7
1. Naboj in tok	16
2. Coulombov zakon.....	28
3. Električna poljska jakost.....	33
4. Porazdelitve nabojev.....	40
5. Koordinatni sistemi	45
6. Električna poljska jakost porazdeljenih nabojev	50
7. Gaussov zakon	63
8. Delo in potencialna energija.....	72
9. Potencial in napetost	78
10. Prevodnik v električnem polju	92
11. Zveza med E in V.....	100
12. Gibanje nabojev v električnem polju	103
13. Električni dipol.....	110
14. Okovinjene ekvipotencialnih ploskev.....	118
15. Metoda zrcaljenja.....	124
16. Kapacitivnost.....	131
17. Dielektrik v električnem polju.....	138
18. Energija.....	159
19. Kondenzator	169
20. Časovno konstantno tokovno polje	182
21. Viri napetosti.....	200
22. Enosmerna vezja – osnovni zakoni	215
23. ELEKTRIČNI VIRI	218
24. OSNOVNA ELEKTRIČNA VEZJA	223
25. Moč.....	241
26. Analiza enosmernih vezij	246
27. Stavki (Teoremi)	255

KAZALO - RAZŠIRJENO

0. Uvod	7
Osnovne enačbe (zakoni), ki opisujejo električne pojave	9
Osnovne veličine	10
Merske enote in pisanje enačb	11
Označevanje	11
Gradniki snovi	12
Prevodniki, izolatorji, polprevodniki, dielektriki	12
** Elektrenje s trenjem	13
* Matematični uvod – integral in odvod	14
Druge oblike integracij	14
Od naklona do odvoda	15
1. Naboj in tok	16
Naboj (elektrina)	16
Zakon o ohranitvi naboja	16
Električni tok (kontinuitetna enačba)	17
Predznak toka	19
odvajanje funkcij	20
Kontinuitetna enačba	22
Naboj kot integral toka	22
Konstanten tok	26
* Izračun in izris rezultatov	27
2. Coulombov zakon	28
Zapis sile v vektorski obliki	29
Superpozicija sil	31
3. Električna poljska jakost	33
Superpozicija električnega polja	34
Prikazovanje električne poljske jakosti v prostoru	35
* Prikaz električnega polja v 2D in 3D prostoru	36
* Kako je prišlo do koncepta električnega polja?	37
4. Porazdelitve nabojev	40
Volumska gostota naboja	40
Površinska gostota naboja	41
Linijska gostota naboja	41
* Gekon uporablja elektrostatiko za plezanje	42
5. Koordinatni sistemi	45
Kartezični koordinatni sistem	45
Valjni (cilindrični) koordinatni sistem	46
Krogelni (sferični) koordinatni sistem	48
6. Električna poljska jakost porazdeljenih nabojev	50
Polje točkastega naboja	50
Polje porazdeljenih nabojev	51
Postopek za določitev polja porazdeljenih nabojev	52
* Matematični priročnik	54
Električna poljska jakost enakomerno naelektrene tanke palice – premi naboj	55
Polje enakomerno naelektrene daljice	56
Polje v osi naelektrenega obroča	58
Polje v osi naelektrenega diska	59
Polje naelektrene ravnine	60
Primerjava potekov polja	61
7. Gaussov zakon	63
Silnice	63
Pretok električnega polja	63
Pretok nehomogenega polja skozi neravno površino	64
Pretočne cevke ali gostotnice	65
Pretok polja po celotni (zaključeni) površini	65

Pretok polja točkastega naboja skozi zamišljeno površino krogle	66
Pretok polja skozi zaključeno površino poljubne oblike v kateri se nahaja množica nabojev	66
Vpliv nabojev zunaj zaključene površine na pretok polja skozi notranjost površine	67
Naelektrena krogla	68
Naelektrena valja z isto osjo = koaksialni kabel	69
Naelektrena ravnina	70
* Kdo je prvi »izumil« Gaussov zakon	71
8. <i>Delo in potencialna energija</i>	72
Delo po poljubni poti in velikosti sile	72
Delo električne sile	73
Delo električnih sil ni odvisno od poti	74
Delo po zaključeni poti	75
Potencialna energija	75
Potencialna energija sistema nabojev	76
Delo kot razlika potencialnih energij sistema	77
9. <i>Potencial in napetost</i>	78
Električni potencial	78
Potencial v okolici točkastega naboja Q	79
Potencial sistema točkastih nabojev	80
Potencial pri zvezno porazdeljenih nabojih	80
Potencialno polje je skalarno polje	81
Ekvipotencialne ploskve	81
Električna napetost	83
Drugi Kirchoffov zakon	83
Osnovni primeri izračuna napetosti, polja in potenciala za: ploščati, valjni in sferični kondenzator	84
Dve ravni vzporedni naelektreni plošči: ploščni kondenzator	84
Koaksialni kabel (valjni kondenzator)	86
Krogelni (sferični) kondenzator	89
10. <i>Prevodnik v električnem polju</i>	92
Prevodnik v zunanem električnem polju	92
Površina prevodnika je ekvipotencialna ploskev	93
Elektrostatična indukcija ali influenza	94
Polje znotraj votline prevodnika – faradayeva kletka	94
Naboj v votlini prevodnika	94
Prenos naboja na zunanje stene prevodnika	95
Električno polje na površini prevodnika	96
Razlika med poljem naelektrene ravnine in poljem na površini prevodnika	96
Sila na naboj na površini prevodnika	97
* Xerografija	98
11. <i>Zveza med E in V</i>	100
Izračun električne poljske jakosti iz potenciala in obratno	100
12. <i>Gibanje nabojev v električnem polju</i>	103
Energija delca med gibanjem	104
Primerjava velikosti gravitacijske in električne sile	105
* Simulacije s programom EJSS	105
Prebojna trdnost, prebojna napetost	106
* 2. eksperiment Josepha Johna Thomsona (1856 - 1940)	107
* Elektroforeza	108
13. <i>Električni dipol</i>	110
Električni dipol	110
Električni dipolni moment	110
Polarne in nepolarne molekule	111
Dipol v električnem polju	112
Potencial v okolici električnega dipola	113
Električno polje dipola	115
Način izračunavanja sile na dipol iz spremembe električne energije	116
* Izračun sile na dipol iz spremembe električne poljske jakosti	116

Potencialna energija dipola	117
14. Okovinjene ekvipotencialnih ploskev	118
Polje med okovinjenimi ekvipotencialnimi ploskvami	118
Sistem dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev	119
Ekvipotencialne ploskve polja dveh premih nabojev so krožnice (plašči valjev)	120
Dva prevodna valja enakega polmera priključena na vir napetosti	121
15. Metoda zrcaljenja	124
Prevodni valj nad zemljo (upoštevanje ekscentričnosti)	124
Daljnovidna vrv nad zemljo (zanemaritev ekscentričnosti)	125
Kapacitivnost med vrvjo in zemljo	127
Računanje polja in potenciala v okolici daljnovidnih vrvi nad zemljo	128
Zrcaljenje točkastega naboja na kovinski krogli	130
16. Kapacitivnost	131
Kondenzator kot »koncentriran« element	131
Merjenje kapacitivnosti	132
Računanje kapacitivnosti	132
Kapacitivnosti osnovnih struktur	133
Kondenzatorska vezja	135
Zaporedna vezava kondenzatorjev	135
Vzporedna vezava kondenzatorjev	135
Enačbe potrebne za analizo splošnega kondenzatorskega vezja	137
17. Dielektrik v električnem polju	138
Dielektrik vstavljen v zračni kondenzator	138
Relativne dielektričnosti in prebojne trdnosti materialov	139
Fizikalna razlaga spremembe kapacitivnosti ob uporabi dielektrika	140
1) Ploščni kondenzator naelektren s prostim nabojem med ploščama	140
2) Ploščni kondenzator pri priključeni fiksni napetosti med ploščama	141
Vektor polarizacije	141
Površinska gostota polariziranega naboja	142
Električna susceptibilnost	143
Modificiran Gaussov zakon in vpeljava vektorja gostote električnega pretoka - D.	143
Zveza med D in E	145
Zveza med P in D	145
Načini izračunavanja polja v dielektrikih za preproste strukture, kjer lahko uporabimo princip simetrične porazdelitve naboja in uporabimo modificiran Gaussov zakon	145
Povečanje kapacitivnosti zaradi vstavitve dielektrika v kondenzator pri priključeni napetosti	149
* Piezoelektriki	150
* Mikrofoni	152
Mejni pogoj za normalno komponento polja	154
Mejni pogoj za tangencialno komponento polja	155
Polje na meji dielektrika in kovine	156
* Sila med dielektriki / dielektroforeza	157
18. Energija	159
Ponovitev: delo električnih sil, potencialna energija, napetost in potencial	159
Energija posameznega naboja pri preletu električnega polja	159
Potencial v okolici osamljenega naboja in energija sistema dveh nabojev	159
Potencialna energija sistema točkastih nabojev	160
Energija v polju kondenzatorja	162
Določitev kapacitivnosti iz energije v kondenzatorju	164
Energija elektrostatičnega sistema porazdeljenih nabojev	164
Gostota energije in energija polja	165
Gibalni procesi – sila na naelektrena telesa	166
1) Primer gibalnih procesov naelektrenih teles brez priključenega vira napetosti	166
2) Primer gibalnih procesov pri priključeni napetosti	167
Izračun sile iz spremembe kapacitivnosti	167
19. Kondenzator	169
Kondenzator kot naprava za shranjevanje naboja	169

Kazalo

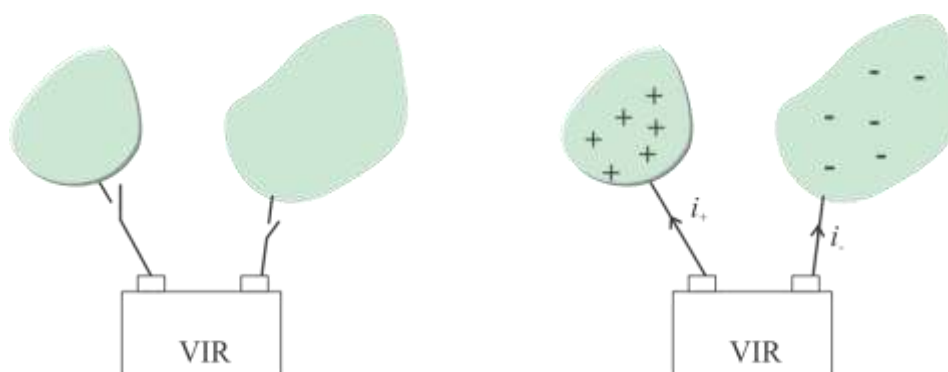
Kondenzator kot naprava za shranjevanje električne energije	171
Pomembne lastnosti kondenzatorjev	172
* Tipi kondenzatorjev	173
* Numerično računanje elektrostaticnih polj	177
20. Časovno konstantno tokovno polje	182
Gostota toka	182
Kontinuitetna enačba	184
Časovno konstantno tokovno polje	185
Tok v snovi	187
Konvektivni tok	187
Konduktivni tok	188
Ohmov zakon v diferencialni obliki	189
Temperaturna odvisnost specifične upornosti	192
Joulov zakon	193
Mejni pogoj za J	195
Dualnost tokovnega in elektrostaticnega polja	197
* Realni kondenzator	199
21. Viri napetosti	200
Generatorska sila	200
Generatorska napetost	201
Tokokrog	202
Zn/Cu baterija	204
Svinčeva baterija – akumulator	205
Nikelj – kadmijeve baterije (Ni-Cd)	206
Nikelj – metal – hidridne baterije	206
Litij – ionske baterije	206
* Sončna celica	209
* Atmosferska elekrika	211
22. Enosmerna vezja – osnovni zakoni	215
1. Kirchoffov zakon	215
2. Kirchoffov zakon	216
Ohmov zakon	217
Označevanje smeri tokov in napetosti na elementih vezja	217
23. ELEKTRIČNI VIRI	218
Idealni napetostni vir	218
Realni napetostni vir	218
Breme, priključeno na realni napetostni vir	219
Idealni tokovni vir	220
Realni tokovni vir	220
Vzporedna in zaporedna vezava virov	221
** Določitev delovne točke pri nelinearnem bremenu	222
24. OSNOVNA ELEKTRIČNA VEZJA	223
1. Zaporedna vezava uporov	223
2. Vzporedna vezava uporov	223
3. Napetostni delilnik	224
4. Tokovni delilnik	226
5. Napetostni delilnik s potenciometrom	226
6. Mostično vezje	227
7. Transformacija zvezda – trikot	228
Temperaturne lastnosti uporov	229
Merilni inštrumenti	230
Voltmeter	230
Ampermeter	231
* DODATNO: Merilni inštrumenti v praksi	232
* Dodatno: Na kratko o senzorjih temperature	235
* Dodatno: Wheatstonov mostič	237
25. Moč	241

Moč na bremenu	242
Maksimalna moč na bremenu	244
Izkoristek bremena	244
26. <i>Analiza enosmernih vezij</i>	246
1. Metoda Kirchoffovih zakonov (metoda vejnih tokov)	246
Teorija grafov (na kratko)	247
Zapis in reševanje sistema enačb	248
2. Metoda zančnih tokov	250
Reševanje sistema dveh enačb	250
3. Metoda spojiščnih potencialov	251
Reševanje sistema enačb s pomočjo Kramerjevega pravila	252
* Analiza vezij s programskim orodjem SPICE	254
27. <i>Stavki (Teoremi)</i>	255
1. Stavek superpozicije	255
2. Stavek Thévenina	256
Določitev Théveninove nadomestne napetosti in upornosti	256
3. Stavek Nortona	258
Maksimalna moč na bremenu – drugič	258
4. Stavek Tellegena	261

0. Uvod

Po vrsti, kot so hiše v Trsti. Naše spoznavanje električnih pojavov in zakonitosti bo temeljilo na postopnosti. Od preprostejših konceptov do bolj zahtevnih. Razlago električnih pojavov začnemo z ugotovitvijo, da so električni pojavi posledica učinkov električnih nabojev, elektronov in protonov ter da se naboj ne more izničiti niti ne more nastati. Preprosto je. Iz tega tudi sledi zakon o ohranitvi naboja. Če se naboj na določenem telesu ne ohranja pač pa se povečuje ali zmanjšuje, je to posledica odtekanja ali pritekanja nabojev, kar predstavimo s konceptom električnega toka. Med enako predznačenimi naboji deluje odbojna, med nasprotno predznačenimi pa privlačna sila. To opišemo s Coulombovim zakonom. Bolj splošen je pojem *električnega polja*, ki pravzaprav izhaja iz Coulombove sile. Je tudi bolj abstrakten, a se kasneje izkaže zelo pomemben. Nadalje se bomo srečali s pojmom *potenciala* oziroma *potencialne energije*. Če namreč dva enako predznačena naboja približamo, moramo opraviti določeno *delo*, saj deluje sila v smeri ločevanja. S tem smo povečali potencialno energijo (sistema) nabojev. Iz tega koncepta izhaja tudi pojem električnega potenciala oziroma *električne napetosti*. Nato sledijo pojmi *kapacitivnosti*, *gostote električnega pretoka*, *dielektričnosti*, *susceptibilnosti*, *različnih vrst gostote naboja*, *električnemu dipolu*, *vektorju polarizacije*, *gostoti energije*, *gostoti moči*, *moči*, *energiji*, *gostoti toka*, *specifični prevodnosti*, itd. Zelo veliko pojmov, pravzaprav veličin (fiziki bi rekli količin), s katerimi opisujemo električne pojave. In te veličine so med seboj v določenih relacijah.

Pa si za uvod pogledimo primer naelektritve dveh prevodnih teles. Zakaj prevodnih? Zato, da se elektroni v njiju lahko prosto gibljejo. (V neprevodnih telesih so vezi med atomi takšne, da gibanje elektronov zelo omejijo ali celo onemogočijo). Sedaj ti dve telesi naelektrimo. To lahko naredimo na različne načine, npr. se vsakega dotaknemo z že predhodno naelektrnim telesom ali pa ju preprosto priključimo na vir, katerega lastnost je, da ima naboje že ločene (oziroma jih sproti ločuje elektrokemijska sila). Telesa se pogosto naelektrijo tako, da se med seboj drgnejo. Temu pojavu rečemo triboelektrika. Ta pojav je fizikalno nekoliko težje opisati, v splošnem pa lahko rečemo, da imajo nekateri materiali težnjo, da elektrone oddajajo in s tem postanejo pozitivno naelektrjeni, drugi pa imajo težnjo po sprejemanju elektronov (postanejo negativno naelektrjeni). Nekaj več o tem je v podpoglavju na koncu uvodnega poglavja. Ko vir sklenemo s prevodnima telesoma, se na njiju prenese električni naboj. Slika 0-1 to prikazuje na preprost, konceptualen način. Brez uporabe enačb. Samo toliko, da opišemo procese, ki potekajo. Ne znamo pa povedati npr. koliko naboja se je preneslo ali v kolikšnem času, kam se bo ta naboj postavil, itd. Odgovore na ta vprašanja lahko dobimo na dva načina: s pomočjo eksperimenta ali s pomočjo ustreznega matematičnega modela.

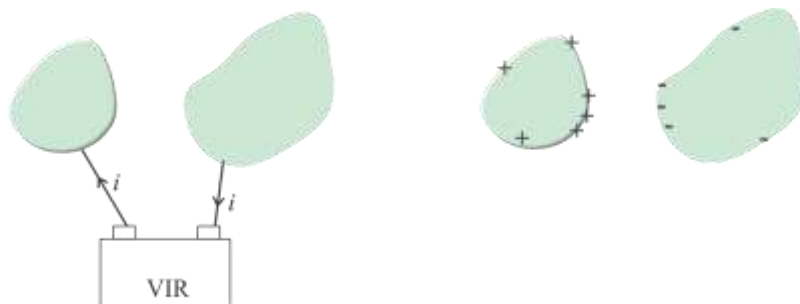


Slika 0-1: *Levo: prikaz priklopa prevodnih teles na vir. Desno: prikaz naelektritve teles ob priklopu.*

Najbolj neposreden in odločujoč je eksperiment. Če ta pokaže drugačen efekt, kot ga pričakujem konceptualno, potem je naš koncept razumevanja napačen ali vsaj pomanjkljiv. In ga je potrebno spremeniti ali dopolniti, tako, da se bo skladal z opazovanji. Enako velja za matematični koncept. Če se rezultat matematičnega modela ne sklada z opazovanji, je naš model pomankljiv ali pa smo se zmotili pri njegovi uporabi (npr. pri izpeljavi ali izračunu).

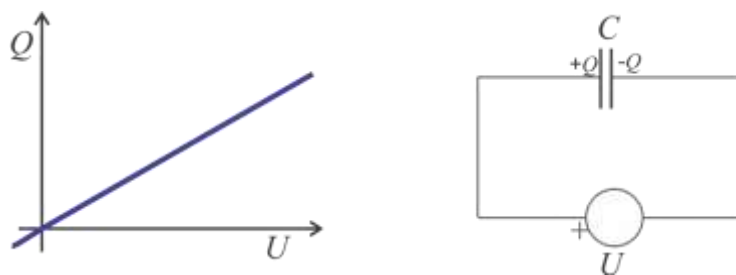
Zakaj torej ne poskušamo spoznati in razumeti električne pojave izključno z opazovanjem eksperimentov? Predvsem zato, ker je to precej zamudno in je tudi pogosto težko izvesti eksperimente, ki vključujejo izključno en sam pojav, ki ga želimo opazovati. Zato se tudi pogosto rezultati eksperimentov ne ujemajo popolnoma z rezultati matematičnega modela. Kljub temu, če nam le uspe zgraditi dovolj dober matematični model, nam le ta omogoča razumevanje vpliva različnih parametrov (dejavnikov) na električni pojav in predvsem kvantifikacijo. Omogoča nam torej določitev velikosti vpliva posameznih parametrov. To pa je področje elektrotehnike oz. to so znanja, ki jih želi imeti elektrotehnik, da bi lahko električne pojave ne le razumel pač pa jih tudi izkoristil, uporabil.

Vrnimo se zopet k našemu (zaenkrat) virtualnemu eksperimentu, s katerim poskušamo opisati proces elektrenja. Konceptualno smo ta proces opisali le delno ustrezno, fizikalno pa celo precej napačno. Zakaj? Zato, ker se po prevodnikih lahko premikajo le elektroni, ki so (po dogovoru) negativnega predznaka. Kaj torej predstavljajo tisti plusi na levem prevodnem telesu? Fizikalno gledano ti plusi predstavljajo elektrone, ki so odšli iz svojih ravnovesnih leg na + elektrodo vira. Plusi torej predstavljajo pomanjkanje elektronov, minusi pa njihov presežek. Iz konceptualnega vidika torej ni napačno prikazovati pluse kot nasprotje minusov, niti ni narobe prikazovati premikanje plusov, le zavedati se je potrebno, da gre v resnici za premikanje elektronov v nasprotno smer. Poleg tega je v jedrih atomov, ki so izgubili elektrone, presežek protonov, ki pa imajo pozitivni naboj, ki je po velikosti enako velik kot naboj elektrona. (Obstaja pa tudi premikanje plusov, na primer v primeru gibanja pozitivnih ionov v tekočinah). Na sliki smo označili tudi smer pretakanja nabojev (tako pozitivnih kot negativnih). Pretakanje nabojev imenujemo električni tok in ga označimo s črko i . Katera označitev je potrem pravilna i_+ ali i_- ? Začuda je tako, da je pravilnejša označitev i_+ , saj po dogovoru električni tok definiramo kot gibanje pozitivnih nabojev. In še en detajl. Ugotovili bomo, da se naboji po prevodniku porazdelijo le po površini in ne tudi v notranjosti prevodnih teles, kot kaže Slika 0-1. Poleg tega se jih več nabere na mestih, ki so bližje drugemu telesu. Zakaj pa se potem ne naberejo kar vsi na tistem mestu? Zato, ker se istoimenski naboji (+ in + ter - in -) odbijajo, nasprotnoimenski (+ in -) pa privlačijo. Konceptualno lahko s tem poznavanjem popravimo prvotno sliko (Slika 0-2).



Slika 0-2: Popravljen slika naelektritve dveh prevodnih teles. Upoštevamo enotno označitev toka (levo) ter to, da se naboji porazdelijo po površini prevodnega telesa in tudi nekoliko več tam, kjer sta telesi bližje drug drugemu (desno).

Kakšna pa je povezava med napetostjo vira in množino naboja na prevodnih telesih. Zanimivo je, da je ta povezava linearna, to pomeni, da povečanje napetosti vira sorazmerno poveča množino naboja na telesoma. To linearno povezavo lahko prikažemo grafično (Slika 0-3), pa tudi matematično.



Slika 0-3: Levo: grafični prikaz povezave med napetostjo vira in množino naboja med prevodnima telesoma. Desno: prikaz ekvivalentnega električnega modela.

Matematično to zapišemo v obliki $Q = kU$, kjer je k neka konstanta. Običajno jo označimo z veliko črko C in jo imenujemo, nič drugače kot, kapacitivnost. Velja torej $Q = CU$. Poleg tega električne pojave elektrotehniki pogosto poenostavimo tako, da jih prikažemo v obliki električnih ekvivalentnih vezij. Naš primer elektrenja bi lahko prikazali kot preprosto vezje, v katerem napetostni vir priključimo na kondenzator, ki s svojima dvema elektrodama shematično nakazuje dve ločeni prevodni telesi.

Te uvodne vrstice nakazujejo, v kateri smeri bomo začrtali naše »potovanje«. Električne pojave bomo želeli spoznati in razumeti tako, da bomo podrobno raziskali same temelje, osnovne zakonitosti, ki opisujejo naravo električnih pojavov. Uporabili bomo različne načine, od opazovanja eksperimentov do konceptualnega razumevanja, simulacij ter matematične obravnave. Slednji se nikakor ne želimo izogniti, saj z matematičnimi relacijami (enačbami) dobimo orodje, ki nam omogoča inženirski pristop izkoriščanja električnih pojavov z načrtovanjem in izdelavo električnih elementov, sklopov, naprav, itd.

OSNOVNE ENAČBE (ZAKONI), KI OPISUJEJO ELEKTRIČNE POJAVE

Osnovne veličine v elektrotehniki, s katerimi opišemo elektromagnetne pojave, so električna poljska jakost E , gostota električnega pretoka D , gostota magnetnega pretoka B in magnetna poljska jakost H . Torej ne napetost in tok, kot bi morda pričakovali. So pa seveda te veličine z napetostjo in tokom neposredno povezane. Prav tako povezave med temi osnovnimi veličinami niso tako preproste, kot smo v prejšnjem odstavku ugotavljali za povezave med nabojem ter napetostjo. Za razumevanje povezav med E , D , B in H potrebujemo nekaj matematičnega znanja. Tega si bomo pridobili spotoma. Vseeno jih zapišimo, da bomo videli, kaj nas še čaka, oziroma, do kam bi radi prišli. Enačbe so znane kot Maxwellove enačbe in so zapisane tako v integralni kot diferencialni obliki:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{kond} + i_c = \int_A \left(\vec{J}_{kond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \quad \text{ali} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{J}_{kond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (0.1)$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad \text{ali} \quad \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (0.2)$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{ali} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad (0.3)$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int \rho dV \quad \text{ali} \quad \text{div} \vec{D} = \rho \quad (0.4)$$

Da bi jih boljše razumeli potrebujemo čas in tudi nekaj matematičnega znanja. Vidimo, da jih zapišemo z integralnim računom, da so veličine večinoma vektorske (razen ρ , ki je gostota naboja), da gre za različne tipe integracij, po površini, po liniji, po volumnu, itd. Če bi jih znali »brati«, bi lahko iz prve enačbe zaključili, da električni tok in/ali sprememba električnega polja povzroča magnetno polje, iz druge enačbe pa, da sprememba magnetnega polja povzroča električno polje. To pa je tudi osnova za razumevanje elektromagnetnega valovanja. Iz tretje enačbe sledi, da magnetno polje nima ne začetka ne konca, je samo vase zaključeno, iz četrte pa, da so vir električnega polja električni naboji.

Toliko zaenkrat. Naj ponovim, da so enačbe le navržene, in to zato, da vidimo, da osnovnih enačb (zakonov) v elektrotehniki ni veliko in da niso zapisane s tokom in napetostjo (Ohmov zakon) pač pa z relacijami med električnim in magnetnim poljem. Na tem bo tudi poudarek v dveh semestrih. Na razumevanju pojmov povezanih z električnim in magnetnim poljem, njihovim pomenom za razumevanje električnih pojavov in njihovim vplivom na okolico. Šele, ko bomo električno in magnetno polje sposobni ovrednotiti, ga bomo lahko poskušali »ukrotiti« oziroma uporabiti nam v korist.

OSNOVNE VELIČINE

Veličine, ki jih bomo obravnavali večinoma že poznate. Npr. električni naboj (v elektrotehniki pogosto imenujemo tudi elektrina), tok, napetost, moč, energija, itd. Iz srednje šole poznate tudi določene relacije med njimi, na primer povezavo med tokom in nabojem $Q = It$, med napetostjo in tokom $U = IR$ ipd. Ugotovili bomo, da so te zveze le pogojno ustrezne, npr. $Q = It$ le v primeru, ko je tok konstanten in $U = IR$ le za določene tipe elementov (linearnih uporov). Poleg tega tudi definicije določenih veličin niso najbolj preproste. Na primer definicija električne napetosti, ki je definirana kot delo, ki ga opravi električna sila pri premiku enote naboja (1 C) od enega do drugega mesta.

Zanimivo je, da (tudi) v Sloveniji nismo popolnoma usklajeni pri uporabi določenih izrazov – terminologiji. Tako na primer v tehniki uporabljamo izraz veličina, v fiziki pa količina. V tehniki uporabljamo izraz kapacitivnost, fiziki pa kapaciteta. Spodaj je del izpisa SSKJ – Slovarja Slovenskega knjižnega jezika (fran.si) za geslo električni upor. Ugotovimo, da obstaja več rab tega izraza, v tehniki oz. fiziki kot lastnost snovi (4), v elektrotehniki pa kot predmet – element (5). Kaj je pravilno, tu ne bomo razpravljali. V tekstu uporabljam ustaljene elektrotehniške izraze. V pomoč pri prevajanju elektrotehniških izrazov iz ali v tuje jezike lahko pride prav [VEČJEZIČNI PRIROČNIK IZRAZOV IN DEFINICIJ ZA ELEKTROTEHNIKO IN ELEKTRONIKO](#).

4. fiz., teh., navadno v zvezi **električni upor lastnost snovi**, da se upira prevajanju električnega toka: izmeriti električni upor tuljave; žica z velikim uporom; enota električnega upora / ohmski upor zaradi katerega električna priprava, naprava oddaja toploto
5. elektr. **predmet**, pri katerem se izkorišča predvsem njegova električna upornost: izdelovati upore; vstaviti upor; vezava uporov; upori in tuljave / drsni upor z drsnikom za spreminjanje električne upornosti; grelni upor ki pri prehodu električnega toka oddaja toploto za gretje; odvodni upor med vodniki in zemljo za odvajanje statične elektrike; plastni upor katerega upornost tvori tanka plast prevodne snovi na izolirnem materialu; spremenljivi upor

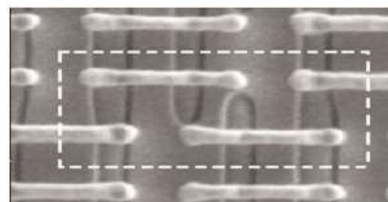
MERSKE ENOTE IN PISANJE ENAČB

Za vsako veličino uporabljamo določen simbol, običajno eno črko abecede, pogosto grške*. Simbol za napetost je U , za tok I , temperaturo T itd. Opazili ste že, da pišemo simbole za veličine poševno. To pa zato, da jih ločimo od merskih enot, kratko kar enot, ki jih pišemo pokončno. Kot primer zapišimo $U = 5 \text{ V}$. Med številsko vrednostjo in enoto je praviloma presledek. Mersko enoto predstavimo z imenom in simbolom. Ime enote za napetost je volt, simbol pa V.

V svetu se je uveljavil sistem merskih enot, ki ga s kratico imenujemo SI (Sisteme International). Obsega sedem osnovnih enot in vrsto izpeljanih†. Osnovne enote so kilogram (kg), meter (m), sekunda (s), amper (A), kelvin (K), kandela (cd), mol (mol), radian (rad) in steradian (sr). Izpeljane enote pa so na primer m/s za hitrost itd. Zanimivo je, da je električni tok edina električna veličina, ki spada med osnovne enote (kilogram, meter, sekunda, Amper). Bolj natančne definicije osnovnih enot si preberite v Uradnem listu RS št.26/2001 (<http://www.uradni-list.si/1/objava.jsp?urlid=200126&stevilka=1594>), ali pa v množici drugih spletnih strani, npr. <http://www-f1.ijs.si/~ziherl/standardi.pdf>.

OZNAČEVANJE

V elektrotehniki pogosto uporabljamo predpone k merskim enotam. To je potrebno zato, ker je red velikosti veličin zelo različen. Kapacitivnosti so pogosto reda mikro, nano ali piko faradov (μF , nF, pF), uporabljajo se napetosti od mikro voltov do mega voltov itd. Zveze nam prikazuje preglednica:



Intelova 65 nm tehnologija SRAM spominskih celic. Na mm^2 je nekaj 10 milijonov takih tranzistorjev.

vrednost	ime	predpona	primer
10^{-15}	femto	f	fA (femto amper)
10^{-12}	piko	p	pF (piko farad)
10^{-9}	nano	n	ns (nano sekunda)
10^{-6}	mikro	μ	μT (mikro tesla)
10^{-3}	mili	m	mV (mili volt)
10^3	kilo	k	k Ω (kilo ohm)
10^6	mega	M	MW (mega vat)
10^9	giga	G	GJ (giga džul)
10^{12}	tera	T	TW (tera vat)

* Simboli za veličine so bolj ali manj ustaljeni. Tako se za tok uporablja črka i , za napetost U itd. Ker pa nam v določenih primerih zmanjka črk ali pa se na drugih področjih uporabljajo iste črke uporabljajo za označevanje drugih veličin, je v določenih primerih potrebno biti previden in pravilno rabo razbrati iz »konteksta«. Npr., simbol ρ (grška črka ro) se uporablja kot simbol za volumsko gostoto naboja a hkrati tudi za specifično električno prevodnost. Podobnih primerov je še mnogo.

† Pogosto v literaturi zasledimo uporabo drugih merskih enot, kot smo jih navajeni. Te so lahko posledica uporabe drugega merskega sistema (npr. CGS: centimeter-gram-sekunda), kjer se na primer namesto enote tesla za gostoto magnetnega polja uporablja enota gauss. V konkretnem primeru je pretvorba direktna $1 \text{ T} = 10^4 \text{ gaussa}$. Načeloma je uporaba starih enot prepovedana, zaradi inercije uporabnikov pa jih (še posebno v praksi) še vedno pogosto uporabljamo. Zato je v določenih primerih dobro poznati tudi enote, ki naj se ne bi več uporabljale.

GRADNIKI SNOVI

Zavedati se moramo, da so električni pojavi posledica lastnost naše narave, ki je sestavljena iz atomov, ti pa iz jedra iz protonov, nevtronov in oblaka elektronov. Elektroni in protoni imajo lastnost, ki ji rečemo naboj. Elektroni imajo negativni naboj, protoni pa pozitivnega. Predznak nabojev je seveda naša odločitev. Prvi je koncept pozitivnih in negativnih nabojev vpeljal Benjamin Franklin. Čisto lahko bi se lahko Franklin odločil tudi za obratno pojmovanje.



Benjamin Franklin (1706-1790) je bil izjemen politik (pisec ameriške ustave) pa tudi izjemen znanstvenik. Prvi je ločil naboje na pozitivne in negativne, izumil izraze baterija, naboj, prevodnik, pozitivni in negativni naboj itd. Najbolj znan (in tudi nevaren) je njegov dokaz, da je strela električen pojav. To je pokazal z eksperimentom z zmajem, ki se ob dežju namoči in postane prevoden. Ob strelah se del toka razelektritve prenese preko zmaja na zemljo. Iz teh raziskav sledi tudi njegov izum strelovoda.

PREVODNIKI, IZOLATORJI, POLPREVODNIKI, DIELEKTRIKI

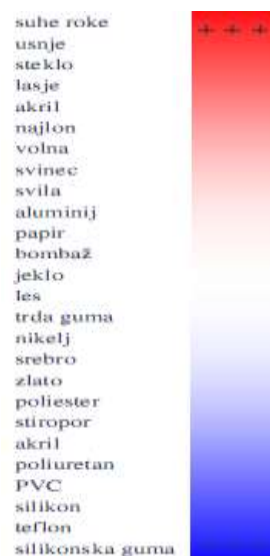
Dokler ima atom enako število pozitivnih in negativnih nabojev, je nevtralen. Atomi so običajno vezani med seboj z bolj ali manj močnimi vezmi. V kovinah atomi tvorijo močne vezi, pri katerih je del elektronov zelo šibko vezan na jedro in se z lahkoto od jedra odcepi in se »prosto« giblje po materialu. Zato za kovine smatramo, da so dobri prevodniki. Nasprotni primer so izolatorji. Pri izolatorjih ni prostih ali pa je zelo malo prostih elektronov, ki lahko delujejo kot nosilci toka. Zato so izolatorji slabi prevodniki električnega toka. Poseben primer predstavljajo polprevodniki. Že ime samo pove, da so njihove sposobnosti prevajanja električnega toka slabše od prevodnikov a boljše od izolatorjev. Čisti polprevodniki so običajno izolatorji (npr. silicij ali germanij). Če pa jim vstavimo primesi (npr. z mikrotehnološkim procesom dopiranja), postanejo te snovi bolj prevodne. Prevodnost teh snovi torej lahko spreminjamo, še posebno pa je zanimivo, da je I-U karakteristika ustrezno dopiranih polprevodniških elementov pogosto nelinearna. Na tak način realiziramo polprevodniške elemente, ki jih poznamo kot diode, tranzistorje. Te lahko integriramo v mikroelektronske komponente (integrirana vezja)*. Poseben primer so še superprevodniki, snovi, ki pri določeni temperaturi izgubijo uporovne lastnosti.

Dielektriki so v osnovi izolatorji, torej slabo ali sploh ne prevajajo električnega toka. Tako jih imenujemo zato, da poudarimo njihove dielektrične lastnosti, ki opisujejo njihovo zmožnost polarizacije v električnem polju. Te lastnosti izkoriščamo v elementih, ki jih imenujemo kondenzatorji za povečanje zmožnosti shranjevanja električne energije (naboja).

* Gordon E. Moore, soustanovitelj podjetja Intel, je že leta 1965 zapisal znamenito ugotovitev, da se gostota tranzistorjev na integriranem vezju večja eksponentno s časom – vsaki dve leti se približno podvoji. V podjetju Intel so leta 2007 prikazali zmožnost proizvajati tranzistorje velikosti 45 nm na 300 mm veliki silicijevi rezini. (http://en.wikipedia.org/wiki/Moore's_law).

** ELEKTRENJE S TRENJEM

En najbolj razširjen način naelektritve in razelektritve je s pomočjo trenja dveh predmetov. To se nam dogaja neprestano, le da v določenih primerih to tudi začutimo kot npr. kratko razelektritev ko želimo prijeti za kljuko avtomobila. Fizikalna razlaga tega pojava je precej zahtevna, zato tudi ni enoznačne razdelitve na materiale, ki se bolj ali manj naelektrijo. Obstajajo različne lestvice (vrste), ki se lahko razlikujejo v vrstnem redu, drži pa, da bodo suhe roke, usnje, lasje in podobno vedno na pozitivni strani vrste, kar pomeni, da se bodo ob trenju z drugimi materiali večinoma naelektrile pozitivno (oddale elektrone). Na drugi strani lestvice so materiali kot PVC, silikon in teflon, ki se rade naelektrijo negativno (vežejo elektrone). Taki lestvici rečemo triboelektrična lestvica (vrsta), pojavu pa triboelektrični ali tudi torna elektrika. Materialom, ki so na skrajnih mestih lestvice se je potrebno izogibati v primerih, ko je nevarnost elektrostatične razelektritve z eksplozijo.



580

C.H. Park et al. / Journal of Electrostatics 66 (2008) 578–583

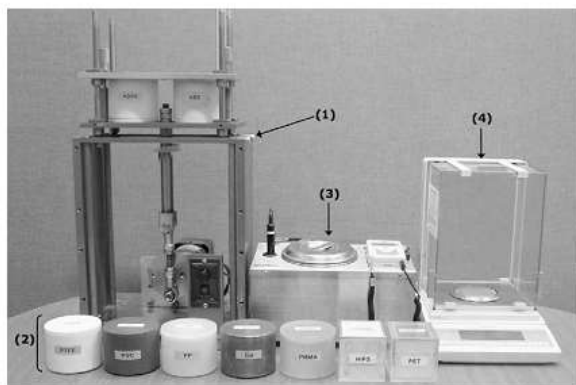


Fig. 2. A vertical-reciprocation tribo-charger set and peripheral measurement equipment (1: vertical-reciprocation charger, 2: charging bottles, 3: Faraday cage, and 4: electric balance).

same magnitude and sign appears on the outside of the cage. The final charge is then measured by the electrometer collected with the Faraday cup. A measurement range of the Faraday cage used in this study was $\pm 1\text{--}9999\text{ nC}$ (NK-1002). The particle weight was measured with an electronic balance. Hence, the charge density of the particles was determined based on the charge-to-mass ratio (nC/g). In addition, the data shown in the figures represents the average values of tests repeated at least three times.

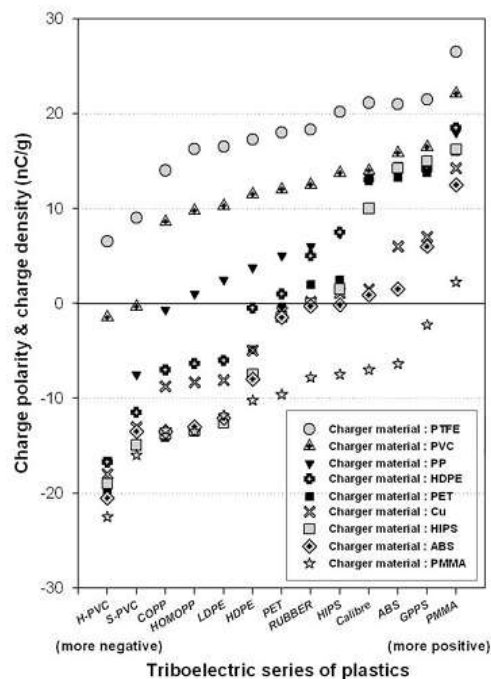


Fig. 3. Triboelectric series of various plastics established by the tribo-charging of different combinations of two plastics.

Slika prikazuje raziskave triboelektričnih lastnosti različnih materialov. Za meritve se uporablja t.i. Faradayeva čaša (Faraday's cup) in Faradayeva kletka ter merilni inštrument: elektrometer.

Več si poglejte na spletu. Ključne besede: triboelectricity, triboelectric series, Faraday cup, electrometer, ...

* MATEMATIČNI UVOD – INTEGRAL IN ODVOD

Potrebna predznanja niso toliko povezana s predznanji iz elektrotehnike, čeprav je predvsem na začetku nekoliko lažje tistim študentom, ki že imajo določene izkušnje in znanje o električnih pojavih. Potrebna predznanja, ki jih najbolj pogrešamo, so predvsem matematična. Že v uvodnih poglavjih bomo ugotovili, da brez infinitezimalnega in integralnega računa (odvodov in integralov) ne bo šlo, saj so že najosnovnejše relacije med električnimi veličinami pogosto izražene z uporabo le teh. In kako to, da se je bilo v srednji šoli mogoče izogniti tem zapisom in kljub vsemu obravnavati elektrotehniške pojave? Zato, ker se jih je obravnavalo zelo poenostavljeno. Npr., če je tok I skozi določen presek (žice) konstanten, je množina naboja, ki se pretoči skozi ta presek v času T enaka zmnožku toka in časa, torej $Q = IT$ *. Kaj pa če tok ni ves ta čas konstanten? Potem nam da enačba napačen rezultat.

Pravilnega dobimo šele z integracijo toka po času torej $Q = \int idt$. Pri tem moramo še označiti, od

katerega do katerega časa računamo pretečen naboj. To zapišemo tako, da pod znak za integral napišemo začetni čas (npr. t_a), nad znak pa končni čas (npr. t_b). Ustrezen zapis za pretečen naboj v

času od t_a do t_b je torej $Q = \int_{t_a}^{t_b} idt$. Temu rečemo meje integracije, torej rečemo, da integriramo od

časa t_a do t_b . Prvemu integralu (brez označenih meja) rečemo nedoločen integral, drugemu (z označenimi mejami) pa določen integral. Pri matematiki se boste poučili, kako se računa integrale. V končni fazi gre za določena pravila oz. postopke, ki jih je potrebno znati. Večina integralov, ki jih bomo mi uporabljali, so zelo preprosti in so dostopni v vsakem matematičnem priročniku. Velja tudi opozoriti, da vsi integrali niso (analitično) rešljivi, torej ne moremo zapisati končne enačbe, v katero bi le še vstavili vrednosti in izračunali rezultat. V resnici lahko zelo hitro pridemo do takih zapisov integralov, ki nimajo analitične rešitve. Še posebno pogosto je to pri reševanju konkretnih problemov v praksi. Edini izhod nam ponuja numerično reševanje s pomočjo računalnika. Nekaj več o tem v nadaljevanju.

DRUGE OBLIKE INTEGRACIJ

Podoben primer je integracija hitrosti po času. Rezultat je pot, ki jo objekt s hitrostjo v opravi v tem

času. Če se hitrost spreminja le v smeri X osi, potem je pot, ki jo opravi objekt s hitrostjo v_x $x = \int v_x dt$.

Hkrati vemo, da je hitrost lahko različno velika v različnih smereh, zato jo je potrebno pisati kot vektor \vec{v} . Rezultat integracije vektorja hitrosti po času pa je pot (v 3D), ki jo objekt s hitrostjo \vec{v}

opravi: $\vec{r} = \int \vec{v} dt$.

Ni pa nujno, da integracija vedno poteka po času. Zelo pogosto namesto časa nastopa pot. Če se npr. določena veličina, npr. sila, spreminja po poti, dobimo kot rezultat integracije delo, ki jo pri tem sila

* Pri avtomobilskih akumulatorjih se pogosto poda kapaciteta akumulatorjev v amerskih urah (Ah), kar po enačbi $Q = IT$ ustreza definiciji naboja. Gre za množino naboja, ki ga lahko izkoristimo. V praksi je ta množina odvisna tudi od načina porabe. Pri večjih obremenitvah (večjih tokih) se »kapaciteta« svinčenih akumulatorjev zmanjša. Za več vpiši Penkert's law v Google.

opravi. Če se sila spreminja le v smeri X osi, kar lahko označimo z F_x , dobimo z integracijo po poti vzdolž X osi energijo $W_x = \int F_x dx$, kjer je sedaj dx diferencial poti. Bolj zapleteno integracijo pa dobimo v splošnem primeru, ko se sila po poljubni poti tudi poljubno spreminja. V tem primeru moramo tako silo kot pot opisati z vektorjema (\vec{F} in \vec{r}), diferencial poti pa z vektorjem $d\vec{r}$. Po definiciji (to pomeni, da smo si mi izbrali tak način izražanja), je delo po poti odvisno le od tiste sile, ki deluje v smeri poti. To pa dobimo s skalarnim produktom, ki (po definiciji) predstavlja produkt dveh vektorjev in kosinusa vmesnega kota ($C = \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha_{AB}$). V našem konkretnem primeru to pomeni, da en del celotnega dela (tisti del na diferencialno majhni razdalji $d\vec{r}$) dobimo s skalarnim množenjem vektorja sile in diferenciala poti $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, celotno delo pa z integracijo $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Vse te, in tudi druge, oblike integralov bomo v nadaljevanju potrebovali, zato potrebujemo tako njihov »fizikalni« pomen, kot tudi matematični način reševanja integralov.

OD NAKLONA DO ODVODA

Poleg integracije, ki nam »govori« o kumulativnem seštevanju prispevkov, so pogosto relacije med fizikalnimi veličinami povezane s hitrostjo sprememb določene veličine. Če imamo veličino podano grafično (npr. kot spremembo opravljene poti po času), lahko dobimo hitrost spremembe poti v času (kar tudi običajno poimenujemo *hitrost*) iz naklona funkcije v določenem časovnem intervalu, npr. Δt . Recimo, da nas zanima hitrost spremembe poti (hitrost) ob času t . To naredimo tako, da naredimo razliko vrednosti funkcije (poti) v času t in nekoliko kasneje (ob času $t + \Delta t$), torej $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ in jo delimo s časovnim intervalom Δt . Dobimo velikost spremembe poti v

spremembi časa, kar je hitrost $v(t) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}$. V konkretnem primeru nismo uporabili enačaja, ker je

hitrost ob času t izračunana s pomočjo kvocienta diferenc odvisna od izbire intervala Δt , v katerem izračunamo hitrost. Najbolj natančno bi določili hitrost ob času t tako, da bi časovni interval zmanjšali proti nič. Dobili bi naklon krivulje ob času t , ki predstavlja tangento na krivuljo v tej točki. Z

limitiranjem intervala Δt proti nič dobimo odvod, ki je definiran kot $\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, kar je tudi eksaktno

enako hitrosti $v = \frac{dx}{dt}$. (V splošnem sta tako pot kot hitrost vektorja in je ustrežnejši (pravilnejši) zapis

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}).$$

1. Naboj in tok

Vsebina poglavja: naboj, zakon o ohranitvi naboja, tok, predznak toka, kontinuitetna enačba.

NABOJ (ELEKTRINA)

Vsi naboji prispevajo k električnim pojavom. V tem smislu bi morali pri analizi v principu upoštevati vse naboje v atomu, molekuli, snovi, tako elektrone kot protone. V praksi pa je pogosto dovolj, da se osredotočimo le na vplive presežkov nabojev, saj je njihov vpliv na električne pojave največji. Omenili smo že enoto naboja 1 C (Coulomb ali slovensko kulon). Najmanjša vrednost naboja je naboj elektrona, ki je približno $1,602 \cdot 10^{-19}$ C in ker je ta naboj negativen, moramo upoštevati še negativen predznak. 1 C je torej mnogo elektronov. Koliko? $1/1,602 \cdot 10^{-19} \cong 6,25 \cdot 10^{18}$. To pa je veliko delcev in da bi obravnavali vpliv vsakega posebej je praktično neizvedljivo. Bolj pogosto obravnavamo naboje v smislu njihove koncentracije oziroma gostote porazdelitve.

ZAKON O OHRANITVI NABOJA

Kako nastaja naboj? Ugotovitve kažejo, da naboj ne more iz nič nastati, niti se ga ne da izničiti. To dejstvo opišemo kot zakon o ohranitvi naboja, ki je fundamentalen (osnovni) zakon. Pravi, da je v izoliranem sistemu vsota vseh nabojev konstantna. Izoliran sistem predstavlja prostor z naboji, ki pa ne morejo iz tega prostora izhajati ali vanj vstopati.

$$\sum_i q_i \Big|_{\substack{\text{znotraj} \\ \text{izoliranega} \\ \text{sistema}}} = \text{konstanta} \quad (1.1)$$



Slika 1-1: Sistem izoliranih nabojev pred (levo) in po spremembi porazdelitve naboja. Množina naboja znotraj izoliranega sistema se ne spremeni, lahko pa se prerazporeja.

Če je konstanta (vsota nabojev) pozitivna, govorimo o presežku pozitivnih nabojev, če je negativna o presežku negativnih nabojev, če pa je enaka nič, je sistem nevtralen (ima enako število pozitivnih in negativnih nabojev). Pri vseh prej omenjenih primerih razelektritve in naelektritve gre torej za prerazporejanje naboja. Naboj torej ne more »iz nič« nastati niti ne more »izginiti«. V tem smislu lahko rečemo, da je neuničljiv. Fizikalno – matematično rečemo, da je relativistična invarianta, je količina, ki se ne spremeni, tudi če se sistem giblje s hitrostjo blizu svetlobne. (To pa ne drži za maso, ki se ob velikih hitrostih spreminja v skladu z znano povezavo med maso in energijo delcev (Einstein). Torej za

maso ne moremo trditi, da velja zakon o ohranitvi mase. Ta velja le, če so hitrosti sistema majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Kar pa zelo pogosto drži.)

Primer upoštevanja zakona o ohranitvi naboja: Vzemimo izoliran sistem, v katerem imamo tri telesa. Dve nevtralni, na enem pa je presežek pozitivnega naboja 10 mC. Ob stiku teh treh teles se prenese 5 mC na eno, 2 mC pa na drugo telo. Koliko naboja je ostalo na prvotno naelektrenem telesu?

V skladu z zakonom o ohranitvi naboja mora veljati

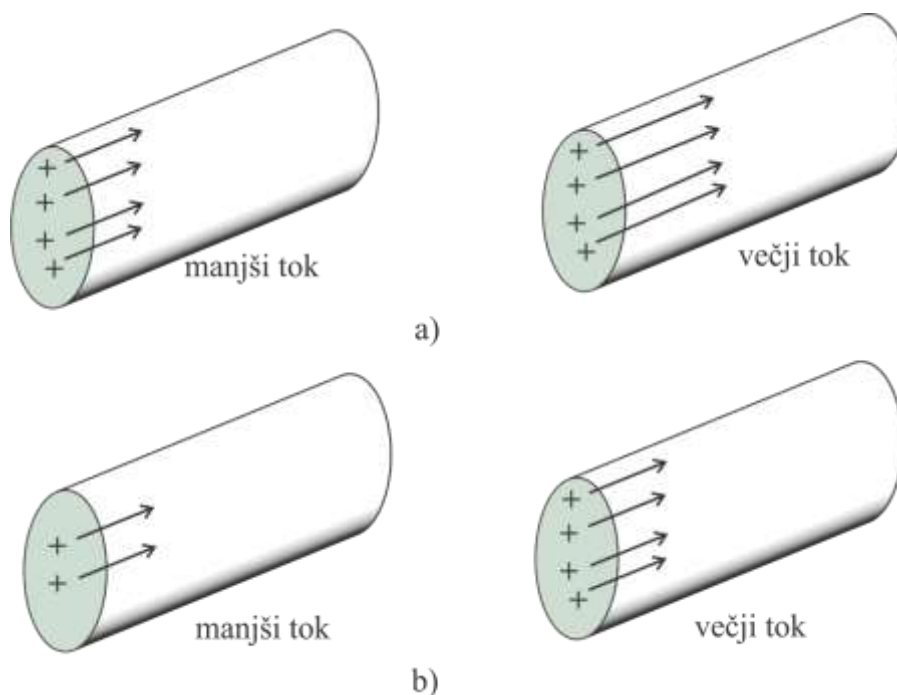
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 10 \text{ mC},$$

tako pred stikom teles kot po stiku. Po stiku teles je $Q_2 = 5 \text{ mC}$, $Q_3 = 2 \text{ mC}$, iz česar sledi $Q_1 = 10 \text{ mC} - (Q_2 + Q_3) = 3 \text{ mC}$.

V neposredni povezavi z zakonom o ohranitvi naboja je tudi kontinuitetna enačba, ki opisuje povezavo med električnim tokom in nabojem.

ELEKTRIČNI TOK (KONTINUITETNA ENAČBA)

Nosilci električnega toka so naboji, rečemo jim lahko tudi elektrine. Če ti mirujejo, električnega toka ni. Tako kot ni vodnega toka, če je jez zajezen. Če pa jez odpremo, da lahko voda steče po strugi ali po cevi, pa seveda govorimo o vodnem toku. Tako je tudi pri elektriki. Če se naboji »pretakajo« iz enega mesta na drugo, govorimo o električnem toku. Več kot je v določenem času prenesenega naboja, večji tok je tekel v tem času. To shematično prikazuje spodnja slika za dva različna primera. V primeru a) se prenaša enaka množina naboja (v nadaljevanju bomo govorili o gostoti naboja) vendar z različno hitrostjo, v primeru b) pa je hitrost gibanja nabojev enaka, se pa razlikuje po množini naboja.



Slika 1-2: Konceptualni prikaz povezave med tokom in gibanjem nabojev. V primeru a) je tok v desnem vodniku večji, ker se naboji gibljejo z večjo hitrostjo, v primeru b) pa je tok v desnem vodniku večji zato, ker se pretaka večja množina naboja.

Povezavo med tokom in nabojem matematično zapišemo kot kvocient pretečenega naboja skozi določen presek v določenem času: TOK = $\frac{\text{pretečen naboj}}{\text{čas pretakanja}}$ oziroma kot spremembo množine naboja

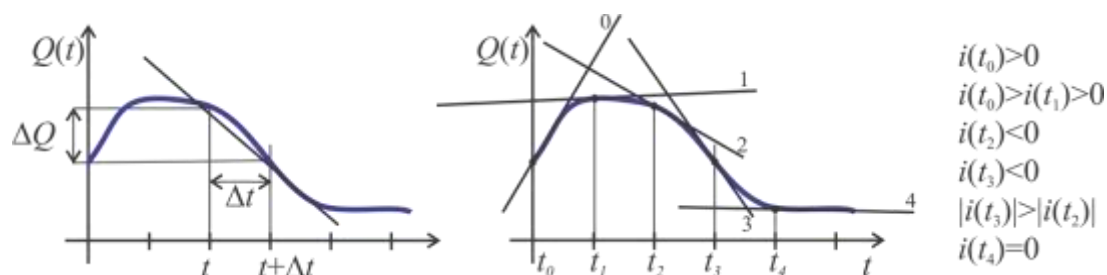
na določenem telesu v določenem časovnem intervalu TOK = $\frac{\text{sprememba naboja}}{\text{sprememba časa}}$. Več kot bo

pretečenega naboja in to v čim krajšem času, večji bo tok. Če ta zapis zapišemo s simboli za tok, naboj in čas dobimo

$$i = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \quad (1.2)$$

kjer je $Q(t)$ naboj na telesu ob času t , $Q(t + \Delta t)$ pa naboj ob času $t + \Delta t$. ΔQ torej predstavlja množino pretečenega naboja v časovnem intervalu Δt .

Slika 1-3 prikazuje način določitve toka iz spremembe naboja v spremembi časa. Kot vidimo, je velikost toka enaka naklonu premice v Q-t grafu: večji naklon pomeni večji tok. V limiti, ko je sprememba časa izredno majhna, je tok enak naklonu tangente na krivuljo $Q(t)$.



Slika 1-3: Električni tok je enak hitrosti spreminjanja množine naboja na telesu. Z manjšanjem časovne spremembe med dvema odčitkoma ugotovimo, da določimo tok iz naklona tangente na Q-t krivulji ob zelenem času. Večji naklon pomeni večji tok, smer naklona pa smer toka.

Primer določitve toka iz spremembe naboja: Naboj na telesu se linearno veča s časom. Ob času $t = 1$ s je $Q = 20 \mu\text{C}$, ob času $t = 5$ s pa $40 \mu\text{C}$. Določimo tok pritekovanja naboja.

Izračun: $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{40 \mu\text{C} - 20 \mu\text{C}}{5 \text{ s} - 1 \text{ s}} = 4 \mu\text{C/s} = \underline{\underline{4 \mu\text{A}}}$.

Z besedami: Hitrost elektrenja je $4 \mu\text{C/s}$ oziroma, telo se elektri s konstantnim tokom $4 \mu\text{A}$.

Iz slike (Slika 1-3) je razvidno, da je za natančno določitev toka v določenem trenutku (času) potrebno vzeti čim manjše časovne intervale Δt , v idealnem primeru tako kratke, da gre $\Delta t \rightarrow 0$. V tem primeru dobimo bolj splošno definicijo toka v obliki $i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, kar pa v matematiki predstavlja definicijo odvoda. **Električni tok lahko torej definiramo kot odvod naboja po času**, kar zapišemo kot

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (1.3)$$

PREDZNAK TOKA

Po dogovoru je smer toka v smeri premikanja (pretakanja) pozitivnega naboja. Npr. tok 2 A iz leve v desno predstavlja pretakanje 2 C naboja na sekundo iz leve v desno.

Če nas zanima tok v smeri naboja na določenem telesu, usmerimo tok v smer naboja in velja zveza

$$i_{\text{v smeri pritekaja}} = + \frac{dQ}{dt} \quad (1.4)$$

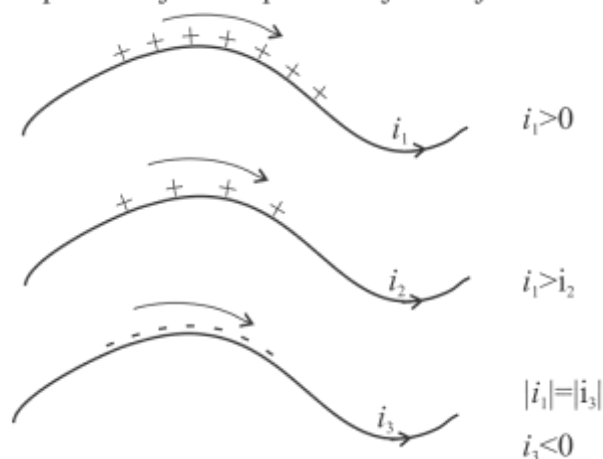
Če pa je smer toka stran od opazovanega naboja, je potrebno uporabiti negativni predznak (v smeri odtekanja pozitivnega naboja):

$$i_{\text{v smeri odtekanja}} = - \frac{dQ}{dt} \quad (1.5)$$



Slika 1-4: Razlaga predznaka pri zvezi med nabojem in tokom. Po definiciji je smer toka določena s pretakanjem pozitivnega naboja.

v vseh primerih je smer premikanja nabojev v desno



Slika 1-5: Shematski prikaz določitve predznaka in velikosti toka: glede na določeno smer premikanja nabojev na sliki, sta toka i_1 in i_2 pozitivna, i_3 pa je negativen.

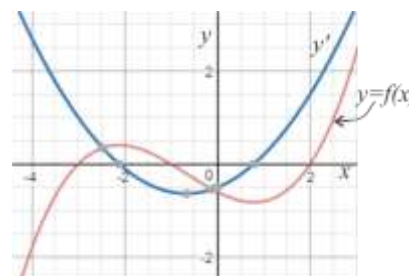
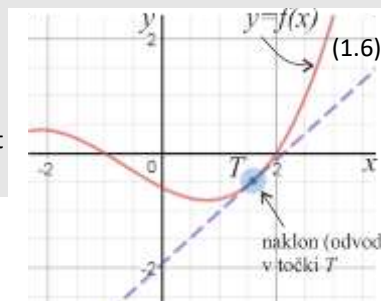
ODVAJANJE FUNKCIJ

Odvod predstavlja spremembo funkcije pri spremembi njenega argumenta. Če imamo funkcijo y , ki je odvisna od argumenta x (kar matematično zapišemo $y=f(x)$), zapišemo odvod funkcije y (po x -u) kot $\frac{dy}{dx}$ ali tudi na kratko y' in je enak limiti spremembe funkcije y (Δy) ob spremembi x -a (Δx), ko gre le-ta proti nič:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ . definicija odvoda}$$

V limiti, torej v točki T na krivulji $y(x)$, predstavlja odvod smerni koeficient tangente na krivuljo.

Slika 1-6: Na sliki imamo funkcijo $y(x)$ ter tangento na funkcijo v točki T . Odvod funkcije y v točki T je enak naklonu tangente. Večji kot je naklon, večji je odvod. Na sliki spodaj je odvod funkcije izrisan za vse točke - kot funkcija x -a (rdeče). Preiskusite program Desmos (desmos.com), da izrišete poljubno funkcijo in njen odvod. Pri tem si lahko pomagata z že izdelanim primerom <http://tinyurl.com/desmos-odvod>



Funkcija	Odvod
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$

funkcija	odvod
$f \pm g$	$f' \pm g'$
$c \cdot f$	$c \cdot f'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$f \circ g = f(g)$	$(f' \circ g) \cdot g' = f'(g) \cdot g'$

Nekaj osnovnih odvodov (elementarnih) funkcij prikazuje zgornja Tabela, povzeta po tabeli iz Wikipedije http://sl.wikipedia.org/wiki/Tabela_odvodov. Odvod konstante c je pričakovano enak 0, saj je sprememba funkcije ob spremembi x -a enaka 0. Odvod premice $y=x$ pa je 1, saj je hitrost spreminjanja te funkcije vedno enaka. V splošnem je potrebno upoštevati še pravila za računanje odvodov (glej tabelo na desni), npr. kako odvajamo vsoto ali razliko dveh funkcij, funkcijo pomnoženo s konstanto, produkt dveh funkcij, itd.

Primer izračuna odvodov z upoštevanjem pravil odvajanja:

$$y = 2x + 3 \Rightarrow y' = 2$$

$$y = 4x^2 \Rightarrow y' = 4 \cdot 2x = 8x$$

$$y = 5 \sin(2x - 2) \Rightarrow y' = 5 \cos(2x - 2) \cdot 2 = 10 \cos(2x - 2)$$

V zadnjem primeru odvajamo funkcijo, ki je oblike $\sin(t)$, kjer je $t = 2x - 2$, zato je potrebno upoštevati pri izračunu odvoda zadnje pravilo o odvajanju sestava funkcij (kompozitum), da se najprej odvaja funkcijo sinus, potem pa še funkcijo t ($\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$).

Primer izračuna toka iz spremembe naboja: Naboj na pozitivni sponki akumulatorja je konstanten – se ne spreminja s časom. Kolikšen je električni tok, ki izhaja iz sponke? Matematično lahko zapišemo, da je naboj na pozitivni sponki enak $Q(t) = Q_0$. Iz osnov matematike vemo, da je odvod konstante enak nič, torej bo ta tok seveda enak nič. Do enakega rezultata pridemo z razmislekom, da ker ni odtekanja naboja tudi ni toka.

Kaj pa, če recimo na akumulator priključimo žarnico in se naboj na pozitivni sponki akumulatorja manjša linearno, npr. v 10 sekundah za 12 C? Ta primer lahko izračunamo z enačbo (1.2) in dobimo

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{12 \text{ C}}{10 \text{ s}} = 1,2 \frac{\text{C}}{\text{s}} = 1,2 \text{ A}.$$

Za izračun toka z odvajanjem naboja po času pa potrebujemo najprej matematičen zapis (formulo) funkcijske odvisnosti naboja od časa. V našem primeru je ta

$$Q(t) = Q_0 - \frac{12 \text{ C}}{10 \text{ s}} t.$$

Če računamo tok stran od pozitivne sponke, uporabimo enačbo (1.5) in zapišemo

$$i = -\frac{dQ}{dt} = -\left(-\frac{12 \text{ C}}{10 \text{ s}}\right) = \underline{\underline{1,2 \text{ A}}}.$$

Vprašanje: Kaj pomeni pozitivni predznak toka?

Odgovor: To, da s pozitivne sponke odteka pozitivni naboj s »hitrostjo« 1,2 C/s, oziroma bolje - s tokom 1,2 A.

Vprašanje: Kakšen pa je v resnici način gibanja nabojev v prevodnikih?

Odgovor: Kot smo že ugotovili, v prevodniku prevajajo elektroni, kar pomeni, da gre v resnici za prenos elektronov preko žarnice v smeri pozitivne sponke, kjer smo imeli prej višek pozitivnih nabojev oziroma pomanjkanje elektronov.

Vprašanje: Ali steče tok skozi žarnico šele tedaj, ko do nje pridejo elektroni iz akumulatorja? Razmislite in odgovorite sami.

Še en primer izračuna toka z odvajanjem naboja po času: Naboj na pozitivni elektrodi kondenzatorja se spreminja eksponentno po enačbi $Q(t) = 5 \left(1 - e^{-\frac{t}{10\text{s}}}\right) \text{ mC}$. Določimo tok naelektritve, če smer toka označimo v smeri pozitivne elektrode.

Izračun: Glede na označitev, moramo uporabiti enačbo

$$i_{\text{v smeri + elektrode}} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(5 \left(1 - e^{-\frac{t}{10\text{s}}} \right) \text{ mC} \right) = -5e^{-\frac{t}{10\text{s}}} \text{ mC} \cdot \left(-\frac{1}{10\text{s}} \right) = 0,5e^{-\frac{t}{10\text{s}}} \text{ mA}.$$

Pozitivni rezultat pomeni, da teče v smeri pozitivne elektrode pozitiven naboj.

In še: ker smo določili funkcijsko obliko toka v odvisnosti od časa, lahko sedaj izračunamo tok ob poljubnem časovnem trenutku. Na primer, ob času $t=0$ s je tok $i(t=0 \text{ s}) = 0,5e^{-\frac{0}{10\text{s}}} \text{ mA} = 0,5 \text{ mA}$ ($e^0 = 1$), ob času 5 s pa je $i(t=5 \text{ s}) = 0,5e^{-\frac{5}{10\text{s}}} \text{ mA} \cong 0,3 \text{ mA}$.

Za grafičen prikaz časovnega poteka naboja in toka pogledaj poglavje * Izračun in izris rezultatov.

KONTINUITETNA ENAČBA

Enačbo $i(t) = -\frac{dQ}{dt}$ imenujemo tudi kontinuitetna enačba, saj v smislu zakona o ohranitvi naboja pove, da v kolikor iz električno zaključenega sistema izhajajo naboji, je to posledica električnega toka. Kontinuitetna enačba je torej posledica zakona o ohranitvi električnega naboja.

NABOJ KOT INTEGRAL TOKA

Kaj pa če merimo tok v smeri telesa in nas zanima naboj, ki se ob tem pretaka oziroma naboj, ki se kopiči na telesu? Za začetek uporabimo definicijo toka kot spremembo množine naboja v časovnem intervalu oz. enačbo (1.2): $i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Spremembo množine naboja dobimo torej z množenjem toka s časovnim intervalom:

$$\Delta Q = i \Delta t \quad (1.7)$$

Če tok v intervalu določanja ni konstanten, je potrebno vzeti krajše časovne intervale. Naj se tok spreminja tako, da v času Δt_1 teče tok i_1 , v času Δt_2 teče tok i_2 , v času Δt_3 teče tok i_3 , itd, kot prikazuje Slika 1-7a. V času Δt_1 torej steče $i_1 \Delta t_1$ naboja, v času Δt_2 steče $i_2 \Delta t_2$, itd. Celotni naboj, ki preteče od začetnega intervala Δt_1 do zadnjega intervala Δt_n , je

$$Q = i_1 \Delta t_1 + i_2 \Delta t_2 + i_3 \Delta t_3 + \dots + i_n \Delta t_n, \quad (1.8)$$

kar matematično bolj elegantno zapišemo z izrazom

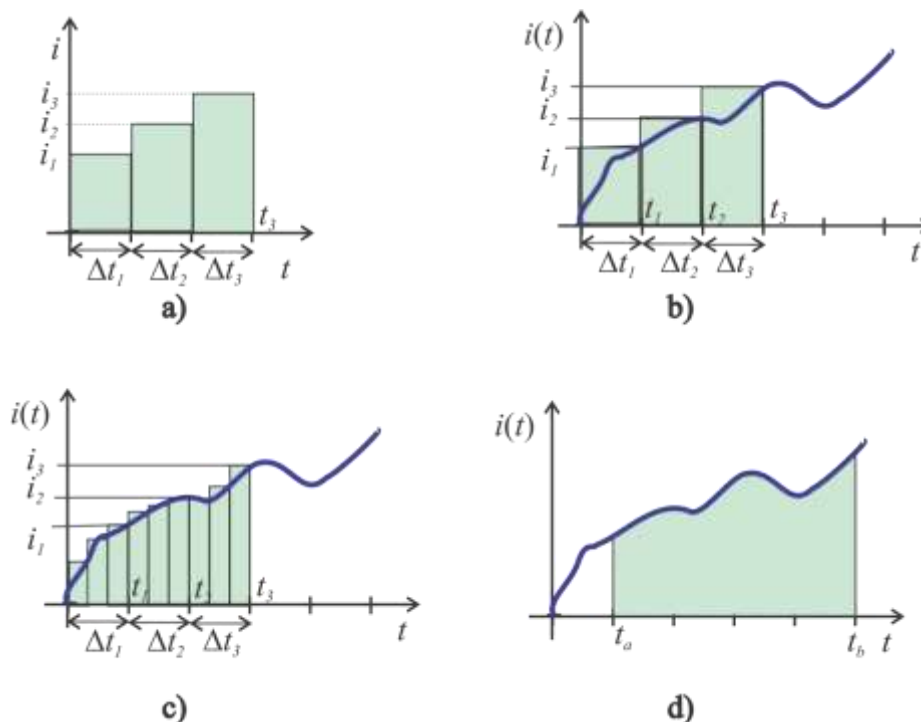
$$Q = \sum_{i=1}^n i_i \Delta t_i. \quad (1.9)$$

Kaj pa, če se tok ne spreminja skokovito pač pa brez skokov, matematično bi rekli *zvezno*? Tak primer prikazuje modra krivulja na sliki (Slika 1-7b). V tem primeru ugotovimo, da smo z enačbo (1.8) izračunali naboj le približno, saj smo v diskretnih intervalih pri seštevanju upoštevali prevelik tok. Do bolj natančnega izračuna bi prišli, če bi vzeli manjše časovne intervale, kot prikazuje primer c. Če pa želimo določiti pretečen naboj popolnoma natančno, moramo vzeti intervale izjemno kratke, v matematičnem jeziku rečemo infinitezimalno kratke. Če časovne *diference* (Δt) zmanjšujemo (matematično rečemo *limitiramo*) proti nič, dobimo t.i. *diferencial* časa, kar matematično zapišemo v obliki $dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t$. Če torej seštejemo vsoto produktov toka s časovnimi diferenciali, ki jih limitiramo

* To je tudi najbolj pogost način merjenja električnega naboja – posredno, s pomočjo merjenja električnega toka. V ta namen uporabljamo naprave, ki imajo zelo veliko notranjo upornost in jih imenujemo elektrometri ali tudi Coulomb – metri. Nekaj več o tem je zapisano v dodatnem poglavju na strani 207.

proti nič, dobimo natančen izračun pretečenega naboja $Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n i_i \Delta t$. Ta zapis v krajši obliki zapišemo kot integral toka »po času«:

$$Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n i_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_n} i dt. \quad (1.10)$$



Slika 1-7: Prikaz izračuna naboja s seštevanjem produktov toka in čas in b) z integracijo. c) Za izračun pretečenega naboja v določenem časovnem obdobju uporabimo določeni integral. Rezultat integrala je površina pod krivuljo.

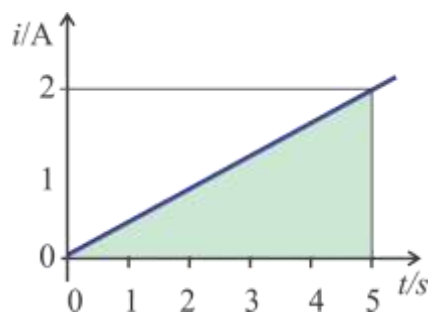
Rezultat integracije je torej pretečen naboj od začetnega časa do končnega časa integracije in grafično predstavlja površino pod krivuljo $i(t)$ od začetnega časa t_a , do končnega časa t_b :

$$Q = \int_{t_a}^{t_b} i dt \quad (1.11)$$

Matematično je torej naboj določen kot integral toka po času.

Primer izračuna naboja iz toka: Izračunajmo naboj, ki steče skozi žico s tokom na sliki od časa 0 s do časa 5 s.

Izračun: Uporaba formule $Q = iT$, kjer bi bil T čas 5 sekund, ne pride v poštev, ker tok v tem času ni konstanten. Najenostavneje izračun opravimo »grafično«, saj vemo, da mora biti rezultat površina pod krivuljo, kar je v našem primeru površina trikotnika. Rezultat je torej $2 \cdot 5 / 2 = 5$ ali bolj korektno, z upoštevanjem enot:



$$Q = \frac{2 \text{ A} \cdot 5 \text{ s}}{2} = 5 \text{ As} = 5 \text{ C} .$$

In kako bi ta rezultat dobili z integralom? Najprej moramo zapisati tok kot funkcijo časa. Ker je ta funkcija premica, mora biti tok kot funkcija časa oblike $i = kt$, kjer je k konstanta, ki jo moramo določiti iz grafa. Najenostavneje tako, da si izberemo eno točko na premici, recimo ob času 5 s, kjer je tok 2 A. Ti vrednosti vstavimo v enačbo $i = kt$ in dobimo $2\text{A} = k5\text{s}$ od koder je $k = 2\text{A} / 5\text{s}$ oziroma $k = \frac{2}{5} \text{ A} / \text{s} = 0,4 \text{ A/s}$. Nato upoštevamo enačbo (1.11) in zapišemo $Q = \int_{t_a}^{t_b} i dt = \int_{0\text{s}}^{5\text{s}} kt dt$. Sedaj je

potrebno poznati pravila integracije, ki vam morajo biti v osnovi znana iz srednje šole, vsaj za najpreprostejše primere, kot je ta. Na kratko: rezultat bo oblike $kt^2 / 2$, pri čemer pa je potrebno upoštevati še meje integracije in sicer tako, da se najprej v rezultat vstavi končni čas (zgornjo mejo integracije) in nato odšteje rezultat z vstavljenim začetnim časom (spodnjo mejo integracije):

$$Q = \int_{0\text{s}}^{5\text{s}} kt dt = kt^2 / 2 \Big|_{0\text{s}}^{5\text{s}} = \frac{k(5\text{s})^2}{2} - \frac{k(0\text{s})^2}{2} = \frac{k(5\text{s})^2}{2} .$$
 Sedaj le še vstavimo vrednost konstante in dobimo

$$Q = \frac{2\text{A}}{5\text{s}} \frac{25\text{s}^2}{2} = 5\text{As} = 5 \text{ C} .$$
 Rezultat je seveda enak, kot smo ga dobili iz izračuna površine pod

krivuljo. Način izračuna z integracijo deluje nekoliko bolj zapleten kot izračun površine pod krivuljo. Kar tudi je. Vendar ne gre drugače, še posebno, če je oblika krivulje bolj zapletena. Tedaj drugega načina ni, oziroma, vedno nam preostane še numerična metoda izračuna vsote, še posebno v primerih, ko integral ni analitično rešljiv. Za numeričen izračun uporabimo računalnik.

Poglejmo si še en način, ki nas privede do enačbe za izračun naboja z integracijo toka. Sedaj izhajamo iz (končne) enačbe za izračun naboja kot odvoda toka po času (1.4) ali (1.5) $i = \pm \frac{dQ}{dt}$. Enačbo množimo z dt in dobimo $i dt = \pm dQ$. Sedaj le še integriramo obe strani in dobimo

$$Q(t) = \pm \int i dt + \text{konst} .$$
 Z besedami: naboj je integral toka po času. (1.12)

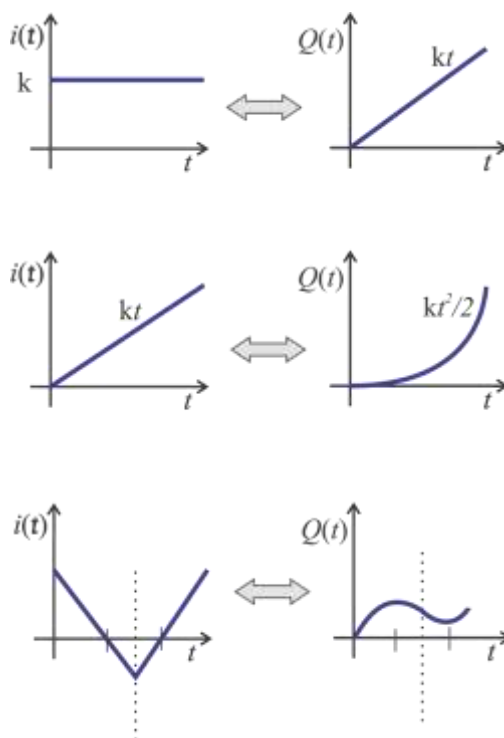
Dobili smo zapis z nedoločenim integralom, zato smo zraven dopisali konstanto. Konstanta je odvisna od naboja, ki je bil na telesu pred vklopom toka. Lahko bi integral zapisali tudi kot določen integral z integracijo po času od nekega časa t_0 do časa t :

$$\int_{Q(t_0)}^{Q(t)} dQ = \pm \int_{t_0}^t i dt ,$$
 kar dá končno obliko

$$Q(t) = Q(t_0) \pm \int_{t_0}^t i dt .$$
 (1.13)

Predznak pred integralom je pozitiven, če je tok usmerjen v smer »kopičenja« naboja $Q(t)$.

Slika 1-8 prikazuje oblike časovne spremembe množine naboja (ali pretečenega naboja) za različne oblike časovnih sprememb toka. Puščica nakazuje, da velja relacija v »obe smeri«. Če je tok v smeri telesa konstanten to pomeni, da se na njem linearno povečuje naboj; in tudi, če se naboj na telesu povečuje linearno, to pomeni, da je tok v smeri telesa konstanten.



Slika 1-8: Levo: časovni potek tokov. Desno: časovni potek pretečenega naboja.

Primer izračuna naboja iz časovnega poteka toka: Ob času $t = 0$ s priklopimo akumulator na elektren s 500 C na breme. Iz pozitivne sponke akumulatorja je v vezje konstanten tok 0,2 A. Koliko naboja je na pozitivni sponki akumulatorja ob času $t = 10$ minut?

Poglejmo si tri različne pristope k izračunu:

1. Izračunamo pretečen naboj in ga odštejemo od celotnega:

$$Q|_{\text{pretečen}}(t = 10 \text{ min}) = \int_{t_0}^t (0,2 \text{ A}) dt = 0,2 \text{ A} \cdot (t - t_0) = 0,2 \text{ A} \cdot 10 \text{ min} = 0,2 \text{ A} \cdot 10 \cdot 60 \text{ s} = 120 \text{ A} \cdot \text{s}. \text{ V času}$$

10 minut je skozi presek žice prešlo 120 As oziroma 120 C naboja. Na pozitivni sponki ga je torej ostalo še $500 \text{ C} - 120 \text{ C} = 380 \text{ C}$.

2. Izračun z nedoločenim integralom (en. (1.12)), kjer moramo dodatno izračunati konstanto:

$$Q(t) = -\int (0,2 \text{ A}) dt + \text{konst} = -0,2 \text{ A} \cdot t + \text{konst}. \quad \text{Konstanto določimo iz pogoja}$$

$$Q(t = 0) = 500 \text{ C} \Rightarrow \text{konst} = 500 \text{ C}. \quad \text{Sledi} \quad Q(t) = 500 \text{ C} - 0,2 \text{ A} \cdot t \quad \text{in}$$

$$Q(t = 10 \text{ min}) = 500 \text{ C} - 0,2 \text{ A} \cdot 10 \text{ min} = 380 \text{ C}.$$

3. Izračun z določenim integralom (en. (1.13)):

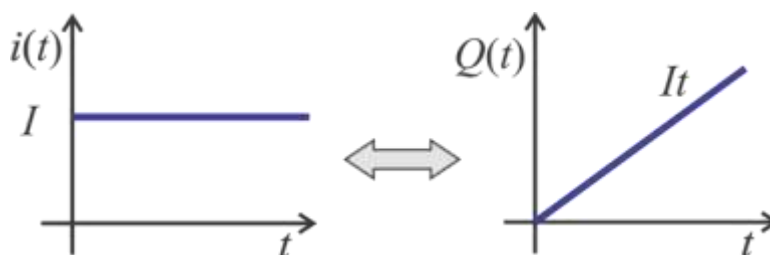
$$Q(t) = Q(t = 0) - \int_0^{10 \text{ min}} (0,2 \text{ A}) dt = 500 \text{ C} - 0,2 \text{ A} t \Big|_0^{10 \text{ min}} = 500 \text{ C} - 120 \text{ C} = \underline{\underline{380 \text{ C}}}.$$

KONSTANTEN TOK

Ob konstantnem toku velja linearna zveza med nabojem in tokom

$$Q = \int_0^t I dt = I \int_0^t dt = It. \quad (1.14)$$

To zvezo poznamo že iz srednješolske fizike: naboj je produkt toka in časa. Ugotovili smo že omejeno veljavnost zapisa $Q = It$, saj velja le pri konstantnem toku.



Slika 1-9: Če je tok konstanten, je povezava med tokom in pretečenim nabojem linearna: $Q=It$.

* IZRAČUN IN IZRIS REZULTATOV

Obstaja vrsta programov, ki jih uporabljamo za izračun in izris rezultatov. V tehniki je morda najbolj pogosto uporabljen program Matlab, ki pa je žal plačljiv. Kljub temu ga boste uporabili pri mnogih predmetih. Tudi v tej skripti je nekaj primerov uporabe programa Matlab. Skoraj identičen program (po sintaksi) je Octave, ki je v osnovi prirejen za uporabo v Linux okolju, obstaja pa tudi možnost uporabe v Windowsih. Podoben jima je tudi program Scilab in še nekateri drugi. Kdor bi si želel bolj podrobno razjasniti razlike in podobnosti, lahko prebere članek <http://profs.scienze.univr.it/~caliari/pdf/octave.pdf>. Če ne želite naložiti programa (ov) na svoj računalnik, obstajajo tudi strani na spletu, ki omogočajo t.i. on-line uporabo.

Poleg tega je lahko za bolj matematično uporabo zanimiv program Mathematica, ki ima nekoliko specifično sintakso, je pa zelo zmogljiv.

Iz inženirskega in programerskega stališča je lahko zanimiv tudi programski jezik Python, ki z uporabo dodatnih knjižnic (Matplotlib) omogoča izrise, ki so zelo podobni programu Matlab. Morda je lahko nekaj zmede le pri inštalaciji ustrezne verzije programa in vizualnega okolja. Nekaj več informacij o uporabi zgoraj omenjenih programov je na spletni strani <http://lbm.fe.uni-lj.si> pod zavihkom Študij.

Primer enostavnega izračuna in izrisa je spletna platforma Desmos (<http://Desmos.com>). Izberimo primer izračuna toka z odvajanjem naboja po času, kjer je bila podana časovna funkcija naboja $Q(t) = 5 \left(1 - e^{-\frac{t}{10s}} \right) \text{mC}$, tok pa smo izračunali kot

odvod naboja po času: $i_{\text{v smeri elektrode}} = \frac{dQ}{dt}$. V vrsticah na

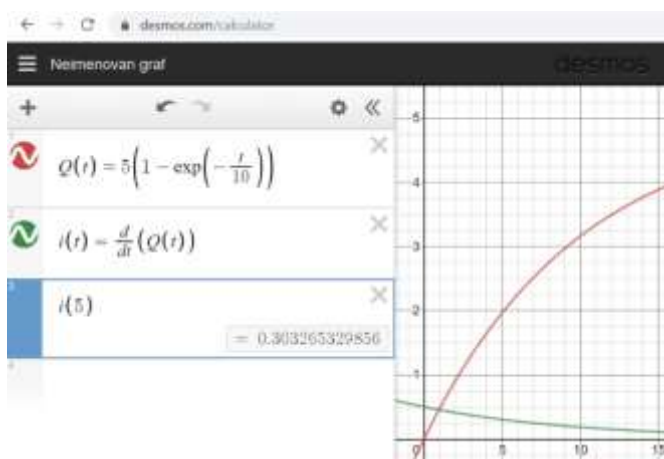
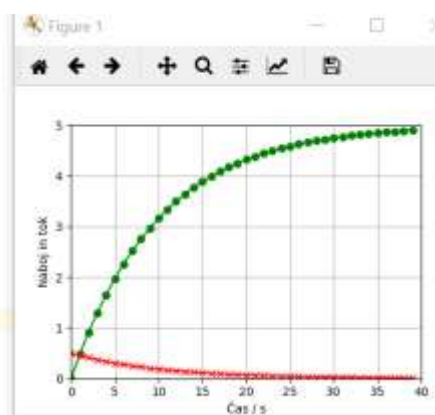
levi strani spletne strani preprosto zapišemo enačbe, desno pa se na grafu izrišejo ustrezne krivulje. V konkretnem primeru se naboj eksponentno s časom povečuje (rdeča krivulja), tok pa ravno obratno (zelena krivulja), se s časom zmanjšuje, kar je tudi skladno z definicijo toka: če se naboj s časom hitro spreminja, je tok velik, sicer pa manjši. Zelo podobna, morda še malo »močnejša« v določenih primerih (meni ne dela nedoločen integral), je spletna aplikacija GeoGebra (<http://geogebra.org>).

Na desni je prikazan še primer uporabe programerskega jezika Python. V tem primeru nismo izračunali odvoda, pač pa kar zapisali rezultat odvajanja. Če bi s Pythonom želeli izračunati odvod, bi morali uporabiti t.i. simbolno računanje.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

t=np.arange(0,40,1)
Q=5*(1-np.exp(-t/10))
i=0.5*np.exp(-t/10)

plt.plot(t,Q,'g-o',t,i,'r-x')
plt.axis([0,40,0,5])
plt.grid(True)
plt.xlabel("Čas / s")
plt.grid(True)
plt.show()
```



2. Coulombov zakon

Vsebina: sila med točkastima naboje, dielektrična konstanta vakuuma, vektorski zapis sile, superpozicija sil.

Že stari Grki so ugotovili, da med naelektrenimi telesi deluje sila, ki jo je William Gilbert leta 1600 v znameniti knjigi *De Magnete* poimenoval električna sila. Kljub znanstvenim raziskavam je preteklo kar nekaj časa, da je bila dognana zveza med velikostjo sile in naboji, ki to silo povzročajo.

Osnovno zakonitost je s pomočjo eksperimenta s torzijsko tehtnico dognal Charles Augustin de Coulomb. Ugotovil je, da je sila med dvema naelektrenima kroglicama proporcionalna produktu nabojev in inverzno proporcionalna kvadratu razdalje med kroglicama. Matematično to zapišemo kot

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

kjer je k konstanta. Odvisna je od izbire merskega sistema. V sistemu merskih enot, ki je v veljavi dandanes (SI), velja

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ in je približno enaka } k \cong 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}}.$$

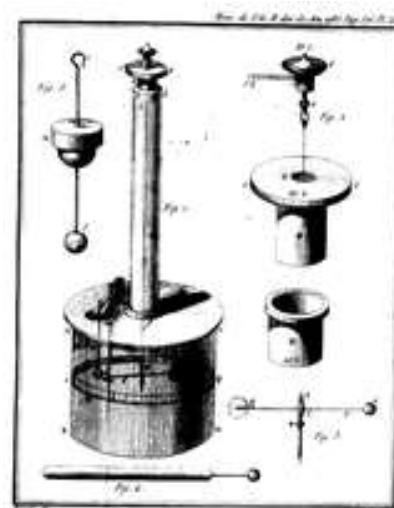
ϵ_0 imenujemo dielektrična konstanta vakuuma* (ali tudi influenčna konstanta) in je enaka $\epsilon_0 \cong 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$.

Da bi bila enačba točna, morata biti kroglici čim manjši. Eksaktno enačba velja le za tako imenovane **točkaste elektrine**. To je čista matematična formulacija, saj točkastih nabojev v naravi ni. Še tako majhen naboj ima določen polmer, četudi majhen[†]. Je pa koncept točkaste elektrine (točkastega naboja) zelo pomemben v elektrotehnik in z njegovo pomočjo izpeljemo izraze za silo med naelektrenimi telesi poljubne oblike.

Primer izračuna velikosti sile: Določimo električno silo med dvema točkastima naboje $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ in $Q_2 = 5 \mu\text{C}$, ki sta oddaljena za 1 cm.

Izračun:

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{2 \mu\text{C} \cdot 5 \mu\text{C}}{(0,01 \text{ m})^2} = 900 \frac{\text{VAs}}{\text{m}} = \underline{\underline{900 \text{ N}}}.$$



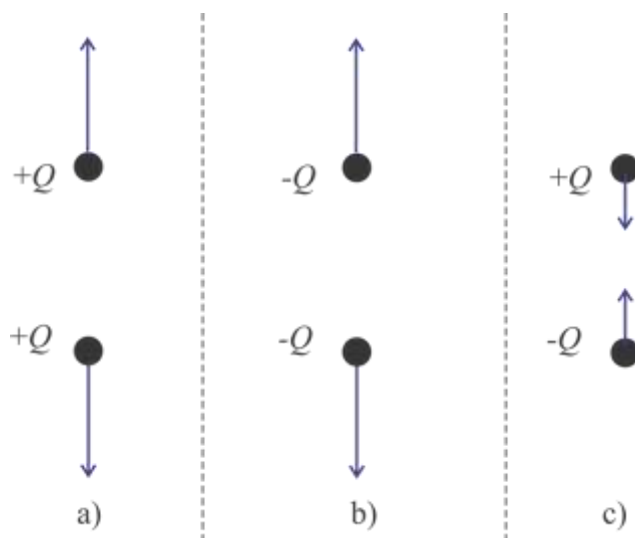
Coulombova torzijska tehtnica, s katero je izvajal poskuse in ugotovil povezavo med nabojem in silo.

* Pogosto tudi zrak smatramo za prostor brez nabojev, v katerem določamo silo med naboji na enak način kot v vakuumu. Kasneje bomo ugotovili, da je za izračun sil in električnega polja v različnih medijih potrebno upoštevati vpliv samega medija. Ta vpliv opišemo z relativno dielektrično konstanto. Za vakuum je ta 1, za zrak pa 1,00059.

[†] Polmer elektrona je $2,8179 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

Iz rezultata lahko ugotovimo, da smo enoto N(ewton) kar pripisali, saj bi po izvajanju morala biti enota za silo VAs/m. To tudi je ekvivalentna enota za silo, le da je bolj običajno, da silo izrazimo z enoto iz mehanike, newtnom (njutnom).

Izračun sile med točkastimi naboji je torej preprost. Potrebno pa je poudariti, da je sila vektorska veličina, saj ima poleg velikosti tudi smer. Kot smo že omenili, je smer sile taka, da se enako naznačena (predznačena) naboja odbijata, nasprotno naznačena pa privlačita. To pravilo moramo le še zapisati v matematični obliki in ga upoštevati pri izračunu sile. Pri tem si pomagamo z vektorskim zapisom. Silo zapišemo kot vektor, hkrati pa z vektorji zapišemo tudi pozicije mest, kjer se naboji nahajajo.



Slika 2-1: a in b) odbojna sila med istoimenskima nabojema in c) privlačna sila med nasprotno-imenskima nabojema.

ZAPIS SILE V VEKTORSKI OBLIKI

Imejmo točkasta naboja Q_1 in Q_2 , ki se nahajata v točkah T_1 in T_2 , kjer je točka T_1 določena s koordinatami (x_1, y_1, z_1) in T_2 z (x_2, y_2, z_2) , glej Slika 2-2. Vektor iz koordinatnega izhodišča do točke T_1 označimo z \vec{r}_1 in ima komponente (x_1, y_1, z_1) ter \vec{r}_2 s komponentami (x_2, y_2, z_2) . Določimo še vektor, ki kaže iz točke T_1 v točko T_2 . Ta je $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ oziroma $\vec{r}_{12} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Da bi izračunali vektor sile, moramo velikosti sile, določeni z enačbo $F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, dodati še smer.

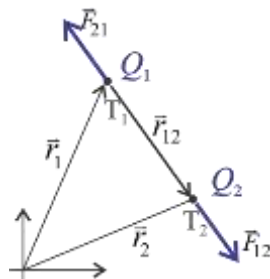
Smer sile, ki jo naboj Q_1 povzroča na naboj Q_2 bo v smeri vektorja \vec{r}_{12} . Potrebujemo torej vektor, ki kaže v smeri vektorja \vec{r}_{12} , njegova velikost pa je 1. Ta vektor imenujemo **enotski vektor** in ga dobimo

tako, da vektor \vec{r}_{12} delimo z njegovo absolutno vrednostjo (velikostjo): $\vec{e}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$.

Sila na Q_2 , ki jo povzroča naboj Q_1 , zapisana v vektorski obliki, je

$$\vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}} \quad \text{Coulombov zakon.} \quad (2.2)$$

Zapisana sila je sila na naboj Q_2 , če pa želimo izraziti silo na naboj Q_1 , moramo obrniti vektor \vec{r}_{12} , oziroma upoštevati $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.



Slika 2-2: Sila med nabojema Q_1 in Q_2 .

Primer izračuna velikosti sile: Vzdlž X osi sta na razdalji 3 m naboja $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ in $Q_2 = 3 \mu\text{C}$. Določimo silo na Q_2 .

Izračun: $F \cong 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{3^2} \text{ N} = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-3} \text{ N}}}$.

Če si narišemo skico ugotovimo, da bo smer sile v smeri osi X. Silo lahko torej zapišemo kot vektor $\vec{F} \cong \underline{\underline{\vec{e}_x 6 \cdot 10^{-3} \text{ N}}}$.

Primer izračuna vektorja sile: Določimo električno silo med točkastima nabojema $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ in $Q_2 = -5 \mu\text{C}$. Q_1 se nahaja v točki $T_1(1,0,2)$ cm, naboj Q_2 pa v točki $T_2(2,3,1)$ cm.

Izračun: Zapišimo točki z vektorjema \vec{r}_1 in \vec{r}_2 ter tvorimo vektor $\vec{r}_{12} = (2-1, 3-0, 1-2) \text{ cm} = (1, 3, -1) \text{ cm}$. Enotski vektor dobimo tako, da delimo vektor z njegovo absolutno vrednostjo:

$$|\vec{r}_{12}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} \text{ cm} = \sqrt{11} \text{ cm} \text{ in } \vec{e}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{(1, 3, -1) \text{ cm}}{\sqrt{11} \text{ cm}} = \frac{(1, 3, -1)}{\sqrt{11}}.$$

Sila na naboj Q_2 je torej

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mu\text{C} \cdot (-5\mu\text{C})}{11\text{cm}^2} \frac{(1, 3, -1)}{\sqrt{11}} = \\ &= -9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{11 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} \frac{10^{-11} \text{A} \cdot \text{s}}{\sqrt{11}} (1, 3, -1) \cong \underline{\underline{-24,7 \cdot (1, 3, -1) \text{ N}}} \end{aligned}$$

Rezultat je negativen, torej sila kaže v nasprotno smer kot vektor \vec{r}_{12} , kar je seveda pravilno, saj sta naboja nasprotnega predznaka in se torej privlačita.

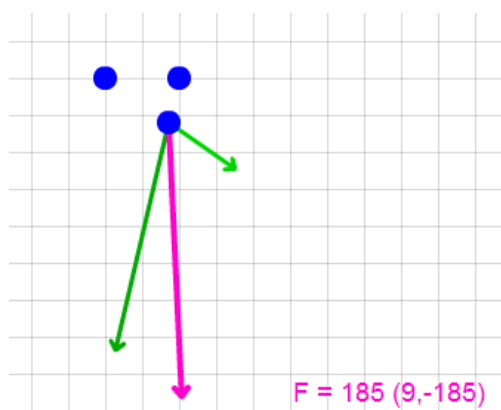
Dodatno: Kolikšna je komponenta sile v smeri določene osi?

Pomnožimo komponente z 24,7 in dobimo: $\vec{F}_{12} \cong -24,7 \text{ N} \cdot \vec{e}_x - 74 \text{ N} \cdot \vec{e}_y + 24,7 \text{ N} \cdot \vec{e}_z$.

SUPERPOZICIJA SIL

Kaj pa če imamo tri ali več nabojev? Kako določimo silo na določen naboj? Določimo jo preprosto s seštevanjem posameznih prispevkov sil. Matematično temu rečemo superpozicija in princip seštevanja sil kot superpozicija sil. Sila na Q_1 bi bila torej enaka vsoti sil med nabojema Q_1 in Q_2 , Q_1 in Q_3 , Q_1 in Q_4 , itd.

$$\vec{F}_{Q_1} = \vec{F}_{Q_2 \rightarrow Q_1} + \vec{F}_{Q_3 \rightarrow Q_1} + \vec{F}_{Q_4 \rightarrow Q_1} + \dots \quad (2.3)$$



Slika 2-3: Primer superpozicije sil. Odpri povezavo in premikaj naboj ter opazuj vpliv sil na naboj:
<http://tinyurl.com/superposition-field> *(brskalnik mora omogočati Flash animacije)*

Primer superpozicije sil: Poleg nabojev Q_1 in Q_2 iz gornjega primera imamo še naboj $Q_3 = 3 \mu\text{C}$, ki se nahaja na mestu $T_3(2,3,-3)\text{cm}$. Določimo (skupno) silo na naboj Q_2 .

Izračun: Silo med nabojema Q_3 in Q_2 je nekoliko lažje izračunati, saj je razdalja med nabojema 1 cm (razlika samo v smeri z osi). Ker je en naboj pozitiven drugi pa negativen, bo sila na Q_3 v smeri naboja Q_2 , torej v smeri $-z$ osi. Rezultat bo torej

$$\begin{aligned} \vec{F}_{32} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q_2}{r_{32}^2} \vec{e}_{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|3\mu\text{C} \cdot (-5\mu\text{C})|}{(4\text{cm})^2} (-\vec{e}_z) = \\ &= -9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m} \cdot 15 \cdot 10^{-12} \text{A} \cdot \text{s}}{16 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} \vec{e}_z = \underline{\underline{-84,38 \cdot \vec{e}_z \text{ N}}} \end{aligned}$$

Skupni seštevek je

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = \underline{\underline{-24,7 \text{ N} \cdot \vec{e}_x - 74 \text{ N} \cdot \vec{e}_y - 59,68 \text{ N} \cdot \vec{e}_z}} = (-24,7, -74, -59,68) \text{ N} .$$

Dva možna pristopa k računanju Coulombove sile:

- matematičen, pri katerem določimo vektorje $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{12}, \vec{e}_{r_{12}}$ in nato vstavimo v enačbo

$$\vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}} . \text{ (kot v prvem primeru)}$$

- z razmislekom, pri čemer posebej določimo smer sile in velikost sile in nato zapišemo $\vec{F} = \vec{e}_F F$. (kot v drugem primeru)

3. Električna poljska jakost

Vsebina poglavja: definicija električne poljske jakosti, superpozicija električnega polja.

Pojem električne poljske jakosti je en najpomembnejših konceptov v elektrotehnik. V osnovi abstrakten pojem se bo kasneje izkazal kot ključen za določanje napetosti, energije in drugih pomembnih veličin.

Električna poljska jakost je definirana kot sila na enoto pozitivnega naboja $Q_t = 1\text{ C}$:

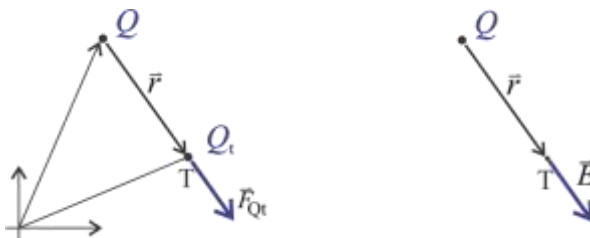
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_t} \quad (3.1)$$

Električno poljsko jakost v poljubni točki v prostoru določimo tako, da v to točko postavimo poskusni (testni) naboj Q_t in določimo silo na ta naboj. Nato silo delimo silo s poskusnim nabojem Q_t in dobimo električno poljsko jakost.

Med točkastima nabojem Q in Q_t je sila $\frac{Q_t Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, kjer je r razdalja med nabojema (Slika 3-1).

Električna poljska jakost na mestu naboja Q_t je torej $E = \frac{1}{Q_t} \frac{Q_t Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

Ker pa je tako sila kot električna poljska jakost vektorska veličina, moramo upoštevati še smer. Ta je v smeri vektorja r , ki je usmerjen od mesta naboja Q do testnega naboja Q_t .



Slika 3-1: Vektor električne poljske jakosti v točki T, ki je na oddaljenosti r od točkastega naboja Q .

Električna poljska jakost na oddaljenosti r od točkastega naboja Q je torej enaka

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.2)$$

Primer izračuna električne poljske jakosti: Določimo električno poljsko jakost v koordinatnem izhodišču $(0, 0, 0)$ cm, če se v točki $T_1(1,0,2)$ cm nahaja $Q = 2 \mu\text{C}$.

Izračun: Izračuna se lahko lotimo na enak način, kot da bi določali silo na (pozitivni) naboj Q_t v točki $(0, 0, 0)$.

$$\vec{F}_{Q_t} = \frac{Q_t Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\vec{e}_r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_t \cdot 2\mu\text{C}}{5\text{cm}^2} \cdot \frac{-(1,0,2)}{\sqrt{5}} =$$

$$= -9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{Q_t \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{A} \cdot \text{s}}{5 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} \frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}} = -Q_t \cdot 1,61 \cdot 10^7 (1,0,2) \text{V/m}$$

Električna poljska jakost pa je

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{Q_t}}{Q_t} = -1,61 \cdot 10^7 (1,0,2) \text{N/C} = \underline{\underline{-1,61 \cdot 10^7 (1,0,2) \text{V/m}}}$$

Enota za električno poljsko jakost je V/m.

Iz primera vidimo, da lahko smer električne poljske jakosti določimo kot smer sile na namišljen pozitivni naboj. V principu je vseeno, kako velik je ta testni naboj, saj vidimo, da v enačbi sploh ne nastopa – v enačbi nastopa naboj, ki povzroča silo na testni naboj. Naboj 1 C je zelo velika količina naboja, ki ga je (1) realno nemogoče zbrati v točki (v malem radiju) in (2) tak naboj bi vsekakor predstavljal izrazito veliko silo na okoliške naboje in povzročil njihovo premaknitev. Zato je bolj natančna **definicija za električno poljsko jakost, da je to sila na majhen poskusni pozitivni naboj**, matematično

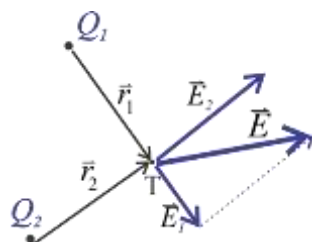
$$\vec{E} = \lim_{Q_t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{Q_t} \quad (3.3)$$

V čem je potem razlika med silo in električno poljsko jakostjo? Pomembna konceptualna razlika je v tem, da je mogoče sile določati le med naboji, medtem ko je **električna poljska jakost definirana v vsaki točki v prostoru**.

SUPERPOZICIJA ELEKTRIČNEGA POLJA

Kako določimo električno poljsko jakost v točki, če je v okolici več nabojev? Enako kot smo določali silo na naboj v okolici več nabojev. V točko postavimo poskusni naboj, izračunamo silo na poskusni (pozitivni) naboj kot superpozicijo posameznih prispevkov sile ter nato delimo s poskusnim nabojem. Oziroma, določimo električno poljsko jakost za vsak naboj posebej in prispevke seštejemo.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots = \sum_i \vec{E}_i \quad (3.4)$$

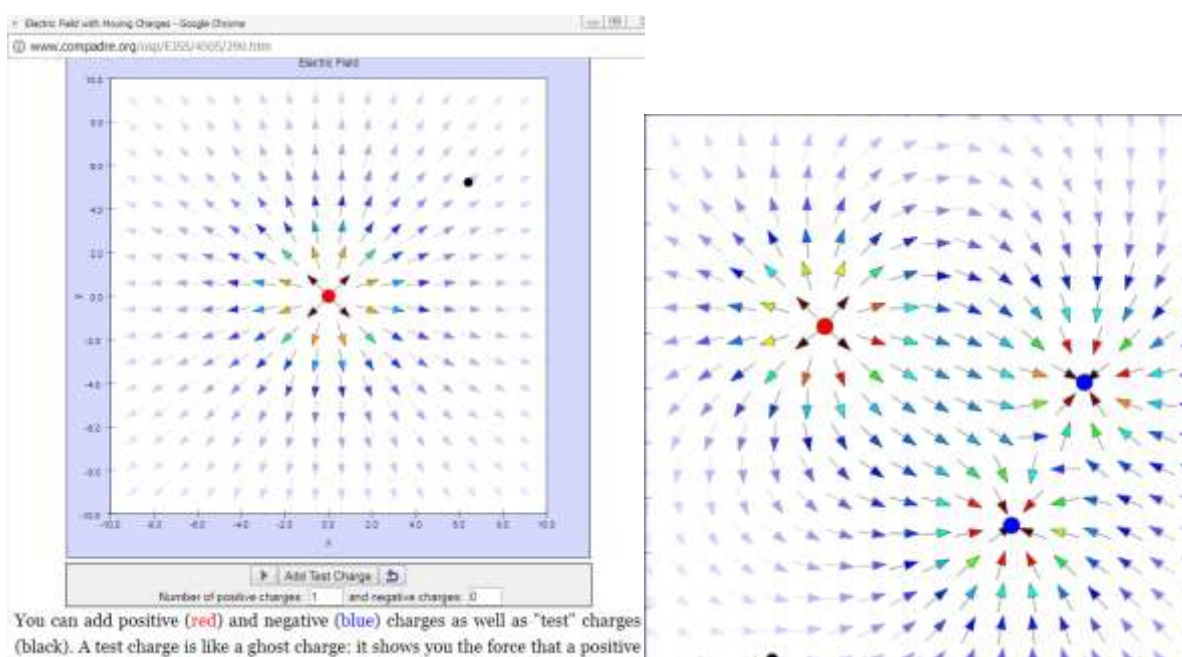


Slika 3-2: Več nabojev in električna poljska jakost v točki kot superpozicija električnih poljskih jakosti posameznih nabojev.

PRIKAZOVANJE ELEKTRIČNE POLJSKE JAKOSTI V PROSTORU

Ker je polje definirano v vsaki točki prostora, pomeni, da lahko v vsaki točki prostora ponazorimo polje z vektorjem, ki kaže smer in velikost polja v točki. Običajno se sprizajmo s tem, da rišemo vektorje električne poljske jakosti v določenih točkah v prostoru in tako prikažemo vektorsko polje. Z nekoliko znanja programiranja lahko tudi sami izdelamo program, ki bi prikazoval električno polje v prostoru za poljubno porazdelitev nabojev. Za hitre izračune in vizualizacijo v elektrotehniko pogosto uporabljamo Matlab ali njegovo zastonsko različico Octave (ali tudi SciLab), vedno bolj popularna pa je tudi uporaba programskega orodja Python.

Seveda pa je mogoče že na spletu dobiti že izdelane vizualizacije električnega polja – in druge. Na spodnji sliki je prikazan primer že izdelane aplikacije (s programom EJSS – Easy JavaScript Simulations), ki omogoča vizualizacijo vektorjev polja v prostoru v okolici naelektrenih točkastih nabojev.

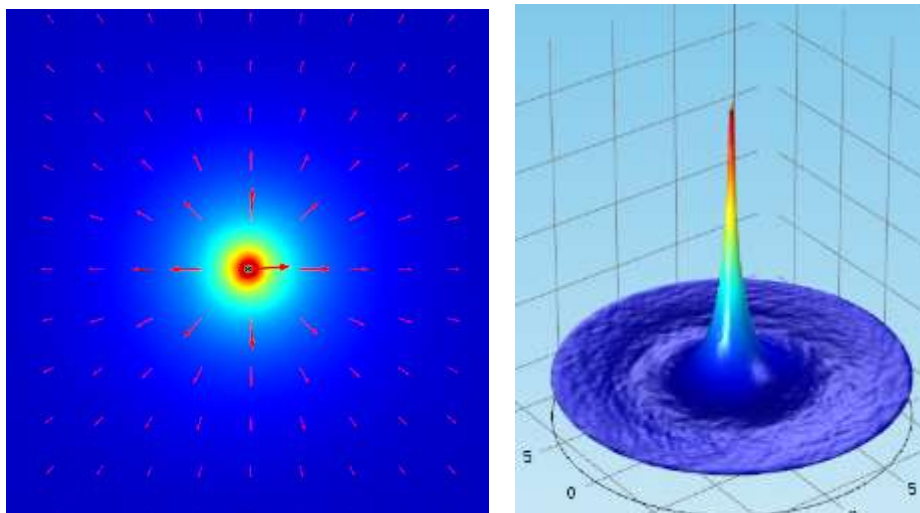


Slika 3-3: Primer uporabe programa EJSS za vizualizacijo porazdelitve električne poljske jakosti v prostoru prikazane (levo) za en sam naboj in (desno) za tri naboje. Barva puščice predstavlja velikost polja v določeni točki. Naboje v aplikaciji lahko poljubno premikamo. <http://tinyurl.com/ejss-field>

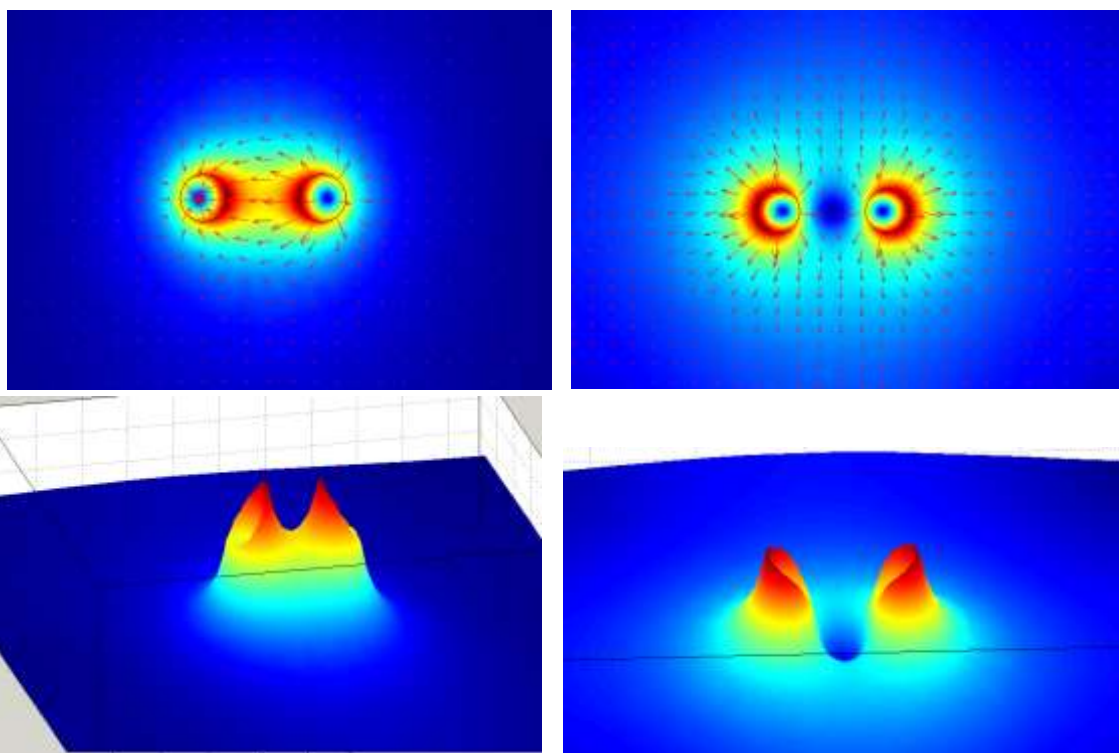
O animacijah in simulacijah na spletu: z brskanjem po spletu z iskalnimi gesli kot so “electrostatic animations simulations” in podobno, lahko pridemo do spletnih strani, ki omogočajo razne načine vizualizacije polja. Lahko so samo animacije, kot na primer na strani od [PenState UNI](#) ali pa [MITOpenCourseWare](#), ali pa simulacije kot npr. [Phet](#) ali primer s povezavo na sliki zgoraj. Mnogo je aplikacij, napisanih v programskem jeziku Java, ki jih novejši brskalniki zaradi varnosti ne omogočajo zagnati. Te aplikacije, ki imajo pogosto končnico .jar (Java Archive), npr. [tale](#), je potrebno najprej naložiti na računalnik in nato zagnati. Seveda morate imeti predhodno naloženo Javo, ki je za običajno rabo brezplačna. Podobno brskalniki pogosto omenogajo prikazovanje Adobe flash animacij. Če spletni strani zaupate, je preprosto vključiti prikazovanje Flash animacij. Recimo [teh](#).

* PRIKAZ ELEKTRIČNEGA POLJA V 2D IN 3D PROSTORU

Pogosto prikazujemo velikost polja v prostoru z 2D ali 3D prikazom z obarvanjem, pri čemer lahko na enem grafu prikažemo le eno komponento E-ja, npr. E_x ali le E_y . Pogosto pa z obarvanjem prikažemo absolutno vrednost polja



Slika 3-4: Prikaz električne poljske jakosti v okolici točkastega naboja: z vektorji in barvo. Desno je 3D prikaz, kjer višina in barva predstavljata velikost polja.



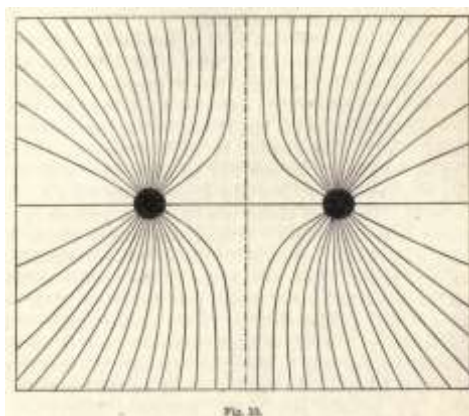
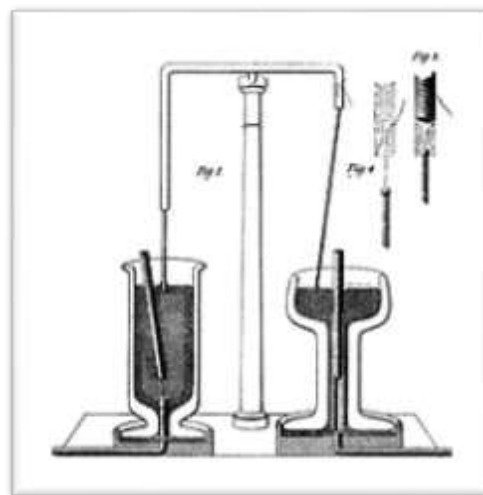
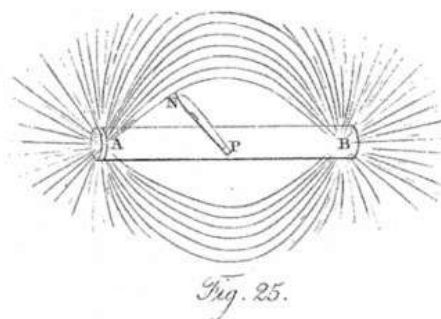
Slika 3-5: 2D in 3D prikaz električne poljske jakosti za polje v okolici dveh prevodnih naelektrenih valjev. Na dveh slikah na levi je prikazano električno polje v okolici dveh valjev naelektrenih z naboji nasprotnega predznaka (levi valj z negativnim, desni pa s pozitivnim nabojem), na desni pa dva valja z enako predznačenim nabojem (pozitivnim). Smer polja prikazujejo puščice (vektorji), velikost pa tako velikost puščic, kot tudi obarvanost – toplejša barva predstavlja večjo poljsko jakost.

* KAKO JE PRIŠLO DO KONCEPTA ELEKTRIČNEGA POLJA?

Električno polje je koncept razlage električnih pojavov, ki je izrazilo oblikoval razvoj elektromagnetike. Največ zaslug za to ima Michael Faraday (1791-1867), angleški raziskovalec, ki kljub pomankljivi izobrazbi velja za enega največjih znanstvenikov v zgodovini človeštva. Več o njegovem delu bomo izvedeli v drugem semestru, saj so njegova odkritja najbolj znana na področju magnetike. Ravno s tega področja izhaja njegovo razmišljanje o (magnetic) *lines of force*, torej nekakšne linijah magnetne sile, ki so prisotne povsod v prostoru, vidne pa so na primer v okolici trajnih magnetov ali tokokrogov, če v njihovo bližino nasujemo železne opilke. Ti se usmerijo v smer magnetnega polja, če je le sila dovolj velika. To je bistvena razlika v primerjavi s konceptom učinka na daljavo, ki se je ponujal iz Coulombovih raziskav. Zanimivo je, da dandanes raziskovalci zgodovine znanosti razmišljajo, da je Faradayu pomanjkanje matematičnega znanja celo pomagalo, da je izredno izostril svoje raziskovalno delo in razmišljanja o električnih pojavih. Tudi sam Faraday ni kaj dosti dal na matematiko, leta 1831 je v pismu Mary Somerville npr. zapisal, da ne verjame v večji pomen matematike v zgodovini znanosti. Še posebno je to zagovarjal zato, ker Ampere, ki je matematično razdelal lastnosti magnetnega polja (znameniti Amperov zakon bomo spoznali v naslednjem semestru), ni predvidel rotacije električnega toka okoli trajnega magneta, kar je Faraday pokazal v eksperimentu, kjer je pokazal rotacijo prevodne palice s tokom v živem srebru, v katerega je bil vstavljen trajni magnet (to bomo imenovali princip homopolarnega motorja). Če bi bila Amperova teorija tako dobra, je razmišljal Faraday, bi sam predvidel ta pojav.

Linije magnetne sile (*lines of force*) smo v slovenščino prevedli kot **silnice**. To teorijo je Faraday še nadalje razdelal s konceptom molekularne teorije elektrike, kjer je v bistvu vpeljal koncept etra, kot neke hipotetične vseobsegajoče substance, v kateri delujejo električne in magnetne sile. Faraday je eksperimentalno ugotovil, da nekatere snovi privlačijo, druge pa odbijajo magnetno polje, kar poznamo kot pojem paramagnetizma in diamagnetizma.

Pravo povezavo med razmišljanjem Faradaya in matematično formulacijo je naredil James Clerc Maxwell (1831-1879), ki je v predgovoru znamenitemu delu *Electricity and Magnetism* zapisal bistvo Faradayevega razmišljanja (ne prevajam): »Before I began the study of electricity I resolved to read no mathematics on the subject till I had first read through Faraday's *Experimental Researches on Electricity*. I was aware that there was supposed to be a difference between Faraday's way of conceiving phenomena and that of the mathematicians, so that neither he nor they were



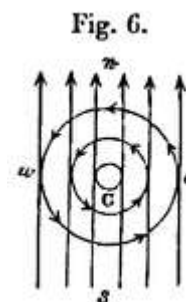
satisfied with each other's language. I had also the conviction that this discrepancy did not arise from either party being wrong. I was first convinced of this by Sir William Thomson, to whose advice and assistance, as well as to his published papers, I owe most of what I have learned on the subject. As I proceeded with the study of Faraday, I perceived that his method of conceiving the phenomena was also a mathematical one, though not exhibited in the conventional form of mathematical symbols. I also found that these methods were capable of being expressed in the ordinary mathematical forms, and these compared with those of the professed mathematicians. For instance, Faraday, in his mind's eye, saw lines of force traversing all space where the mathematicians saw centres of force attracting at a distance; Faraday saw a medium where they saw nothing but distance; Faraday sought the seat of the phenomena in real actions going on in the medium, they were satisfied that they had found it in a power of action at a distance impressed on the electric fluids. Suppose a small positively electrified body to start from a point close to a positively electrified surface, and suppose it to move always in the direction in which it is urged by the force acting on it, it will, of course, be repelled by the surface, and will move away along some path straight or curved, and will continue to move indefinitely, the force diminishing as it proceeds, unless it meet with a negatively electrified surface, which will attract it, and coming into contact with this surface its career will terminate. The path traced out by such a small electrified body constitutes Faraday's line of force, which is therefore a line whose direction at any point is that of the resultant force at that point. Such lines of force always proceed from positively electrified surfaces, and terminate upon negatively electrified surfaces; or, failing this, they must proceed to infinity. Lines of force proceeding from a positively electrified body placed in a room, unless there be other negatively charged bodies in the neighbourhood, will in general terminate upon the walls, floor, and ceiling of the room, or upon objects in the room in electrical communication with these. Faraday thus conceived the whole of the space in which electrical force acts to be traversed by lines of force which indicate at every point the direction of the resultant force at that point. But Faraday went further than this: he conceived the notion of causing the lines of force to represent also the intensity of the force at every point, so that when the force is great the lines might be close together, and far apart when the force is small; and since the force in the neighbourhood of a small charged body is proportional to the charge, he endeavoured to accomplish this object by drawing from every positively electrified surface a number of lines of force proportional to its charge, and causing a similar number of lines of force to terminate in every negatively electrified surface.«

Maxwell je tudi nadgradil sam koncept silnic z vpeljavo dodatnega pojma »tubes of force«, ki ga mi imenujemo **gostotne cevke**. Gre za cevke, katerih steno oblikujejo silnice. Večja kot je gostota teh cevk na telo, večja sila deluje na tem delu telesa. Gostotne cevke obravnavamo v poglavju o Gaussovem zakonu, saj nas nadalje pripeljejo do pomembnega koncepta **pretoka polja** oz. **fluksa**, s katerim povežemo npr. električno polje in naboj na telesu ali pa magnetno polje in inducirano napetost.

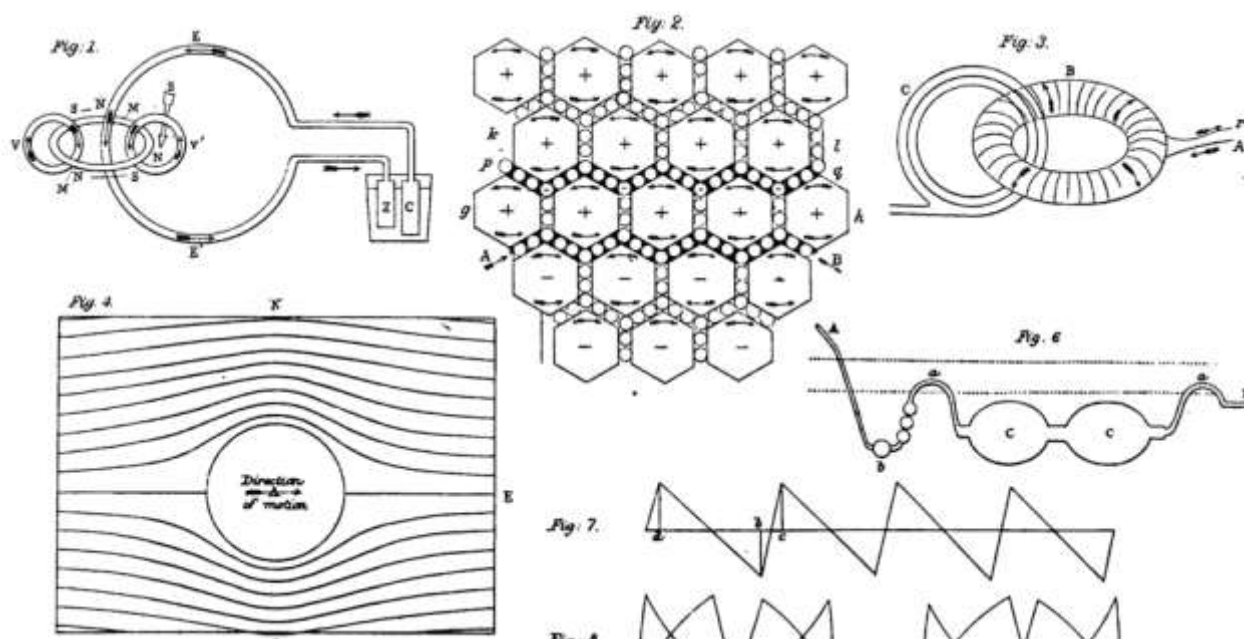
Faraday in Maxwell sta ključno prispevala k razumevanju električnih pojavov. Nancy Forbes in Basil Mahon v knjigi »[Faraday, Maxwell and the Electromagnetic Field](#)« s podnaslovom How two Men Revolutionized Physics pravita:

It is almost impossible to overstate the scale of Faraday and Maxwell's achievement in bringing the concept of the electromagnetic field into human thought. It united electricity, magnetism, and light into a single, compact theory; changed our way of life by bringing us radio, television, radar, satellite navigation, and mobile phones; inspired Einstein's special theory of relativity; and introduced the idea of field equations, which became the standard form used by today's physicists to model what goes on in the vastness of space and inside atoms.

Maxwell je razdelal Faradayeve razmišljanja in jih zapisal v znamenitem delu »[On Physical Lines of Force](#)« v matematični formulaciji, v 20-ih enačbah z 20-imi neznankami. Dandanes jih zapišemo v vektorski obliki z le štirimi enačbami (prvi je to naredil [Oliver Heaviside](#) leta 1884). Poleg tega je Maxwell nadgradil Faradayevo teorijo etra s konceptom polja (morja, ang. sea) molekularnih vrtincev (molecular vortices). Koncept molekularnih vrtincev je povezal s Faradayevim konceptom silnic, pa tudi s konceptom akcije na daljavo in ugotavljal, da sile, ki delujejo med magneti in vodniki s tokom povzročijo v okolici (mediju) določen pritisk, ki je drugačen v vsaki točki prostora in deluje v različnih smereh in da je smer najmanjšega pritiska ravno v smeri silnic. Koncept molekularnih vrtincev ni bil prav dobro sprejet v znanstveni sferi, saj je bil tudi mnogo bolj zapleten kot koncept učinka na razdaljo in tudi Faradayevega koncepta silnic. Poleg tega tudi njegovih 20 enačb ni bilo najbolj enostavno razumeti, zato njegova teorija elektromagnetnega polja ni bila hipoma sprejeta. Zapisana je bila v obliki parcialnih diferencialnih enačb, kar je seveda nekaj popolnoma drugega kot preprost Coulombov zakon. Veličino njegovega zapisa je pokazala šele naslednja generacija fizikov kot so Hertz, Lorentz in Einstein.



Dandanes tako električne pojave razdelamo na dveh »nivojih«. Na osnovnem nivoju imamo koncept (elektromagnetnega) polja, na drugem nivoju pa imamo fizične strukture, telesa, ki se jih lahko dotaknemo in merimo, na njih pa delujejo sile, mehanske napetosti, energije. Na primer, če želimo izračunati silo na določeno naelektreno telo, naprej izračunamo električno polje v prostoru, potem pa s pomočjo določene matematične operacije določimo še silo na to telo. Na podoben način, če želimo izračunati energijo v prostoru električnih nabojev, naprej izračunamo električno polje v prostoru, nato pa integriramo kvadrat električne poljske jakosti po prostoru. Koncept električnega in magnetnega polja je tako ključen za razumevanje električnih pojavov in tudi izračunavanje njihovega učinkovanja. Koncept etra pa je še vedno stvar znanstvenih (filozofskih) razmišljanj in presega ta zapis. Več o tem ponuja npr. Wikipedia v https://en.wikipedia.org/wiki/Aether_theories.



Slike iz Maxwellovega dela »[On Physical lines of Force](#)«, 1861 (Philosophical Magazine, Volume 21 & 23 Series 4, Part I & II; Part III & IV). Fig. 2 prikazuje Maxwellov skico miselnega konstrukta molekularnih vrtincev, ki prenašajo mehansko silo v prostoru.

4. Porazdelitve nabojev

Vsebina poglavja: volumnska, površinska in linijska porazdelitev naboja in zapis z ustrežno gostoto naboja.

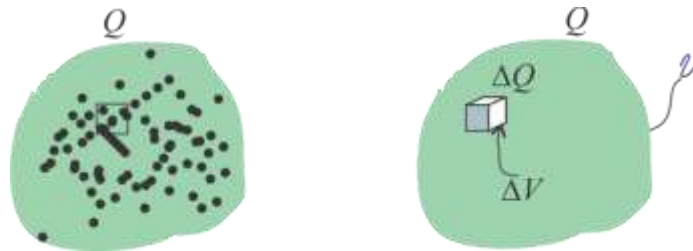
Spoznali smo že koncept točkastega naboja, za katerega pa smo že rekli, da ga v naravi ni. Najmanjši naboj je naboj elektrona, s svojo maso, volumnom in kvantizirano množino naboja. Nadaljnji problem je, da je množine osnovnih enot naboja, ki jih moramo vzeti v poštev običajno zelo veliko. Če samo malo podrgnemo, se med telesi prenesejo milijoni elektronov. Mi pa smo sposobni »na papirju« izračunati silo na nekaj točkastih nabojev. No, v principu bi lahko s superpozicijo izračunali tudi silo med nekaj milijoni nabojev. Kar pa ni običajno. Potrebno je najti nek drug način obravnave naelektrenih teles. Našli ga bomo v konceptu določitve različnih tipov porazdelitve naboja v prostoru. Predpostavili bomo, da je naboj zaradi velike količine delcev porazdeljen zvezno. V tem smislu bomo definirali tri načine porazdelitve nabojev: volumnsko, površinsko in linijsko porazdelitev naboja.

VOLUMSKA GOSTOTA NABOJA

Volumnsko gostoto naboja uporabljamo za opis nabojev, ki so, kot ime samo pove, porazdeljeni po volumnu. Opišemo ga z **gostoto volumnske porazdelitve naboja** ρ . Enota je C/m³. Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po volumnu, lahko gostoto volumnskega naboja določimo kot $\rho = \frac{Q}{V}$, oziroma celotni naboj kot $Q = \rho V$.

Če naboj ni po celotnem volumnu porazdeljen enakomerno, lahko enakomerno porazdelitev smatramo le v nekem zelo omejenem majem delu celotnega volumna ΔV . Del celotnega naboja je torej $\Delta Q = \rho \Delta V$ in če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno majhen), dobimo $dQ = \rho \cdot dV$. Celoten naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po volumnu:

$$Q = \int_V \rho dV. \quad (4.1)$$



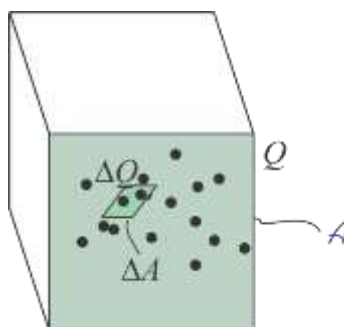
Slika 4-1: Volumnska gostota naboja. Levo prikaz neenakomerne porazdelitve nabojev, desno določitev volumnske gostote naboja.

* Tu se prvič srečamo z integracijo, ki jo je potrebno izvesti po volumnu. Zapis diferenciala volumna dV je odvisen od izbire koordinatnega sistema, v kartezičnem je preprosto zmnožek diferencialov razdalje v smeri osi X (dx), smeri osi Y (dy) in smeri osi Z (dz): $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. To pomeni, da bo pri izračunu potrebno integrirati 3x oziroma uporabiti trojni integral. Ekvivalentno bi torej enačbo (4.1) zapisali v obliki $Q = \iiint \rho dx \cdot dy \cdot dz$, v določenih knjigah pa najdemo tudi zapise v obliki $Q = \int \rho d^3r$ in podobno.

POVRŠINSKA GOSTOTA NABOJA

Površinsko gostoto naboja uporabljamo za opis naboja, ki je porazdeljen po površini. Opišemo ga z **gostoto površinske porazdelitve naboja** σ . Enota je C/m^2 . Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po površini, lahko površinsko gostoto naboja določimo kot $\sigma = \frac{Q}{A}$, oziroma celotni naboj kot $Q = \sigma A$. Bolj pogosto je, da ta naboj ni porazdeljen enakomerno. Tedaj velja zveza $Q = \sigma A$ le za en majhen del celotnega naboja na neki majhni površini, torej $\Delta Q = \sigma \cdot \Delta A$. Če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno majhen), dobimo $dQ = \sigma \cdot dA$. Celotni naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po površini:

$$Q = \int_A \sigma \cdot dA. \quad (4.2)$$



Slika 4-2: Površinska gostota naboja.

LINIJSKA GOSTOTA NABOJA

Linijsko gostoto naboja uporabljamo za opis naboja, porazdeljenega po liniji (npr. žici). Opišemo ga z **gostoto linijske porazdelitve naboja** q . Enota je C/m . Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po liniji dolžine l , lahko linijsko gostoto naboja določimo kot $q = \frac{Q}{l}$, oziroma celotni naboj kot $Q = ql$. Če ta naboj ni porazdeljen enakomerno, velja zveza $Q = ql$ le za en majhen del celotnega naboja na neki majhni razdalji, torej $\Delta Q = q \cdot \Delta l$. Če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno majhen), dobimo $dQ = q \cdot dl$. Celotni naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po liniji:

$$Q = \int_L q \cdot dl. \quad (4.3)$$



Slika 4-3: Linijska gostota naboja.

(Kmalu pa se bomo soočili še z enim problemom. Če bi poznali porazdelitev naboja, bi še nekako izračunali posledice, torej električno poljsko jakost in sile med naboji, telesi. Običajno pa te porazdelitve niti ne poznamo, poznamo pa recimo napetosti med telesi. Potrebno bo torej poiskati še zvezo med napetostjo in porazdelitvijo naboja. A o tem kasneje.)

* GEKON UPORABLJA ELEKTROSTATIKO ZA PLEZANJE

Gekon je vrsta plazilcev, podoben našemu kuščarju. Posebni so po tem, da imajo specifičen način oglašanja, od koder izhaja tudi njihovo ime (po Indonezijsko). Tako pravi [wikipedija](#).... Zanimivi pa so tudi zato, ker imajo izjemno sposobnost hoje po zelo strmih terenu. To njihovo posebnost je menda ugotavljal in opisal tudi sam Aristotel. Še posebno nenavadno pa je, da so nedavno znanstveniki ugotovili, da jim to omogoča uporaba elektrostatičnih sil (Izadi et al, 2014). Pred tem so predvsem smatrali, da to Gekonom omogočajo adhezijske sile (Autumn, 2006; Gravish et al, 2010).

O tem odkritju so poročali vsi pomembnejši mediji, ki pokrivajo novice iz znanosti in tehnike ([sciencenews.org](#), [newscientist.com](#), [physicsworld.com](#), [nbcnews.com](#) in drugi). V raziskavi so postavili gekona na bakreno površino prevlečeno s plastjo teflona in PDMS materiala (guma, ki se jo pogosto uporablja v mikromehanskih elementih). Ob stiku gekona s površino so zaznali (izmerili) precejšen tok, s pomočjo katerega so ugotavljali naelektrjenost gekonovih nog. Struktura gekonovih nog je zelo zanimiva (glej sliko), saj je sestavljena iz velikega števila zelo tankih (nanometrskih) dlačic, ki naj bi omogočale zelo dober oprijem s tlemi. Izadi s sodelavci pravi, da jim te dlačice ob stiku s podlago omogočajo precejšnjo izmenjavo električnega naboja, ki je posledica naelektritve ob kontaktu. Pri tem se gekonove dlačice naelektrijo močno pozitivno, plast teflona pa negativno. V prevodni plasti pod teflonom ob tem pride do elektrostatične indukcije; naboj se prerazporedi tako, da je zgornja prevodna plast pozitivno naelektrjena, spodnja pa negativno. Če prevodno plast priključimo na merilnik toka (drugi kontakt ozemljimo), steče skozi ampermeter negativen naboj (elektroni), kar zaznamo kot tok. Izmerjena gostota naboja je bila $1,6 \text{ mC/m}^2$ na teflonski podlagi in $1,3 \text{ mC/m}^2$ na PDMS podlagi (glej sliko).

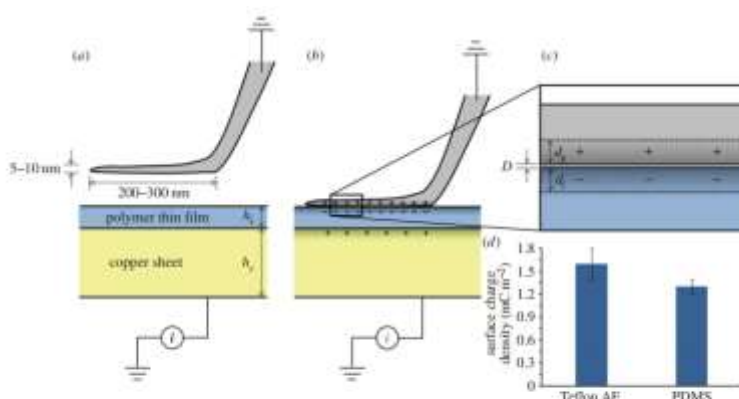
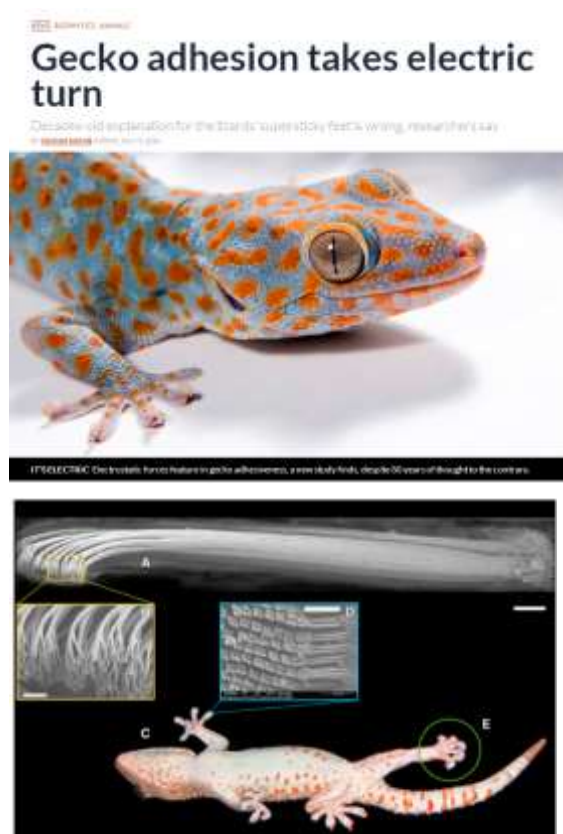


Figure 2. (a) Before contact of a nano-spoutula—at the tip of a seta of a gecko toe pad—with the polymer thin film, both the spoutula and the thin film were electrically neutral. (b) As the toe pad came into contact with the polymer thin film, electric charges separated between the nano-spoutula and the thin film. The EDL, which was formed at the contact interface, induced certain electric charges in the backing copper sheet, which was grounded through an electrometer. (c) Electric charges that separated upon contact penetrated up to a depth of d_s and d_f into the polymer thin film and the contacted nano-spoutula, respectively. D is the actual separation distance (approx. 0.3 nm) [7,21] between the nano-spoutula and the thin film. (d) Surface charge densities measured right after contact of gecko toe pads with teflon AF and PDMS. [Online version in colour.]

S tem zagotovo raziskav plezalnih sposobnosti gekona še ni konec. Tudi avtorji sami ugotavljajo, da zagotovo na plezalne sposobnosti vplivajo tudi druge sile, predvsem van der Waalove in kapilarne sile, kot so tudi domnevali že drugi raziskovalci.

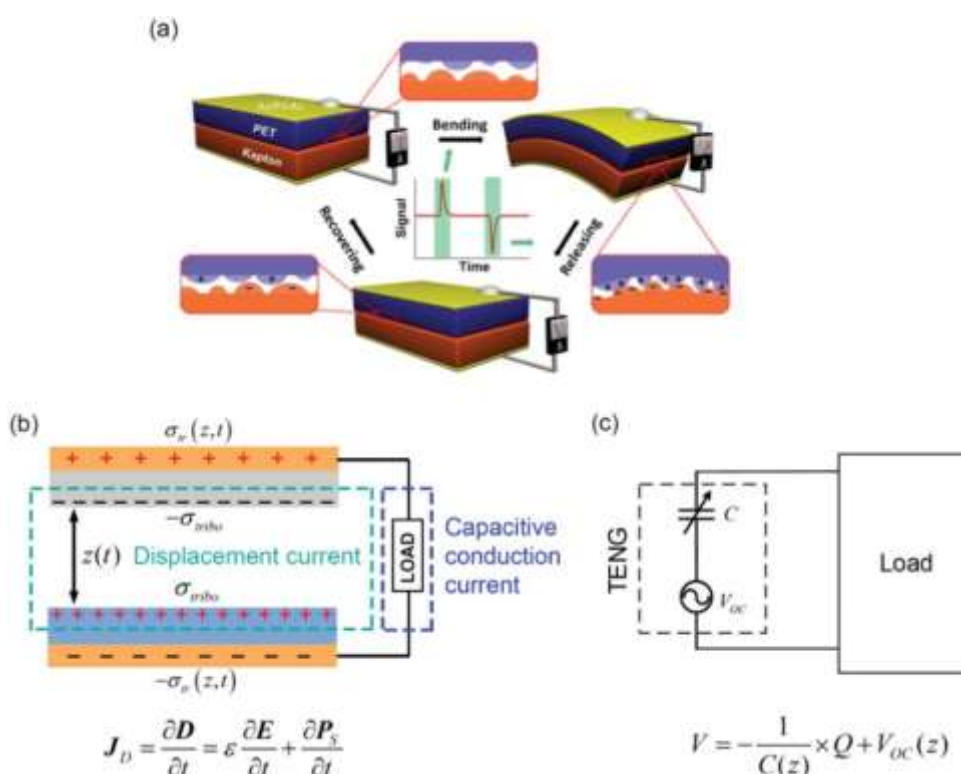
Dodatno:

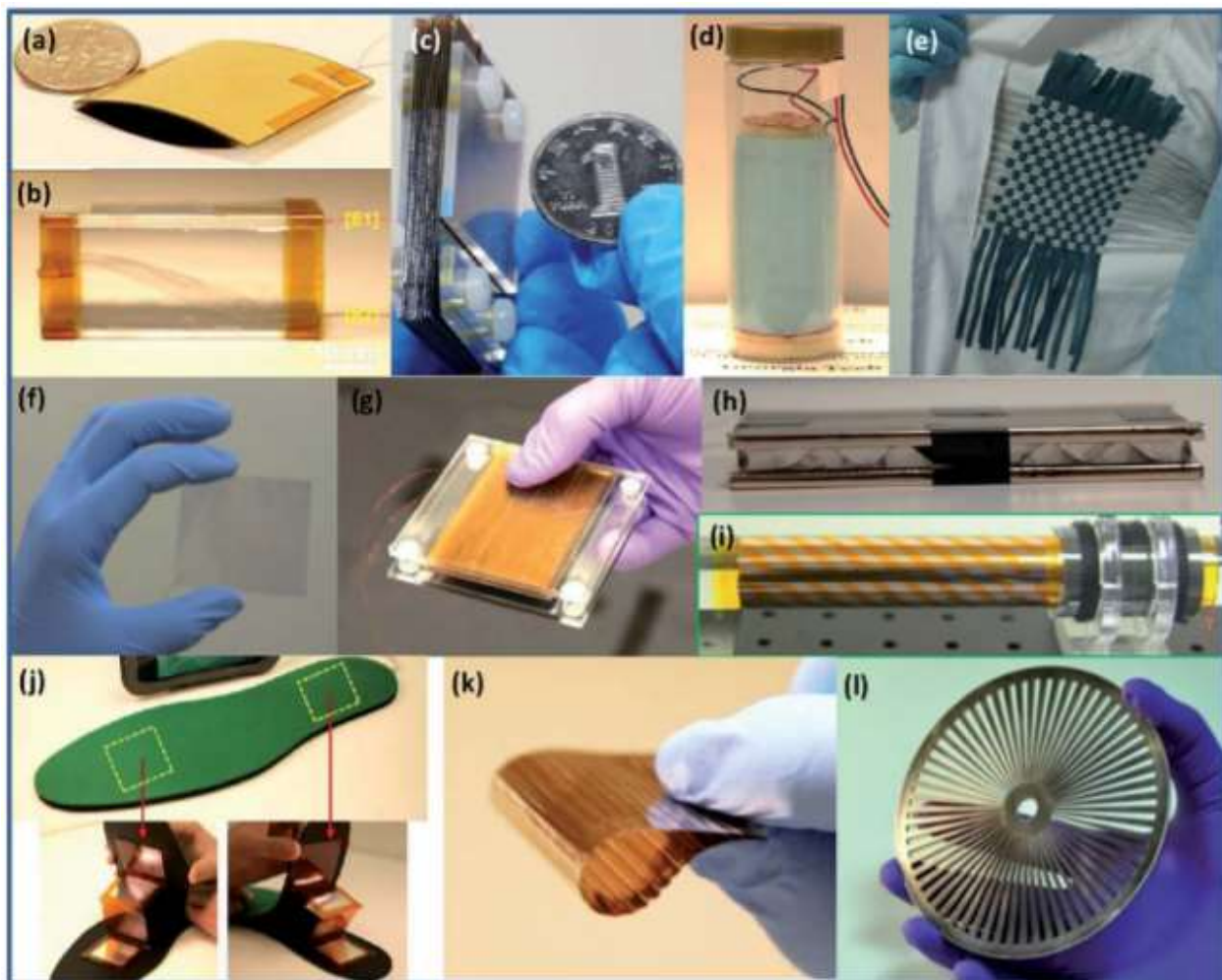
- Zanimivo je, da so raziskovalci na osnovi opravljenih raziskav uspešno izdelali in preiskusili že kar nekaj materialov, ki naj bi posnemali mehanizme, ki jih uporablja pri plezanju gekon (Menon et al., 2004). Podobne raziskave izvaja tudi ameriška vojaška raziskovalna agencija DARPA (<http://www.darpa.mil/program/z-man>).



Izadi H, Stewart K M E and Penlidis A 2014 [Role of contact electrification](#) and electrostatic interactions in gecko adhesion Role of contact electrification and electrostatic interactions in gecko adhesion *J. R. Soc. Interface* **11** 2014.

- Zelo moderne so raziskave na področju »žetja energije« (ang. energy harvesting) s pomočjo triboelektričnega pojava. Potrebno je poiskati dva materiala, ki se zelo različno elektrita; enega, ki rad sprejema elektrone in se posledično naelektri negativno in enega, ki rad oddaja elektrone in se torej naelektri pozitivno. Ta dva materiala prevlečemo s prevodnikom in pritismo skupaj. Ob trenju se bolj ali manj elektrita, kar pa se odraža tudi v prevleki iz prevodnega materiala, v kateri se inducira naboj nasprotnega predznaka. Pojav elektrostaticne indukcije sicer obravnavamo v poglavju 10 – Prevodnik v polju. Gre pa za to, da se v prevodniku inducira naboj nasprotnega predznaka kot je v triboelektričnem materialu. Več kot je naboja v triboelektričnem materialu, več se ga tudi inducira v prevodniku. Od kod pride ta naboj? Izmenjuje se preko bremena, priključenega med dvema prevodnima kontaktoma. Če triboelektrična materiala stiskamo oz. upogibamo, se bolj ali manj elektrita, posledično se več ali manj inducira naboja na prevodnih elektrodah in s tem teče več ali manj toka skozi breme. Ena od možnih materialov sta poliester PET in kapton. Več v članku »Triboelectric Nanogenerator: A Foundation of the Energy for the New Era« objavljenem v *Advanced Energy materials* leta 2018: <https://www.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/aenm.201802906>.





Slika: Nekaj primerov eksperimentalnih triboelektričnih nanogeneratorskih naprav: a) zajemanje energije s pritiskanjem, b) izkoriščanje vetra za triboelektrjenje, c) triboelektrika z drsenjem, d) uporaba oscilacije vode, e) tkanina za triboelektriko, f) transparenten tribogenerator za sledilno ploščico (touchpad), h) vodni tribogenerator, i) izkoriščanje tribogeneracije ob rotaciji, j) tribo-vložek za v čevlje, k) izkoriščanje tribogeneracije z drsenjem, l) izkoriščanje rotacijske energije. Vir: Z. L. Wang, »Triboelectric nanogenerators as new energy technology and self-powered sensors – Principles, problems and perspectives«, Faraday Discussions, 2014.

5. Koordinatni sistemi

Vsebina: kartezični, valjni (cilindrični) in krogelni (sferični) koordinatni sistem. Točka v koordinatnem sistemu. Diferencialni elementi v koordinatnih sistemih.

Zakaj uporabljati več koordinatnih sistemov (KS), če nam je kartezični koordinatni sistem (KKS) najbolj poznan in najbolj razumljiv? Odgovor je preprost: zato, ker je v določenih primerih izračun mnogo bolj preprost z izbiro drugega koordinatnega sistema. Če je naboj na primer porazdeljen po površini valja, se sama po sebi ponuja kot najbolj primerna izbira za matematični opis porazdelitve naboja uporaba valjnega koordinatnega sistema. Če se naboj nahaja na površini krogle, uporabimo krogelni koordinatni sistem. Itd.

Za koordinatne sisteme, ki jih obravnavamo mi, je značilno to, da so vse ravnine, ki ga oblikujejo, med sabo pravokotne. Takim koordinatnim sistemom rečemo ortogonalni.

KARTEZIČNI KOORDINATNI SISTEM

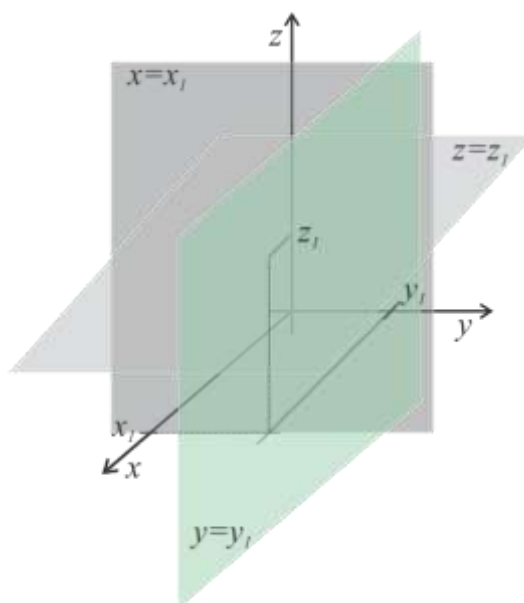
Točko v kartezičnem koordinatnem sistemu (KKS) določimo s presekom treh ravnin. V KKS so to tri ravnine:

$$x = x_1$$

$$y = y_1$$

$$z = z_1$$

Koordinate v KKS določa trojček (x, y, z) .



Slika 5-1: Kartezični koordinatni sistem.

Vzdolž vsake osi lahko določimo diferencial dolžine. Dobimo ga z limitiranjem (zmanjševanjem proti nič) majhnega dela dolžine: $dl = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \Delta L$. V smeri osi X je to dx , v smeri osi Y je dy in v smeri Z je dz . V splošnem lahko **diferencial poti** v KKS zapišemo kot vektor:

$$d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz \quad \text{ali krajše}$$

$$d\vec{l} = (dx, dy, dz)$$

Če pomnožimo vse tri diferencialne dolžine dobimo majhen – **diferencialen volumen** zapisan v obliki

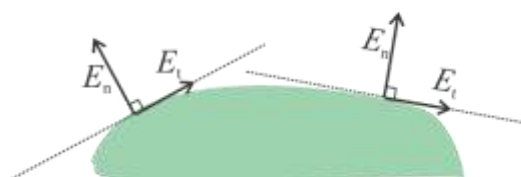
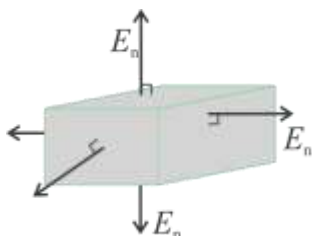
$$dV = dx \cdot dy \cdot dz.$$

Ploskvice tega diferencialnega volumna imenujemo **diferenciali ploskev** in so $dx \cdot dy$, $dx \cdot dz$ in $dy \cdot dz$. Pogosto jim bomo dodali še smer, ki bo pravokotna na površino. To imenujemo **smer normale** na površino. Kvadratku površine $dx \cdot dy$ bi torej pripisali smer osi Z. Velja torej:

$$d\vec{A}_x = \vec{e}_x dy \cdot dz$$

$$d\vec{A}_y = \vec{e}_y dx \cdot dz$$

$$d\vec{A}_z = \vec{e}_z dx \cdot dy$$



Slika 5-2: Smer normale je pravokotna na površino telesa.

VALJNI (CILINDRIČNI) KOORDINATNI SISTEM

Točka je v valjnem koordinatnem sistemu (CKS) določena s presekom treh ravnin:

$$r = r_1$$

$$\varphi = \varphi_1$$

$$z = z_1$$

Prva ravnina je plašč valja, druga je polravnina okoli Z osi, ki jo določa kot φ , tretja pa ravnina z eno vrednostjo koordinate Z. Koordinate v CKS sestavlja torej trojček (r, φ, z) .

Diferencial poti je

$$d\vec{l} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\varphi r d\varphi + \vec{e}_z dz.$$

Diferenciali površine so

$$d\vec{A}_r = \vec{e}_r r d\varphi \cdot dz,$$

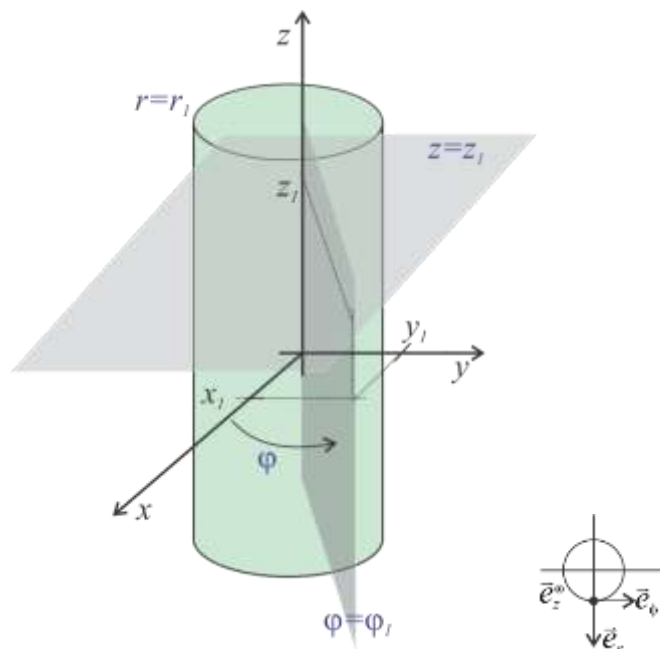
$$d\vec{A}_\varphi = \vec{e}_\varphi dr \cdot dz,$$

$$d\vec{A}_z = \vec{e}_z r d\varphi \cdot dr.$$

Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri osi R (rotacijska simetrija), V tem primeru je diferencial v smeri osi Z določen z $dA_z = 2\pi r dr$

Diferencial volumna je

$$dV = dr r d\varphi dz.$$



Slika 5-3: Valjni koordinatni sistem. Desno smeri enotskih vektorjev.

Primer določitve ploščine diska:

Določimo ploščino diska z notranjim polmerom 1 cm in zunanjam polmerom 6 cm.

Izračun: Vzamemo diferencial površine, ki kaže v smeri osi Z in zapišemo dvojni integral

$$A = \int dA_z = \int_0^{2\pi} \int_{1 \text{ cm}}^{6 \text{ cm}} r dr d\varphi = 2\pi \int_{1 \text{ cm}}^{6 \text{ cm}} r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_{1 \text{ cm}}^{6 \text{ cm}} = \pi [(6 \text{ cm})^2 - (1 \text{ cm})^2] = \underline{\underline{35\pi \text{ cm}^2}}$$

Primer določitve naboja na površini plašča valja:

Po površini plašča valja višine 2 m in polmera 5 cm se spreminja površinska gostota naboja z izrazom

$$\sigma = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mu\text{C}/\text{m}^2. \text{ Določimo naboj na plašču valja.}$$

Izračun: Uporabimo zvezo $Q = \int_A \sigma dA$, kar v našem primeru pomeni

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{2 \text{ m}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mu\text{C}/\text{m}^2 \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz = 5 \text{ cm} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot 2\right)_0^{2\pi} \mu\text{C}/\text{m} \cdot 2 \text{ m} =$$

$$0,1 \cdot 4 \mu\text{C} = \underline{\underline{0,4 \mu\text{C}}}$$

KROGELNI (SFERIČNI) KOORDINATNI SISTEM

Točka je v krogelnem koordinatnem sistemu (SKS) določena s presekom treh ravnin

$$r = r_1$$

$$\vartheta = \vartheta_1$$

$$\varphi = \varphi_1$$

Prva ravnina je plašč krogle, druga je površina stožca (kjer je ϑ (theta) kôt od osi Z navzdol), tretja pa polravnina znana iz CKS. Koordinate v SKS sestavlja torej trojček (r, ϑ, φ) .

Diferencial poti je

$$d\vec{l} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\vartheta r d\vartheta + \vec{e}_\varphi r \sin(\vartheta) d\varphi.$$

Diferenciali površin so

$$d\vec{A}_r = \vec{e}_r r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi,$$

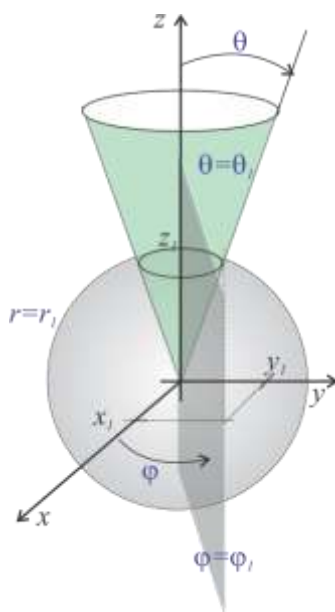
$$d\vec{A}_\vartheta = \vec{e}_\vartheta r \sin(\vartheta) d\varphi dr,$$

$$d\vec{A}_\varphi = \vec{e}_\varphi r dr d\vartheta.$$

Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri radija (rotacijska simetrija). V tem primeru je diferencial v smeri radija določen z $dA_\vartheta = 4\pi r dr$

Diferencial volumna je

$$dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi.$$



Slika 5-4: Krogelni koordinatni sistem.

Primer določitve volumna krogle:

Določimo volumen krogle polmera R .

Izračun: Vzamemo diferencial volumna krogle $dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi$ in ga integriramo

$$V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_0^\pi \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\frac{4\pi R^3}{3}}}.$$

Povzetek diferencialov poti, površine in volumnov za kartezični, valjni in krogelni koordinatni sistem:

	Kartezični k.s.	Cilindrični k.s.	Sferični k.s.
dl	dx, dy, dz	$dr, rd\varphi, dz$	$dr, rd\vartheta, r \sin \vartheta d\varphi$
dA	$dx.dy, dx.dz, dy.dz$	$rd\varphi dz, drdz, rd\varphi dz$	$rd\vartheta dr, r \sin \vartheta dr d\varphi, r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$
dV	$dx.dy.dz$	$rdrd\varphi dz$	$r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$



Tudi pri GPS signalih se uporabljajo ustrezni koordinatni sistemi. Več:

http://www.navigators.si/povezave/koordinatni_sistemi.htm

Kartezični koordinatni sistem: http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

Polarni koordinatni sistem: http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system

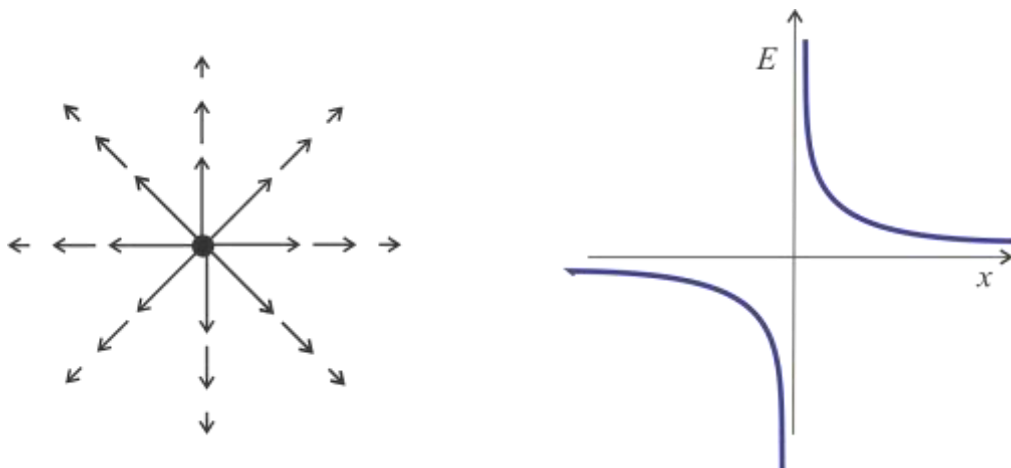
6. Električna poljska jakost porazdeljenih nabojev

Vsebina: polje točkastega naboja, dela celotnega naboja in polje porazdeljenih nabojev. Izrazi za izračun polja v okolici premega naboja, naelektrene daljice, enakomerno naelektrenega obroča, diska in ravnine.

POLJE TOČKASTEGA NABOJA

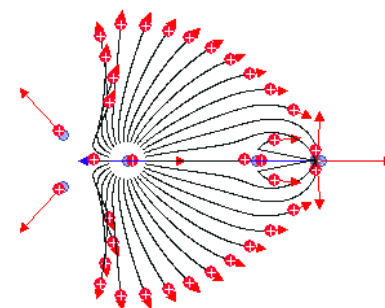
Spoznali smo že definicijo električne poljske jakosti (str. 33) ter enačbo za izračun polja v okolici osamljenega točkastega naboja (\vec{r} je vektor od točke, kjer se nahaja naboj Q , do točke, kjer določamo polje):

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{Polje točkastega naboja} \quad (6.1)$$



SLIKA 6-1: Polje točkastega naboja: levo prikaz polja v prostoru z vektorji, desno: porazdelitev polja vzdolž osi

Nadalje smo ugotovili, da je število presežkov ali primanjkljajev osnovnih nabojev (elektronov) na telesih pogosto zelo veliko, kar pomeni, da se že ob manjšem drgnjenju dveh teles prenese med telesi milijone in milijone elektronov. Da bi izračunali električno poljsko jakost, ki jo povzročajo ti naboji, bi potrebovali mnogo računanja, da bi z upoštevanjem superpozicije lahko izračunali prispevek polja vsakega naboja posebej in vplive sešteli. Tak način računanja bi bil zelo zamuden in nepraktičen, čeprav v pedagoške namene lahko uporabljamo tudi tak postopek. Tak način izračunavanja se pogosto uporablja tudi v raziskavah osnovnih delcev, kjer pa se upošteva tudi lastnosti trkanja delcev.



Primer izračuna in prikazovanja sil med naboji s programom JaCoB.

Zato potrebujemo način za izračun polja velike množine nabojev, ki jih predstavimo z gostoto njihove porazdelitve: ta je lahko volumska, površinska ali linijska.

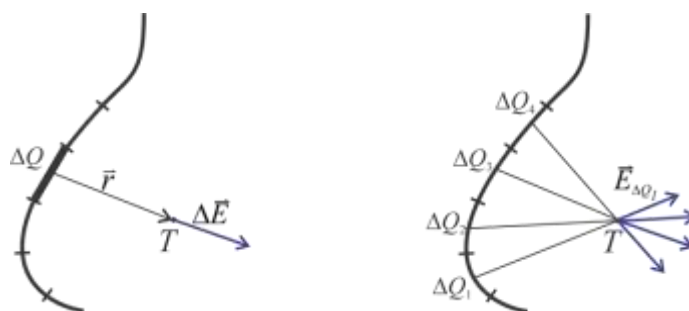
POLJE PORAZDELJENIH NABOJEV

Ustrezen izraz za izračun električne poljske jakosti porazdeljenih nabojev dobimo tako, da izhajamo iz polja točkastega naboja $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ in trdimo, da bo enačba ustrezna tudi za izračun polja, ki ga povzroča neka mala množina naboja ΔQ , ki se nahaja na majhnem prostoru (majhnem v primerjavi z razdaljo r): $\Delta\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

Teoretično lahko s seštevanjem prispevkov posameznih delov celotnega naboja (superpozicijo) izračunamo električno poljsko jakost za poljubno porazdelitev naboja (Slika 6-2):

$$\vec{E} = \sum \Delta\vec{E}_i = \sum_i \vec{e}_{r_i} \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \quad (6.2)$$

Ta način je primeren za numerično integracijo, ki se je poslužimo v primerih, ko problem ni analitično rešljiv*.



Slika 6-2: Izračun polja v točki T. Levo: ΔQ povzroča v točki T polje ΔE . Desno: seštevanje posameznih prispevkov naboja.

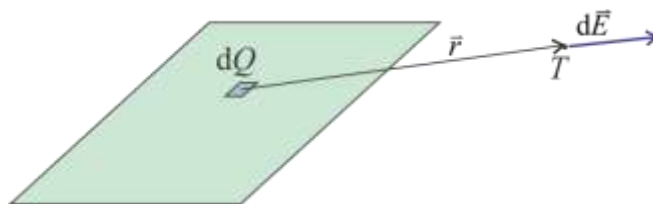
Analitično rešitev dobimo tako, da s procesom limitiranja diferencialnih vrednosti dobimo izraz za diferencial polja, ki ga povzroča diferencial naboja (Slika 6-3):

$$\boxed{d\vec{E} = \vec{e}_r \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \quad (6.3)$$

Vpliv vseh delnih vrednosti oz. diferencialov naboja seštejemo s superpozicijo, ki v zveznem prostoru predstavlja integracijo:

$$\boxed{\vec{E} = \int_{\text{po vseh Q-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r} \quad \text{Izraz za izračun polja porazdeljenih nabojev} \quad (6.4)$$

* V praksi imamo na razpolago še nekaj drugih možnih načinov reševanja, ki jih bomo omenili v nadaljevanju.



Slika 6-3: Diferencial naboja (dQ) v točki T povzroča diferencial polja dE . Za izračun električne poljske jakosti, ki jo povzroča celoten naboj, integriramo prispevke naboja po vsem prostoru. (r je razdalja od dQ -ja do točke v kateri računamo polje.)

POSTOPEK ZA DOLOČITEV POLJA PORAZDELJENIH NABOJEV

Zapišimo postopek, po katerem določimo električno poljsko jakost za porazdeljene naboje z uporabo

enačbe $\vec{E} = \int_{\text{po vseh } Q\text{-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, kjer je \vec{r} vektor od mesta diferenciala naboja dQ do mesta, kjer

računamo električno poljsko jakost; \vec{e}_r je enotski vektor vektorja \vec{r} (Slika 6-3).

- 1) Naelektreno strukturo umestimo v ustrezen koordinatni sistem. Če bo struktura, na kateri se nahaja naboj, v obliki žice, bo najbolj primerna uporaba cilindričnega koordinatnega sistema, če bo naboj v volumnu krogle, bo primeren sferični KS., itd. Naboji, ki povzročajo polje so porazdeljeni po volumnu, površini ali liniji. V tem smislu bo diferencial volumna/površine/linije na katerem se nahajajo naboji enak $dV/dA/dl$. Ustreznega določimo glede na izbran koordinatni sistem v skladu s sledečo tabelo:

	Kartezični k.s.	Cilindrični k.s.	Sferični k.s.
dl	dx, dy, dz	$dr, rd\varphi, dz$	$dr, rd\vartheta, r \sin \vartheta d\varphi$
dA	$dx.dy, dx.dz, dy.dz$	$rd\varphi dz, drdz, rd\varphi dz$	$rd\vartheta dr, r \sin \vartheta drd\varphi, r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$
dV	$dx.dy.dz$	$rdrd\varphi dz$	$r^2 \sin \vartheta drd\vartheta d\varphi$

- 2) Glede na izbran koordinatni sistem in porazdelitev naboja določimo ustrezen diferencial naboja. Če je naboj porazdeljen po volumnu uporabimo $dQ = \rho dV$, če je po površini $dQ = \sigma dA$ in če je po liniji $dQ = q dl$. Na primer, če se naboj nahaja vzdolž palice, postavljene na osi x , bo $dl = dx$ in $dQ = q dx$. Če se naboj nahaja na površini valja, bo potrebno uporabiti izraz $dQ = \sigma dA$, pri čemer bo pri izbiri valjnega koordinatnega sistema $dA = rd\varphi dz$, itd.
- 3) Na neko poljubno mesto na naelektrenem telesu postavimo diferencial naboja. Nato določimo vektor r od mesta diferenciala naboja dQ do točke v kateri želimo izračunati polje. (Pogosto je ta del še najbolj zahteven in terja nekaj geometrijskega znanja). Običajno ga določimo kot razliko vektorja, ki iz izhodišča določa točko T in vektorja, ki iz izhodišča kaže na mesto, kjer se nahaja diferencial naboja dQ .
- 4) Zapišemo diferencial polja $d\vec{E} = \vec{e}_r \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ in vstavimo predhodno določena dQ in r .
- 5) Diferencial polja integriramo, pri čemer moramo določiti še meje integracije. Meje integracije so določene s koordinatami, ki zajamejo celoten naboj.
- 6) Rešimo integral in v rešitev vstavimo vrednosti mej integracije.

V nadaljevanju bomo po zgornjem postopku določili polje v okolici naelektrene ravnine, premice, obroča, naelektrenega diska in ravnine.

Primer izračuna električne poljske jakosti v okolici tanke enakomerno naelektrene palice:

Določimo električno poljsko jakost $h = 5$ cm stran od sredine enakomerno naelektrene tanke palice dolžine $l = 10$ cm. Na palici je enakomerno porazdeljen naboj $Q = 2 \mu\text{C}$.

Izračun: Postopamo po postopku opisanem na strani 52:

1. Palico postavimo v koordinatni sistem. Primeren je valjni koordinatni sistem. Naj bo sredina palice v središču k.s. in Z os usmerjena vzdolž palice. Točka T, v kateri želimo izračunati polje, je od središča k.s. oddaljena za razdaljo r . Glede na izbran koordinatni sistem je $dl = dz$.
2. Določimo dQ , ki je v našem primeru, ker gre za linijsko porazdelitev naboja, enak $dQ = q \cdot dl = q \cdot dz$.
3. Postavimo dQ na neko poljubno mesto na palici, oddaljeno od izhodišča za z . Od dQ do točke, kjer iščemo vrednost polja, narišemo vektor \vec{R} in ga izrazimo s koordinatami: $R = \sqrt{z^2 + r^2}$. (Pozor: glede na opis postopka na strani 52 smo spremenljivko r spremenili v veliki R , saj smo z malim r označili razdaljo od sredine k.s. do točke T.)
4. Sedaj diferencial polja v točki zapišemo v obliki

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q \cdot dz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)}. \quad dE \text{ moramo v principu}$$

zapisati v obliki vektorja, saj se vektor (tako velikost kot smer) električne poljske jakosti spreminja za različne lege dQ -ja, kar pomeni, da jih moramo seštevati vektorsko. Da bi se temu izognili, lahko upoštevamo, da dQ na zrcalni strani Z osi povzroča polje, ki je v iskani točki usmerjeno tako, da vsota kaže v smeri radija (glej skico desno)). To pomeni, da se komponente v smeri osi z izničijo in zadostuje seštevati le komponente polja, ki so usmerjene v smer radija:

$$dE_r = dE \cdot \cos(\alpha) = dE \cdot \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}}. \quad (6.5)$$

5. Seštevek prispevkov naredimo z integracijo (po z -ju!): $E_r = \int dE_r = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{q \cdot dz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)} \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}}$

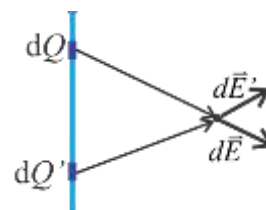
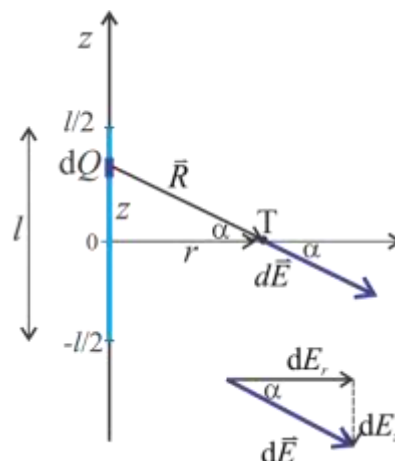
$$E_r = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (6.6)$$

Rešitev integrala (glej naslednjo stran) in vstavitve zgornje in spodnje meje da končni rezultat:

$$E_r = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z}{r^2 (z^2 + r^2)^{1/2}} \right)_{-l/2}^{l/2} = \frac{q2l/2}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{(l/2)^2 + r^2}} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{(l/2)^2 + r^2}} \quad (6.7)$$

Na koncu le še v enačbo (6.7) vstavimo vhodne podatke, pri čemer $q = Q/l = 20 \mu\text{C/m}$. Dobimo

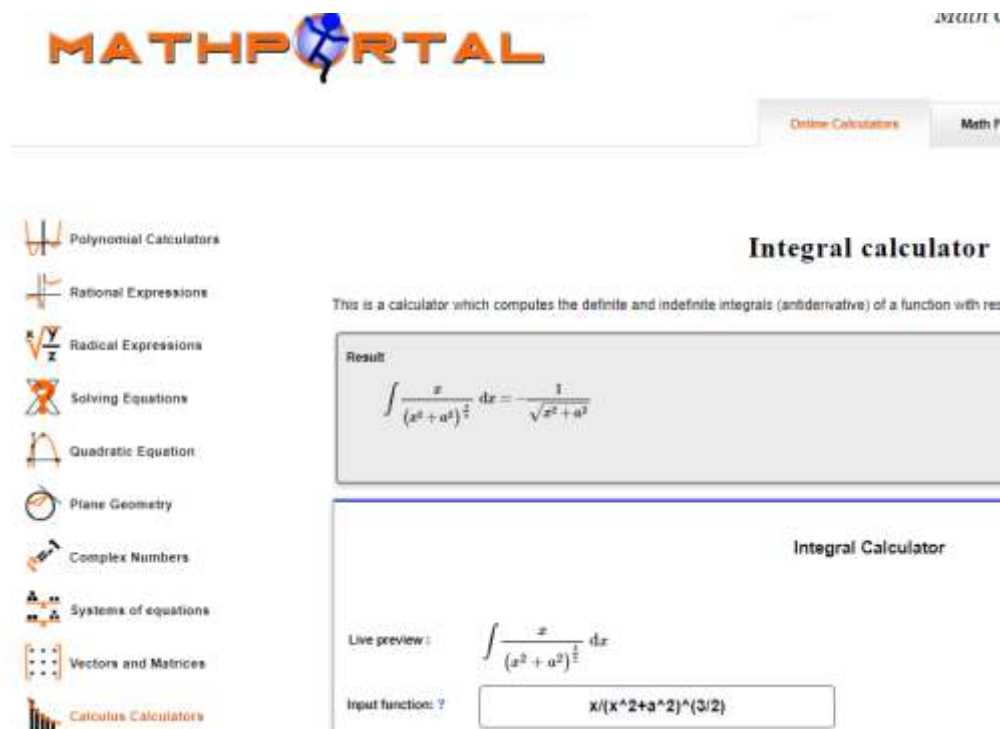
$$E_r \cong \underline{\underline{2,54 \cdot 10^5 \text{ V/m}}}.$$



* MATEMATIČNI PRIROČNIK

Pri računanju integralov naletimo na take, ki jih ne znamo rešiti na pamet. V teh primerih, in tudi v pomoč pri drugih matematičnih problemih, se poslužimo matematičnih priročnikov. Pri nas je še najbolj v veljavi uporaba [matematičnega priročnika Bronštejn](#) (Tehniška založba Slovenije), ki je doživel že vrsto ponatisov. Če na primer iščemo rešitev integrala $\int \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr$, moramo iskati integrale z osnovo $X = x^2 + a^2$. Iskanju ustreza oblika integrala $\int \frac{x}{\sqrt{x^3}}$, ki ima rešitev $-\frac{1}{\sqrt{x}}$, torej v našem konkretnem primeru $\int \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr = -\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}}$.

Vedno bolj pa se za izračunavanje integralov in odvodov uporabljajo tudi programska orodja kot npr. Wolfram Mathematica. Licenco za uporabo tega programa lahko pridobijo tudi študenti FE (https://www.fe.uni-lj.si/studenti/programska_oprema/). Obstajajo pa tudi že »on-line« spletna orodja, ki omogočajo tovrstne izračune, npr. www.mathportal.org (ki verjetno v »ozadju« poganjajo program Mathematica).



MATHPORTAL

Online Calculators Math P

Polynomial Calculators
Rational Expressions
Radical Expressions
Solving Equations
Quadratic Equation
Plane Geometry
Complex Numbers
Systems of equations
Vectors and Matrices
Calculus Calculators

Integral calculator

This is a calculator which computes the definite and indefinite integrals (antiderivative) of a function with respect to x

Result

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Integral Calculator

Live preview : $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx$

Input function :

ELEKTRIČNA POLJSKA JAKOST ENAKOMERNO NAELEKTRENE TANKE PALICE – PREMI NABOJ

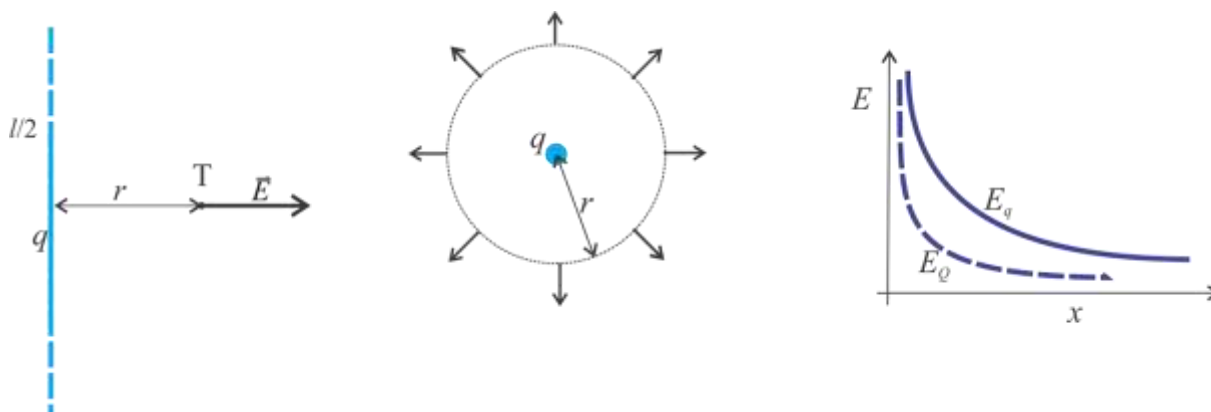
Zanimivo je pogledati, kolikšno polje dobimo, če je naelektrena palica neskončno dolga. V tem primeru moramo meje integracije iz prejšnjega izračuna (en. (6.6)) postaviti v + in – neskončnost oz. limitirati razdaljo l v enačbi (6.7) proti neskončnosti. Dobimo

$$E_r = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{r^2(z^2 + r^2)^{3/2}} \right)_{-\infty}^{\infty} = \frac{q2l/2}{4\pi\epsilon_0 r(l/2)} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (6.8)$$

Dobimo izredno pomemben rezultat, to je, da polje z razdaljo od tanke, neskončne, naelektrene palice upada s $1/r$. (Vemo že, da polje v okolici točkaste elektrine upada s kvadratom razdalje.)

Neskončno dolgo in tanko naelektreno palico lahko smatramo kot naelektreno premico, zato taki strukturi tudi rečemo **premi naboj (prema elektrina)**. Zapišimo polje premega naboja še enkrat, tokrat v vektorski obliki:

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{POLJE V OKOLICI PREMEGA NABOJA} \quad (6.9)$$



Slika 6-4: Trije različni načini prikaza polja v okolici premega naboja. Desno primerjava med spremembo velikosti polja z oddaljenostjo od premega naboja (E_q) in točkastega naboja (E_Q).

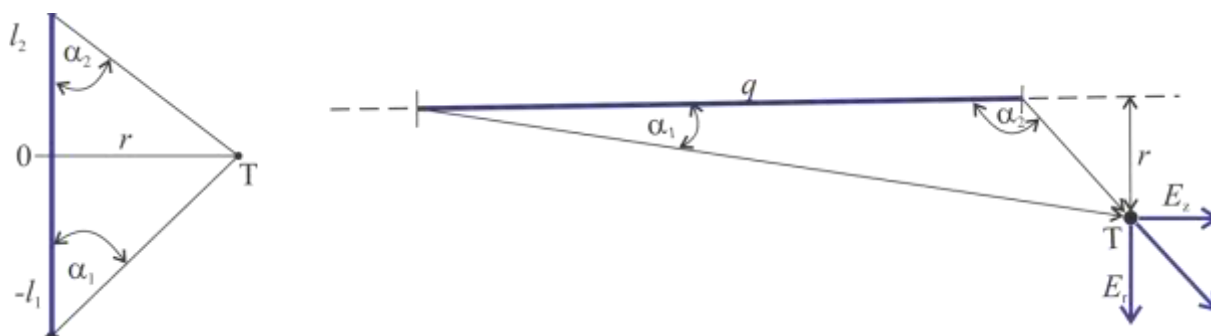
Določitev smeri električne poljske jakosti naelektrene premice je odvisna od izbire in postavitve premice v koordinatni sistem. Primer prikazuje spodnja slika (Slika 6-5).



Slika 6-5: Primer določitve smeri polja naelektrene premice glede na umestitev v koordinatni sistem.

POLJE ENAKOMERNO NAELEKTRENE DALJICE

Izhajamo lahko iz rešitve za polje v okolici premega naboja (enačba (6.6)) in namesto sredinske umestitve določimo razdalji od koordinatnega izhodišča do levega roba z_{l_1} in do desnega roba z_{l_2} .



Slika 6-6: Polje v okolici enakomerno naelektrene daljice.

Radialno komponento polja dobimo z rešitvijo integrala

$$E_r = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}, \text{ ki je} \quad (6.10)$$

$$E_r = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z}{r^2(z^2 + r^2)^{1/2}} \right)_{-l_1}^{l_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{l_2}{\sqrt{(l_2)^2 + r^2}} - \frac{-l_1}{\sqrt{(l_1)^2 + r^2}} \right). \quad (6.11)$$

Enostavnejšo obliko tega zapisa dobimo, če uporabimo izraz za kosinusa notranjih kotov (glej sliko):

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_1)). \quad (6.12)$$

Na podoben način bi lahko določili še Z komponento polja, kjer bo

$$dE_z = dE \cdot \sin(\alpha) = dE \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \text{ in } E_z = \int dE_z = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{q \cdot dz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)} \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}. \quad (6.13)$$

Rešitev integrala je (lahko rešimo z vpeljavo nove spremenljivke $t = z^2 + r^2$):

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{r}{\sqrt{l_2^2 + r^2}} - \frac{r}{\sqrt{l_1^2 + r^2}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)) \quad (6.14)$$

Če združimo radialno in z komponento polja dobimo končno enačbo*:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\vec{e}_r (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)) + \vec{e}_z (\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)) \right] \quad (6.15)$$

* Enačba je v drugi literaturi lahko predstavljena z drugimi koti in je tem smislu spremenjena. Potrebno je torej pravilno določanje kotov α_1 in α_2 .

Ker je premi naboj le poseben primer naelektrene daljice, dobimo iz gornje enačbe tudi enačbo za premi naboj, ko velja $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow 0$. Tedaj je $\cos(0) = 1$ in $\sin(0) = 0$. Sledi enačba za premi naboj.

Primerjava velikost polja v okolici naelektrene daljice s poljem naelektrene premice in točkastega naboja:

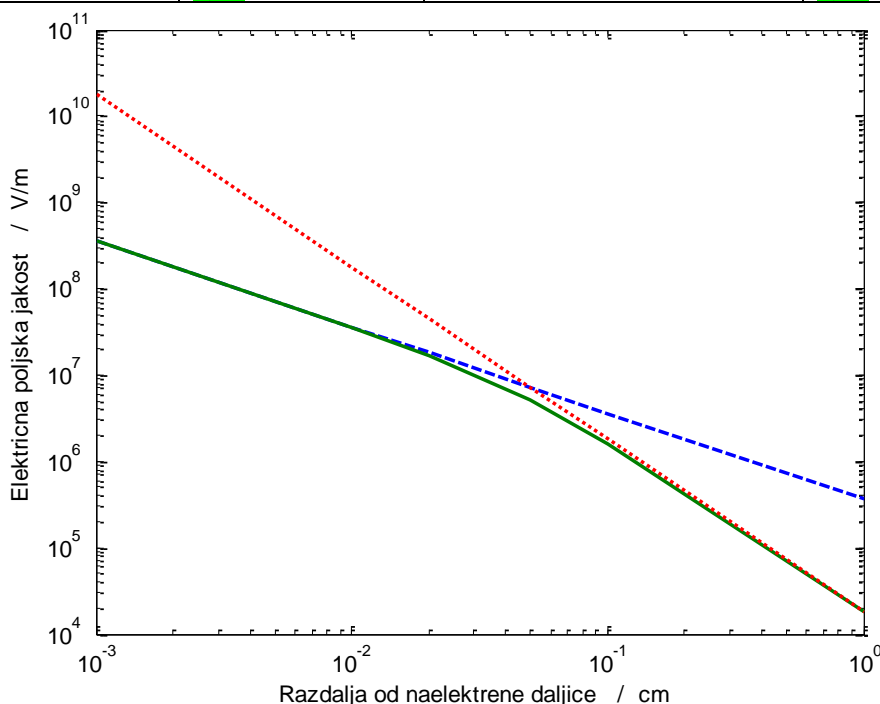
Primerjamo enačbi $\vec{E}_{daljica} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} [\vec{e}_r (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)) + \vec{e}_z (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2))]$ in $\vec{E}_{premi} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$,

$\vec{E}_{točke} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Vzemimo za primer naelektreno tanko palico dolžine $d = 10$ cm z enakomerno

porazdeljenim nabojem $2 \mu\text{C}$ in primerjamo velikost polja s poljem v okolici premega naboja z enako gostoto naboja in točkastega naboja z enako velikostjo celotnega naboja.

Primerjava pokaže, da je velikost polja naelektrene premice in daljice enaka za majhne razdalje od tanke palice (razdalja dosti manjša od dolžine palice), da pa je za razdalje, ki so dosti večje od dolžine palice bolj primeren približek polja tanke palice s poljem točkastega naboja.

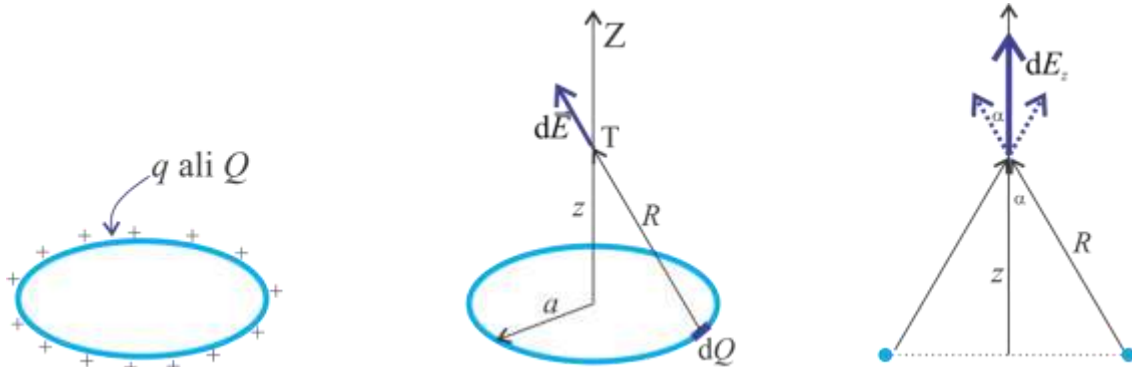
Razdalja (cm)	E daljice (kV/m)	E premice (kV/m)	E točke (kV/m)
0,1	359	359	1797
1	35	36	179
2	17	18	45
5	5	7	7
10	2	3	2
100	0,17	0,36	0,17



Slika 6-7: Primerjava med velikostjo polja v oddaljenosti od tanke naelektrene palice (polna zelena črta) in premega (črtkana modra črta) ter točkastega naboja (točkasta rdeča črta). log-log skala! Polji premega naboja in naelektrene palice sta primerljivi za majhne razdalje, za večje pa je polje palice primerljivo polju točkastega naboja.

POLJE V OSI NAELEKTRENEGA OBROČA

V tem primeru uporabimo cilindrični koordinatni sistem in zapišemo del naboja kot $dQ = qdl = q \cdot r d\varphi$. Če označimo z a polmer obroča, velja $dQ = qa d\varphi$. Označimo dQ na skici in potegnemo vektor r od dQ do točke na Z osi, ki je od središča obroča oddaljena za razdaljo z . Razdalja od dQ do točke na Z osi je $R = \sqrt{a^2 + z^2}$.



Slika 6-8: Prikazi za izračun polja v osi enakomerno naelektrenega obroča.

Ugotovimo, da se pri seštevanju prispevkov dQ -jev ohranjajo le komponente polja v smeri osi Z (Slika 6-8, desno), kar pomeni, da moramo določiti le prispevek te komponente in ga integrirati. Pišemo

$$dE_z = dE \cdot \cos(\alpha) = dE \cdot \frac{z}{R} \text{ in } dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (6.16)$$

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{z}{R} = \frac{qaz d\varphi}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (6.17)$$

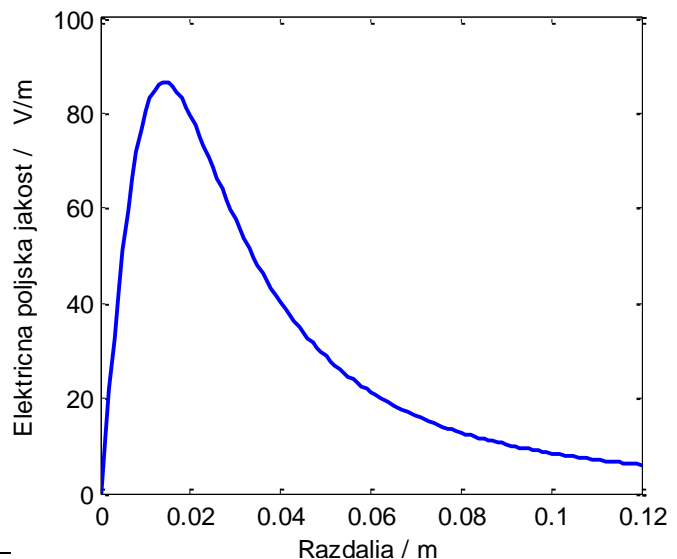
Sedaj ugotovimo, da integriramo po kotu in da nobena od spremenljivk v enačbi ni funkcija kota, od koder sledi:

$$E_z = \int_{\text{po } Q\text{-jih}} dE_z = \int_0^{2\pi} \frac{qaz d\varphi}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{qaz}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{qaz}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (6.18)$$

Zapišimo ta rezultat še v vektorski obliki:

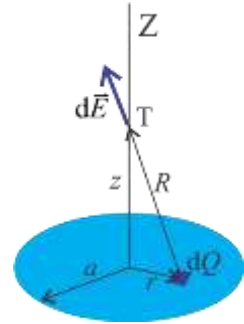
$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{qaz}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{POLJE V OSI NAELEKTRENEGA OBROČA} \quad (6.19)$$

Slika 6-9: Polje v osi naelektrenega obroča. Polmer obroča je 2 cm, na njem je enakomerno (linijsko) porazdeljen naboj 0,1 nC.



POLJE V OSI NAELEKTRENEGA DISKA

Polje v osi naelektrenega diska izračunamo na podoben način kot za druge strukture. Disk umestimo v cilindrični koordinatni sistem in uporabimo zapis naboja s površinsko gostoto naboja $dQ = \sigma dA$. dA je diferencial površine, ki ga določimo iz poznavanja diferencialnih površin v cilindričnem koordinatnem sistemu (tabela na strani 52). Uporabimo $dA = dr \cdot r d\varphi$, torej $dQ = \sigma r dr d\varphi$. Skiciramo disk v cilindričnem koordinatnem sistemu, postavimo dQ na neko poljubno razdaljo r od središča diska, razdaljo od dQ do točke T, kjer računamo polje in je za razdaljo z oddaljena od središča diska, pa označimo z R . Velja $R^2 = r^2 + z^2$. Narišemo $d\vec{E}$ v točki T in ga zapišemo v obliki $d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. Nadalje ugotovimo, da se radialne komponente polja odštevajo, seštevajo pa se prispevki polja v smeri osi Z. V tem smislu zapišemo diferencialne komponente polja v smeri osi Z, pri čemer je kot δ kot med vektorjem $d\vec{E}$ in Z osjo:



$$dE_z = dE \cdot \cos \delta = dE \cdot \frac{z}{R} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{z}{R} = \frac{\sigma r z dr d\varphi}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Z dvojno integracijo – po radiju in po kotu - dobimo:

$$E_z = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma r z}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} dr d\varphi = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^a \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(-(r^2 + z^2)^{-1/2} \right)_0^a = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

Nekoliko še lahko spremenimo obliko enačbe in dobimo

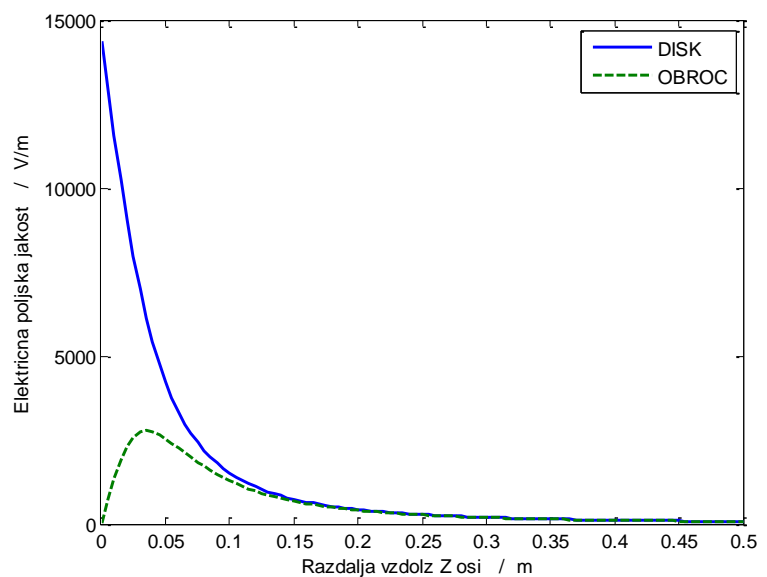
$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos(\delta)). \quad (6.20)$$

Polje v osi naelektrenega diska določimo torej iz enačbe*:

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos(\delta)); \quad \text{za } z > 0. \quad (6.21)$$

Polje naelektrenega diska je največje na površini in upada z razdaljo, medtem ko je polje obroča pri $z = 0$ enako nič (Slika 6-10). V oddaljenosti je velikost polja podobna.

Slika 6-10: Primerjava polj vzdolž osi Z naelektrenega obroča (črtkana zelena črta) in naelektrenega diska (polna modra črta).



* Enačba velja za pozitivne z-je. Za negativne je potrebno spremeniti predznak polja, saj to kaže v smeri negativne Z osi (za

pozitivni naboj na disku). Bolj splošna oblika je torej $\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$

POLJE NAELEKTRENE RAVNINE

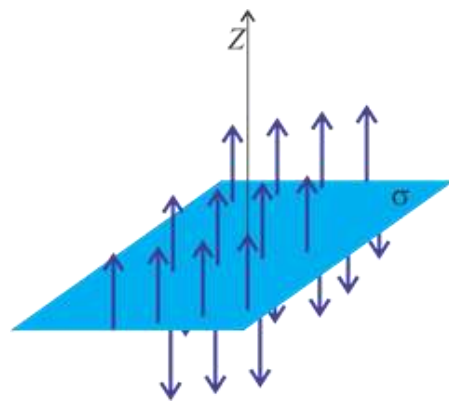
Naelektrena ravnina je le poseben primer naelektrenega diska. Enačbo za polje v okolici (neskončne) ravnine dobimo iz enačbe (6.21) za primer, ko gre radij diska v neskončnost oziroma, ko gre $\delta \rightarrow \pi/2$. Tedaj je

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{POLJE NAELEKTRENE RAVNINE (velja za } z > 0) \quad (6.22)$$

To je pomemben rezultat in kaže, da je polje v okolici naelektrene ravnine neodvisno od višine nad ravnino. Neskončne ravne površine seveda ni, lahko pa je to dober koncept v mnogih poenostavljenih primerih. Uporabili ga bomo tudi pri izračunu polja v ploščnem kondenzatorju, kjer je ena plošča naelektrena s pozitivnim, druga pa z negativnim nabojem. Polje znotraj ploščnega kondenzatorja bo torej očitno vsota prispevkov vsake posamezne plošče.

Enačba, ki smo jo izpeljali, velja za pozitivne z-je. Za negativne z-je je potrebno predznak spremeniti, torej

$$\vec{E} = -\vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{za } z < 0. \quad (6.23)$$



Slika 6-11: Polje naelektrene ravnine.

Primer izračuna polja med ravnima naelektrenima ploščama*:

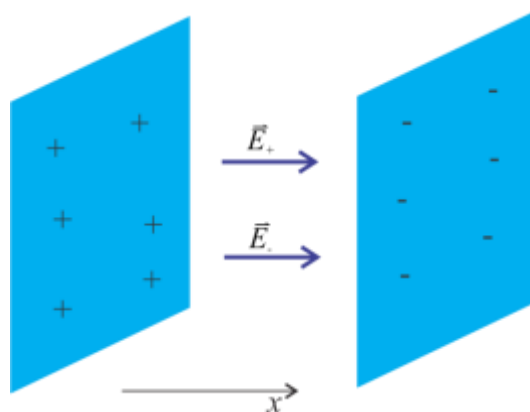
Ravni plošči sta naelektreni z nabojema $Q = \pm 20 \text{ pC}$.

Določimo električno poljsko jakost med ploščama, če je površina ene plošče 20 cm^2 .

Izračun: Kot smo že omenili, je polje med ploščama vsota prispevkov vsake plošče, torej

$$\vec{E} = \vec{e}_x \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \vec{e}_x \frac{|-\sigma|}{2\epsilon_0} = \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \text{kjer je } \sigma = \frac{Q}{A} = 10^{-8} \text{ C/m}.$$

Dobimo $\vec{E} \cong \underline{\underline{1,23 \text{ kV/m } \vec{e}_x}}$.

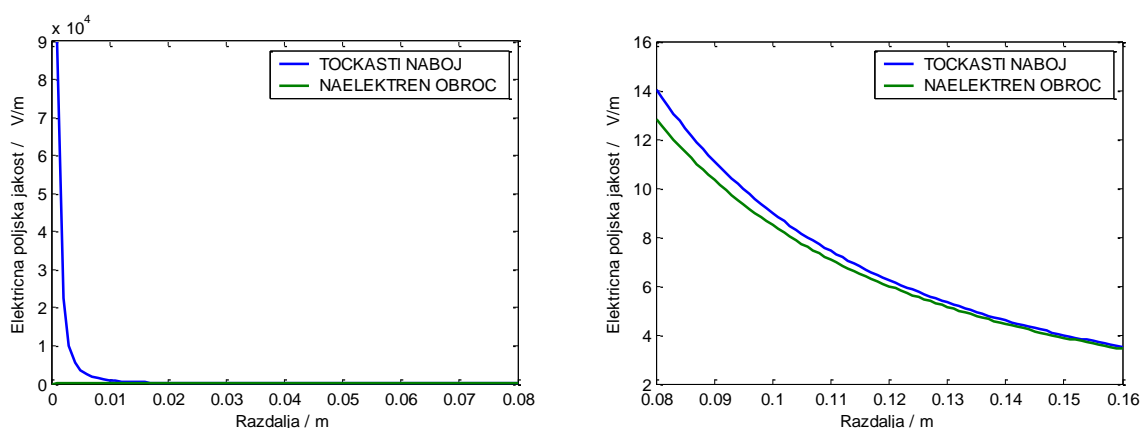


* Velja opozoriti, da v kolikor sta naelektreni plošči prevodni, se v resnici več nabojev nabere na robovih plošč (saj se plusi med seboj »ne marajo« in enako velja za minuse). Iz tega sledi, da bo poenostavljen izračun dokaj natančen (in še to predvsem bolj v sredini med ploščama) predvsem v primeru, ko sta plošči precej skupaj v primerjavi z njenimi dimenzijami.

PRIMERJAVA POTEKOV POLJA

1. PRIMERJAVA MED POLJEM TOČKASTEGA NABOJA IN NAELEKTRENEGA OBROČA

pokaže, da je potek polja popolnoma različen v bližini naelektrenih struktur, saj polje točkastega naboja narašča s približevanjem naboju proti neskončnosti, v središču naelektrenega obroča pa je polje enako nič. V večji oddaljenosti od obroča oziroma točkastega naboja pa sta ti polji vedno bolj podobni.



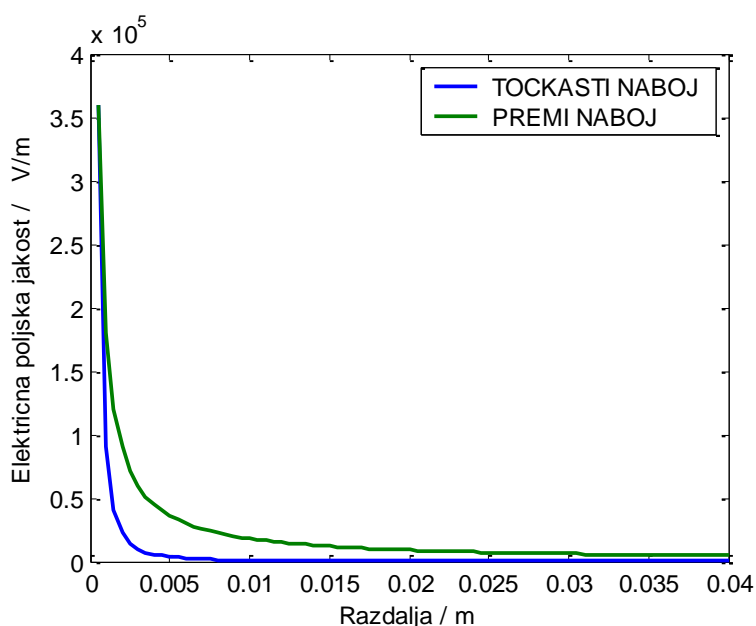
Slika 6-12: Primerjava med poljem v oddaljenosti od točkastega naboja in v osi naelektrenega obroča. Oba imata enako velik naboj (0,1 nc, polmer prstana je 2 cm). Levo: polje v bližini obroča. Desno: polje v

oddaljenosti od obroča. V oddaljenosti od obroča postane izraz $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ enakovreden izrazu

$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{qaz}{2\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}}$, v bližini obroča (razdalja manjša od nekaj polmerov obroča) pa je razlika velika (polja naelektrenega obroča na sliki levo ne vidimo, ker je bistveno manjši od polja točkastega naboja).

2. PRIMERJAVA MED POLJEM TOČKASTEGA IN PREMEGA NABOJA

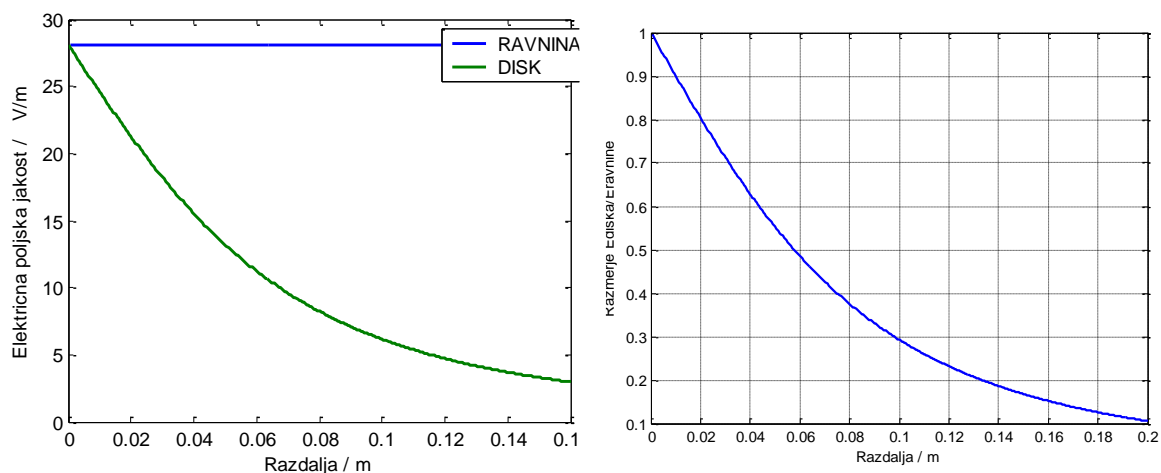
pokaže, da polje točkastega naboja mnogo hitreje (s kvadratom razdalje) upada z razdaljo kot polje premega naboja ($1/r$).



Slika 6-13: primerjava med poljem točkastega (modra črta) in premega naboja (zeleno črta). Polje točkastega naboja upada s kvadratom razdalje ($1/r^2$), polje premega pa z razdaljo ($1/r$).

3. PRIMERJAVA MED POLJEM NAELEKTRENEGA DISKA IN NAELEKTRENE RAVNINE

V inženirskem smislu je potrebno vedno poiskati tisto strukturo, ki najbolj primerno opisuje električno polje. Na primer, če imamo opravka z enakomerno naelektrenim televizijskim zaslonom in nas zanima električno polje 1 cm stran od zaslona, je dovolj natančno, če upoštevamo zaslon kot neskončno naelektreno ravnino, če nas zanima polje naelektrenega zaslona 10 ali 15 m stran od ekrana, pa bi bilo mnogo bolj primerno zaslon smatrati kot točkast naboj, še bolj pa kot naelektren disk (ni pa tudi težko izpeljati eksakten izraz za polje v okolici enakomerno porazdeljenega naboja na ravni plošči).



Slika 6-14: Primerjava med poljem naelektrenega diska in neskončne ravnine z enako velikim površinskim nabojem. Polmer diska je 8 cm. Desna slika kaže razmerje med poljem diska in poljem ravnine. Tik ob površini je izračun ustrezen, na razdalji polmera diska pa je polje diska 38 % polja ravnine.

POVZETEK IZPELJANIH ENAČB:

Polje naelektrene premice (premi naboj, prema elektrina):

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Polje naelektrene daljice: (položene vzdolž Z osi) (glej sliko za razlago kotov):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\vec{e}_r (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)) + \vec{e}_z (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)) \right]$$

Polje v osi naelektrenega obroča (polmer obroča = a):

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{qaz}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Polje naelektrene ravnine (normala v smeri osi Z):

$$\vec{E} = \pm \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

7. Gaussov zakon

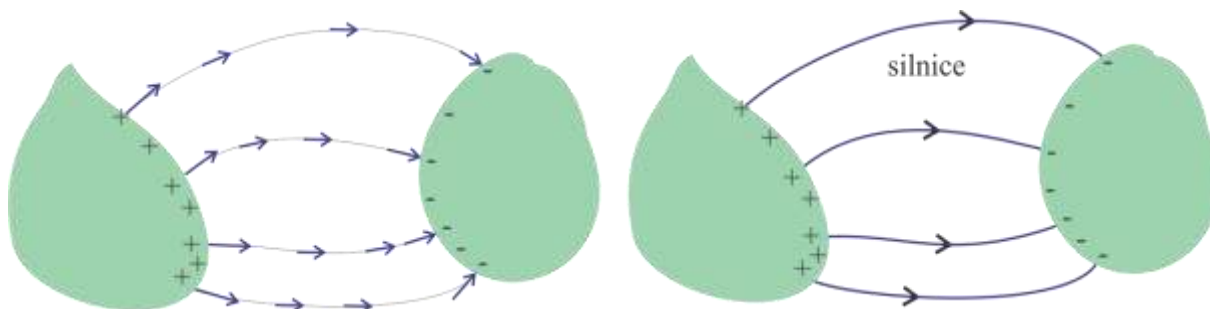
Vsebina poglavja: silnice polja, gostotne cevke (gostotnice), homogeno in nehomogeno polje, pretok električnega polja, Gaussov zakon.

V tem poglavju bomo spoznali Gaussov zakon v integralni obliki, ki je v osnovi posledica Coulombovega zakona, torej dejstva, da polje v okolici točkastega naboja upada s kvadratom razdalje. Da bi razumeli njegov pomen, se moramo najprej seznaniti s pojmi kot so silnice polja, pretočne oz. gostotne cevke in električni pretok.



SILNICE

Električno poljsko jakost v prostoru lahko prikažemo z vektorji v prostoru. Če vektorje povežemo z linijami, le te imenujemo **silnice polja**. Prikaz s silnicami je zelo primeren in pogost način prikaza polja. (Konceptualno jih je vpeljal Michael Faraday, ki jih je imenoval lines of force.) Ker so silnice usmerjene v smeri polja, bi po silnici potoval naboj, če bi ga postavili v polje*. Pri tem moramo predpostaviti, da vstavitve tega naboja v polje ne bi spremenila samega polja, saj bi tak naboj tudi deloval s silo na tiste naboje, ki ustvarjajo polje v katerem potuje.



Slika 7-1: Levo prikaz polja v prostoru z vektorji (silnice s tanko črtkano črto), desno prikaz s silnicami.

PRETOK ELEKTRIČNEGA POLJA

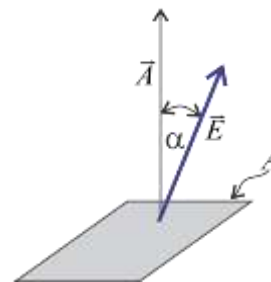
Nadalje je potrebno spoznati koncept *pretoka električnega polja* skozi ploskev.[†] Električnemu polju, ki je povsod enako veliko (konstantno) in ima enako smer, običajno rečemo *homogeno polje*. Če je **homogeno polje usmerjeno pravokotno na ravno ploskev ploščine A** , potem je **pretok skozi to površino določen kot produkt polja in ploščine: $E \cdot A$** . (V nekem smislu je pretok polja povezan s količino naboja iz katerih izhajajo silnice. Na površini naelektrnega telesa se izkaže produkt $E \cdot A$ direktno sorazmeren množini naboja.)



* Če bi se hkrati gibalo več nabojev, bi lahko bila njihova trajektorija gibanja različna od silnic, saj bi tudi med premikajočimi se naboji delovala določena sila.

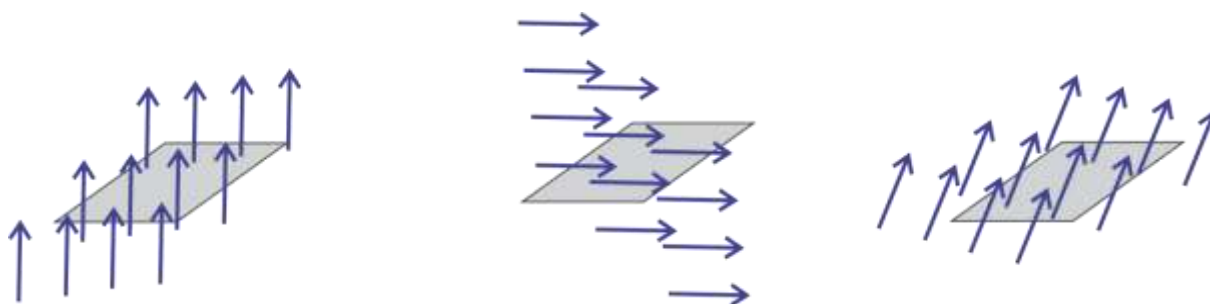
[†] Koncept pretoka nekega vektorja skozi določeno površino je splošen pojem, ki se pogosto uporablja za opis določenih veličin in ga pogosto imenujemo fluks. V nadaljevanju bomo spoznali novo veličino, gostoto električnega pretoka, ki jo bomo označili s črko D in bo za prazen prostor enaka $\epsilon_0 \vec{E}$.

Če je ravna ploskev postavljena v smeri homogenega polja, je pretok enak nič, če pa je pod določenim kotom, je potrebno upoštevati kosinus vmesnega kota, pri čemer je to kot med normalo (pravokotnico) na površino in smerjo električnega polja $E \cdot A \cdot \cos(\alpha)$. Po definiciji skalarnega produkta lahko to zvezo zapišemo tudi s skalarnim produktom vektorja polja in vektorja površine, pri čemer je potrebno ponovno poudariti, da je smer vektorja površine določena z normalo na površino (smerjo, ki je pravokotna na površino).



Pretok homogenega polja skozi poljubno postavljeno ravno površino je enak skalarnemu produktu (vektorja) električnega polja in vektorja površine (ki ga določa normala na površino).

$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad \text{Pretok homogenega električnega polja preko ravne ploskve} \quad (7.1)$$



Slika 7-2: Pretok homogenega električnega polja skozi ravno ploskev: a) pravokotno ($\Phi_e = EA$), b) vzporedno ($\Phi_e = 0$), pod kotom ($\Phi_e = EA \cos \alpha$).

Primer izračuna pretoka skozi ravno ploskev:

Določimo pretok homogenega električnega polja velikosti 5 kV/m, ki je usmerjen pod kotom 30° na normalo ravne površine določene s pravokotnikom dimenzij $3 \times 4 \text{ m}^2$.

Izračun:

1. način: Prikažemo polje v koordinatnem sistemu in zapišemo vektorja E in A :

$$\vec{E} = \vec{e}_E E = -\vec{e}_x E \sin \alpha - \vec{e}_y E \cos \alpha = E(-\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$$

$$\vec{A} = -\vec{e}_y A = (0, -1, 0)A$$

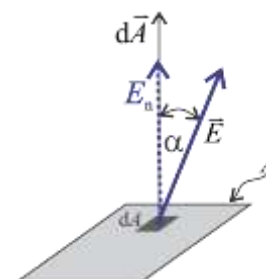
$$\vec{E} \cdot \vec{A} = E(-\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)(0, -1, 0)A = EA \cos \alpha$$

2. način: Poiščemo komponento polja, ki je pravokotna na površino, to je $E_n = E \cos \alpha \cong 4,33 \text{ kV/m}$.

Sedaj le še pomnožimo normalno komponento polja s ploščino in dobimo pretok $\Phi_E \cong 4,33 \text{ kV/m} \cdot 12 \text{ m}^2 \cong \underline{\underline{52 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}}}$.

PRETOK NEHOMOGENEGA POLJA SKOZI NERAVNO POVRŠINO

Kaj pa če polje ni homogeno in/ali površina skozi katero računamo pretok ni ravna? Tedaj bomo dobili pravi izraz za pretok na že poznani način: najprej zapišemo pretok za neko diferencialno majhno površino, na kateri bi homogenost približno veljala, torej za $\Delta \Phi_e = \vec{E} \cdot \Delta \vec{A}$. To bi veljalo eksaktno, če bi $\Delta \vec{A}$



limitirali proti nič. V limiti dobimo diferencial pretoka $d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{A}$, celotni pretok pa je*

$$\Phi_e = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad \text{Pretok polja za poljubno obliko polja in površine} \quad (7.2)$$

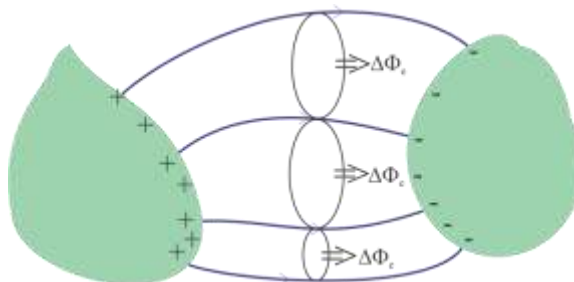
Pri izračunu električnega pretoka je torej potrebno upoštevati skalarni produkt vektorja polja in vektorja diferenciala površine. V smislu skalarnega produkta je torej potrebno upoštevati le komponento polja, ki je v smeri normale na površino: E_n . Enačbo (7.2) torej lahko zapišemo tudi v obliki

$$\Phi_e = \int_A E_n \cdot dA. \quad (7.3)$$

Enačba (7.3) z besedami: pretok električnega polja skozi poljubno površino je enak integralu normalne komponente električnega polja po tej površini.

PRETOČNE CEVKE ALI GOSTOTNICE

Tudi pretok električnega polja lahko ponazorimo na enak način kot ponazarjamo silnice polja, le da sedaj govorimo o gostotnih ali **pretočnih cevkah**, silnice pa ponazarjajo le stene gostotnih cev. Večji pretok električnega polja dosežemo, če zajamemo več pretočnih cev. V poljubnem preseku gostotne cevke je enak pretok.



Slika 7-3: Pretok električnega polja znotraj gostotnic je konstanten (enako velik na poljubnem preseku).

PRETOK POLJA PO CELOTNI (ZAKLJUČENI) POVRŠINI

Sedaj pa si pogledajmo vrednost tega pretoka po celotni - **zaključeni** površini. Včasih ji rečemo tudi **Gaussova površina**. To pomeni, da nas zanima pretok polja skozi površino krogle ali skozi vseh šest stranic kocke ali pač poljubne površine, ki v celoti zaobjame določen objekt. Pri tem niti ni potrebno, da računamo pretok skozi neko površino telesa, lahko je to popolnoma namišljeno (abstraktno) telo. Matematično integracijo po zaključeni površini naznačimo s kroglcem v sredini simbola integrala:

$$\text{Pretok polja skozi zaključeno površino} = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (7.4)$$

* Ponovno velja opozoriti, da je bistven element izračuna pretoka vektorja skozi površino uporaba skalarnega produkta dveh vektorjev. V konkretnem primeru vektorja električne poljske jakosti E in vektorja (diferenciala) površine, pri čemer je smer vektorja površine določena z normalo (pravokotna smer) na površino: $\vec{A} = \vec{e}_n A$.

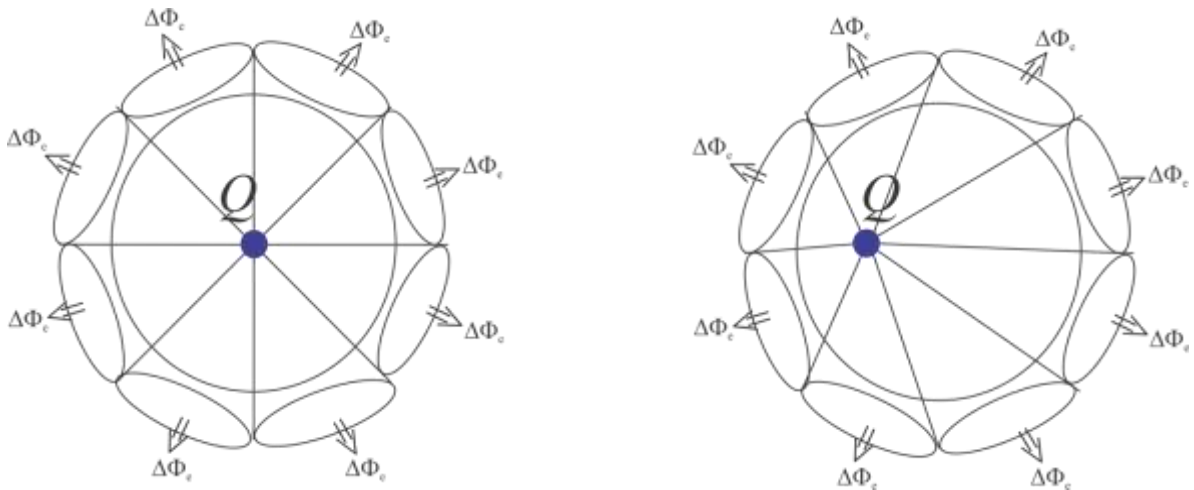
PRETOK POLJA TOČKASTEGA NABOJA SKOZI ZAMIŠLJENO POVRŠINO KROGLE

Vzemimo kar najpreprostejši primer, kjer je naboj Q postavljen v središče krogelnega koordinatnega sistema in računamo pretok skozi neko zamišljeno površino krogle polmera r (hkrati integriramo po obeh kotih ker med seboj integraciji (funkciji) nista odvisni):

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_0^\pi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (7.5)$$

Ugotovimo, da je ta integral sorazmeren naboju, ki se nahaja v središču namišljene krogle.

Ali je to naključje, ali to morda velja za poljubno postavitve naboja znotraj namišljene krogle? Z razmislekom, da lahko naboj zamaknemo iz središča koordinatnega sistema, pa se število pretočnih cev, ki »sekajo« površino krogle, ne spremeni, lahko ugotovimo, da bo rezultat enak tudi za poljubno postavitve naboja Q znotraj (namišljene) krogle polmera r (Slika 7-4).



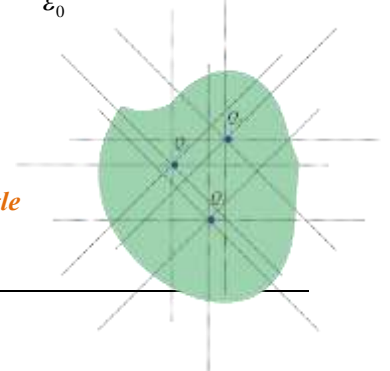
Slika 7-4: Število pretočnih cev, ki sekajo površino namišljene krogle je enako za poljubno postavitve naboja znotraj krogle. Enako velja za poljubno obliko površine zaključenega objekta.

PRETOK POLJA SKOZI ZAKLJUČENO POVRŠINO POLJUBNE OBLIKE V KATERI SE NAHAJA MNOŽICA NABOJEV

Nadalje lahko razmislimo, kolikšen je pretok električnega polja, če se v prostoru z zaključeno površino nahaja več nabojev. Razmislek je podoben kot v prejšnjem primeru. Pomagamo si z veljavnostjo superpozicije polja ($\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$) in zapišemo:

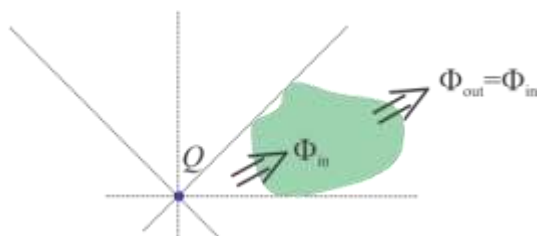
$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots) \cdot d\vec{A} = \oint_A \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} + \oint_A \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} + \dots = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} + \dots = \frac{\sum_i Q_i |_{\text{znotraj } A}}{\epsilon_0} \quad (7.6)$$

Slika 7-5: Pretočne cevi več nabojev, ki jih zajamemo z namišljeno površino krogle (ali poljubno zaključeno površino).



VPLIV NABOJEV ZUNAJ ZAKLJUČENE POVRŠINE NA PRETOK POLJA SKOZI NOTRANJOST POVRŠINE

Kaj pa naboji, ki se nahajajo zunaj zaključene površine? Ugotovimo lahko, da sicer elektrine zunaj zaključene površine povzročajo polje na površini objekta, vendar je pretok polja v objekt enako velik kot pretok polja iz objekta.



Slika 7-6: Pretok polja skozi zaključeno površino v kateri ni nabojev je enak nič. Če se v zunanji okolici površine nahajajo naboji, je pretok polja, ki vstopa v prostor enak pretoku polja, ki izstopa iz tega prostora.

Povzemimo ugotovitve: **Pretok električne poljske jakost skozi sklenjeno (zaključeno) površino je enak zaobjemu naboju (algebraski vsoti nabojev) deljeno z ϵ_0 .** Ta zapis imenujemo **Gaussov zakon**.

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{znotraj } A}}{\epsilon_0}$$

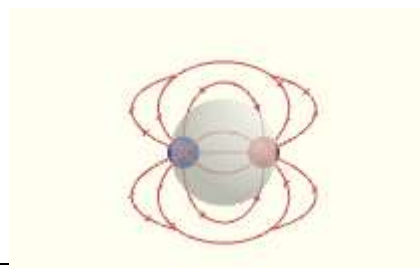
GAUSSOV ZAKON

(7.7)

Pomen Gaussovega zakona:

- 1) Ugotavlja **izvornost** električnega polja. Električno polje izvira iz pozitivnih nabojev in se zaključuje (ponira) na negativnih.
- 2) **Omogoča izračun naboja** v določenem prostoru ob poznavanju električnega polja na mejah tega prostora.
- 3) **Omogoča izračun električnega polja** v primeru simetrične porazdelitve naboja. V tem primeru namreč polje ni funkcija spremenljivk integracije.
- 4) Gaussov zakon smo spoznali v t.i. integralni obliki. Zapisan je namreč z integralom in velja po določeni površini. Poznamo tudi zapis Gaussovega stavka v diferencialni obliki, ki določa povezavo med električnim poljem in nabojem (gostoto naboja) v točki v prostoru. Ta zakon je en od osnovnih zakonov, ki opisujejo naravo električnega polja. **Gaussov zakon je znan tudi kot ena od štirih Maxwellovih enačb**, ki v celoti opisujejo elektromagnetne pojave.
- 5) S pomočjo Gaussovega zakona lahko z uporabo numeričnih metod določimo porazdelitev električnega polja za poljubno obliko porazdelitve naboja v prostoru.

Oglejte si tudi primere vizualizacije gostotonic (silnic) na strani <http://www.vizitsolutions.com/portfolio/catalog/>. Opisan je tudi način izdelave animacij s HTML5.



PRIMERI IZRAČUNOV Z UPORABO GAUSSOVEGA ZAKONA

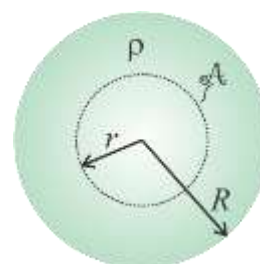
NAELEKTRENA KROGLA

Krogla polmera R ima enakomerno volumno porazdelitev naboja Q . Določimo električno poljsko jakost znotraj in zunaj krogle.

Izračun polja znotraj krogle:

Znotraj krogle si zamislimo zaključeno površino krogle s polmerom $r < R$ in zapišemo pretok polja skozi to ploskev. Uporabimo izraz

$\oint_{A(r)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_A}{\epsilon_0}$, kjer je Q_A naboj zajet s površino krogle polmera r . Ker je gostota naboja enakomerno porazdeljena, je celoten naboj zajet s kroglo površine $A(r)$ kar $Q_A = \rho V = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$. Polje je zaradi simetrične porazdelitve



naboja usmerjeno radialno, kar lahko zapišemo v obliki $\vec{E} = \vec{e}_r E(r)$ in je le funkcija radija. Tudi diferencial površine je usmerjen v smeri radija (pravokotno na površino) in je enak $d\vec{A} = \vec{e}_r dA$. Skalarni produkt $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ je torej kar enak $E \cdot dA$. Poleg tega električno polje ni odvisno od integracijskih spremenljivk, saj je povsod kjer integriramo (po površini krogle) polje enako veliko - konstantno. Zato E lahko pišemo pred integral in dobimo $\oint_{A(r)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint_{A(r)} dA$. Integral dA po zaključeni površini pa je kar enak tej površini (ploščini):

$$\oint_{A(r)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = E4\pi r^2. \quad (7.8)$$

Sedaj le še sestavimo levo in desno stran enačbe $E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot 4\pi \frac{r^3}{3} / \epsilon_0$ in dobimo

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (7.9)$$

Na koncu le še dodamo »nastavek« $\vec{E} = \vec{e}_r E(r)$ in zapišemo polje znotraj naelektrene krogle

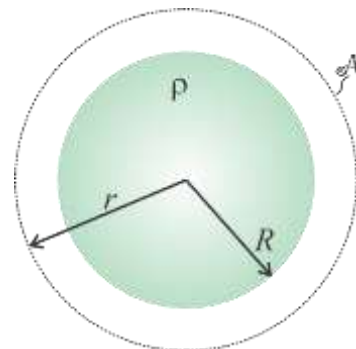
$$\boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\rho r}{3\epsilon_0}}. \quad (7.10)$$

Ta zveza velja za poljubne radije znotraj krogle, torej za $r \leq R$.

Ugotovimo, da znotraj krogle s konstantno volumno porazdelitvijo gostote naboja polje narašča linearno z radijem.

Izračun polja izven krogle ($r > R$):

Polje zunaj krogle dobimo na podoben način: zamislimo si neko površino krogle pri nekem radiju $r > R$ in zapišemo Gaussov zakon za to namišljeno površino. Ugotovimo, da bo leva stran enačbe enaka kot v prejšnjem primeru, desna pa se spremeni, saj je potrebno upoštevati, da smo zajeli celotni naboj že pri $r = R$, za $r > R$ pa ni naboja. Torej bo desna stran enačbe kar $\rho \cdot 4\pi \frac{R^3}{3} / \epsilon_0$, oziroma kar celoten naboj Q . Dobimo

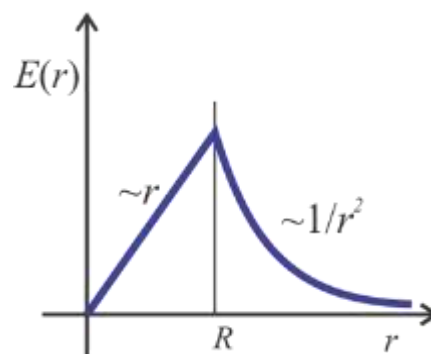


$$E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot 4\pi \frac{R^3}{3} / \epsilon_0$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

Ugotovimo, da polje v zunanosti krogle upada s kvadratom razdalje. In še več, z upoštevanjem enačbe $Q = \rho V = \rho \frac{4\pi R^3}{3}$ lahko zapišemo polje tudi v obliki $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, kar ni nič drugega kot polje v okolici točkastega naboja. Torej, krogla z enakomerno volumsko gostoto naboja ima v okolici enako polje, kot če bi bil celoten naboj skoncentriran v centru krogle.

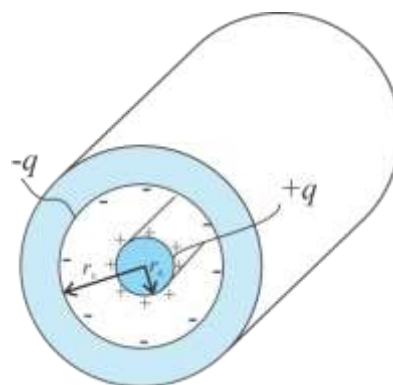
Slika 7-7: Polje v notranjosti in zunanosti krogle z enakomerno volumsko gostoto naboja.



NAELEKTRENA VALJA Z ISTO OSJO = KOAKSIALNI KABEL

Določimo polje med enakomerno in nasprotnosmerno naelektrenima neskončnima plaščema valjev z linijsko gostoto naboja. $q(r = r_1) = +q$ in $q(r = r_2) = -q$.

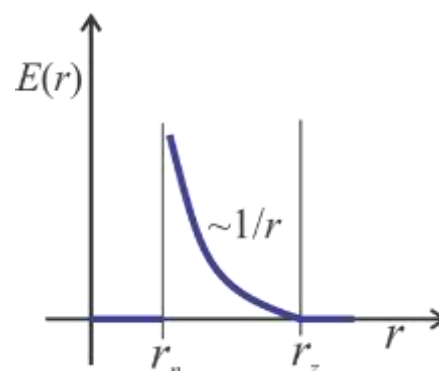
Izračun: Zamislimo si nek plašč valja polmera r in dolžine l med notranjim in zunanjam polmerom in zapišemo Gaussov zakon za ta namišljen objekt. Podobno kot za naelektreno kroglo, lahko ugotovimo, da je zaradi simetrične porazdelitve naboja polje povsod pri radiju r enako veliko in neodvisno od spremenljivk integracije. Velja



$\oint_{A(r)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = E2\pi rl + 0 + 0$. Z dvema ničloma smo zapisali pretok skozi stranske površine, ker je tam normalna komponenta polja enaka nič. Desna stran enačbe Gaussovega zakona je enaka naboju, ki ga zaobjamemo z namišljenim valjem. Ta je enaka $\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{ql}{\epsilon_0}$. Z združitvijo leve in desne strani enačbe dobimo $E2\pi rl = \frac{ql}{\epsilon_0}$, od koder sledi $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$. Dobili smo izraz, ki ga že poznamo – za polje premega naboja. Polje med naelektrjenima valjema je enako $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$.

Ugotovimo lahko, da pri izračunu polja med plaščema valjev nismo potrebovali upoštevati nabojev na zunanjem plašču. Njihov vpliv na polje znotraj plašča je enak nič. Vplivajo pa na polje zunaj valjev ($r > r_z$), tako, da se prispevek nabojev na notranjem in zunanjem plašču izničita: $E2\pi rl = \frac{ql}{\epsilon_0} + \frac{-ql}{\epsilon_0} = 0$.

Slika 7-8: Polje znotraj koaksialnega kabla



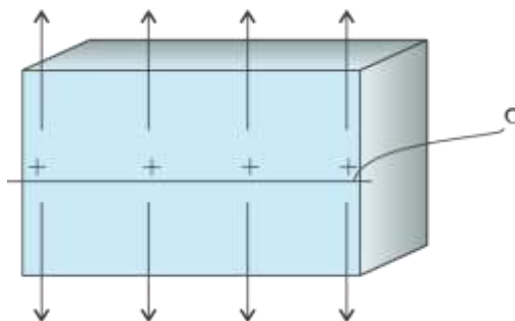
NAELEKTRENA RAVNINA

S pomočjo Gaussovega zakona določimo polje v okolici naelektrjene površine.

Izračun: Zapišemo Gaussov stavek skozi namišljeno kocko, katere polovica je na eni strani ravnine in polovica na drugi strani. Skozi stranske površine je pretok enak nič, skozi normalni pa je enak $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA + EA = 2EA$. Desna stran enačbe je

sorazmerna zaobjetemu naboju $\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$. Z združitvijo

dobimo $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, kar je enak izraz, kot smo ga dobili v prejšnjem poglavju.



* KDO JE PRVI »IZUMIL« GAUSSOV ZAKON

No, glede na ime bi seveda trdili, da Gauss, vendar zgodovina znanosti ugotavlja, da je primer nekoliko bolj zapleten. Gre za primer ugotavljanja prehoda k dimenzionalnega integrala v k-1 dimenzionalnega. Npr, za prehod iz integracije funkcije po volumnu v integracijo po površini. Ta princip sta uporabljala že Lagrange in Laplace konec 18 stoletja, v določeni obliki (za tri posebne primere) pa je ta princip pokazal Gauss leta 1813. Ni pa ga dokazal. To je storil šele Michael Ostrogradski leta 1826. S teoremom, ki je znan tudi kot divergenčni teorem, se je ukvarjal tudi Poisson in Green, sama znana imena v znanosti. Zanimanje za ta teorem je izviralo iz neposredne povezave z matematično formulacijo fizikalnih pojavov. Gaussa je zanimalo področje magnetne privlačnosti, Ostrogradskega teorija prenosa toplote, Greena električni in magnetni pojavi, Poissona pa elastična telesa. Divergenčni teorem bi tako lahko imenovali tudi teorem Ostrogradskega ali tudi kako drugače. Gaussov teorem torej ni vezan le na področje elektrotehnike pač pa širše, saj ugotavlja izvornost polja. Če gre za polje, ki so posledica električnih nabojev, je to polje izvorno, saj polje izhaja iz pozitivnih in se zaključuje pri negativnih nabojih. Zato je integral (normalne komponente) polja po zaključeni ploskvi sorazmeren naboju znotraj te ploskve. Zakon, zapisan v diferencialni obliki, je še bolj kompakten in se zapiše v obliki $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Ta

zapis je še posebno primeren za numerično izračunavanje polja, kar v kratko obravnavam v poglavju *. Divergenčni (Gaussov) zakon se uporabi tudi za zapis kontinuitetnega zakona (iz električno zaključenega sistema lahko naboj izhaja le v obliki toka) in celo osnovnih lastnosti magnetnega polja, kot bomo ugotovili v naslednjem semestru. Tudi gravitacijski zakon se lahko zapiše s tem zakonom, saj je gravitacijsko polje usmerjeno na telesa z maso. Enako velja za pretok tekočin, kjer tudi velja divergenčni zakon.

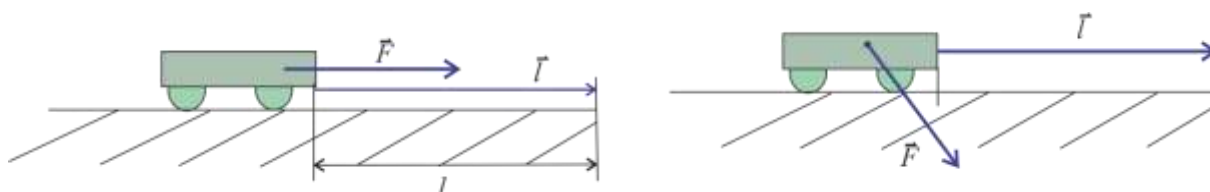
Da ne bo pomote, Johann Carl Friedrich Gauss v vsakem primeru velja za pomembnega matematika in znanstvenika. Vsaj kar se tiče uporabe njegovih dognanj na področju elektrotehnike, velja poleg divergenčnega teorema omeniti njegov pomemben prispevek k uporabi kompleksnega računa, Gaussove verjetnostne porazdelitve, pomembno delo pa je opravil tudi (v sodelovanju z Wilhelmom Webrom - tudi pomembno ime v elektrotehniki) na področju magnetike, s čimer si je kasneje tudi prislužil poimenovanje enote za magnetno polje (dandanes se uporablja enota Tesla). Pravzaprav se včasih celoten sistem enot cgs (centimeter-gram-sekunda) pogosto imenuje tudi kot [Gaussov sistem enot](#). Skupaj z Webrom sta tudi skonstruirala enega prvih [telegrafov](#) in modificiran magnetometer (magnetometer, naprava za merjenje magnetnega polja velja tudi za Gaussov izum) ter celo način za kodiranje abecede.

8. Delo in potencialna energija

Vsebina: Delo kot integral sile na poti, delo električne sile, delo po zaključeni poti, potencialna energija, potencialna energija sistema nabojev, delo kot razlika potencialnih energij.



V srednješolski fiziki je veljalo, da je delo enako produktu sile in dolžine poti, torej, če vzdolž poti dolžine l deluje sila F , le ta opravi delo $A = F \cdot l$. Če torej potiskamo voziček v smeri poti dolžine 5 m s silo 100 N opravimo delo 500 N·m ali 500 J. Kaj pa, če voziček potiskamo s silo 100 N v smeri, ki je pod kotom 60° na smer poti? V tem primeru moramo glede na definicijo dela upoštevati le tisto komponento sile, ki deluje v smeri poti. Komponenta sile, ki je pravokotna na pot pač ne opravi nič dela v smeri poti. Delo je torej $A = F \cdot l \cdot \cos(\alpha) = 100 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} \cdot \cos(60^\circ) = 250 \text{ J}$. Ugotovimo, da je za izračun dela primerna uporaba skalarnega produkta $A = \vec{F} \cdot \vec{l}$.



Slika 8-1: Premikanje vozička s konstantno silo v smeri poti (levo) in pod kotom 60° na smer poti (desno).

DELO PO POLJUBNI POTI IN VELIKOSTI SILE

Kaj pa če sila ni konstantna na poti in poleg tega ne deluje vedno v isti smeri glede na pot? Potem lahko zapišemo delo le za en mali (diferenčni) odsek, da dobimo tisti del sile, ki deluje v smeri poti pa uporabimo skalarni produkt. Diferenčni del sile na poti Δl je torej $\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l}$. Z limitiranjem dobimo iz diferenc diferencial dela: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{l}$, celotno **delo** pa je seveda integracija po poti od začetne točke do končne točke:

$$A = \int dA = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (8.1)$$



Slika 8-2: Levo: sila na poti = delo. Desno: delo električnih sil na poti od točke T_1 do T_2 .

DELO ELEKTRIČNE SILE

Kako pa izračunamo delo električnih sil (A_e) na naboje? Na popolnoma enak način. Upoštevamo, da je sila na naboj v električnem polju enaka $\vec{F} = Q\vec{E}$, torej bo delo za premik naboja Q v električnem polju iz točke T_1 v točko T_2 (glej Slika 8-2) enako

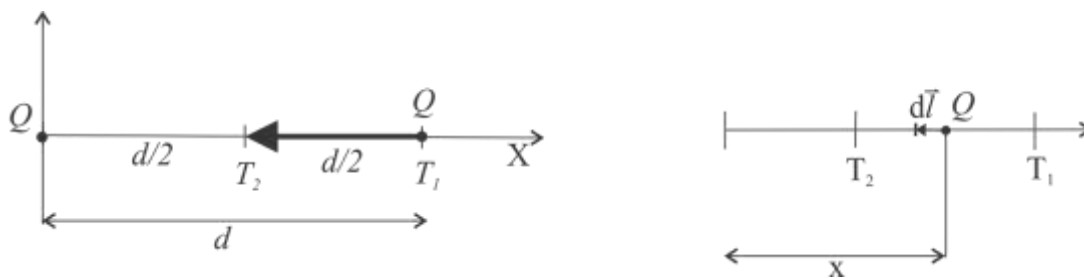
$$A_e = A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (8.2)$$

Primer izračuna dela električnih sil pri premiku naboja:

Vzemimo dva pozitivna naboja oddaljena za $d = 1$ cm z množino naboja $Q = 10$ nC. Koliko dela opravi naboj za premik na polovično razdaljo?

Izračun: naboja postavimo vzdolž X osi, levega v izhodišče k.s., desnega pa za razdaljo d v smeri X osi. Izračunali bomo delo, potrebno za premik desnega naboja v levo. Da bi lahko izračunali delo, moramo desni naboj postaviti na neko poljubno mesto vzdolž X osi, oddaljeno za razdaljo x od levega naboja.

Polje na mestu desnega naboja je $\vec{E} = \vec{e}_x \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$, $d\vec{l}$ pa je usmerjen v smeri $-X$ osi*.



Slika 8-3: Premik desnega naboja v smeri levega naboja.

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_{x_1=d}^{x_2=d/2} \vec{e}_x \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cdot (\vec{e}_x dx) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right)_d^{d/2} = \\ &= -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d/2} - \frac{1}{d} \right) = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \cong -9 \cdot 10^9 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} (10 \cdot 10^{-9} \text{C})^2 10^2 \text{m}^{-1} = \underline{\underline{-9 \cdot 10^{-5} \text{J}}} \end{aligned}$$

(Enak rezultat bi dobili, če bi premaknili levi naboj iz izhodišča v točko T_2)

Dobljen rezultat je negativen, kar pomeni, da bi bila za premik potrebna neka zunanja sila (A_z), ki bi opravila to delo[†]. Veljati mora torej:

$$A_z + A_e = 0. \quad (8.3)$$

* Kljub temu, da je $d\vec{l}$ usmerjen v smeri $-X$ osi ni njegova vrednost $-\vec{e}_x dx$, pač pa $d\vec{l} = -\vec{e}_x (x - (x + dx)) = \vec{e}_x$.

[†] Kar je logično, saj sta oba naboja pozitivna in se torej odbijata. Delo bi bilo pozitivno, če bi bila naboja nasprotnega predznaka.

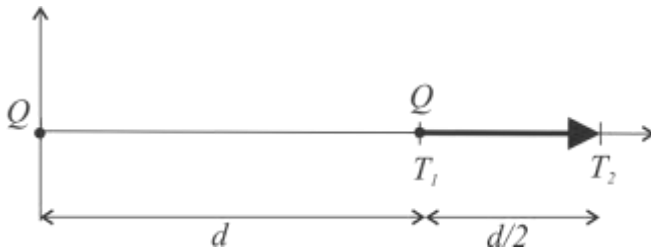
Primer izračuna dela električnih sil pri premiku naboja:

Določimo delo za premik desnega naboja v desno za $d/2$. Rezultat je

$$A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_d^{3d/2} \vec{e}_x \frac{QQ}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cdot (\vec{e}_x dx) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right)_d^{3d/2} =$$

$$= -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{3d/2} - \frac{1}{d} \right) = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left(\frac{2}{3} - 1 \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} (10 \cdot 10^{-9} \text{C})^2 \cdot \frac{1}{3} 10^2 \text{m}^{-1} = \underline{\underline{3 \cdot 10^{-5} \text{J}}}$$

Rezultat je pozitiven, saj polje opravi delo 30 μJ : delec se premakne v drugo točko pod vplivom električne sile. Zakaj je rezultat mnogo manjši kot v prejšnjem primeru?



Slika 8-4: P premik desnega naboja stran od levega.

DELO ELEKTRIČNIH SIL NI ODVISNO OD POTI

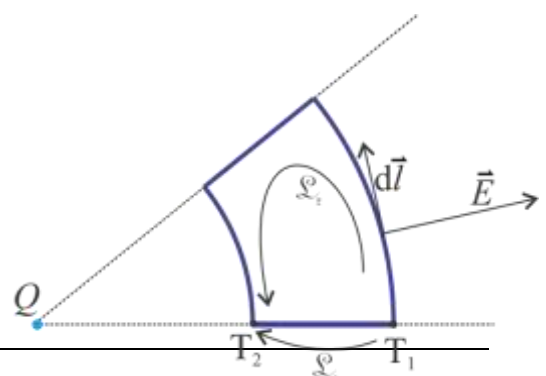
Kolikšno pa bi bilo delo, če bi ga opravili po drugi poti? Izračunajmo delo za enak premik kot v prejšnjem primeru, le po drugi poti. Izberimo to pot tako, da bo šla najprej v smeri kota za 45° , nato v smeri radija do $r = 2,5 \text{ cm}$ in nato nazaj za kot 45° do končne točke.

Ugotovimo lahko, da je v smeri kota ($d\vec{l} = \vec{e}_\phi r d\phi$) polje enako nič, saj je polje v vsaki točki usmerjeno radialno. Torej je produkt integracije $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ v smeri kota enak nič in je rezultat enak kot prej.

Ker je rezultat integracije polja neodvisen od poti lahko

vzamemo dve poljubni poti in zapišemo $\int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

Slika 8-5: Delo električnih sil od točke T_1 do točke T_2 po poti L_1 in poti L_2 je enako.



Pri kolesarjenju pogosto končamo na istem mestu kot smo začeli. Če bi šlo za delo električnih sil, bi bilo (po definiciji) na koncu delo enako nič. Kako pa je z energijo?

DELO PO ZAKLJUČENI POTI

Ker velja (glej Slika 8-5) $\int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, integracija v nasprotni smeri pa spremeni predznak

integralu $\int_{-L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, lahko pišemo

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1+(-L_2)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{-L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Prišli smo do pomembnega rezultata, da je **krivuljni integral električne poljske jakosti po poljubni zaključeni poti (zanki) enak nič**:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{ZAKON POTENCIALNOSTI ELEKTROSTATIČNEGA POLJA} \quad (8.4)$$

Ta zapis imenujemo zakon o potencialnosti električnega polja, in ima (skoraj) enako veljavo kot Gaussov zakon, spada torej med osnovne zakone elektromagnetnega polja. Skoraj pa zato, ker je zakon v obliki enačbe (8.4) primeren za obravnavo elektrostaticnega polja, če pa je polje dinamično (naboj ni statičen), je potrebno ta zakon nadgraditi. V nadgrajeni obliki ga bomo obravnavali v drugem semestru in ga poimenovali Faradayev zakon.

S krogcem v simbolu integrala označimo t.i. zaključen integral. Če gre za integracijo po poti, je to potem integral po zaključeni poti, če pa gre za integracijo po površini, to pomeni integracijo po celotni površini telesa.

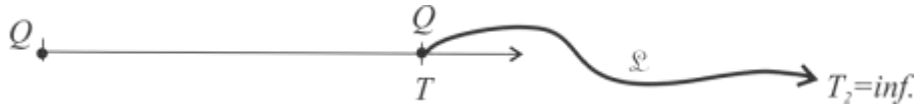
POTENCIALNA ENERGIJA



Slika 8-6: S premagovanjem sile težnosti pridobivamo (gravitacijsko) potencialno energijo. Na sliki je primer profila pete etape kolesarske poti po okolici Grosupelj, ki je primerna za tiste, ki želijo neposredno spoznavati povezavo med delom in energijo ter zakonitosti integralov po zaključeni poti. Vir: <http://www.grosuplje.si>.

Določimo delo, ki bi bilo potrebno za premik enega od nabojev iz prejšnjega primera v neskončnost. Opravljeno delo bi bilo:

$$A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_{r_1}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot (\vec{e}_r dr) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_1}^{\infty} = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad (8.5)$$



Slika 8-7: Delo pri prenosu naboja od točke T do neskončnosti.

Če sta oba naboja pozitivna, pomeni, da je sila med njima odbojna, torej smo morali opraviti določeno delo, da ta naboja spravimo v določeno lego (točko T). Delo, ki smo ga pri tem opravili je enako delu električnih sil pri premiku iz točke T v neskončnost. Lahko rečemo, da je imel sistem (naboj) pred premikom v neskončnost določeno energijo, ki se je nato porabila za prenos. Ta **potencialna** energija je ravno enaka delu električnih sil za premik naboja v neskončnost. Če uporabimo simbol W za zapis električne potencialne energije, to simbolično zapišemo kot

$$W(T) = A_e(T \rightarrow T_{\infty}) \quad (8.6)$$

Delo, potrebno za prenos naboja Q od neke točke T do neskončnosti, je enako električni potencialni energiji tega naboja v točki T .

Primer izračuna potencialne energije sistema nabojev:

Določite elektrostatično potencialno energijo sistema dveh nabojev velikosti 10 Nc , oddaljenih za 1 cm .

Izračun: Izračun smo že opravili, saj je ta energija enaka delu polja za premik enega od nabojev od začetne lege do neskončnosti:

$$W_e = A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \underline{\underline{9 \mu\text{J}}}.$$

Komentar: na tem mestu lahko vpeljemo tudi koncept električnega potenciala.

POTENCIALNA ENERGIJA SISTEMA NABOJEV

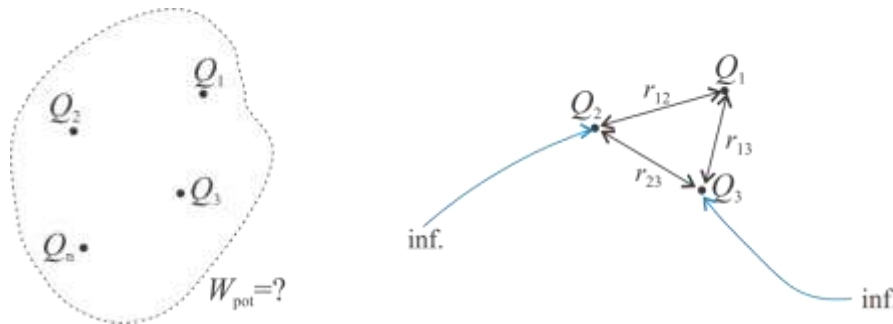
Kolikšna pa je energija skupine (sistema) nabojev? Postopamo tako, kot da bi imeli najprej na končnem mestu naboj* Q_1 , nato na mesto oddaljeno od Q_1 za r_{12} pripeljemo iz neskončnosti naboj Q_2 .

Za to je potrebno delo $A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$. Da pripeljemo poleg še naboj Q_3 potrebujemo

delo $\frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$, saj moramo sedaj opraviti delo tako zaradi sile med Q_1 in Q_3 kot tudi Q_2 in Q_3 .

* Za postavitev naboja Q_1 na določeno mesto ne potrebujemo nobenega dela, saj imamo predhodno sistem brez nabojev in torej brez polja. V nadaljevanju pa seveda vsi nadaljnji naboji prispevajo k polju – delu.

Energija sistema treh nabojev bo torej $\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$. V nadaljevanju bomo ta rezultat prikazali še nekoliko drugače.



Slika 8-8: Potencialna energija sistema nabojev. Desno način grajenja potencialne energije z dodajanjem nabojev iz neskončnosti.

DELO KOT RAZLIKA POTENCIALNIH ENERGIJ SISTEMA

Imamo sistem nabojev porazdeljenih po prostoru in torej določeno električno potencialno energijo. Sedaj premaknemo enega od nabojev iz izhodiščnega mesta T_1 na drugo mesto (T_2) in pri tem opravimo določeno (pozitivno ali negativno) delo. Če je to delo pozitivno, je delo opravilo elektrostatično polje, energija sistema pa je po premiku manjša kot pred premikom. V nasprotnem primeru (delo negativno) mora delo opraviti neka zunanja sila, kar pomeni, da je končna energija sistema večja kot pred premikom.

Delo potrebno za premik naboja od T_1 do T_2 je enako razliki potencialnih energij sistema nabojev pred in po premiku:

$$A(T_1 \rightarrow T_2) = W(T_1) - W(T_2) \tag{8.7}$$



Slika 8-9: Delo električnih sil za premik naboja iz točke T_1 do točke T_2 je enako razliki potencialnih energij sistema pred premikom ($W_{\text{pot}}(\text{začetek})$) in po premiku ($W_{\text{pot}}(\text{konec})$).

Na začetku poglavja smo kot primer izračunali delo za premik naboja Q_2 oddaljenega za d od naboja Q_1 na polovično razdaljo. To smo naredili z integracijo sile pri premiku. Sedaj lahko enak rezultat dobimo s pomočjo zgornje enačbe, saj je začetna energija sistema $W_{\text{zac}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 d}$, končna pa

$$W_{\text{zac}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 d/2}, \text{ delo pa } A = W_{\text{zac}} - W_{\text{kon}} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 d}, \text{ enako kot smo dobili z integracijo.}$$

9. Potencial in napetost

Vsebina poglavja: Električni potencial - definicija, potencial v okolici točkastega naboja, potencial sistema točkastih nabojev, potencial v okolici zvezno porazdeljenih nabojev, ekvipotencialne ploskve, električna napetost, Kirchoffov zakon.



ELEKTRIČNI POTENCIAL

Ugotovili smo že, da je električna potencialna energija naboja Q na mestu T enaka delu pri prenosu tega naboja od točke T v neskončnost oziroma do mesta, kjer je energija enaka nič:

$$W(T) = Q \int_T^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \tag{9.1}$$

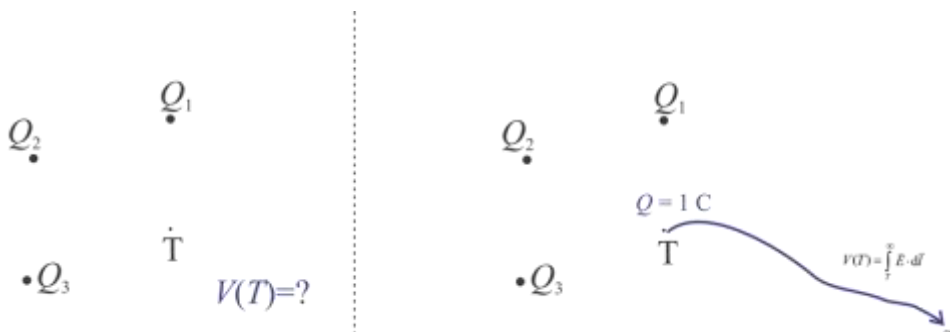
Normirano potencialno energijo $\frac{W(T)}{Q}$ imenujemo električni potencial

$$V(T) = \int_T^{T(V=0)=\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{9.2}$$

Enota za potencial je $J/C = V$.

Številčno je torej električni potencial enak delu polja električnih sil za premik enote naboja (1 C) od točke T do neskončnosti.

Ali obratno: Če poznamo potencial v določeni točki, bo energija potrebna za prenos naboja v polju električnih sil iz neskončnosti do te točke enaka produktu naboja in potenciala: $W(T) = QV(T)$ ali tudi, če se na mestu T nahaja naboj Q (ali pa ga na to mesto postavimo) in ga sila polja premakne do mesta, kjer je polje enako nič, pridobi energijo $W(T) = QV(T)$.

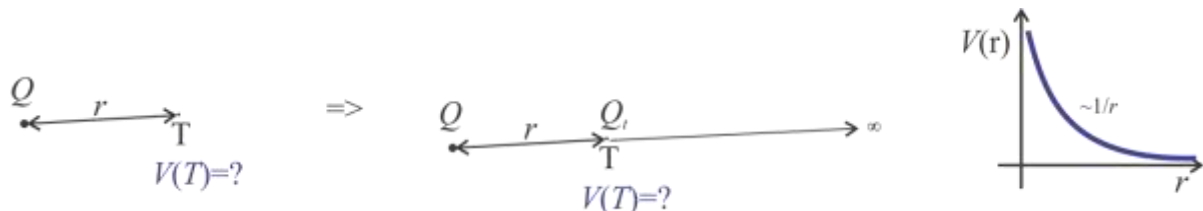


Slika 9-1: Levo: sistem nabojev, zanima nas potencial v točki T . Desno: potencial definiran kot delo za prenos naboja iz točke T v neskončnost.

POTENCIAL V OKOLICI TOČKASTEGA NABOJA Q

Določimo potencial v okolici točkastega naboja. Z upoštevanjem definicije za potencial kot normirane potencialne energije, zapišemo (na določeno oddaljenost r od naboja Q postavimo testni naboj Q_t in določimo delo, pri prenosu tega naboja od r do neskončnosti):

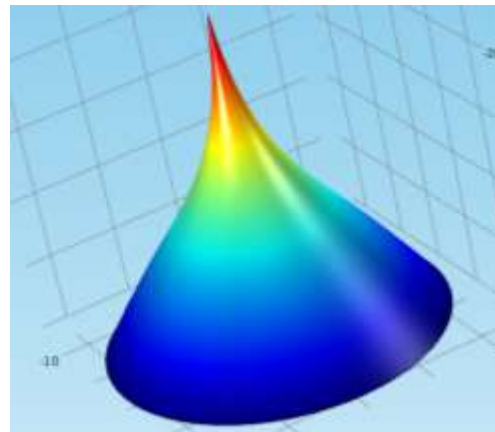
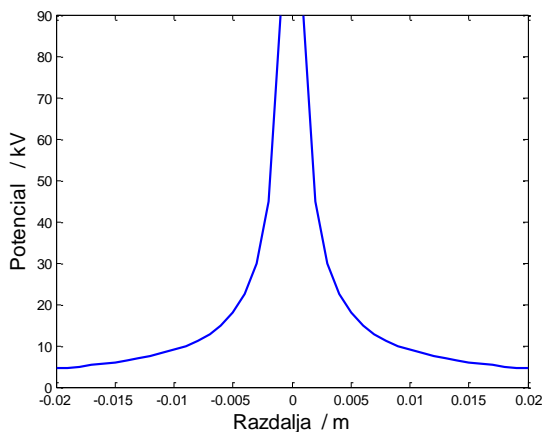
$$V(r) = \frac{W(r)}{Q_t} = \frac{1}{Q_t} \int_r^\infty Q_t \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.3)$$



Slika 9-2: Levo: zanima nas potencial v okolici osamljenega točkastega naboja. Sredina: izračun potenciala kot delo testnega naboja od točke T proti neskončnosti. Desno: Velikost potenciala v odvisnosti od oddaljenosti od naboja.

Ponovimo ta pomemben rezultat: **potential točkastega naboja se z oddaljenostjo od naboja manjša z $1/r$ in je enak**

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.4)$$



Slika 9-3: Porazdelitev potenciala v okolici točkastega naboja v preseku (levo) in v 3D prikazu (desno), kjer je velikost potenciala prikazana tako z barvo kot z višino. Potential se v bližini naboja hitreje krajevno spreminja. Tako bi se tudi povečevala energija sistema dveh nabojev, če bi se naboja približevala.

Primer izračuna potenciala v okolici točkastega naboja:

Določimo potencial v okolici točkastega naboja $Q = 10 \text{ nC}$ pri $r = 1 \text{ cm}$.

Izračun: Velja $V(r = 1 \text{ cm}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{10 \cdot 10^{-9} \text{C}}{10^{-2} \text{m}} = \underline{\underline{9 \text{ kV}}}$.

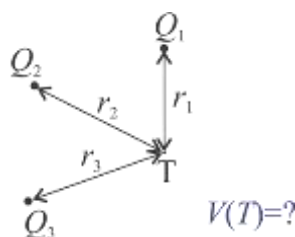
(To tudi pomeni, da bi bila energija potrebna za premik naboja 1 C iz neskončnosti do razdalje 1 cm od naboja 10 nC enaka $9 \text{ kV} \cdot 1 \text{ As} = 9 \text{ kJ}$, energija za prenos naboja 2 nC pa $W = 2 \text{ nC} \cdot 9 \text{ kV} = 18 \mu\text{J}$.)

POTENCIAL SISTEMA TOČKASTIH NABOJEV

Ugotovili smo, da je potencial v okolici enega točkastega naboja enak $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, kjer je r razdalja od točke T , kjer iščemo potencial, do točke, kjer se nahaja naboj Q . Ker velja superpozicija polja, lahko tudi potencial določimo kot superpozicijo posameznih delnih prispevkov normirane energije. Za sistem točkastih nabojev bo torej potencial v točki T enak

$$V(T) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}, \quad (9.5)$$

kjer so r_1, r_2 itd razdalje od naboja Q_1, Q_2 , itd do točke T , kjer računamo potencial.



Slika 9-4: Izračun potenciala v točki T sistema točkastih nabojev.

Primer izračuna potenciala med dvema točkastima nabojema:

Določimo potencial v sredini med dvema točkastima nabojema $Q = 10$ nC oddaljenima za 2 cm.

Izračun: $V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 2 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 1\text{cm}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^{-9} \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \cdot 10 \cdot 10^9 \text{C} \cdot 100 \text{m}^{-1} = \underline{\underline{18 \text{ kV}}}$.

POTENCIAL PRI ZVEZNO PORAZDELJENIH NABOJIH

Za porazdelitev točkastih nabojev smo ugotovili, da lahko potencial določimo kot vsoto

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}. \quad (9.6)$$

Če je porazdelitev naboja zvezna moramo vzeti en mali del celotnega naboja in z limitiranjem vsote delnih prispevkov dobimo

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta Q_i}{r_i} = \int_{\text{po vseh } Q\text{-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{ozioroma}$$

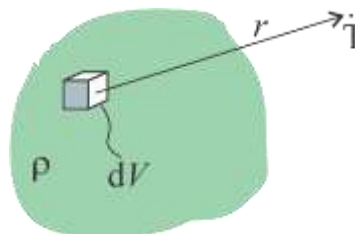
$$\boxed{dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (9.7)$$

r je razdalja od mesta, kjer se nahaja dQ do točke kjer iščemo potencial. Odvisno od načina porazdelitve naboja (po površini, volumnu, liniji) določimo potencial kot

$$V = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.8)$$

$$V = \int_A \frac{\sigma dA}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = \int_L \frac{q dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$



Slika 9-5: Izračun potenciala porazdeljenega naboja s seštevanjem (integracijo) delnih prispevkov naboja. Na sliki je narisana diferencialni naboj, točka T kjer računamo potencial in razdalja r od dQ do točke T.

Primer izračuna potenciala porazdeljenih nabojev:

Izračunajmo potencial vzdolž Z osi za enakomerno naelektren tanek obroč polmera a z nabojem Q , ki leži v ravnini $z = 0$.

Ker je naboj porazdeljen enakomerno po obroču lahko uporabimo enačbo $V = \int_L \frac{q dl}{4\pi\epsilon_0 r}$, ki jo

zapišemo v obliki
$$V = \int_0^{2\pi} \frac{q a d\varphi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\frac{Q}{2\pi a} a 2\pi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Ugotovimo lahko, da je način računanja potenciala podoben računanju električne poljske jakosti, le da je običajno nekoliko bolj preprosto. Predvsem zato, ker je potencial skalarna veličina, polje pa vektorska. Pogosto zato električno polje določimo posredno, tako, da najprej izračunamo potencial, nato pa iz potenciala še električno poljsko jakost. Kako, bomo spoznali v nadaljevanju.

POTENCIALNO POLJE JE SKALARNO POLJE

Potencial lahko določimo v vsaki točki prostora neodvisno od porazdelitve nabojev, enako, kot je veljalo za električno poljsko jakost. Je pa za razliko od električnega polja, ki je vektorsko polje, potencial skalarna veličina in tvori **skalarno polje**.

EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE

Če povežemo točke z enako velikostjo potenciala dobimo ploskev, ki jo imenujemo ekvipotencialna ravnina ali boljše ekvipotencialna ploskev. V primeru osamljenega točkastega naboja so ekvipotencialne ploskve krožnice, oz. v 3D površine krogle. Običajno jih rišemo tako, da je razlika potencialov med vsako naslednjo ploskvijo konstantna.

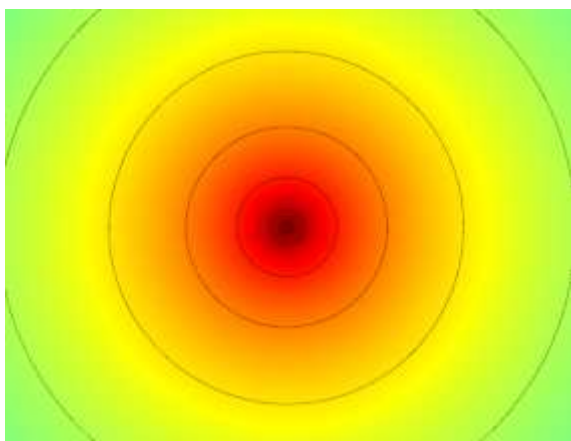
Primer določitve ekvipotencialne ploskve v okolici točkastega naboja $Q = 10 \text{ nC}$.

Ugotovili smo že, da velja za potencial v okolici točkastega naboja enačba $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Ugotovili

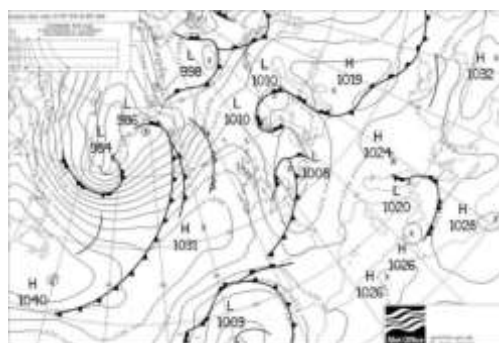
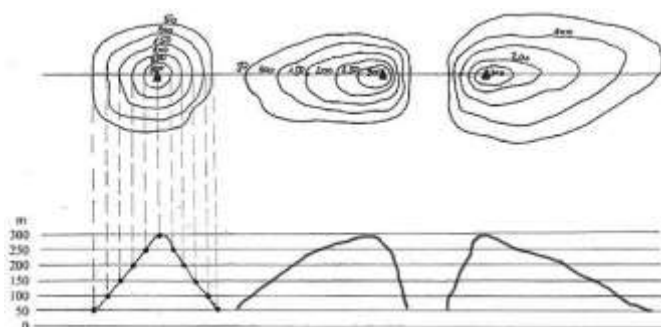
smo tudi, da je ta potencial na razdalji 1 cm enak $V(r = 1 \text{ cm}) = 9 \text{ kV}$. Potential 9 kV je torej enak v vseh točkah, ki so od točkastega naboja oddaljeni za 1 cm, kar prikažemo z lupino krogle (v 2D z krožnico) polmera 1 cm. Kje pa se nahajajo ekvipotencialne ploskve s potenciali 8 kV, 7 kV itd.? Preprosto: enačba, ki jo je potrebno rešiti za ekvipotencialno ploskev s potencialom 8 kV bo

$$8 \text{ kV} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_{8\text{kV}}} \Rightarrow r_{8\text{kV}} = Q / (8 \text{ kV} \cdot 4\pi\epsilon_0) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{8 \cdot 10^3} \text{ m} = 0,01125 \text{ m} = 1,125 \text{ cm}.$$

Naslednja ekvipotencialna ravnina bo pri $r_{7\text{kV}} = \frac{8}{7} 1,125 \text{ cm} = 1,285 \text{ cm}$ itd. V splošnem nas zanimajo ekvipotencialne ploskve, katerih potenciali se razlikujejo za konstantno razliko napetosti, v našem primeru za 1 kV). Za ekvipotencialne ploskve v okolici točkastega naboja lahko ugotovimo, da se vrstijo v geometrijskem zaporedju.



Slika 9-6: Prikaz ekvipotencialnih ploskev v okolici točkastega naboja. Ugotovimo, da je razmik med ekvipotencialnimi ploskvami manjši v bližini naboja, kar je v skladu z 3D prikazom na (Slika 9-3). (V osnovi ekvipotencialne ploskve niso krožnice pač pa bi bile površine krogel torej nekakšne lupine v okolici točkastega naboja)



Slika 9-7: Grafično na več načinov lahko prikazujemo ekvipotencialne ploskve. Na podoben način so npr. določene izohipse, kot točke z enako višinsko razliko. Na sliki levo je razviden profil različnih vzpetin in ustrezne izohipse. Vir: [HTTP://WWW.O-4OS.CE.EDUS.SI/GRADIVA/GEO/ZEMljEVID/VSE.HTM](http://www.o-4os.ce.edus.si/gradiva/gEO/ZEMljEVID/VSE.HTM). Podobno lahko pri razlagi vremena uporabljamo izobare (črte z enakim pritiskom), lahko tudi druge veličine, pomembne za razlago vremena: temperatura, hitrost dviganja vetra. Vir: [HTTP://WWW.PRO-VREME.NET/INDEX.PHP?ID=107](http://www.pro-vreme.net/index.php?id=107).



Slika 9-8: Simulacija porazdelitve ekvipotencialnih ploskev in silnic. Na spletni strani lahko premikate in dodajate naboje ter opazujete spremembe: <http://tinyurl.com/equipot-lines> . Dodaten komentar: ekvipotencialne ploskve se sicer pravilno izrisujejo, ni pa med sosednjimi enaka napetost, kar je sicer običaj pri risanju ekvipotencialnih ploskev, saj iz tega, kjer so bolj zgoščene razberemo področja z večjim električnim poljem.

ELEKTRIČNA NAPETOST

Ugotovili smo že, da lahko delo potrebno za premik naboja med dvema točkama določimo iz razlike potencialne energije sistema nabojev pred in po premiku. Če to delo opravi testni naboj 1 C govorimo o električni napetosti med dvema točkama.

Električna napetost je torej številsko enaka delu polja električnih sil potrebnem za prenos enote naboja iz točke T_1 do točke T_2 :

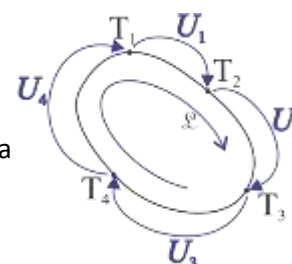
$$U_{12} = \frac{A_Q(T_1 \rightarrow T_2)}{Q_t} = \frac{W(T_1) - W(T_2)}{Q_t} = \frac{Q_t \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{Q_t} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (9.9)$$

Električna napetost je torej enaka razliki potencialov:

$$U_{12} = V(T_1) - V(T_2) = \int_{T_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{T_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{ELEKTRIČNA NAPETOST} \quad (9.10)$$

DRUGI KIRCHOFFOV ZAKON

Ugotovili smo, da električno napetost med dvema točkama določimo z integracijo električne poljske jakosti po poljubni poti od ene do druge točke. Obenem smo ugotovili, da je ta integral enak nič, če je pot zaključena sama vase (glej Zakon potencialnosti, str. 75) . Torej bi lahko pisali:



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{T_2}^{T_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{T_{N-1}}^{T_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_1 + U_2 + \dots + U_N = 0$$

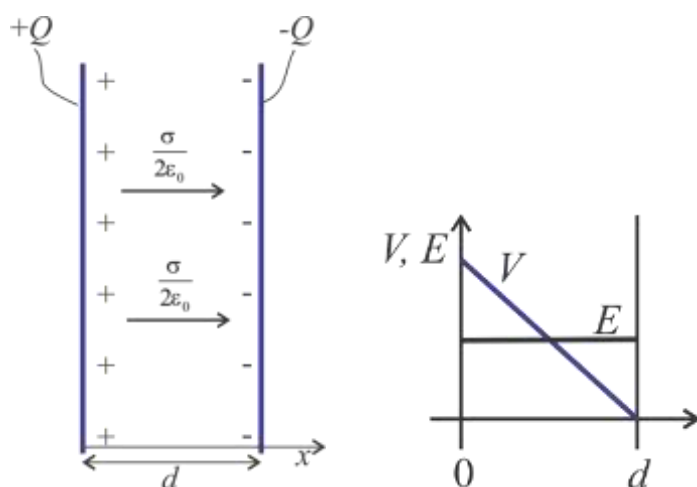
Vsota vseh napetosti po zaključeni poti (zanki) je torej enaka nič, kar imenujemo tudi 2. Kirchoffov zakon:

$$\sum_{i=1}^N U_i = 0 \quad (9.11)$$

OSNOVNI PRIMERI IZRAČUNA NAPETOSTI, POLJA IN POTENCIALA ZA: PLOŠČATI, VALJNI IN SFERIČNI KONDENZATOR

DVE RAVNI VZPOREDNI NAELEKTRENI PLOŠČI: PLOŠČNI KONDENZATOR

Ravni vzporedni plošči površine $A = 5 \cdot 8 \text{ cm}^2$ sta oddaljeni za $d = 10 \text{ cm}$ in imata naboj $\pm Q = \pm 20 \text{ nC}$. Določimo polje, potencial in napetost med ploščama, pri čemer predpostavimo homogenost polja med ploščama (polje neskončnih naelektrenih ravnin).



Slika 9-9: *Levo: dve ravni nasprotno naelektreni plošči postavljene v koordinatni sistem z normalo v smeri osi x . Desno: napetost in polje med dvema ravnima (nasprotno) naelektrenima ploščama.*

Plošči postavimo v koordinatni sistem, recimo tako, da je normala na površino v smeri osi X in da ima leva elektroda pozitiven naboj. Ob predpostavki enakomerne porazdelitve

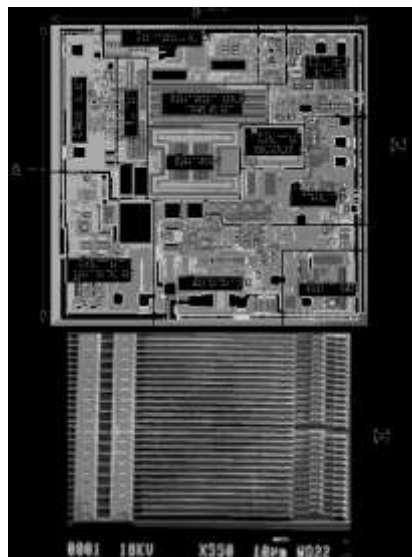
naboja je $\sigma = \frac{Q}{A}$. Dobimo $\sigma = \frac{20 \text{ nC}}{40 \text{ cm}^2} = 5 \mu\text{m/m}^2$.

Električno polje med ploščama je superpozicija polj dveh plošč in je enako * $\vec{E} = \vec{e}_x \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot 2 = \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Napetost med ploščama dobimo z integracijo polja med ploščama:

$$U = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^d \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

* Tu smo predpostavili polje v okolici dveh naelektrenih ravnin. V resnici sta dve vzporedni plošči omejenih dimenzij, zato velja aproksimalcija le delno, torej predvsem tedaj, ko je površina plošč velika v primerjavi z razdaljo med ploščama.



Mikroelektronska industrija uporablja tehnologijo mikromehanske obdelave (MEMS) za realizacijo mikronskih struktur. Na sliki integracija merilnika pospeškov, z elektroniko. Merilnik pospeškov je v osnovi sestavljen iz niza ploščinih kondenzatorjev. Ene stranice so fiksno vpete, druge pa se lahko premikajo. Z merjenjem spremembe kapacitivnosti lahko določimo hitrost spremembe – pospešek. <http://www.aero.org/publications/helvajian/>.

Pospeškometre uporabljamo v avtih za zaznavanje trkov, v prenosnih telefonih za zaznavanje premikov, nagibov, itd.

Izračun:
$$U = \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{s/m}^2}{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}} \cdot 0,1 \text{ m} = \underline{\underline{56,5 \text{ kV}}}.$$

- Iz primera ugotovimo, da je električna poljska jakost med ploščama konstantna in enaka

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \text{ Takemu polju, ki je enako usmerjeno in konstantno rečemo tudi } \mathbf{homogeno \ polje}.$$

- Če v enačbi za napetost med ploščama zamenjamo $\frac{\sigma}{\epsilon_0} = E$, dobimo

$$\boxed{U = Ed} \text{ oziroma } \boxed{E = \frac{U}{d}}. \quad (9.12)$$

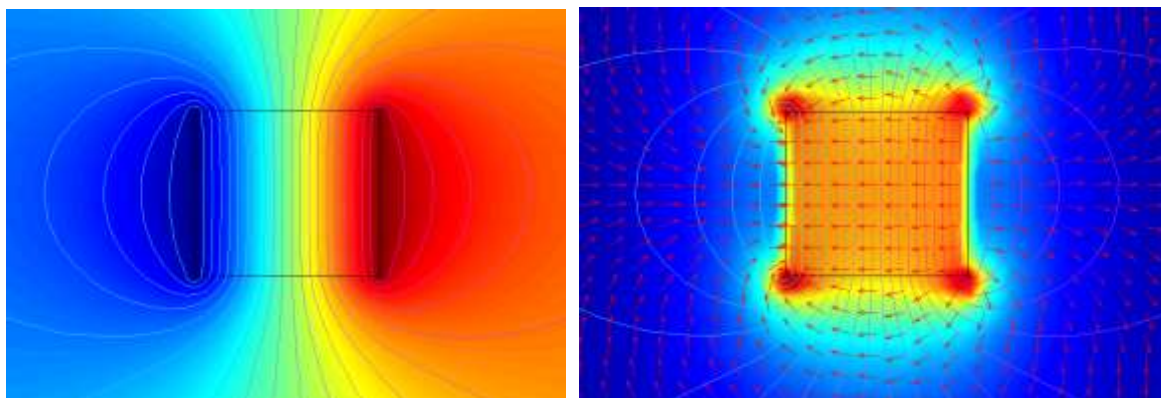
To sta enačbi, ki ju poznamo že iz srednješolske fizike. Ugotovimo lahko, da sta enačbi ustrezni za izračun polja ali napetosti, vendar le v tem konkretnem primeru, torej, za polje oz. napetost med dvema ravnima enakomerno naelektrenima ploščama. To seveda ne zmanjšuje pomembnosti izraza, pač pa velja le kot opozorilo, da se ga ne bi uporabljalo nekritično. Če polje med dvema točkama ni homogeno, je potrebno napetost med točkama izračunati s pomočjo integrala električne poljske jakosti po poti. To bomo prikazali z naslednjim primerom (koaksialni kabel).

Določimo še potencial med ploščama ploščnega kondenzatorja: če ozemljimo desno elektrodo (elektrodo, ki ima negativni naboj), bo potencial med elektrodama ($V(x=d)=0, V(x=0)=U$):

$$\boxed{V(x) = \int_x^d \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot (d-x)}. \quad (9.13)$$

Ker je polje med ploščama konstantno, se potencial (po pričakovanju) spreminja linearno. Če ozemljimo levo elektrodo, bo potencial med elektrodama:

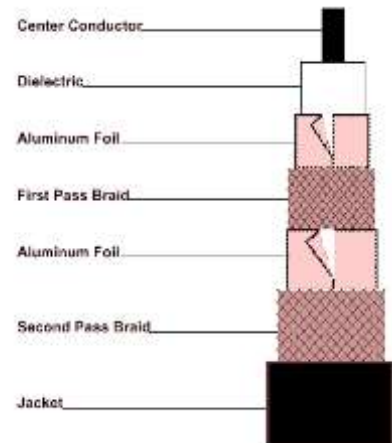
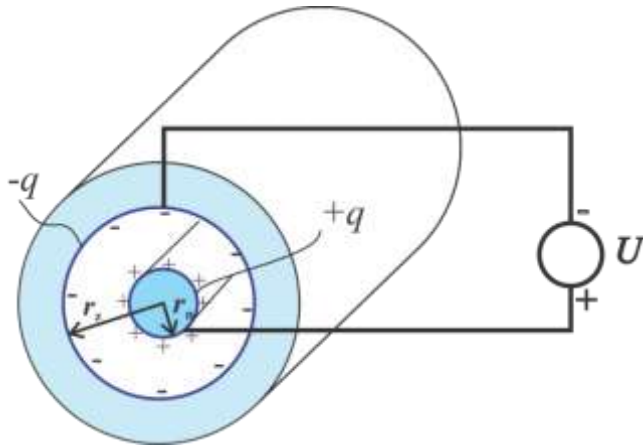
$$\boxed{V(x) = \int_x^0 \vec{e}_x \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_x dx = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot x}. \quad V(x=0)=0, V(x=d)=-U \quad (9.14)$$



Slika 9-10: Levo: ekvipotencialne ploskve med in v okolici dveh nasprotno naelektrenih ravnih plošč. Ugotovimo, da so med ploščama ekvipotencialne ploskve enakomerno razmaknjene, v okolici pa ne (bolj goste so ob robovih elektrod). Desno: vektorji električne poljske jakosti skupaj z ekvipotencialnimi ploskvami in velikostjo električne poljske jakosti (večje polje bolj rdeča barva). Za lažje opazovanje so vektorji polja prikazani enako veliki neodvisno od velikosti polja.

KOAKSIALNI KABEL (VALJNI KONDENZATOR)

Med žilo in oklopom zračnega koaksialnega kabla je napetost 2 kV. Določimo linijsko gostoto naboja na žili in oklopu ter maksimalno električno poljsko jakost, če je polmer žile $r_n = 2$ mm, $r_z = 5$ mm. Oklop in žila sta iz prevodnega materiala.



Koaksialen kabel za visokofrekvenčni prenos signalov ima več dielektričnih omotov.

<http://www.smarthome.com/851081.html>

Slika 9-11: Koaksialni kabel s priključitvijo napetosti med oklopom in žilo.

Izračun: Najprej moramo predpostaviti enakomerno porazdelitev naboja na žili in oklopu. Predpostavimo pozitivni naboj na žili (+q) in negativni na oklopu (-q). Električno poljsko jakost med žilo in oklopom določimo s pomočjo Gaussovega zakona. Na neki razdalji r od osi kabla izračunamo pretok el. polja skozi plašč valja (na velikost polja na radiju r vpliva le zaobjeti naboj). Dobimo enačbo, ki je identična enačbi za polje v okolici preme elektrine (naelektrene premice)*:

$$E_r \cdot 2\pi r l = \frac{q l}{\epsilon_0} \text{ in } E_r = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r} \text{ oziroma}$$

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r} \tag{9.15}$$

Ali je površinska gostota naboja enako velika na oklopu in na površini žile? Odgovor je NE. Enako velik je celotni naboj, za gostoto naboja pa velja: $Q(r_n) = \sigma_n 2\pi r_n l = -Q(r_z) = -\sigma_z 2\pi r_z l$, torej bo

$$\sigma_z = -\sigma_n \frac{r_n}{r_z} \tag{9.16}$$

* Podobno bi izvajali, če bi izhajali iz enakomerne površinske gostote naboja na površini žile $\sigma(r = r_n) = \sigma_n$:

$$E_r \cdot 2\pi r l = \frac{\sigma_n A(r_n)}{\epsilon_0} \text{ in } E_r = \frac{\sigma_n 2\pi r_n l}{2\pi \epsilon_0 r l} = \frac{\sigma_n r_n}{\epsilon_0 r} \text{ oziroma } \vec{E} = \vec{e}_r \frac{\sigma_n r_n}{\epsilon_0 r} \text{ . Enačba je seveda enakovredna prejšnji, saj velja } Q = q l = \sigma_n 2\pi r_n l \text{ , oziroma } q = \sigma_n 2\pi r_n \text{ .}$$

V konkretnem primeru bo torej $\sigma_z = -\sigma_n \frac{r_n}{r_z} = -\sigma_n \frac{2 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} = -\frac{2}{5} \sigma_n$.

Pogosto nas zanima tudi gostota površinsko porazdeljenega naboja. Iz izpeljanih enačb dobimo

$$E(r_n) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{\sigma_n 2\pi r_n}{2\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{\sigma_n}{\epsilon_0} \text{ oziroma } \sigma_n = \epsilon_0 E(r_n). \quad (9.17)$$

Da bi lahko določili q ali σ , moramo zapisati še izraz za napetost med žilo in oklopom. Napetost med oklopom in žilo dobimo z integracijo polja med kontaktoma:

$$U = \int_{r_n}^{r_z} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_n}^{r_z} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_z}{r_n} \quad (9.18)$$

Porazdelitev potenciala je odvisna od izbire mesta ničelnega potenciala. Če pripišemo potencialu oklopa potencial nič, torej $V(r_z) = 0$, bo potencial v poljubni točki znotraj kabla

$$V(r) = \int_r^{r_z} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_z}{r}. \quad (9.19)$$

Znotraj žile ni polja (kar lahko pokažemo z Gaussovimi stavkami), potencial je torej v notranjosti žile enak kot na površini. Podobno lahko pokažemo tudi za oklop.

In še izračun linijske gostote naboja (iz enačbe za napetost):

$$q = U \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_0}{r_n}} = 2 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \frac{2\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}}{\ln \frac{5 \text{ mm}}{2 \text{ mm}}} = \underline{\underline{0,121 \mu\text{C/m}}}.$$

Električno polje je maksimalno pri najmanjšem radiju, torej pri r_n :

$$\vec{E}_{\max} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r_n} = \vec{e}_r \frac{U}{r_n \ln \frac{r_z}{r_n}} \quad E_{\max} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ V}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \ln \frac{5}{2}} = \underline{\underline{1,09 \text{ MV/m}}}$$

Ponovimo pomembne rezultate iz tega primera:

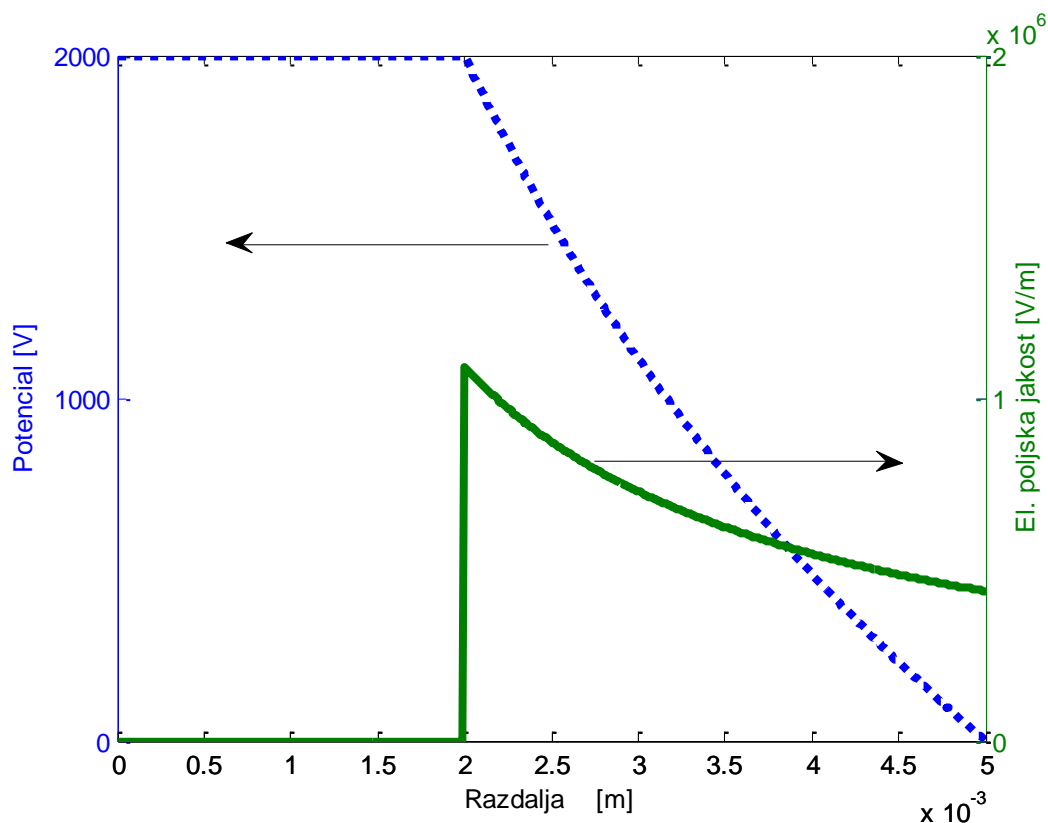
Napetost med žilo in plaščem koaksialnega kabla je $U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_z}{r_n}$,

Električno polje je $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$ **ali** $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\sigma_n r_n}{\epsilon_0 r}$

oziroma izraženo z napetostjo $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{U}{r \cdot \ln \frac{r_z}{r_n}}$.

Površinska gostota naboja pri r_n je $\sigma_n = \epsilon_0 E(r_n)$.

Izračun in izris poteka potenciala in polja znotraj koaksialnega kabla:



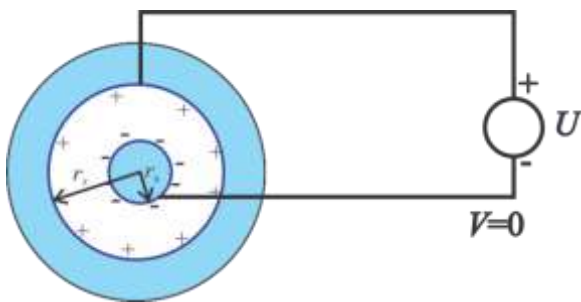
Slika 9-12: Električna poljska jakost in potencial znotraj koaksialnega kabla.

```
% PRIMER IZRISA POLJA IN POTENCIALA KOAKSIALNEGA KABLA S PROGRAMOM MATLAB
% Koaks_E_V.m
e0=8.854e-12;
U=2000; rn=2e-3; ro=5e-3;
q=U*2*pi*e0/(log(ro/rn));
R=0:1e-5:ro;
E=zeros(length(R),1);V=E;
E=q/(2*pi*e0)./R;
V=q/(2*pi*e0)*log(ro./R);
for i=1:length(R)
    if R(i)<rn
        V(i)=U;
        E(i)=0;
    end
end
h=plot(R,V,'LineWidth',3); xlabel(' Radij [m]'); ylabel(' Potential [V]');
% set(gca,'fontsize',12)
figure; plot(R,E,'Linewidth',3); xlabel(' Radij [m]'); ylabel(' El. poljska
jakost [V/m]');
%break
% IZRIS POLJA IN POTENCIALA NA ISTI SLIKI Z DVEMA OSEMA
[ax ax2]=plotyy(R,V,R,E,'plot');
axes(ax(1)); ylabel(' Potential [V]'); xlabel('Razdalja [m]')
axes(ax(2)); ylabel(' El. poljska jakost [V/m]');
set(ax1,'LineStyle',':');
set(ax1,'Linewidth',3)
set(ax2,'Linewidth',3)
```

KROGELNI (SFERIČNI) KONDENZATOR

Obravnavamo dve nasprotno naelektreni lupini krogle. Primer krogelnega kondenzatorja je zemlja z zračno atmosfero, ki ločuje površino zemlje od električno prevodne ionosfere. Drug pomemben primer je biološka celica, ki ima slabo prevodno tanko membrano. Primer je tudi krogla Van de Graffovega generatorja z drugo elektrodo v neskončnosti.

Primer: Na površini zemlje izmerimo električno poljsko jakost 150 V/m, ki je usmerjena v smeri središča zemlje. Določimo napetost med zemljo in ionosfero, ki je od površine zemlje oddaljena približno* 40 km. Določimo še površinsko gostoto naboja. Polmer zemlje je $r_n = 6370$ km, ionosfere pa $r_z = 6410$ km. Predpostavimo zemljo in ionosfero kot sferični kondenzator.



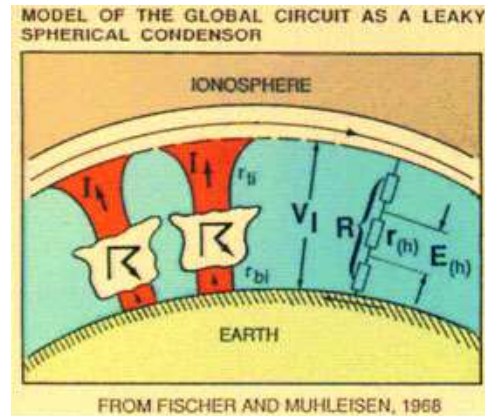
Slika 9-13: Področje med površino zemlje in ionosfero predstavimo kot velik krogelni kondenzator. Ker je polje na površini usmerjeno v smeri središča zemlje pomeni, da je zemlja naelektrena negativno glede na ionosfero.

Zemljo in ionosfero predstavimo kot sferični kondenzator. Znano je, da je na površini zemlje presežek negativnega naboja, v ionosferi pa pozitivnega, torej »postavimo« na površino zemlje naboj $-Q$, na zunanjo elektrodo pa $+Q$. Električno polje kaže v smeri centra zemlje in je (vrednost Q je pozitivna):

$$\vec{E} = -\vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

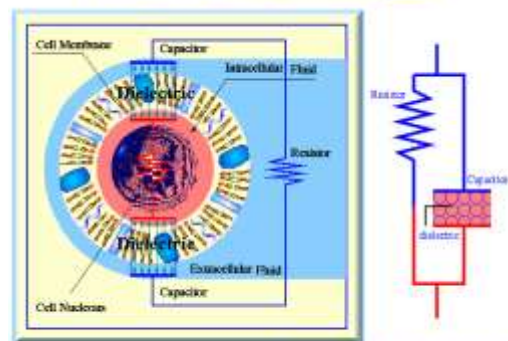
Napetost med ionosfero in zemljo je (integriramo od radija s $+Q$ do radija z $-Q$):

$$U = \int_{r_z}^{r_n} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_z}^{r_n} \vec{e}_r \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_z}^{r_n} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right). \quad (9.20)$$



Zemlja kot sferični kondenzator. Med zemljo in ionosfero je visoka napetost, kar vpliva na električne pojave.

The Plasma Membrane of a Cell and its Electrical Equivalent



The outer boundary of the cell is a plasma membrane of phospholipid molecules which because it is difficult to form an electrical capacitor when a radio frequency signal is introduced to the cell's environment.

Electrical capacitor is PARALLEL with a resistor. Capacitance is analogous to intracellular volume and resistance is analogous to extracellular volume.

Biološko celico lahko obravnavamo v električnem smislu kot sferični kondenzator. Celična membrana je izredno tanka, nekaj nm, in slabo prevodna, medtem, ko je notranjost mnogo bolj prevodna.

* Pri izračunu smo predpostavili, da je zemlja oblike krogle. Ionosfera je del atmosfere zemlje, ki je ioniziran zaradi učinkov radiacije sonca in kozmičnih visokoenergijskih delcev. Energija, ki jo sonce oddaja v določenem spektru je tako velika, da lahko razbije molekule in jih ionizira. Več o tem: <http://en.wikipedia.org/wiki/Ionosphere>.

Polje na površini zemlje je

$$\vec{E}(r = r_n) = -\vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = -\vec{e}_r \frac{U}{r_n^2} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right)^{-1}. \quad (9.21)$$

V konkretnem primeru je polje na površini zemlje $\vec{E}(r = r_n) = -\vec{e}_r 150 \text{ V/m}$. Z vstavitvijo v enačbo (9.21) izračunamo napetost med površino zemlje in ionosfero:

$$U = 150 \text{ V/m} \cdot r_n^2 \cdot \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right) = 150 \text{ V/m} \cdot (6370 \text{ km})^2 \left(\frac{1}{6370 \text{ km}} - \frac{1}{6410 \text{ km}} \right) \approx 6 \text{ MV}.$$

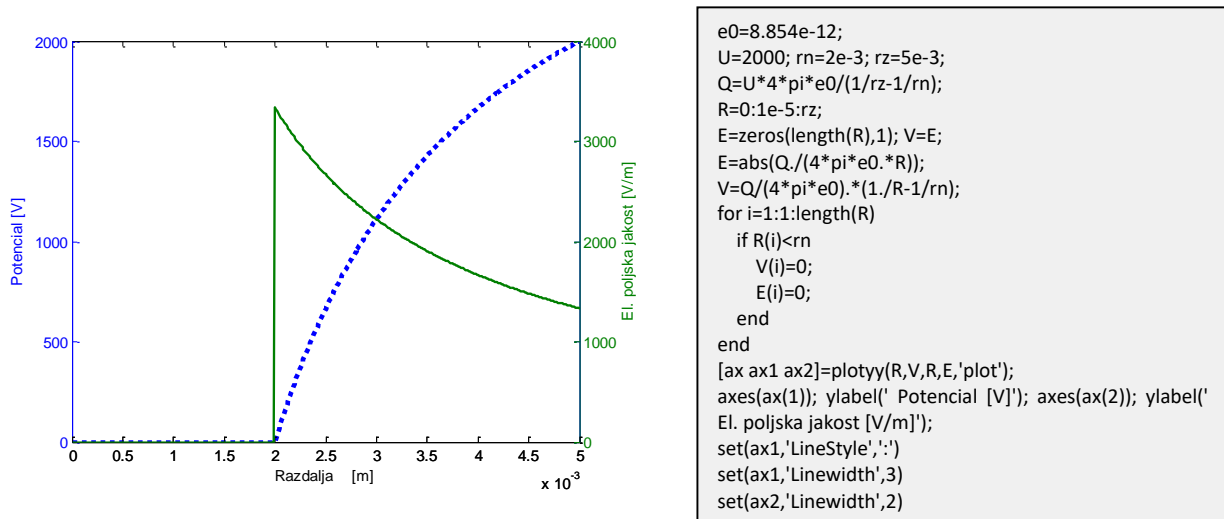
Če postavimo potencial zemlje na nič voltov $V(r_n) = 0$, dobimo za potencial

$$V(r) = \int_r^{r_n} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_r^{r_n} \vec{e}_r \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{r_n} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r} \right). \quad (9.22)$$

Gostota naboja na površini zemlje (sfere) je

$$\sigma(r_n) = \frac{-Q}{A} = \frac{-Q}{4\pi r_n^2} = \frac{E(r_n) \cdot 4\pi\epsilon_0 r_n^2}{4\pi r_n^2} = E(r_n) \cdot \epsilon_0. \quad (9.23)$$

Za konkreten primer je $\sigma(r_n) = -150 \text{ V/m} \cdot \epsilon_0 = -1,33 \text{ nC/m}^2$.



Slika 9-14: Prikaz porazdelitve potenciala in absolutne vrednosti polja v sferičnem kondenzatorju. (razdalje in napetosti so za primerjavo vzete iz primera cilindričnega kondenzatorja)

Običajno pri obravnavi sferičnega kondenzatorja predpostavimo na notranji obli (pri r_n) pozitiven, na zunanji pa negativen naboj. V tem primeru se enačbe malenkostno spremenijo, saj polje med

elektrodama kaže v smeri radija $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, napetost je $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right)$, površinska gostota naboja pa $\sigma(r_n) = E(r_n) \cdot \epsilon_0$.

POVZETEK:

1) Električni potencial je enaka normirani potencialni energiji naboja. Ali tudi: električni potencial v točki T je številsko enak delu pri prenosu enote naboja (1 C) od točke T v neskončnost oziroma do mesta, kjer je potencial enaka nič.

$$V(T) = \frac{W(T)}{Q} = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

2) Potencial v okolici točkastega naboja se manjša z $1/r$: $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

3) Potencial sistema točkastih nabojev je enak vsoti prispevkov posameznih potencialov:

$$V(T) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i} \cdot r_i \text{ je razdalja od točke, kjer računamo potencial do naboja } Q_i.$$

4) Potencial porazdeljenih nabojev določimo z integracijo $V = \int_{\text{po vseh } Q\text{-jih}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}$. r je razdalja od dQ -ja do točke, kjer računamo potencial.

5) Potencial je tako kot električna poljska jakost definiran povsod v prostoru, zato ga lahko prikažemo kot potencialno polje. Za vizualizacijo pogosto uporabljamo prikaz ekvipotencialnih ploskev, ki so ploskve z enako vrednostjo električnega potenciala. Običajno jih rišemo tako, da je razlika potencialov med vsako naslednjo ploskvijo konstantna.

6) Električna napetost je številsko enaka delu polja električnih sil potrebnem za prenos enote naboja iz točke T_1 do točke T_2 . $U_{12} = \frac{A_{Q_i}(T_1 \rightarrow T_2)}{Q_i} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Napetost je razlika potencialov

$$U_{12} = V(T_1) - V(T_2).$$

7) Delo po zaključeni poti je enako nič, kar zapišemo tudi kot $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Iz tega sledi 2. Kirchoffov zakon, da je vsota vseh padcev napetosti po zaključeni poti (zanki) enaka nič: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$.

10. Prevodnik v električnem polju

Vsebina poglavja: prevodnik v zunanjem električnem polju, površina prevodnika je ekvipotencialna ploskev, elektrostatična indukcija (influenca), polje znotraj votline prevodnika, Faradayeva kletka, prevodnik z nabojem v luknji prevodnika, električno polje na površini prevodnika, sila na površinski naboj.



Video: Ste si kdaj želeli delati pri visoki napetosti. Ni problem. Oblečete prevodno obleko, se previdno spravite na daljnovod in opravite delo. Več: google: high voltage cable inspection

Že v prejšnjem poglavju smo ugotovili, da polja znotraj žile koaksialnega kabla ni, niti ga ni znotraj prevodnega oklopa koaksialnega kabla. Ali je to le posledica simetrične porazdelitve naboja in uporabe Gaussovega zakona, ali je to splošna lastnost prevodnikov? Odgovor dobimo z razmislekom o lastnostih prevodnikov: dober prevodnik ima to lastnost, da je tudi v primeru nevtralnosti (brez presežkov naboja) v prevodniku mnogo elektronov, ki so zelo šibko vezani na jedro, kar pomeni, da jih že najmanjše zunanje polje lahko premakne iz ravnovesne lege.

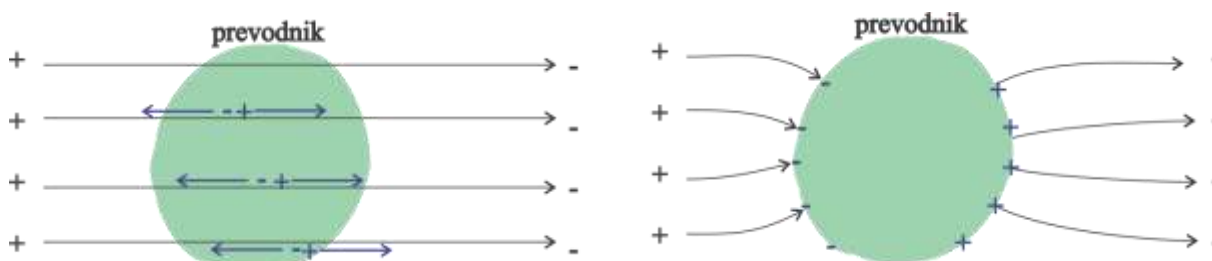
PREVODNIK V ZUNANJEM ELEKTRIČNEM POLJU

Tisti trenutek, ko prevodnik postavimo v zunanje električno polje \vec{E}_{zunanje} , na vse naboje v prevodniku deluje električna sila, v skladu z zvezo $\vec{F} = Q\vec{E}$. Prosti oziroma šibko vezani elektroni se pomaknejo v nasprotni smeri polja (ker so negativnega predznaka) do roba prevodnika.* Koliko pa se jih pomakne? Toliko, kolikor »zahteva« zunanje polje, oziroma toliko, da se vzpostavi novo stacionarno stanje, v katerem je **znotraj prevodnika polje enako nič**. Kaj pa ostane tam, kjer so prej bili elektroni, pa so se zaradi delovanja zunanjega polja odmaknili? Ostane primanjkljaj elektronov, torej presežek števila protonov nad elektroni, kar deluje kot pozitiven naboj.

* V resnici elektron ne prepotuje celotne razdalje od enega roba do drugega roba prevodnika pač pa se elektroni le zamaknejo med samo. Povprečna hitrost elektronov v prevodniku je relativno počasna (reda 20 mikronov na sekundo) in ji rečemo tudi hitrost drifta, saj med prenosom trkajo z atomi v prevodniku tako, da njihova pot ni premočrtna pač pa se le v povprečju gibljejo v nasprotni smeri polja. Prerazporeditev, ki smo ji priča, ko vstavimo prevodnik v polje pa je skoraj hipna, saj gre le za majhen zamik elektronov in je reda 10^{-19} s. Več o prevajanju v prevodnikih bomo govorili v poglavju o tokovnem polju (poglavje 24).

Očitno bodo premaknjeni naboji delovali (delujejo) z lastnim električnim poljem \vec{E}_{nabojev} tako, da bo električno polje v prevodniku $\vec{E}_{\text{v prevodniku}} = \vec{E}_{\text{zunanjih nabojev}} + \vec{E}_{\text{nabojev na površini p.}} = 0$.

$$\vec{E}_{\text{v prevodniku}} = 0 \quad (10.1)$$

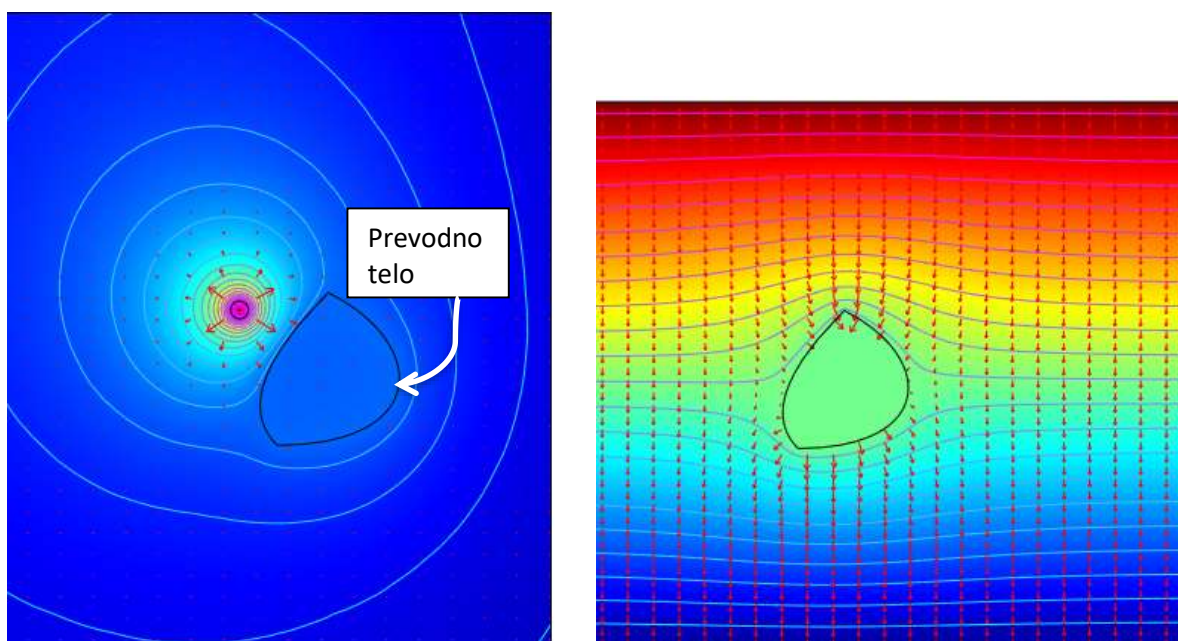


Slika 10-1: Levo: v zunanje polje vstavimo prevodnik. Desno: po (hitrem) prehodnem pojavu pride do prerazporeditve naboja (presežka elektronov na eni strani in primanjkljaja na drugi strani) tako, da je polje znotraj prevodnika enako nič, v zunanosti pa je spremenjeno, ker sedaj vplivajo na porazdelitev polja tudi prerazporejeni naboji.

Polje znotraj in v okolici prevodnika se spremeni, saj na polje vplivajo tudi prerazporejeni naboji.

POVRŠINA PREVODNIKA JE EKVIPOENCIALNA PLOSKEV

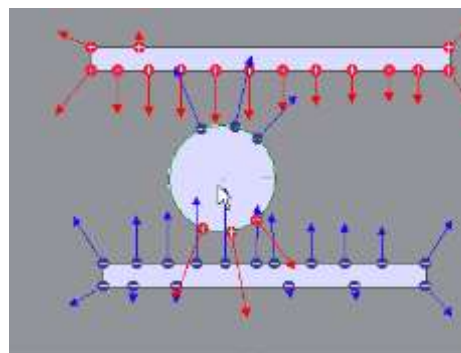
Če je polje znotraj prevodnika enako nič, potem bo tudi napetost med poljubnima dvema točkama znotraj prevodnika enaka nič, saj velja $U_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$. To pa tudi pomeni, da imajo vse točke v in na površini prevodnika enak potencial. V tem smislu rečemo, da je površina prevodnika ekvipotencialna ploskev.



Slika 10-2: Levo prevodnik v nehomogenem električnem polju, desno prevodnik v homogenem električnem polju. V barvah je prikazana velikost potenciala, z linijami ekvipotencialne ploskve in s puščicami električno polje. V obeh primerih ugotovimo, da prevodno telo pridobi določen in enovit potencial.

ELEKTROSTATIČNA INDUKCIJA ALI INFLUENCA

Če deluje polje na nevtravno prevodno telo, pride znotraj tega telesa do prerazporeditve elektronov, ki se premaknejo v smeri polja in pustijo za sabo pomanjkanje elektronov oz. pozitiven naboj. Presežkov pozitivnega naboja je enako veliko kot prerazporejenih elektronov, tako, da je vsota vseh nabojev znotraj telesa še vedno enaka nič. Prerazporeditvi naboja rečemo **elektrostatična indukcija** ali tudi **influenca**.

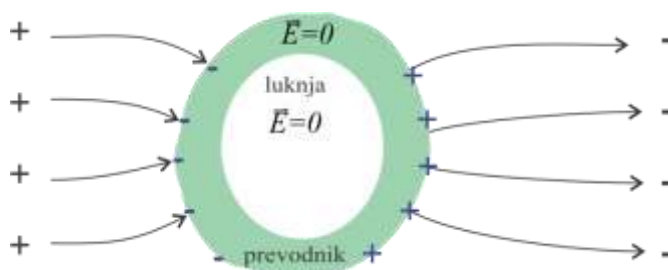


Simulacija elektrostatične indukcije s programom Jacob.

Slika 10-3: Proces prerazporeditve nabojev zaradi delovanja zunanjega polja imenujemo elektrostatična indukcija.

POLJE ZNOTRAJ VOTLINE PREVODNIKA – FARADAYEVA KLETKA

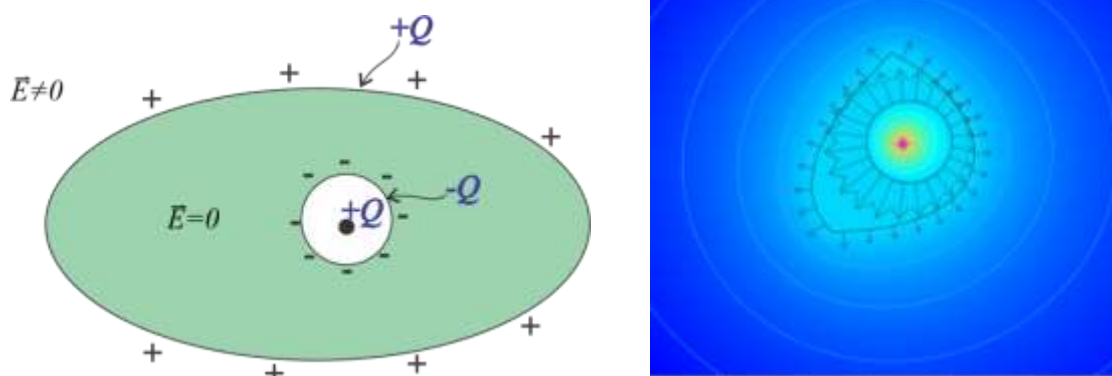
Ali je polje v votlini prevodnika, ki je izpostavljen zunanjemu električnemu polju? Če bi to polje obstajalo, potem bi imeli znotraj votline prevodnika ekvipotencialne ploskve in po Gaussovem zakonu bi morali z integracijo polja okoli ekvipotencialne ploskve dobiti množino zaobjetega naboja. Ker pa tega ni, je tudi **polje znotraj votline prevodnika enako nič**. Poleg tega ni polja tudi v notranjosti prevodnika.



Slika 10-4: Polje znotraj luknje v lprevodniku je enako nič. Tako strukturo pogosto imenujemo Faradayeva kletka in je popularen rekvizit za prikazovanju električnih eksperimentov. Uspešno ščiti notranjost kletke pred zunanjim elektrostatičnim poljem pa tudi dinamičnem (elektromagnetnim), če je le valovna dolžina elektromagnetnega polja večja od širine odprtin. Ne more pa Faradayeva kletka ščititi pred magnetostatičnim poljem ali magnetnim poljem nizkih frekvenc. Več o tem v drugem semestru. Več: <http://teslardownunder.com/>

NABOJ V VOTLINI PREVODNIKA

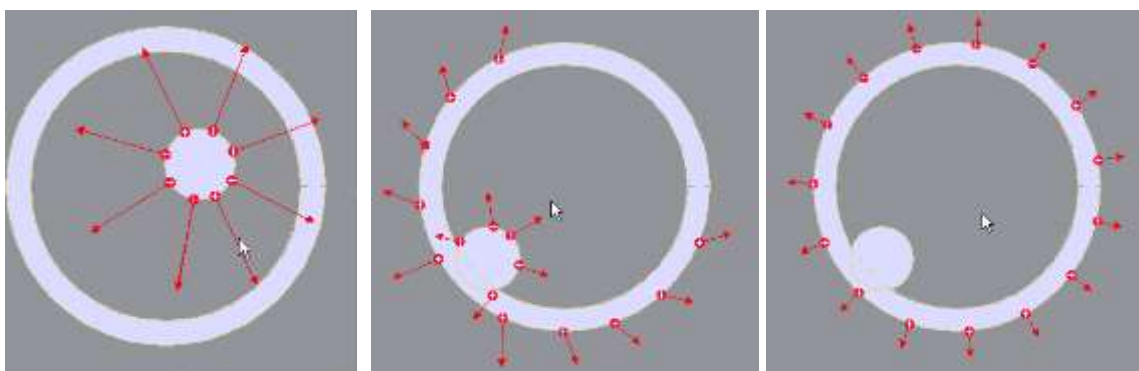
Tudi če se naboj nahaja znotraj izvotljenega prevodnega telesa, bo prišlo do pojava elektrostatične indukcije. Na notranji površini se bo inducirala naboj nasprotnega predznaka kot je v luknji, na zunanji površini se pa v smislu indukcije nakopiči naboj enakega predznaka kot je v luknji. Kaj pa polje v zunanosti prevodnika? Vpliv polja naboja v luknji in naboja na notranji površini prevodnika se izničita, ostane le polje na zunanji površini prevodnika, ki je enakega predznaka in velikosti kot naboj v luknji. Ta bo povzročil polje v okolici. Če je prevodnik sferične oblike, bo polje v zunanosti enako polju, ki bi ga povzročal točkasti naboj v središču sfere.



Slika 10-5: Levo: shematski prikaz prevodnika z odprtino, v kateri se nahaja naboj. Desno: Simulacija porazdelitve polja in potenciala za primer prevodnika z odprtino z nabojem. V barvah je prikazana velikost potenciala, z linijami ekvipotencialne ploskve in s puščicami električno polje.

PRENOS NABOJA NA ZUNANJE STENE PREVODNIKA

Ugotovili smo že, da se v izvotlenem prevodniku postavljenem v zunanje električno polje vzpostavijo take razmere, da na površini prevodnika pride do prerazporeditve naboja, znotraj prevodnika in tudi v votlini pa je polje enako nič. Če hočemo del prostora električno izolirati od okolice, ga moramo torej prevleči s prevodnikom, ki ga običajno ozemljimo. Omeniti velja, da je taka zaščita popolna za elektrostatično (enosmerno) polje, za časovno spremenljivo pa ne popolnoma, odvisno od frekvence motenj in debeline zaščitne plasti*.



Slika 10-6: Proces prenosa naboja iz notranjega prevodnika na zunanjo ob dotiku.

* Znano je, da avto smatramo kot precej varnega pred udarom strele, ker je njegova karoserija iz prevodnega materiala. Podobno velja za letala, kjer pa je kljub temu potrebna pazljiva dodatna zaščita elektronike pred udari strel. Poleg tega so moderna letala lahko zgrajena iz neprevodnih kompozitnih materialov (zaradi večje trdote in manjše teže), ki jim je ravno zaradi nevarnosti strel potrebno vgraditi dodatno prevodno plast.

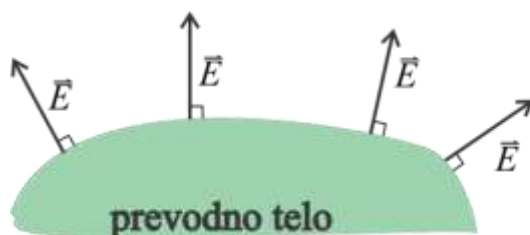
ELEKTRIČNO POLJE NA POVRŠINI PREVODNIKA

Ugotovili smo že, da je površina prevodnika ekvipotencialna ploskev. To tudi pomeni, da na površini prevodnika ne more obstajati komponenta polja, ki je usmerjena vzdolž površine prevodnika. Taki komponenti rečemo tangencialna komponenta, pravokotno na površino pa je normalna komponenta. Če bi tangencialna komponenta polja obstajala, bi to polje delovalo na šibko vezane elektrone v kovini in jih premaknila v novo ravnovesno lego. Velja torej, da je **tangencialna komponenta polja na površini prevodnika enaka nič**:

$$E_{t, \text{na površini prevodnika}} = 0 \quad (10.2)$$

Poleg tega smo na treh primerih (ploščati, valjni in krogelni kondenzator) ugotovili, da je polje na površini prevodnika enako σ / ϵ_0 . Ali to velja splošno? DA. **Polje na površini polprevodnika je usmerjeno v smeri normale na površino** in je enako*

$$\vec{E}_{\text{na površini prevodnika}} = \vec{e}_n \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (10.3)$$



Slika 10-7: Polje na površini prevodnega telesa je usmerjeno pravokotno na površino telesa. V tem smislu mora biti tangencialna komponenta polja na površini prevodnika vedno enaka nič.

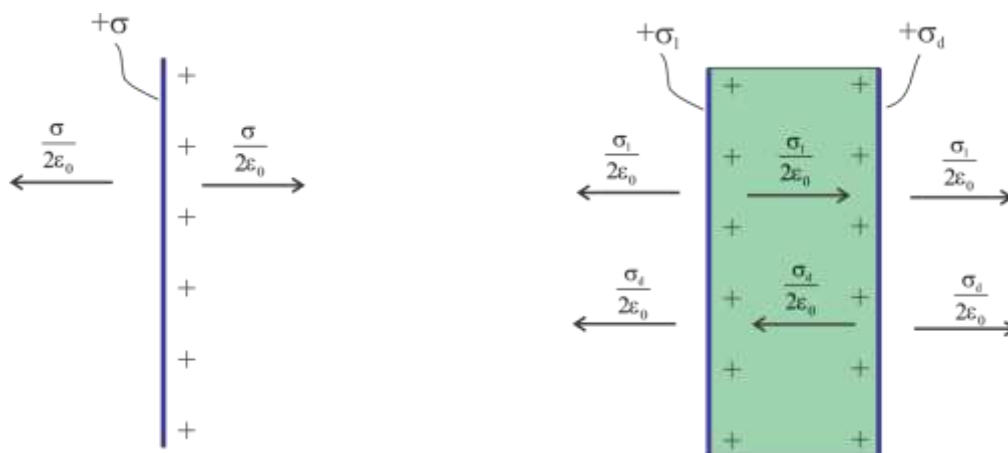
RAZLIKA MED POLJEM NAELEKTRENE RAVNINE IN POLJEM NA POVRŠINI PREVODNIKA

Za polje naelektrene ravnine smo ugotovili, da je enako $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ in kaže v smeri pravokotno na ravnino.

Vpliv nabojev na polje tik nad površino prevodnika lahko razdelimo na dva dela. En del polja prispevajo naboji na površini, ti prispevajo polje $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, vsi ostali naboji pa tudi toliko, zato je polje na

površini naelektrenega prevodnika enako $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

* Za bolj natančno razlago glej A.R.Sinigoj: Osnove elektromagnetike.



Slika 10-8: Vpliv nabojev na prevodniku na skupno električno poljsko jakost v točki na prevodniku. Levo: primer določitve polja naelektrene ravnine. Desno: primer določitve polja enakomerno naelektrenega prevodnega telesa.

SILA NA NABOJ NA POVRŠINI PREVODNIKA

Če je na površini prevodnika električno polje, mora na naboje na površini (na telo) delovati sila v skladu z izrazom $\vec{F} = Q\vec{E}$. Upoštevati je potrebno električno polje na naboje σ na površini prevodnika, ki je posledica ostalih nabojev na prevodniku. To polje je enako polovici celotnega polja na površini prevodnika* oz. $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Sila na naboje σ je ploskovna sila (ali pritisk) in je enaka

$\vec{f}_e = \vec{e}_n \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$. Celotno silo na objekt pa bi dobili z integracijo ploskovne sile po celotni površini

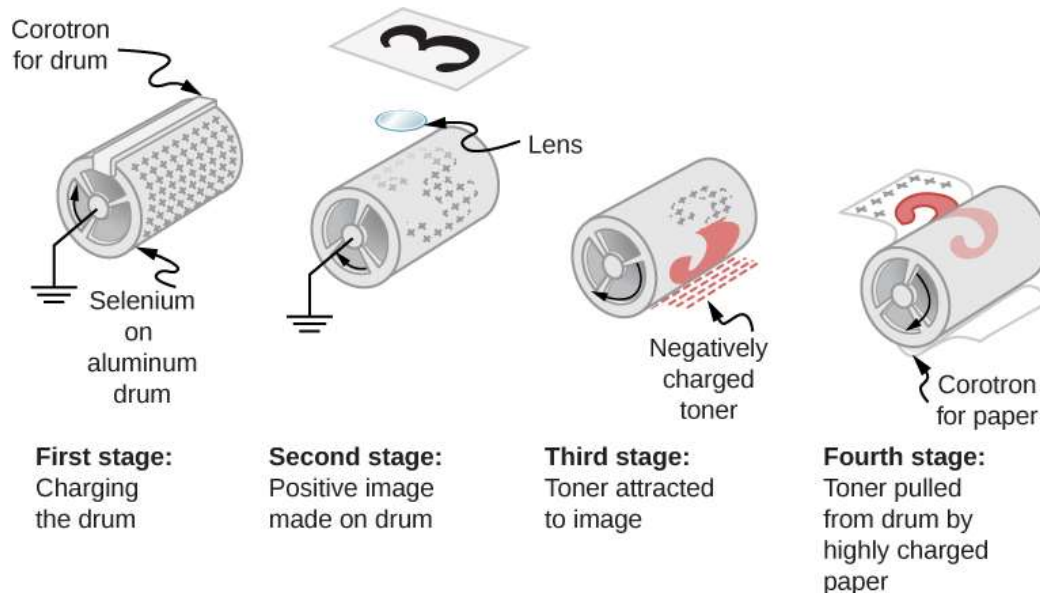
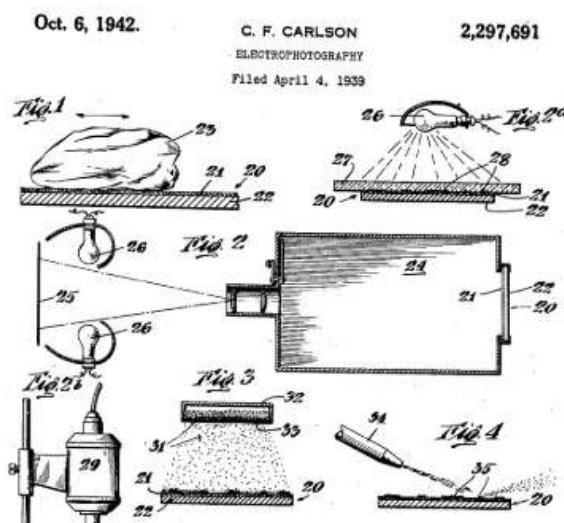
$$\vec{F}_e = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_A \sigma^2 \cdot d\vec{A}.$$

* Drugače povedano, električna poljska jakost na površini prevodnika velja pravzaprav tik nad površino, medtem, ko je električna poljska jakost na naboje σ na površini prevodnika enaka povprečni jakosti v notranjosti in zunanosti: Ker je v notranjosti polje enako nič, je polje na mestu nabojev enako $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

* XEROGRAFIJA

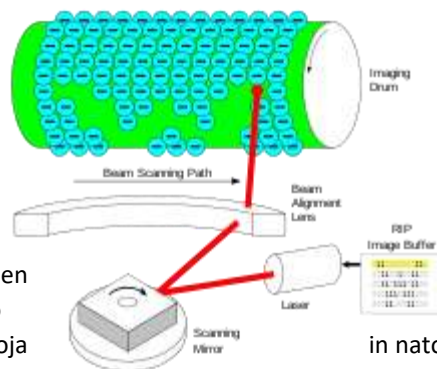
Xerografija (ime izhaja iz grških besed Xeros za suho in graphia za pisanje) je tehnika suhega fotokopiranja. Drugo ime za xerografijo je elektrografija, ker uporablja princip elektrostatične naelektritve za zapis oz. kopiranje. Osnovna tehnika, ki jo je patentiral C.F. Carlson leta 1942, je bila še nekoliko nerodna kombinacija elektrostatičnega tiska in fotografije, bistven napredek in široko uporabo pa je našla ob prehodu na cilindrične bobne prekrite s selenom, kar je naredilo podjetje Xerox leta 1960. Ključni element je ravno plast iz amornega selenija, ki je z vakumsko depozicijo nanešen na prevodni (aluminijast) valj. Amorfni selenij je fotoprevoden material, ki v temi ni prevoden, ko pa je izpostavljen svetlobi, postane prevoden. Ta princip se v fotokopirnem stroju izkoristi

tako, da se najprej pozitivno naelektri (s pomočjo elektrostatične indukcije) celotno površino iz amornega selenija, nato pa se določene dele te površine izpostavi svetlobi (tako, da se sveti na original, svetloba se odbije od svetlih delov na selenijevo površino, na temnih delih pa se absorbira). Osvetljeni deli selenija postanejo električno prevodni in omogočijo, da odteče pozitivni naboj (v bistvu se razelektri s prihodom elektronov). Pozitivni naboj tako ostane le na delih, ki niso bila osvetljena in predstavlja kopijo originala, ki ga želimo kopirati (druga faza). V tretji fazi se pozitivno naelektrene dele selenija izpostavi negativno naelektrnim delcem iz tonerja, ki se zaradi elektrostatičnega privlaka nanesejo na valj. V četrti fazi se na prazen papir nanese pozitivni naboj. To se naredi s t.i. elektrostatičnim »sprejem«, ki je v bistvu žička, ki je na visoki (pozitivni) napetosti in s tem ustvarja korono in pozitiven naboj. Ko pride pozitivno naelektrni papir v stik z valjem z nanešenimi negativno naelektrnimi delci iz tonerja, se ti zaradi elektrostatičnega privlaka nanesejo na papir. Nato jih je potrebno le še termično »fiksirati«.



Dodatno:

- Namesto amorfnega selenija se v modernejših fotokopirnih napravah (in laserskih printerjih) uporablja [organske fotoprevodnike \(OPC\)](#), ki se jih da lažje nanesti na manjše površine kot amorfni selenij. S tem se lahko zmanjša velikost naprav.
- Podobno kot fotokopirni stroj deluje tudi laserski printer, le da v tem primeru laserska svetloba osvetli negativno naelektrni valj in odstrani naboj tam, kjer naj se nanese barva. Negativno naelektrni delci iz tonerja se nanesejo le na delih, kjer ni naboja enako zapečejo kot pri fotokopirnem stroju.
- Amorfni selenij (a-Se) se uporablja tudi v druge namene, na primer kot detektor X-žarkov, ki ob naletu v plast a-Se izgubijo del energije, ki se prenese na elektrone v valenčnem energijskem pasu. Ti pridobijo dovolj energije, da »preskočijo« v prevodni pas. Če je plast a-Se izpostavljena električnemu polju (z napetostjo med dvema elektrodama), se elektroni premaknejo proti + elektrodi in jih zaznamo kot električni tok. Fotoprevodne materiale uporabljamo tudi v napravah/elementih kot so infrardeči detektorji in videokamere.
- Tudi določeni brizgalni tiskalniki (ink jet printers) uporabljajo elektrostatično polje za usmerjanje kapljic na papir. Bolj pogosto se sicer dandanes uporablja piezoelektrični princip, ki na nek način tudi spada v področje elektrostatike, saj pri piezoelektriku izkoriščamo lastnost določenih (piezoelektričnih) materialov, da se pod vplivom električne napetosti deformirajo in tako delujejo kot aktuatorji.



11. Zveza med E in V

Vsebina poglavja: povezava med električno poljsko jakostjo in potencialom, smer polja v smeri zmanjševanja potenciala, gradient polja, izračun gradienta v različnih koordinatnih sistemih, ocena velikosti polja glede na porazdelitev potenciala (ekvipotencialnih ravnin).

IZRAČUN ELEKTRIČNE POLJSKE JAKOSTI IZ POTENCIALA IN OBRATNO

Če poznamo porazdelitev električnega polja v prostoru, lahko z integracijo polja izračunamo potencial v poljubni točki (definicija potenciala):

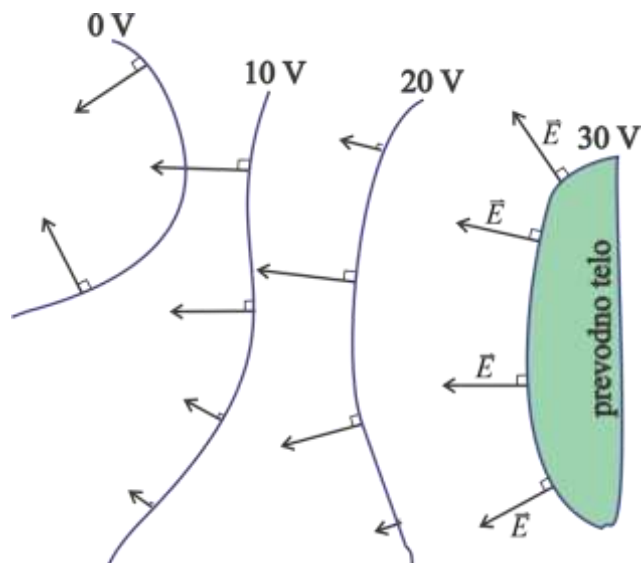
$$V(T) = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (11.1)$$

Vprašajmo se, ali lahko tudi iz znane porazdelitve potenciala določimo električno polje? Odgovor je seveda pritrdilen, uporabiti pa je potrebno nasprotno operacijo od integracije.* Najprej zapišemo diferencial potenciala kot $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$. Vzdolž ekvipotencialne ploskve je električna poljska jakost enaka nič. Torej mora biti (je) električna poljska jakost pravokotna na ekvipotencialne ploskve.†

$$\vec{E} = \vec{e}_n E_n = -e_n \frac{\partial V}{\partial n}, \quad (11.2)$$

kjer je \vec{e}_n normala na ekvipotencialno ploskev.

Slika 11-1: Električna poljska jakost kaže v smeri upadanja potenciala in je torej pravokotna na ekvipotencialne ravnine. Polje je večje, kjer so ekvipotencialne ploskve bolj zgoščene.



* Iz matematičnega priročnika lahko ugotovimo sledečo zvezo: $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) \cdot dt = f(x)$. Glede na definicijo potenciala bi

lahko pisali tudi $V(T) = - \int_{T(V=0)}^T \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{T(V=0)}^T (E_x \cdot dx + E_y \cdot dy + E_z \cdot dz)$, od koder sledi $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, itd.

† $\frac{\partial}{\partial x}$ ponazarja parcialen odvod po x-ju. Razlika med totalnim odvodom $\frac{d}{dx}$ in parcialnim je v tem, da pri parcialnem odvodu odvajamo izraz parcialno, torej le po eni spremenljivki (v konkretnem primeru po x-u), vse ostale spremenljivke pa so v smislu odvajanja konstante.

Če želimo ugotoviti velikost polja v smeri koordinat, uporabimo parcialno odvajanje po posameznih koordinatah:

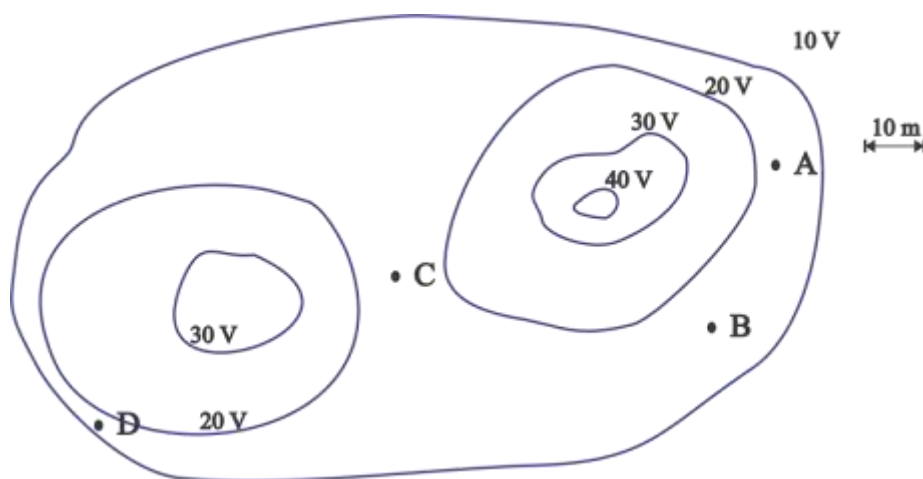
$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Če združimo posamezne komponente polja v vektor električne poljske jakosti, ga v kartezičnih koordinatah zapišemo kot*

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right). \quad (11.4)$$

$$\text{Za cilindrični koordinatni sistem velja } \vec{E} = (E_r, E_\varphi, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \varphi}, \frac{\partial V}{\partial z}\right). \quad (11.5)$$

$$\text{Za sferični koordinatni sistem velja } \vec{E} = (E_r, E_\vartheta, E_\varphi) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \vartheta}, \frac{\partial V}{r \sin(\vartheta) \partial \varphi}\right). \quad (11.6)$$



Slika 11-2: Večja gostota ekvipotencialnih ravnin pomeni večjo električno polje na tistem mestu, oziroma, zgoščenos ekvipotencialnih ploskev je merilo za velikost polja. Ocenite velikost in smer električne poljske jakosti v točkah A, B, C, D.

* Enačbo $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ lahko zapišemo tudi kot $\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V$, kjer zapis v oklepaju

imenujemo operator odvajanja, ki ga imenujemo nabla in pišemo s simbolom $\vec{\nabla}$ ali pa z imenom grad (za gradient). Zvezo med potencialom in poljem lahko torej zapišemo kot $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\text{grad}(V)$. Gre torej za operator, ki skalarnemu polju priredi vektorsko na tak način, da kaže v smeri zmanjšanja potenciala, po velikosti pa je enak (krajevni) hitrosti spreminjanja potenciala.

Primer izračuna električne poljske jakosti iz poznane porazdelitve potenciala:

Električni potencial v prostoru je določen z enačbo $V(x, y, z) = 4 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} xy - 3 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} z^2$. Določimo električno poljsko jakost v poljubni točki prostora ter v točki T(1 m, 2 m, 3 m).

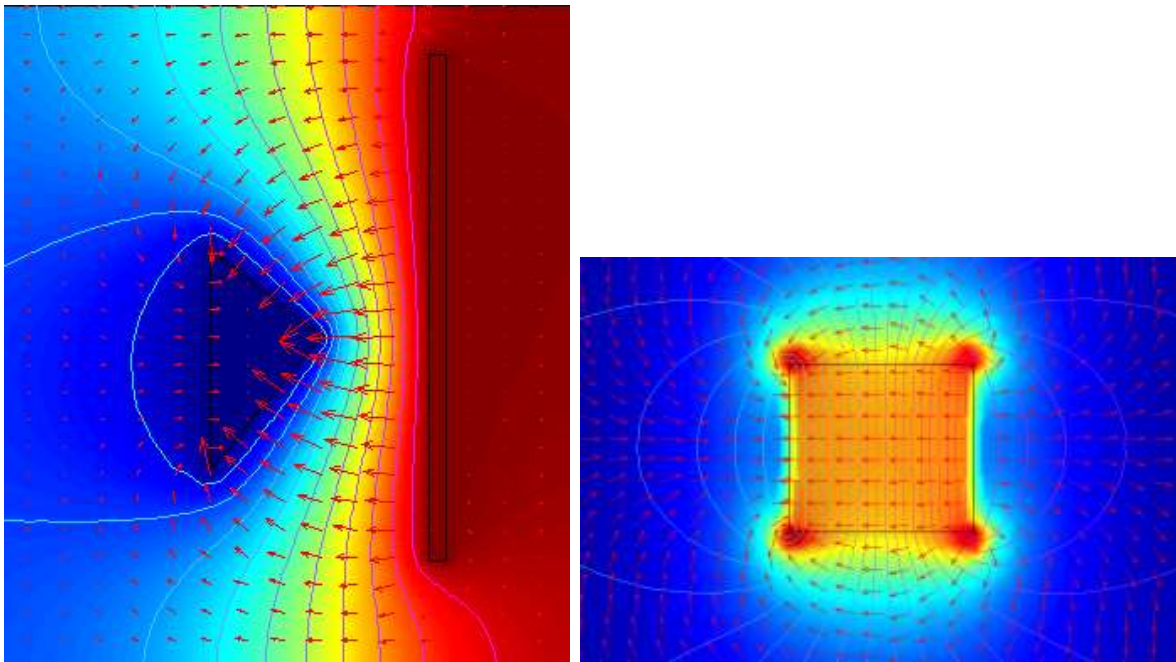
Izračun:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -4 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} y$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -4 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} x$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -(-2 \cdot 3 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} z) = 6 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} z$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \underline{\underline{\left(-4y, -4x, 6z\right) \frac{\text{V}}{\text{m}}}} \text{ in } \vec{E}(1 \text{ m}, 2 \text{ m}, 3 \text{ m}) = \underline{\underline{\left(-8, -4, 18\right) \frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$



Slika 11-3: Električna poljska jakost kaže smer in hitrost upadanja potenciala. Primera polja klinaste elektrode ob ravni elektrodi in polja med ravnima ploščama. Na levi sliki so polje vektorjev polja prikazane še ekvipotencialne ravnine ter potencial v barvni lestvici. Na desni sliki pa so zaradi lažjega opazovanja vektorji polja normirani, velikost polja pa prikazuje barvna lestvica. Poleg tega so prikazane ekvipotencialne ravnine.

12. Gibanje nabojev v električnem polju

Vsebina poglavja: sila na naelektren delec v električnem polju, enačba gibanja, odklon naelektrenega delca v električnem polju, energija delca med gibanjem, ohranitev energije, primerjava med gravitacijsko in električno silo, eksperimenti J.J. Thomsona s katodno cevjo.

Če se naboj nahaja v električnem polju in ima možnost gibanja, se giblje v skladu s silami, ki delujejo na naboj. V splošnem velja enačba gibanja

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (12.1)$$

kjer pod vsoto vseh sil upoštevamo električno, mehanično, kemično silo itd. Mi se bomo predvsem posvetili električni sili na naboje. V tem primeru gibanje naboja določimo z upoštevanjem zveze:

$$m\vec{a} = Q\vec{E} \quad (12.2)$$

Pospešek a je vektor, ki ima tri komponente, in je enak časovnemu odvodu hitrosti, ta pa časovnemu odvodu poti, torej velja $m\vec{a} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = Q\vec{E}(\vec{r}, t)$ ali na kratko

$$m\ddot{\vec{r}} = Q\vec{E}. \quad (12.3)$$

V splošnem moramo trajektorijo gibanja delcev določiti s pomočjo reševanja sistema treh diferencialnih enačb. Pogosto pa je mogoče določiti pozicijo delca z uporabo osnovnih zvez, kar bomo prikazali kar na primeru.

Primer izračuna trajektorije gibanja naboja:

V homogeno polje 2000 V/m usmerimo elektron s hitrostjo 10^6 m/s, ki vpade prečno na smer polja. Določimo odklon elektrona iz vpadne smeri po preletu polja za 1 cm.

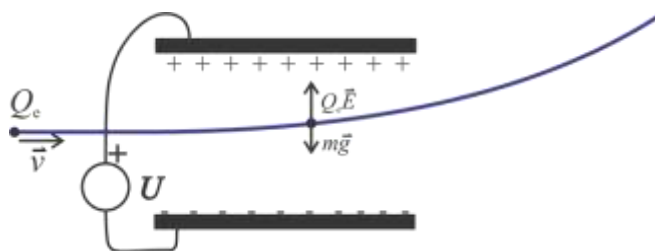
Izračun: Elektron nadaljuje pot v smeri leta pred vpadom v polje s hitrostjo 10^6 m/s, za 1 cm poti pa

potrebuje časa $t = \frac{x}{v_x} = \frac{1 \text{ cm}}{10^6 \text{ m/s}} = 10^{-8} \text{ s}$. Obenem v prečni smeri nanj deluje električna sila in torej

pospešek $a_y = \frac{Q_e \cdot E}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ V/m}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 3,52 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$, odklon v tej smeri pa bo enak

$$y = \frac{a_y \cdot t^2}{2} = \frac{3,52 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2 \cdot (10^{-8} \text{ s})^2}{2} = \underline{\underline{17,58 \text{ mm}}}.$$

Slika: Elektron prileti v električno polje in se ukloni.



ENERGIJA DELCA MED GIBANJEM

In kako je z energijo tega naboja med gibanjem? Zgornjo enačbo integriramo v smeri poti in dobimo

$$\int_{T_1}^{T_2} m\vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (12.4)$$

Če izvajanje poenostavimo le na gibanje v eni smeri (recimo X), se zgornja zveza poenostavi v

$$m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dv}{dt} dx = m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dx}{dt} dv = m \int_{T_1}^{T_2} v dv = Q \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \text{ iz česar sledi}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Q(V(T_1) - V(T_2)). \quad (12.5)$$

V splošnem pa bo $v^2 = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$. Če to zvezo napišemo nekoliko drugače, dobimo

$$\frac{mv_1^2}{2} + QV(T_1) = \frac{mv_2^2}{2} + QV(T_2) \text{ oziroma}$$

$$W_{\text{kin}}(T_1) + W_{\text{pot}}(T_1) = W_{\text{kin}}(T_2) + W_{\text{pot}}(T_2) \quad (12.6)$$

Enačbo preberemo kot: **Energija se med gibanjem ohranja, se pa pri tem pretvarja iz kinetične v potencialno ali obratno.**

Na naboj, ki se giblje v smeri polja deluje pospešek, torej se mu povečuje/zmanjšuje hitrost in s tem kinetična energija, hkrati pa se mu zmanjšuje/povečuje potencialna energija.

Primer izračuna pri preletu naboja:

Elektron prileti s hitrostjo 10^6 m/s v zaviralno homogeno polje, ki ga vzpostavimo z napetostjo med vzporednima elektrodama oddaljenima za 10 cm. Določimo potrebno napetost med elektrodama, da se bo delec ustavil na polovici razdalje med elektrodama.

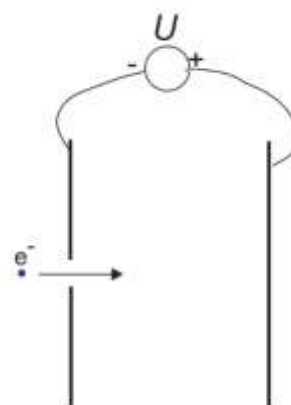
Izračun: Na začetku bo imel elektron le kinetično energijo $\frac{mv_1^2}{2}$, potencialna energija pa je enaka nič. Ko se elektron ustavi na sredini med elektrodama, bo njegova kinetična energija enaka nič, potencialna pa bo enaka $Q\frac{U}{2}$. Potrebno napetost torej določimo iz izenačitve

energij na začetku in na koncu (ko se elektron ustavi na polovici razdalje med elektrodama je njegova hitrost enaka nič):

$$\frac{mv_1^2}{2} = Q\frac{U}{2}. \text{ Sledi: } U = \frac{mv_1^2}{Q} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (10^6 \text{ m/s})^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = \underline{\underline{5,69 \text{ V}}}.$$

Vprašanje:

Zakaj je v konkretnem primeru razdalja med elektrodama nepomembna?



Kaj se »zgodí z elektronom po ustavitvi«? Odg.: Polje ga bo pospešilo nazaj in izstopil bo iz polja z enako hitrostjo, kot je v polje vstopil.

PRIMERJAVA VELIKOSTI GRAVITACIJSKE IN ELEKTRIČNE SILE

Kako velika je električna sila v primerjavi s silo gravitacije? Vzemimo kar prvi primer in primerjajmo velikost sile polja in sile gravitacije, če je elektron v polju 2 kV/m:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{Q_e E}{mg} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^3}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,8} = \underline{\underline{3,59 \cdot 10^{13}}}.$$

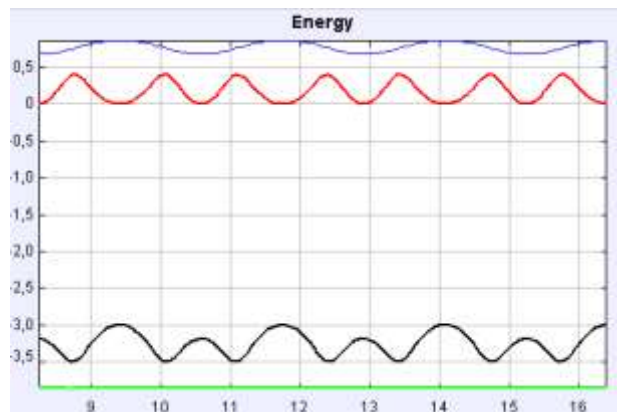
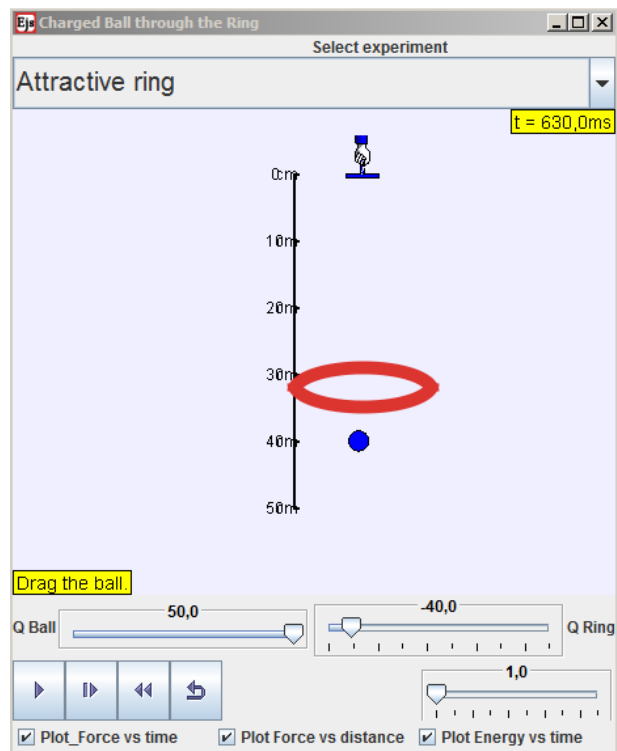
Ugotovimo, da je v tipičnih primerih (že pri majhnem električnem polju) električna sila mnogo večja od gravitacijske.

* SIMULACIJE S PROGRAMOM EJSS

Program EJSS (Easy JavaScript Simulations) je posebno primeren za izdelavo preprostih simulacij, ki zahtevajo reševanje diferencialnih enačb. Na sliki je primer simulacije naelektrene kroglice, ki pada skozi naelektren obroč. V osnovi gre za reševanje diferencialne enačbe (12.3), kjer je E polje v osi naelektrenega obroča. Ob izvajanju opazujemo gibanje naelektrene kroglice, silo med kroglico in obročem ter energijo kroglice. Če sta kroglica in obroč nasprotno naelektrena, je med njima privlačna sila, ki potiska kroglico v smeri obroča. Ko prileti skozi obroč je njena hitrost in s tem kinetična energija maksimalna, minimalna pa je potencialna energija. Nato se kroglica oddaljuje od obroča, nanjo zopet deluje privlačna sila, ki pa sedaj zmanjšuje hitrost kroglice, povečuje pa njeno potencialno energijo. Če upoštevamo še gravitacijsko potencialno energijo, mora biti vsota vseh energij vedno enaka, kar vidimo tudi na sliki desno. (zeleno – vsota energij, črno – kinetična energija, rdeče – električna potencialna energija, modro – gravitacijska potencialna energija).

Konkreten primer je na strani <http://tinyurl.com/charge-falling>,

drugi primeri in razlaga uporabe programa EJSS so na strani www.compadre.org pod zavihkom OSP (Open Source Physics). Večina simulacij je v napisana v programskem jeziku Java, datoteka ima običajno končnico '.jar'. Tako datoteko je potrebno najprej shraniti na računalnik in nato pognati. Novejše simulacije so napisane v programskem jeziku Javascript in jih je mogoče izvajati direktno v brskalniku.



PREBOJNA TRDNOST, PREBOJNA NAPETOST

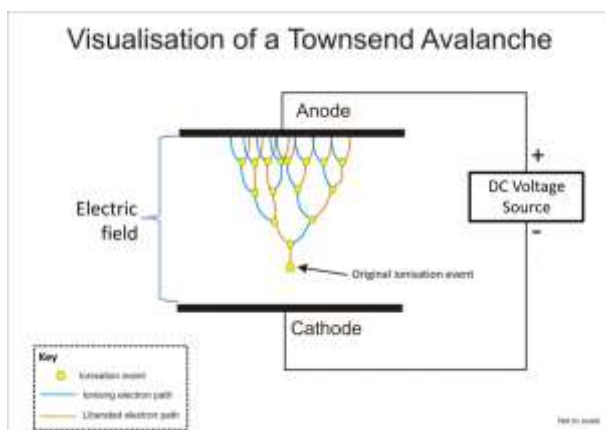
V prostoru je vedno določena količina nabojev v obliki ionov ali prostih elektronov. V kolikor na njih delujemo z električnim poljem, se ti naboji gibljejo v skladu z enačbo $\vec{F} = Q\vec{E}$. Tak naboj v polju pospešuje in pridobiva kinetično energijo v skladu z enačbo $W_{kin} = \int Q\vec{E} \cdot d\vec{l}$, ki jo za majhno razdaljo Δl lahko zapišemo kot $\Delta W_{kin} = QE\Delta l$. naboj pospešuje dokler ne trči z drugim delcem. Povprečna prosta pot elektrona (pri zračnem tlaku) je 10^{-5} m, iona pa 10^{-7} m (ker je ion mnogo večji od elektrona hitreje naleti na »oviro«). Ko tak naboj trči z drugim delcem (molekulo v zraku) lahko preda nakopičeno kinetično energijo drugemu delcu. Če je ta energija dovolj velika, lahko elektron v drugem delcu pridobi dovolj energije, da se od delca odmakne in postane prost. To energijo imenujemo ionizacijska in je približno enaka $5 \cdot 10^{-18}$ J (cca 30 eV).



To energijo imenujemo ionizacijska in je približno enaka $5 \cdot 10^{-18}$ J (cca 30 eV). Potrebna električna poljska jakost, da pride do ionizacije zraka je torej

$E_{preb} = \frac{W_{ion}}{Q\lambda_e} \approx 3 \cdot 10^6$ V/m. **Električni poljski jakosti pri kateri pride do ionizacije rečemo tudi prebojna trdnost. Prebojna trdnost zraka je torej približno 3 MV/m.** Ko je ta vrednost presežena, pride do ionizacije nabojev, saj novo izbiti elektroni izbijajo nove elektrone čemur rečemo plazovita ionizacija. Tak proces prikazuje slika na desni (Wikipedia), procesu pa rečemo tudi Townsendova razelektritev, saj se ta proces običajno konča z razelektritvijo, pogosto v obliki iskre (npr strela). Lahko pa je ionizacija tudi kontrolirana in jo uporabimo v koristne namene, npr. ionizator zraka.

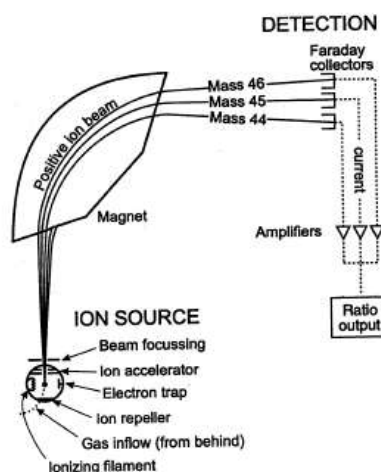
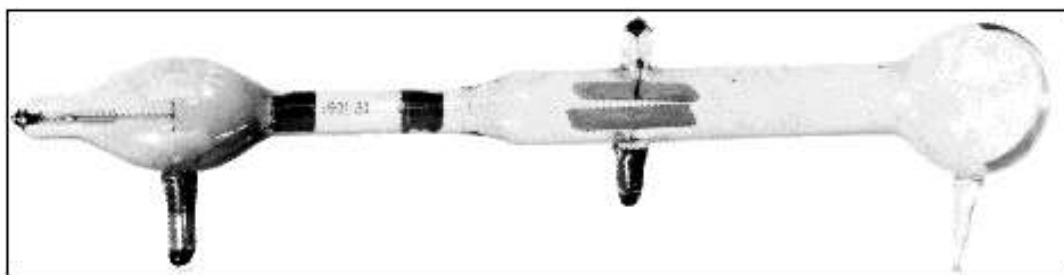
Na podoben način pride do preboja tudi v snoveh, le da zaradi močnejše vezave nabojev v snovi in manjšega števila prostih elektronov pride do preboja pri višjih poljskih jakostih. Prebojne trdnosti dielektrikov so tako običajno vsaj en velikosti razred večje kot je prebojna trdnost zraka. Načinov razelektritve v zraku je več, najbolj tipične so grmičasta (na sliki) in kronasta razelektritev. Prva je značilna za razelektritve na večjih prevodnih telesih in druga na koničastih predmetih.



Preberite si tudi članek kolega Ivana Božiča: [Nevarnost elektrostatike v eksplozijsko ogroženih prostorih](#).

* 2. EKSPERIMENT JOSEPHA JOHNA THOMSONA (1856 - 1940)

JJ Thomson je Nobelov nagrajenec za fiziko za leto 1906. Nagrado je dobil za odkritje elektrona, kar mu uspelo z eksperimenti s katodno cevjo. V enem od teh eksperimentov je uspel odkriti, da so elektroni negativno naelektreni, saj se odklanjajo v električnem polju vzpostavljenim med dvema elektrodama, ki sta postavljeni prečno na smer leta elektrona. Za razliko od drugih raziskovalcev, ki so opravljali podobne eksperimente, je njemu leta 1897 to uspelo pokazati zato, ker je uspel zrak v katodni cevi v zadostni meri razredčiti (doseči dovolj nizek tlak), da se niso elektroni, ki jih je »izstreljeval« iz katode (katodni žarki), pred preходом do fluorescenčnega zaslona zadeli v molekule zraka. V nadaljnjih eksperimentih je s kombinacijo delovanja električnega in magnetnega polja ugotovil razmerje med maso elektrona in njegovim nabojem. Pokazal je tudi, da ima vodik le en elektron. JJ Thomsonu pripisujemo izum masnega spektrometra, naprave, s pomočjo katere je mogoče razpoznavati kompozicijo snovi iz razmerja med maso in nabojem (masni spekter).

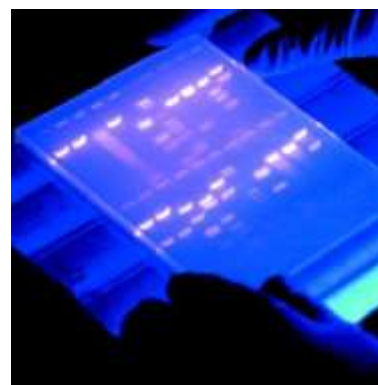
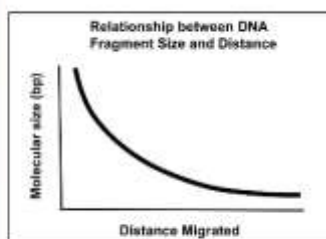
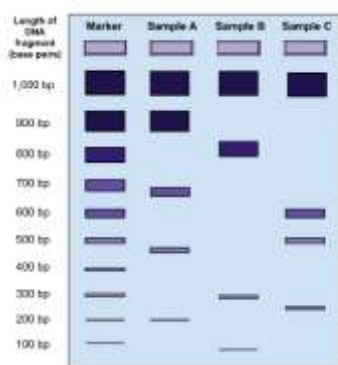


Slika 12-1: Zgoraj: katodna cev, s pomočjo katere je JJ Thomson dokazal obstoj in naravo katodnih žarkov (elektronov). Spodaj levo: koncept masnega spektrometra. Desno: v praksi masni spektrometer niti ni tako majhna naprava niti enostavna za uporabo.

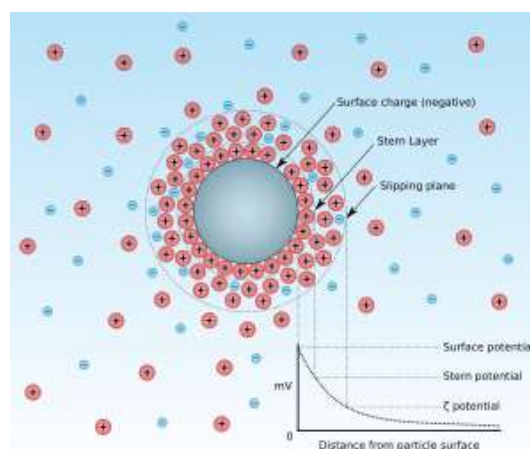
* ELEKTROFOREZA

Gibanje naelektrenih delcev raztopini pod vplivom električnega polja imenujemo elektroforeza. Metoda se uporablja na področjih kot so biokemija, imunologija, genetika in molekularna biologija. Omogoča separacijo (ločevanje) delcev kot so proteini, DNA in druge biokemijske substance na osnovi velikosti, naboja in hidrofobnosti. Za metodo ločevanja proteinov s pomočjo elektroforeze je Arne Tiselius leta 1948 prejel Nobelovo nagrado. Princip delovanja je pravzaprav preprost. Naelektren delec se v raztopini giblje pod vplivom električne sile $F_e = QE$, pri čemer se običajno električno polje vzpostavi kar s priključitvijo napetosti U na ploščnem kondenzatorju. Za ploščni kondenzator dolžine L je polje $E = \frac{U}{L}$. Nasprotni električni sili deluje sila upora tekočine, ki je odvisna od viskoznosti tekočine η in velikosti delca (radij R): $F_U = -6\pi\eta Rv$, kjer je v hitrost tekočine. V ravnovesju sta sili enaki, od koder sledi hitrost gibanja delca $v = \frac{QE}{6\pi\eta R}$. Hitrost delca je torej sorazmerna velikosti polja $v = \mu E$, kjer je μ mobilnost delca. Vodikov ion ima mobilnost $36,23 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$, natrijev, ki je mnogo večji, pa le $5,19 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$, itd. Pogosto pri naelektrenih strukturah namesto fizičnega radija delca upoštevamo nek navidezni oziroma t.i. hidrodinamski radij, ki je večji zaradi vpliva drugih nabojev v raztopini.

Morda najbolj znana uporaba principa elektroforeze je gelska (gel) elektroforeza, ki je namenjena ločevanju in analizi makromolekul (DNK, RNK, proteini) glede na velikost in naelektrenost (naboj). Manjše molekule se gibljejo v gelu hitreje kot velike. Na sliki vidimo, kako se obarvani deli DNK porazdelijo glede na število baznih parov (bp). Najdlje pridejo DNK deli z najmanjšim številom parov. Vidna je tudi razlika v DNK sekvencah pri treh različnih vzorcih.



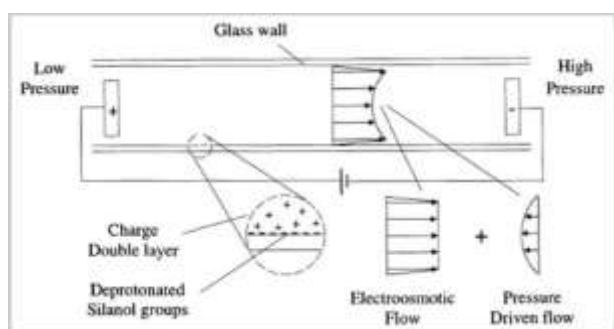
V resnici je obravnava gibanja nabojev v raztopini zaradi vpliva okoliških nabojev. Naelektren delec (ali telo) v raztopini privlači nasprotno naelektrene delce (ione), ki zastrejo naboj na telesu. To prikazuje slika na desni (Wiki). Nasprotno naelektreni delci oblikujejo tako imenovano dvojno plast (double layer), kjer prvo plast oblikujejo naelektreni delci iz raztopine, ki se zaradi elektrokemijskih sil tesno prilegajo površini naelektrenega osnovnega delca, drugo plast pa šibkeje vezani delci. Če bi imeli en sam naelektren delec, bi se po teoriji njegov potencial z oddaljenostjo od centra manjšal inverzno proporcionalno odaljenosti ($V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$). Ker pa imamo v



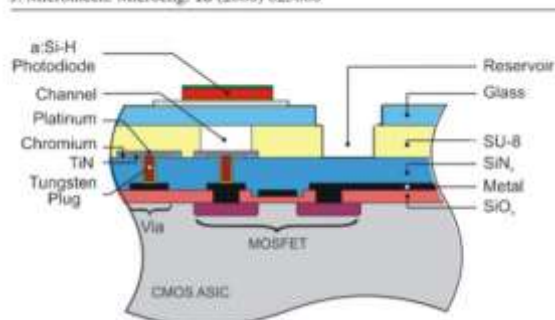
okolici naboja (telesa) še porazdeljen naboj, ki senčni le-tega, je potrebno rešiti Poissonovo enačbo (glej poglavje Poissonova in Laplaceova enačba). Za 1D porazdelitev pišemo $\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}$, kjer je ρ gostota naboja, ki pa ni konstantna, pač pa je odvisna od potenciala. Analitična rešitev te enačbe je mogoče le ob

določenih poenostavitvah. Poljak Smoluchowski je postavil teorijo elektroosmotskega gibanja nabojev v raztopini ponazorjeni z modelom dvojne plasti in pokazal, da je mobilnost takega delca odvisna od viskoznosti tekočine η , relativne dielektričnosti ter t.i. **zeta potenciala** ζ , ki je potencial na meji šibko vezanih nabojev (slipping plane) $\mu = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \zeta}{\eta}$. V elektrokemiji se pogosto uporablja posebne naprave, ki merijo zeta potencial – običajno posredno, iz merjenja mobilnosti, to pa se običajno določa z merjenjem odboja (laserske) svetlobe od delcev, ki se gibljejo v električnem polju. Zeta potencial je pomemben parameter za predvidevanje odbojnih ali privlačnih sil med delci v suspenziji. Če je zeta potencial majhen (recimo manj kot 25 mV), pomeni, da je odbojna sila med delci premajhna in se bo množica takih delcev aglomerirala. Če je zeta potencial velik, bo delec stabilen. Zeta potencial je mogoče spreminjati s spreminjanjem pH raztopine ali dodajanjem elektrolitov.

Če ne gre za gibanje posameznih nabojev v raztopini pač pa za premikanje celotne tekočine pod vplivom električnega polja, govorimo o **elektroosmozi**. Zanimiv primer uporabe so npr. mikročrpalke, ki delujejo na principu elektroosmoze. Med elektrodama v tanki cevki oz. kanalčku, izdelani z MEMS tehnologijo, se vzpostavi električno polje. To polje deluje na naboje, ki se vzpostavijo na dvojni plasti med raztopino in površino kanala. Pomikanje šibko vezanih nabojev v dvojni plasti povzroči gibanje celotne tekočine. Slika levo spodaj kaže osnovni princip delovanja elektroosmotske črpalke, na desni pa je primer integracije take črpalke s CMOS tehnologijo za izdelavo t.i. Lab-on-a-chip naprav.



J. Micromech. Microeng. 18 (2008) 025008



13. Električni dipol

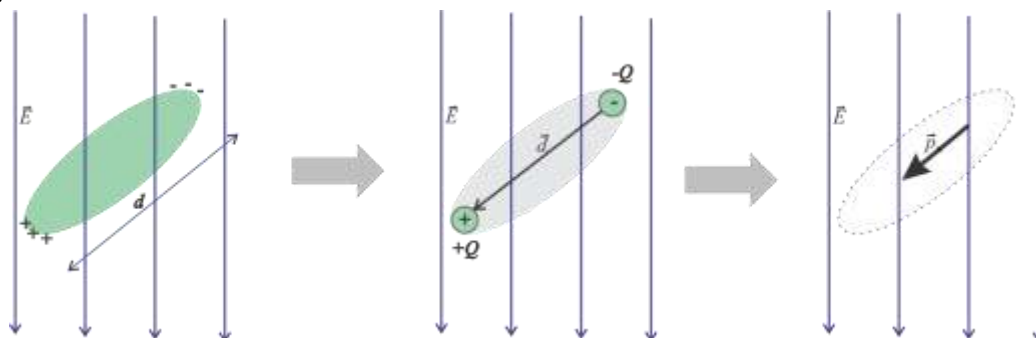
Vsebina poglavja: polarizacija prevodnika (snovi) v električnem polju, električni dipolni moment, polarne in nepolarne snovi, dipol v homogenem in nehomogenem polju, potencial in polje v okolici dipola, navor na dipol.

Električni dipol je en pomembnejših elementov v teoriji električnega polja. S tem konceptom (elementom) med drugim lahko razložimo vpliv in delovanje električnega polja v snovi, določimo vpliv električnega polja na zasak ali premik atomov ali molekul ali pa ponazorimo delovanje antene.

ELEKTRIČNI DIPOL

Spomnimo se poglavja o prevodniku v električnem polju. Če nevtralni prevoden delec postavimo v električno polje, pride v prevodniku do prerazporeditve naboja, pri čemer se elektroni premaknejo (zamaknejo) v nasprotni smeri polja. Ti zamiki potekajo toliko časa (pa vendar zelo hitro), da se v notranjosti prevodnika vzpostavi polje, ki je enako nič. Prevodni delec tako dobi enovit potencial. Presežek pozitivnega naboja na enem koncu prevodnika lahko konceptualno združimo v pozitiven točkast naboj, presežek negativnega pa v negativen točkast naboj. Ta naboja sta razmaknjena za neko fiksno razdaljo, ki jo lahko opišemo z vektorjem, ki kaže od negativnega v smeri pozitivnega naboja.

Električni dipol definiramo kot dva nasprotno predznačena točkasta naboja razmaknjena za razdaljo d .



Slika 13-1: Na prevodnem telesu v električnem polju pride do prerazporeditev naboja (levo), kar lahko ponazorimo z dvema točkastima nabojema $+Q$ in $-Q$ povezanima s fiksno razdaljo d (sredina), to pa povežemo s konceptom električnega dipola (desno).

ELEKTRIČNI DIPOLNI MOMENT

imenujemo produkt naboja Q in vektorja \vec{d} , ki je distančni vektor od naboja $-Q$ do naboja Q in ga zapišemo s simbolom \vec{p} :

$$\vec{p} = Q\vec{d} \quad (13.1)$$

Enota električnega dipolnega momenta je $^* \text{Cm}$

Pozor: Velja opozoriti, da je smer vektorja \vec{d} ravno nasprotna smeri polja, ki ga povzročata naboja in je torej definirana od minus naboja v smeri plus naboja.

* Pogosto, posebno v elektrokemiji, se uporablja za enoto električnega dipolnega momenta tudi D (Debye). Velja $1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-33} \text{ C} \cdot \text{m}$. To omogoča tudi »lepše« zapise dipolnih momentov molekul. Npr. dipolni moment vode je $p(\text{H}_2\text{O})=1,85 \text{ D}$, $p(\text{HCl})=1,08 \text{ D}$, itd.

Primer izračuna dipolnega momenta:

Vzdolž daljše osi ovalnega prevodnika dolžine 5 mm se prerazporedi 10^{10} elektronov. Ponazorimo prevodnik v obliki električnega dipola in ocenimo njegov električni dipolni moment.

Izračun:

$$p = Qd = 10^{10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-12} \text{ C} \cdot \text{m}}}$$

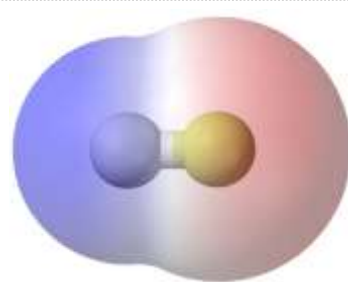
Primer izračuna dipolnega momenta:

V molekuli NaCl (sol) je razdalja med Na in Cl ionom 0,6 nm. Izračunajmo električni dipolni moment molekule NaCl.

Izračun: $p = Qd = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,6 \cdot 10^{-9} \text{ m} \approx \underline{\underline{10^{-28} \text{ C} \cdot \text{m}}}$

POLARNE IN NEPOLARNE MOLEKULE

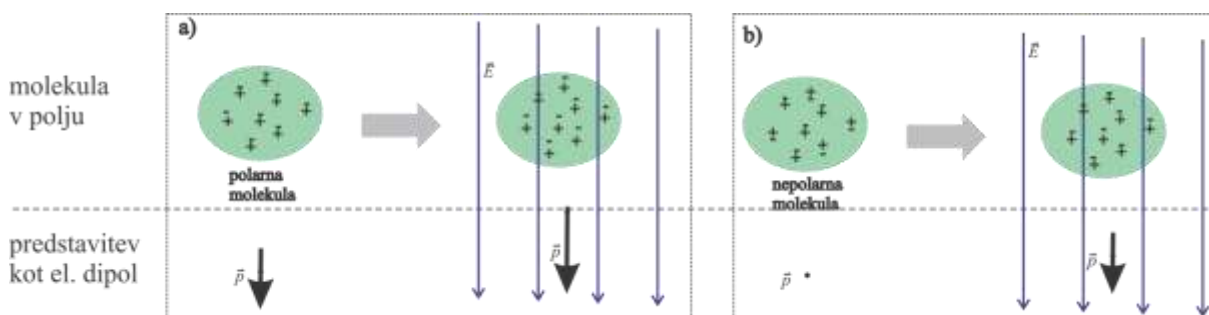
Slika 13-2 prikazuje vpliv polja na polarne in nepolarne molekule. Tako polarna kot nepolarna molekula je električno nevtralna v smislu, da ima enako število negativnih kot pozitivnih nabojev. Je pa pri polarni molekuli ta naboj že v osnovi neenakomerno porazdeljen, kot na sliki desno kaže primer porazdelitve naboja v molekuli vodikovega fluorida (HF) in molekuli vode (H_2O). Dipolni moment nepolarne molekule, ki ni izpostavljena zunanemu električnemu polju je tako enak nič, polarna molekula pa ima dipolni moment tudi če ni izpostavljena zunanemu električnemu polju. Če molekulo izpostavimo zunanemu električnemu polju, se njen dipolni moment poveča v obeh primerih. Nekateri atomi imajo večjo tendenco, da privlačijo elektrone, kar imenujemo elektronegativnost*. V kemiji pogosto namesto enote za dipolni moment Cm uporabljajo enoto D(ebye) ($1 \text{ D} = 3,34 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$).



Znotraj molekule vodikovega fluorida (HF) atom fluora močnejše privlači elektrone, ki se zato bolj zadržujejo v njegovi okolici. Ima dipolni moment 1,86 D.



Molekula vode ima neenakomerno porazdelitev pozitivnega in negativnega naboja. Elektronegativnost kisikovega atoma je 3,44, vodikovega pa 2,22. Dipolni moment vode je 1,84 D = $6,7 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$. <http://byjus.com/physics/dielectric-material-and-dipole-moment/>



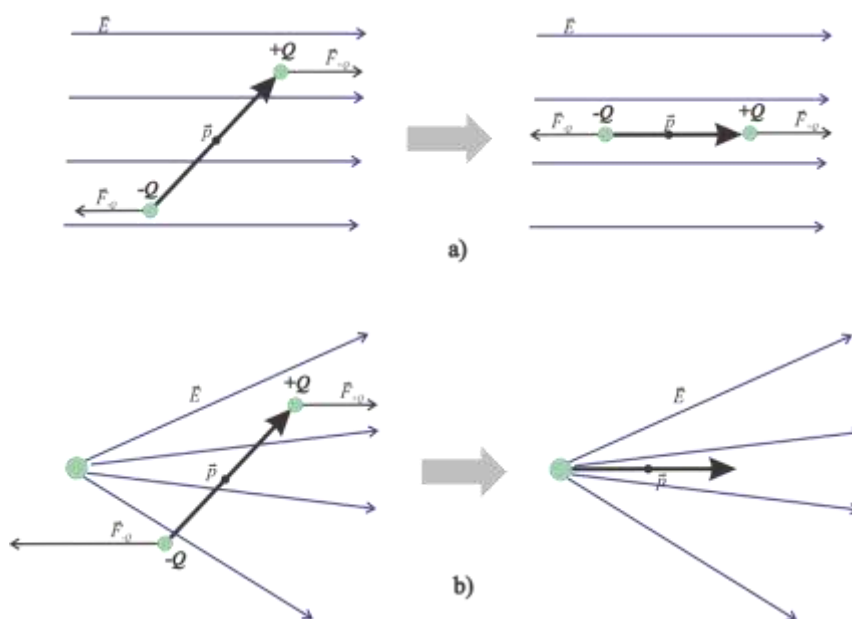
* Elektronegativnost je nekoliko bolj kompleksen pojem, saj ni odvisen le od atoma samega, pač pa tudi od molekule katere del je. Obstaja več tabel elektronegativnosti, osnovna je t.i. Paulingova tabla elektronegativnosti (wikipedia), ki je bil tudi začetnik teorije elektronegativnosti (1932), s pomočjo katere je razlagal sile pri kovalentni vezi. V splošnem se elektronegativnost atomov veča od leve proti desni strani periodne tabele elementov. S pojmom elektronegativnosti je mogoče pojasniti in razlikovati kemijske vezi kot so ionske, kovalentno polarne ali kovalentno nepolarne. Nasprotno elektronegativnosti je elektropozitivnost.

Slika 13-2: a) polarna molekula ima dipolni moment tudi ko ni izpostavljena električnemu polju. Ko je izpostavljena polju se dipolni moment še poveča. b) nepolarna molekula izven polja nima dipolnega momenta, v zunanjem električnem polju pa se polarizira.

DIPOL V ELEKTRIČNEM POLJU

Na električni dipol v električnem polju deluje električna sila, ki je enaka

$\vec{F} = \vec{F}_Q + \vec{F}_{-Q} = Q \cdot \vec{E}_Q + (-Q) \cdot \vec{E}_{-Q} = Q \cdot (\vec{E}_Q - \vec{E}_{-Q})$. Če je polje homogeno, je $\vec{E}_Q = \vec{E}_{-Q}$ in skupna sila na dipol je enaka nič. Deluje pa sila na oba naboja dipola v nasprotni smeri, tako, da bo delovala z navorom na dipol v taki smeri, da bi dipol usmerila v smer polja. Če pa je polje nehomogeno, na dipol deluje poleg navora tudi premikalna sila, ki je različna od nič in deluje v smeri večjega polja. Te sile so običajno zelo majhne, kljub temu pa jih je mogoče koristno izrabiti.



Slika 13-3: Dipol v homogenem (a) in nehomogenem (b) polju ob vzpostavitvi polja (levo) in po premiku zaradi delovanja električne sile (desno). V primeru homogenega polja pride do rotacije dipola, v primeru nehomogenega polja pa do rotacije in translacije.

Navor na električni dipol v magnetnem polju določimo s pomočjo enačbe (»ročica x sila«):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (13.2)$$

Navor na pozitivni in negativni naboj je

$$\vec{M} = \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_Q + \frac{-\vec{d}}{2} \times \vec{F}_{-Q} = \frac{\vec{d}}{2} \times Q\vec{E}_Q + \frac{-\vec{d}}{2} \times (-Q\vec{E}_{-Q}) = \frac{Q\vec{d}}{2} \times (\vec{E}_Q + \vec{E}_{-Q}).$$

Če upoštevamo kratko razdaljo med nabojema, lahko smatramo, da je polje na pozitivni naboj enako polju na negativni naboj (lokalno homogeno polje) in navor na dipol bo enak $\vec{M} = Q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Ponovimo rezultat: **navor na dipol je enak vektorskemu produktu električnega dipolskega momenta in jakosti polja. Rezultat je vektor, ki opisuje smer vrtenja.**

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad \text{NAVOR NA DIPOL} \quad (13.3)$$

Absolutna vrednost navora je $|\vec{M}| = |\vec{p}||\vec{E}|\sin\alpha$ ali $M = pE\sin\alpha$, kjer je α kot med vektorjema p in E .

Izračun navora na električni dipol v električnem polju:

Potencial se spreminja vzdolž X osi v skladu z enačbo $V = \frac{200}{x} \text{ V} \cdot \text{m}$. Pri $x = 1 \text{ cm}$ se nahaja

električni dipol z momentom $\vec{p} = 10^{-6}(1, 2, 0) \text{ Cm}$. Določimo navor na dipol.

Izračun: Električno polje ima le komponento v smeri X osi, ki je

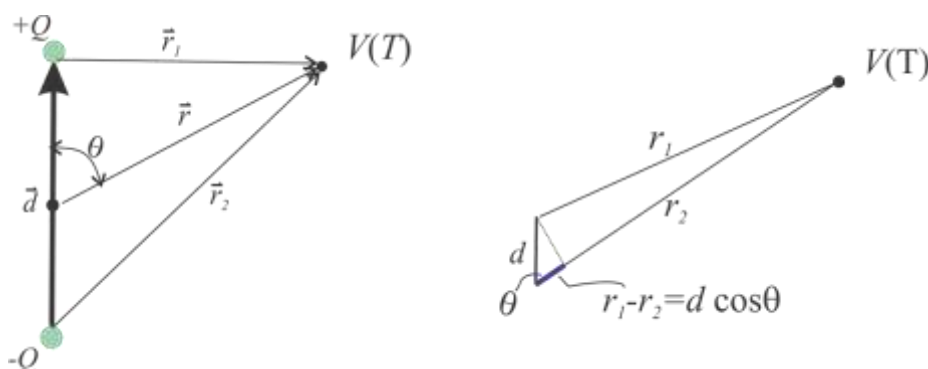
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -200 \text{Vm} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{200 \text{Vm}}{x^2}. \text{ Pri } x = 1 \text{ cm je polje } E_x = \frac{200}{1 \text{ cm}^2} \text{ V} \cdot \text{m} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

navor pa je

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = (1, 2, 0) 10^{-6} \text{C/m} \times \left(2 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}, 0, 0 \right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}} 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} = \underline{\underline{(0, 0, -4) \text{ Nm}}}.$$

POTENCIAL V OKOLICI ELEKTRIČNEGA DIPOLA

Potencial v okolici električnega dipola ni težko določiti, saj gre za vsoto dveh potencialov, potenciala od pozitivnega in od negativnega naboja.



Slika 13-4: Slika za izračun potenciala električnega dipola v točki T.

$$V(T) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad (13.4)$$

Če je razdalja med nabojeja dosti manjša od razdalje do točke T, lahko smatramo, da je $r_1 r_2 \doteq r^2$ in $r_2 - r_1 \doteq d \cos(\vartheta)$. Enačbo torej lahko zapišemo v obliki

$$V(T) = \frac{Qd \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (13.5)$$

Pogosto se zgornjo enačbo zapiše tudi v obliki

$$V(T) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (13.6)$$

ELEKTRIČNO POLJE DIPOLA

Električno polje bi lahko določili s preprostim seštevanjem (superpozicijo) prispevkov obeh nabojev. Ker pa je polje vektor, bi imeli nekoliko več dela kot pri seštevanju potencialov. Bolj elegantna pot je s

pomočjo gradienta polja, saj velja $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ oziroma v sferičnih koordinatah

$$\vec{E} = (E_r, E_\vartheta, E_\varphi) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right). \quad (13.7)$$

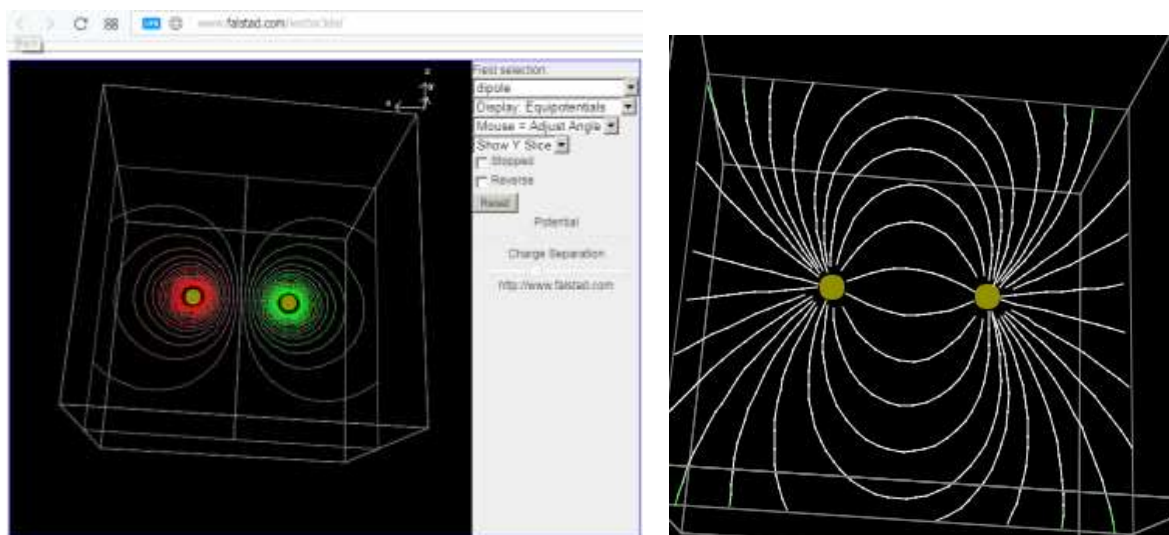
Z vstavitvijo enačbe za potencial dipola (13.5) v (13.7) dobimo komponente električne poljske jakosti v okolici dipola:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p \cos(\vartheta)}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad (13.8)$$

$$E_\vartheta = -\frac{\partial V}{r \partial \vartheta} = \frac{p \sin(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (13.9)$$

$$E_\varphi = 0. \quad (13.10)$$

Ugotovimo lahko, da polje v oddaljenosti od dipola upada s tretjo potenco. (To je precej hitreje od premega in točkastega naboja).



Slika 13-5: Ekvipotencialne ploskve (levo) in silnice (gostotnice) v okolici električnega dipola dobimo v principu iz polja in potenciala dveh razmaknjenih enako velikih in nasprotno predznačenih nabojev. Na sliki je primer vizualizacije s programom (online) na strani <http://www.falstad.com/vector3de/>. Ta omogoča še tudi prikaze še drugih struktur v 3D. Oglejte si jih!

NAČIN IZRAČUNAVANJA SILE NA DIPOL IZ SPREMEMBE ELEKTRIČNE ENERGIJE

Podobno, kot smo poiskali zvezo med potencialom in električno poljsko jakostjo kot

$$V(T) = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right), \text{ lahko pokažemo tudi povezavo med energijo in silo,}$$

saj velja

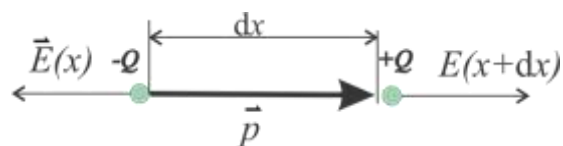
$$W(T) = \int_T^{T(W=0)} \vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{F} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right). \quad (13.11)$$

Ta način je pogosto uporabljen tudi pri numeričnemu računanju, kjer izračunamo porazdelitev polja, potenciala in energije s pomočjo računalnika. Za izračun sile je potrebno izračun opraviti 2x, vsakič na tak način, da rahlo zamaknemo strukturo (v našem primeru dipol) za neko majhno razdaljo in vsakič izračunamo polje in energijo. Silo pa nato izračunamo kot diferenco

$$\vec{F} \cong -\left(\frac{\Delta W}{\Delta x}, \frac{\Delta W}{\Delta y}, \frac{\Delta W}{\Delta z}\right). \quad (13.12)$$

* IZRAČUN SILE NA DIPOL IZ SPREMEMBE ELEKTRIČNE POLJSKE JAKOSTI

Postavimo dipol vzdolž in v smeri X osi. Na naboj $-Q$ deluje polje E_x in torej sila $-Q \cdot E_x$. Na naboj $+Q$, ki je od $-Q$ oddaljen za razdaljo dx , deluje polje $E_x(x+dx)$ oziroma $E_x + \frac{dE_x}{dx} dx$,



sila pa bo $Q \left(E_x + \frac{dE_x}{dx} dx \right)$. Če je polje nehomogeno, se bosta polji razlikovali, torej bo na dipol

delovala rezultančna sila v smeri osi X, ki bo enaka $F_x = -QE_x + Q \left(E_x + \frac{dE_x}{dx} dx \right)$, kar lahko pišemo

tudi kot $F_x = Q dx \frac{dE_x}{dx} = p \frac{dE_x}{dx}$, kjer smo $Q \cdot dx$ zapisali z dipolnim momentom p . Enačba, ki smo jo zapisali velja le, če dipol leži vzdolž X osi in nanj deluje polje v smeri X osi. V splošnem je potrebno upoštevati možnost, da je lahko dipol usmerjen v poljubno smer. Torej bo potrebno silo na dipol v smeri osi X izračunati kot

$$F_x = p_x \cdot \frac{dE_x}{dx} + p_y \cdot \frac{dE_x}{dy} + p_z \cdot \frac{dE_x}{dz} \quad (13.13)$$

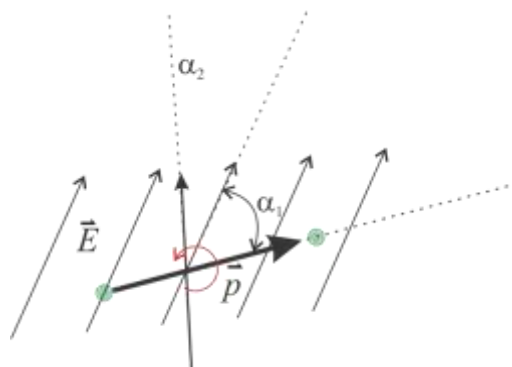
in na enak način tudi sili v smeri osi Y in Z. V vektorski notaciji to običajno zapišemo v obliki

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}, \quad (13.14)$$

kjer je $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. (13.15)

POTENCIALNA ENERGIJA DIPOLA

Tako kot ima točkast naboj v zunanjem polju določeno elektrostatično energijo, jo ima tudi električni dipol. Če želimo zavrteti dipol na katerega deluje zunanje električno polje, moramo pri tem opraviti delo, ki se pretvori v potencialno energijo. Sprememba potencialne energije za rotacijo za kot $d\alpha$ je $dW = Md\alpha$, kjer je $M = pE \sin \alpha$. Če zarotiramo dipol od začetne lege dipola, ki ga določa kot α_1 , do končne lege α_2 , je pri tem sprememba potencialne energije dipola



$$W_2 - W_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dW = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Md\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} pE \sin \alpha d\alpha = pE(-\cos \alpha) = pE(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$
. Če vzamemo, da je začetna potencialna energija W_1 enaka nič pri kotu $\alpha_1 = \pi/2$ (dipol pravokoten na polje), dobimo izraz za potencialno energijo dipola $W_2 = -pE \cos \alpha_2$, oziroma z zapisom s skalarnim produktom:

$$\boxed{W = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

(13.16)

14. Okovinjnje ekvipotencialnih ploskev

Vsebina poglavja: polje med okovinjenimi ekvipotencialkami, potencial v okolici dveh premih nabojev, ekvipotencialne ploskve v okolici dveh premih nabojev, dva prevodna valja priključena na napetostni vir, ekscentričnost.



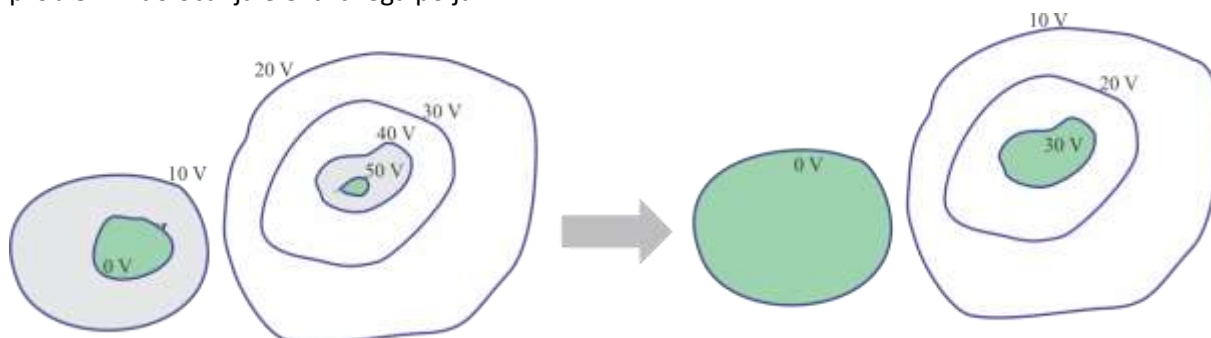
V tem poglavju bomo spoznali pomen okovinjnje ekvipotencialnih ploskev, ki nam omogoča pomembno analizo električnega polja v okolici prevodnih objektov. En pomembnejših primerov je analiza dveh ravnih naelektrenih vodnikov, kar je seveda primer dveh vodnikov priključenih na napetostni vir.

POLJE MED OKOVINJENIMI EKVIPOTENCIALNIMI PLOSKVAMI

Dosedanje ugotovitve: Ekvipotencialna ploskev povezuje točke z enako velikostjo potenciala. Površina prevodnika je ekvipotencialna ploskev. Celo več, celoten prevodnik je na istem potencialu. Običajno rišemo ekvipotencialne ploskve tako, da je med sosednjimi enaka potencialna razlika (napetost). Hitreje, kot se krajevno spreminja potencial, večja je električna poljska jakost. Zgoščenost ekvipotencialnih ploskev nam torej nakazuje večjo električno poljsko jakost na tem mestu. Velja seveda tudi obratno: Večje polje ima posledično bolj zgoščene ekvipotencialne ploskve na tem območju.

Vprašanje: ali se razmere (porazdelitev polja in potenciala) med dvema ekvipotencialnima ploskvama spremenijo, če ekvipotencialni ploskvi okovinjimo, pri čemer okovinjena ekvipotencialka ohrani vrednost potenciala ekvipotencialke?

Odgovor je NE, porazdelitev polja med okovinjenima ekvipotencialnima ploskvama se ne spremeni, saj je kovina sama kot prevodnik tudi ekvipotencialna ploskev in če ohrani potencial ekvipotencialke, se razmere ne spremenijo. V nadaljevanju bomo to ugotovitev s pridom uporabili pri mnogih problemih določanja električnega polja.



Slika 14-1: Levo razmere pred okovinjenjem (s sivo površino je nakazano področje okovinjnje). Desno: razmere po okovinjenju. Razmere med ekvipotencialkama se ne spremenijo, če je le napetostna razlika med okovinjenima ekvipotencialkama enaka kot je bila predhodno pred okovinjenjem.

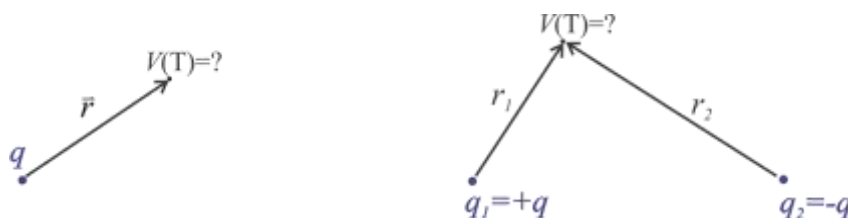
SISTEM DVEH PREMIIH NASPROTNO NAELEKTRENIH NABOJEV

En pomembnejših primerov, ki ima tudi precejšnjo praktično uporabo, sledi iz okovinjja ekvipotencialnih ploskev sistema dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev. Torej sistema dveh vzporednih tankih enakomerno naelektrenih žic.

Potencial v okolici enega premega naboja je

$$V(T) = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_T^{T(V=0)} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \Big|_T^{T(V=0)}. \quad (14.1)$$

Ugotovimo lahko, da zaidemo v težave, če vzamemo, da je točka, kjer je potencial enak nič v neskončnosti, saj iz enačbe sledi $\ln(\infty) = \infty$. Torej bi bil potencial v neskončnosti neskončen. Problem je v tem, da imamo pri enem samem premem naboju opravka z enim samim neskončno razsežnim električno nezaključenim sistemom, kar pa v realnosti ni možno. Nekaj, kar v realnosti ni možno, pogosto tudi v teoriji ne da smiselne rezultate. Temu problemu se ognemo tako, da obravnavamo sistem dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev.



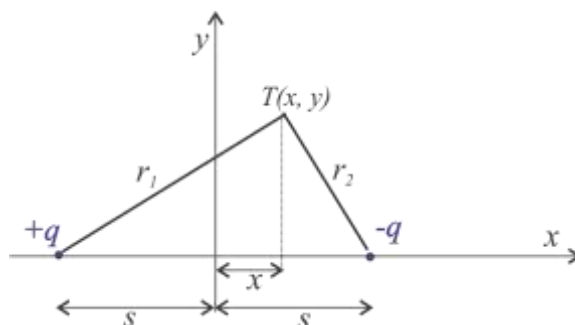
Slika 14-2: Iščemo potencial v okolici osamljenega premega naboja (levo) in sistema dveh premih nabojev (desno).

Vzemimo, da sta naboja položena na X osi simetrično na Y os in potekata vzdolž Z osi. Od Y osi sta oddaljena za razdaljo s . Glej sliko. Potencial v točki T , ki je od naboja q_1 oddaljena za r_1 in od naboja q_2 za razdaljo r_2 , je sedaj vsota prispevkov obeh nabojev:

$$V(T) = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \Big|_{r_1}^{T(V=0)} + \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \Big|_{r_2}^{T(V=0)} = -\frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_1) - \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) + \frac{(q_1 + q_2)}{2\pi\epsilon_0} \ln(T(V=0)),$$

Če velja $q_1 = -q_2 = q$ je tretji člen v gornji enačbi enak nič in potencial enak

$$V(T) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 - \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$



Slika 14-3: Geometrija postavitve dveh premih nabojev za izračun potenciala v poljubni točki.

Potencial v točki T v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev bo torej enak

$$V(T) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad \text{POTENCIAL V OKOLICI DVEH PREMIH NABOJEV} \quad (14.2)$$

Sedaj lahko ugotovimo, da je potencial enak nič v neskončnosti (kjer je $r_1 = r_2$), pa tudi vzdolž Y osi (pri $x = 0$).

EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE POLJA DVEH PREMIH NABOJEV SO KROŽNICE (PLAŠČI VALJEV)

Poskušajmo določiti ekvipotencialne ploskve sistema dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev.

To pomeni, da iščemo točke, kjer je $\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = V_{ep}$ oziroma $\frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{V_{ep} \cdot 2\pi\epsilon_0}{q}} = k$, kjer je V_{ep}

potencial ekvipotencialne ploskve.

Če upoštevamo, da je $r_2^2 = (x-s)^2 + y^2$ in $r_1^2 = (x+s)^2 + y^2$ dobimo

$\frac{(x-s)^2 + y^2}{(x+s)^2 + y^2} = k^2$ in $(x-s)^2 + y^2 = k^2((x+s)^2 + y^2)$. Po preureditvi lahko enačbo spravimo v

obliko

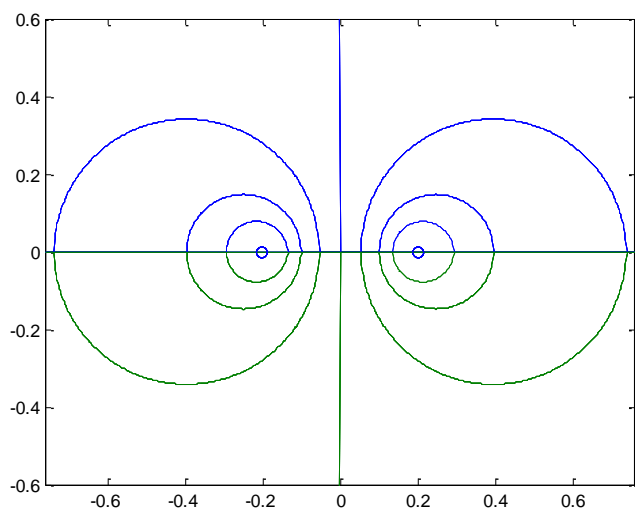
$(x-p)^2 + y^2 = r^2$. To je enačba za krog polmera r , ki je zamaknjen v X osi za p . S primerjavo enačb dobimo

$$p = -\frac{k^2+1}{k^2-1}s \quad \text{in} \quad r = \frac{2k}{|k^2-1|}s \quad \text{ter} \quad s^2 = p^2 - r^2. \quad (14.3)$$

Primer določitve položaja ekvipotencialnih ploskev:

Poiščimo potek ekvipotencialne ploskve s potencialom $V = 300$ V za prema naboja $q = \pm 10$ nC/m, ki sta razmaknjena za 0,4 m.

Izračun: Določimo konstanti $s = 0,2$ m, $k = e^{\frac{V_{ep} \cdot 2\pi\epsilon_0}{q}} \approx 5,31$. Sledi $p = -0,215$ m in $r = 0,078$ m. Torej, središče ekvipotencialke se nahaja 0,215 m stran od središčne točke med nabojema, polmer ekvipotencialke pa je 7,8 cm. Pozitivni naboj je od centra ekvipotencialke oddaljen za 1,5 cm, kar tudi imenujemo ekscentričnost.



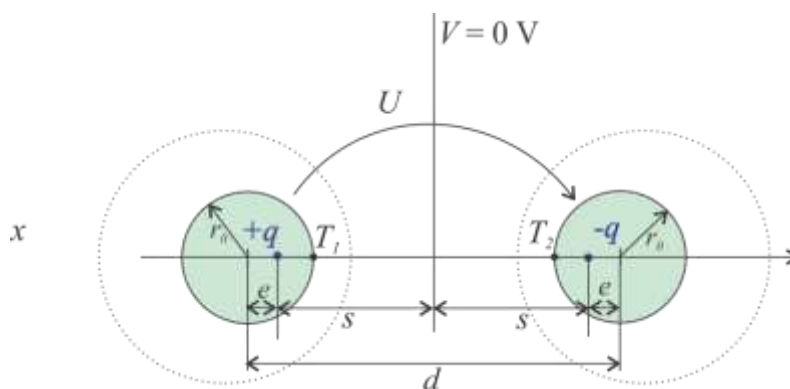
```
% ekvipot_2preme.m
q=10e-9; s=0.2;
eps0=8.854e-12;
Veq=[-300,-200,-100,0.001,100,200, 300];
%Veq=[300];
for i=1:length(Veq)
k=exp(Veq(i)*2*pi*eps0/q);
p=-(k^2+1)/(k^2-1)*s;
r=sqrt(p^2-s^2);
x=-5*s:0.01*s:5*s;
lx=length(x);
y=sqrt(ones(1,lx)*r^2-(x-ones(1,lx)*p).^2);
plot(x,y,x,-y); plot(x,y,x,-y);
axis([-3*s 3*s -3*s 3*s]); axis equal;
plot(-s,0,'o');plot(s,0,'o')
hold on
end
```

Slika 14-4: Ekvipotencialne ploskve izračunane pri vrednostih potenciala $v = -300$ v, -200 v, -100 v, 0 v, 100 v, 200 v, 300 v, za prema naboja $q = \pm 10$ nC/m.

DVA PREVODNA VALJA ENAKEGA POLMERA PRIKLJUČENA NA VIR NAPETOSTI

Pravi pomen izračuna potenciala v okolici dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev dobimo šele z okovinjenjem ekvipotencialnih ploskev. Šele z okovinjenjem ekvipotencialk dobimo strukture, ki so tudi v praksi zanimive. Ugotovili smo, da so ekvipotencialke za sistem dveh premih nabojev krogi oziroma plašči valjev, kar pomeni, da je mogoče **z okovinjenjem ekvipotencialk sistema dveh premih nabojev izračunati polje in potencial v okolici dveh naelektrenih valjev**.

Kaj je potrebno narediti? Običajno poznamo napetost med prevodnima valjema, polmer valjev in razdaljo med valjema. Torej je potrebno iz znane napetosti in geometrije določiti lokacijo dveh nadomestnih premih nabojev in velikost naboja. Ko to določimo, lahko zelo preprosto določimo tudi polje in potencial v okolici dveh naelektrenih valjev*.



Slika 14-5: Ekvipotencialne ploskve v okolici dveh premih nabojev so plašči valjev (v 2D krožnice). Z okovinjenjem plaščev valjev dobimo realne strukture – npr. dvovod.

Napetost med dvema simetričnima okovinjenima ekvipotencialkama (površini valjev) je enaka dvojni vrednosti potenciala ene od njih (na sredini med valjema je potencial enak nič):

$$U = V(T_1) - V(T_2) = 2 \cdot V(T_1) \quad \text{in torej} \quad U = 2 \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_-}{r_+} = 2 \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{s + d/2 - r_0}{s - d/2 + r_0} \right),$$

kjer je r_- razdalja od $-q$ do točke, r_+ pa razdalja od $+q$ do točke. Z upoštevanjem parametrov na sliki je

$$U = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{s + d/2 - r_0}{s - d/2 + r_0} \right),$$

kjer je r_0 polmer valja, d razdalja med geometrijskima središčema valja, s pa razdalja od središča med nabojema do nabojev $\pm q$. V primeru okovinjenja ekvipotencialnih ploskev torej upoštevamo zamik naboja glede na geometrijsko središče ekvipotencialke. Za

ekvipotencialko, ki je površina valja, velja $p = \frac{d}{2}$ in $r = r_0$. To vstavimo v zvezo $s^2 = p^2 - r^2$ in

določimo s kot $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}$. Iz te enačbe torej lahko določimo lego naboja, ki predstavlja v primeru dveh prevodnih valjev le navidezni naboj znotraj valja. Zamiku nabojev glede na

* V resnici tega naboja ni, saj znotraj valja ni polja. Lahko pa analiziramo polje v okolici dveh valjev z določitvijo polja v okolici dveh premih nabojev. Smiselne rešitve so le v prostoru zunaj in na površini dveh valjev. Znotraj prevodnih valjev je pač polje enako nič.

geometrijsko središče valjev pravimo tudi **ekscentričnost** in je podana kot $e = d/2 - s$. Z

upoštevanjem zgornje enačbe je $e = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4r_0^2}}{2}$.

Postopek izračunavanja je torej sledeč: Če poznamo geometrijo in napetost med dvema prevodnima valjema, lahko lego nadomestnih premih nabojev določimo s pomočjo zveze

$$s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}, \text{ ali tudi } e = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4r_0^2}}{2}. \quad (14.4)$$

kjer je s razdalja od središča med valjema (kjer je potencial enak nič) do lege (navideznih) nabojev. Velikost naboja pa določimo iz enačbe za napetost

$$U = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{s + d/2 - r_0}{s - d/2 + r_0}\right). \quad (14.5)$$

Primer določitve lege in velikosti navideznih nabojev za dva prevodna naelektrena valja: Naelektrena valja polmera 4 cm sta razmaknjena za 10 cm. Med valjema je napetost 20 kV. Določimo lego in velikost navideznih nabojev.

Izračun: $d = 10 \text{ cm} + 2 \cdot 4 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$. $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{2}\right)^2 - 4^2} \text{ cm} \cong 8,06 \text{ cm}$.

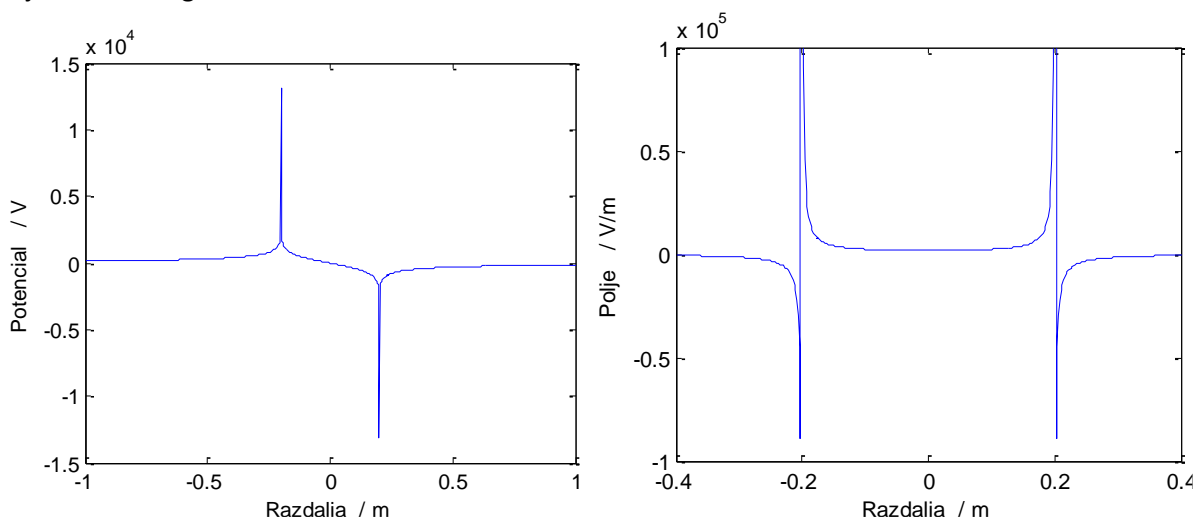
$$20 \text{ kV} = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{8,06 + 9 - 4}{8,06 - 9 + 4}\right), \text{ od koder sledi } q = \underline{\underline{3,833 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}}}.$$

Določimo še polje na sredini med valjema:

$$\vec{E} = \vec{e}_x \frac{q}{2\pi\epsilon_0 s} \cdot 2 = \vec{e}_x \frac{3,833 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}}{\pi\epsilon_0 8,06 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \cong \underline{\underline{171 \text{ kV/m}}}.$$

In kolikšno bi bilo za primerjavo polje med ravnima ploščama razmaknjenima za 10 cm in priključenima na napetost 20 kV? $E = \frac{U}{d} = \frac{20 \text{ kV}}{0,1 \text{ m}} = 200 \text{ kV/m}$. Ugotovimo, da je polje na sredini

med valjema manjše od polja enako razmaknjenih vzporednih plošč. Je pa zato večje polje na površini valjev. Določite ga sami!

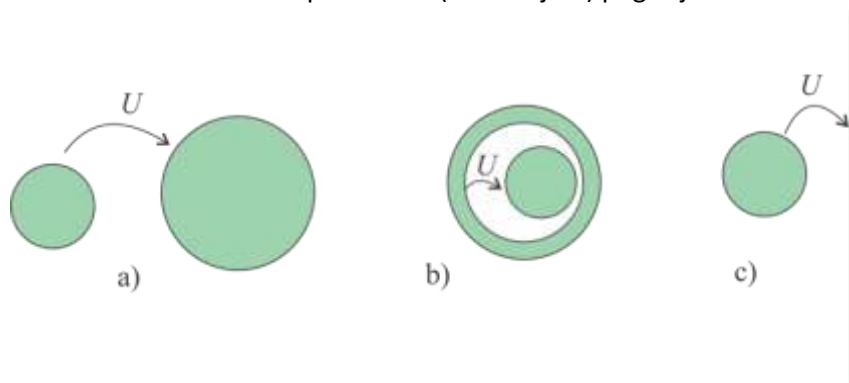


Slika 14-6: Izračun potenciala in polja vzdolž osi X za dva prema nasprotno naelektrena naboja.

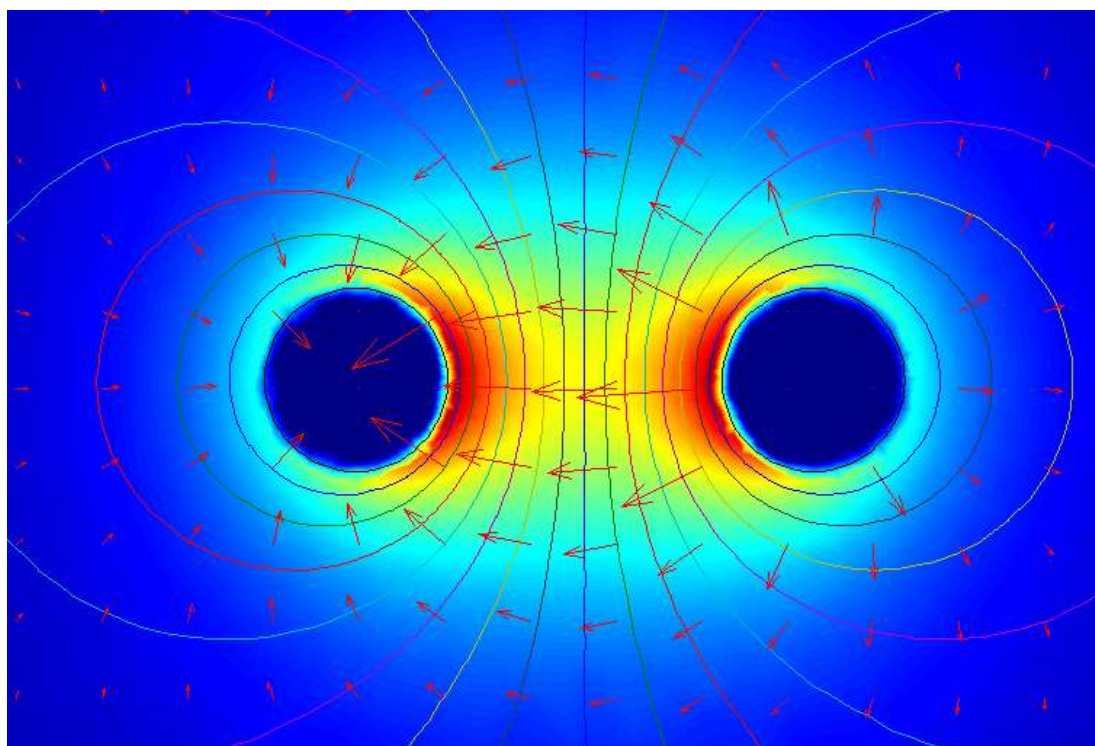
Druge strukture, ki jih lahko analiziramo z okovinjenjem ekvipotencialk dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev:

- dva valja z različnima polmeroma
- en valj v drugem (koaksialni kabel z ekscentrom)
- valj nad prevodno ravnino – zemljo

Posebno zanimiv je tretji primer, primer valja nad zemljo. Gre namreč za pomembno strukturo, ki jo pogosto srečamo v našem vsakdanu in je za elektrotehnika še posebno zanimiva – za daljnovodno žico nad zemljo. To bomo obravnavali v posebnem (naslednjem) poglavju.



Slika 14-7: Strukture, katere lahko analiziramo s pomočjo okovinjenja ekvipotencialk dveh premih nabojev: a) dva prevodna valja različnih polmerov, b) koaksialen kabel z ekscentrom, c) prevodni valj pred prevodno ravnino/zemljo.



Slika 14-8: Ekvipotencialne ploskve in polje dveh nasprotno naelektrenih valjev (vodnikov).

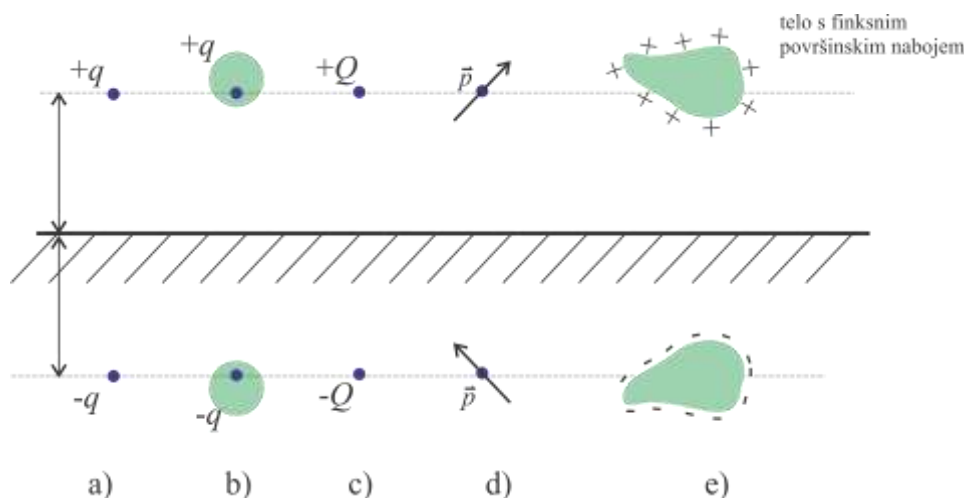
15. Metoda zrcaljenja

Vsebina poglavja: Valj nad zemljo z upoštevanjem ekscentričnosti, daljnovodna vrv nad zemljo (zanemaritev ekscentričnosti), polje in površinska gostota naboja na površini zemlje, analiza sistema vrvi nad zemljo, kapacitivnost med vrvjo in zemljo, točkasti naboj ob ozemljeni krogli.



Metoda zrcaljenja se uporablja tudi v arhitekturi. Na sliki najnovejša stavba nove operne hiše v Pekingu.

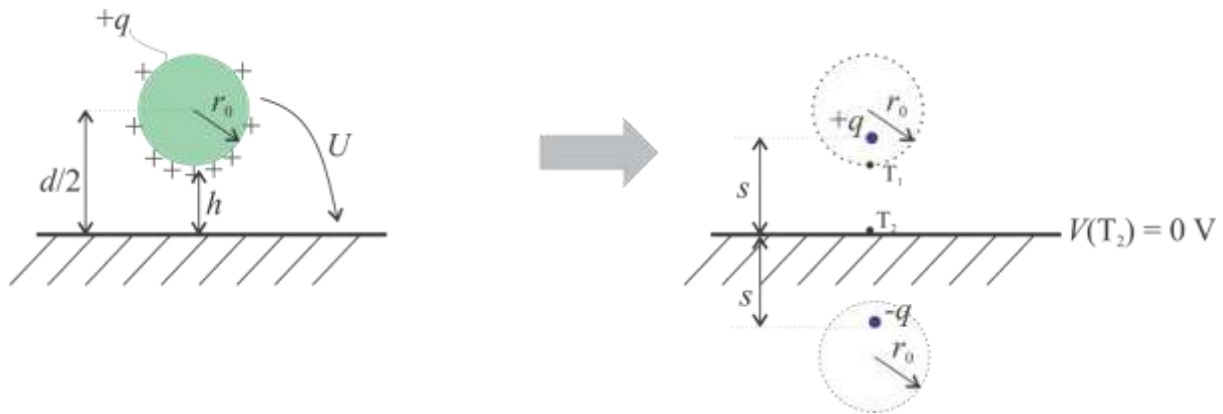
V prejšnjem poglavju smo ugotavljali, da so ekvipotencialne ploskve v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev krožnice oziroma plašči valjev. Ena od krožnic je tudi ravnina med nabojema, v obravnavanem primeru ravnina $x = 0$ (krožnica z neskončnim radijem). Tam je potencial enak nič. Obenem smo ugotavljali, da lahko poljubne ekvipotencialne ploskve okovino in s tem ne spremenimo razmer (polja) med okovinjenimi ploskvami. Če je ena od okovinjenih ekvipotencialnih ploskev ravnina $x = 0$, lahko v tem primeru prepoznamo možnost analize vodnika nad prevodno ravnino. Običajno smatramo, da je zemlja dober prevodnik. V tem primeru lahko naelektrene valje nad zemljo (npr. daljnovodne vrvi), smatramo kot valje nad prevodno ravnino. Take strukture analiziramo na način, da naboj zrcalimo preko ravnine (zemlje), kjer pa »dobi« nasproten predznak.



Slika 15-1: Zrcaljenje nabojev: a) premi naboj, b) prevodni valj c) točkasti naboj, d) dipol, e) površinski naboj.

PREVODNI VALJ NAD ZEMLJO (UPOŠTEVANJE EKSCENTRIČNOSTI)

Primer prevodnega valja nad zemljo obravnavamo z znanjem iz prejšnjega poglavja. V konkretnem primeru okovino ekvipotencialko z radijem r_0 in drugo, ki ima neskončen radij (ravnino v osi Y kjer je potencial enak nič). Tudi ta primer lahko analiziramo z dvema nasprotno naelektrenima premima nabojema. En od teh se nahaja »pod zemljo«, zato pravimo, da **analiziramo primer naelektrenega valja nad zemljo s pomočjo metode zrcaljenja**. To pomeni, da moramo v primeru analize premege naboja nad zemljo za izračun postaviti še navideznega zrcalno na ravnino zemlje. Zrcalni naboj ima nasproten predznak od tistega nad zemljo.



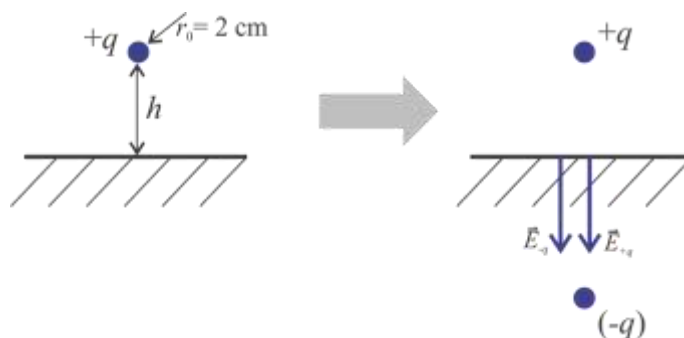
Slika 15-2: Naelektren valj nad zemljo analiziramo s pomočjo zrcaljenja ekscentrično postavljenega premega naboja in njegovega zrcalnega naboja.

Napetost med valjem in zemljo določimo podobno kot v prejšnjem poglavju, le da je sedaj $V(T_2) = 0$ in napetost med valjem in zemljo $U = V(T_1) - V(T_2) = V(T_1) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{s + d/2 - r_0}{s - d/2 + r_0}\right)$. Razlika med tem izrazom in napetostjo med dvema premima nabojema je le v »polovički«. Lego navideznega naboja določimo enako kot v prejšnjem poglavju: $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}$, kjer je $d/2$ razdalja med geometrijskim središčem valja in zemljo, r_0 pa polmer valja.

DALJNOVODNA VRV NAD ZEMLJO (ZANEMARITEV EKSCENTRIČNOSTI)

Primer izračuna napetosti in polja daljnovidne vrvi:

20 m nad zemljo se nahaja daljnovidna vrv polmera 2 cm z nabojem $q = 300$ nC/m. Določimo napetost med vrvjo in zemljo, električno poljsko jakost na površini zemlje tik nad vrvjo ter površinsko gostoto naboja na zemlji.



Slika 15-3: Daljnovidna vrv na zemljo: izračun polja in potenciala poteka s pomočjo zrcaljenja premega naboja preko površine zemlje.

Izračun: $d/2 = 20,01$ m; $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2} = 20,0099975$ m. Ugotovimo lahko, da je razmik med geometrijskim središčem vrvi in lego nadomestnega naboja praktično zanemarljiv $e = d/2 - s = (20,02 - 20,0099975)$ m $\cong 2,5 \cdot 10^{-6}$ m. V tem primeru lahko ekscentrično postavitve navideznega naboja zanemarimo in smatramo, da se navidezni naboj nahaja v geometrijskem središču valja (vrvi). **Za zanemaritev ekscentričnosti mora veljati, da je razdalja od vrvi do zemlje dosti večja od polmera vrvi: $d \gg r_0$.** V praksi lahko ekscentričnost zanemarimo, če je

$d \geq 100r_0$. V primeru zanemaritve ekscentričnosti se poenostavi tudi izračun napetosti med vrvjo in zemljo, ki je ob upoštevanju $d/2 \approx s$:

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right). \quad (15.1)$$

Izračunajmo napetost med vrvjo in zemljo v konkretnem primeru

$$U = \frac{300 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}}{2\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}} \cdot \ln\left(\frac{40,04 \text{ m}}{0,02 \text{ m}}\right) \cong \underline{\underline{41 \text{ kV}}}.$$

Dodatno: Določimo še polje na površini zemlje. Upoštevati je potrebno oba naboja – originalnega v središču vrvi in zrcalnega z nasprotnim predznakom. Polje na površini zemlje tik pod vrvjo je torej vsota prispevkov obeh nabojev in je enako (glej Slika 15-3, desno)

$$\vec{E} = -\vec{e}_y \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot 2 = -\vec{e}_y \frac{300 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}}{\pi \epsilon_0 20 \text{ m}} \approx \underline{\underline{-\vec{e}_y 540 \text{ V/m}}}.$$

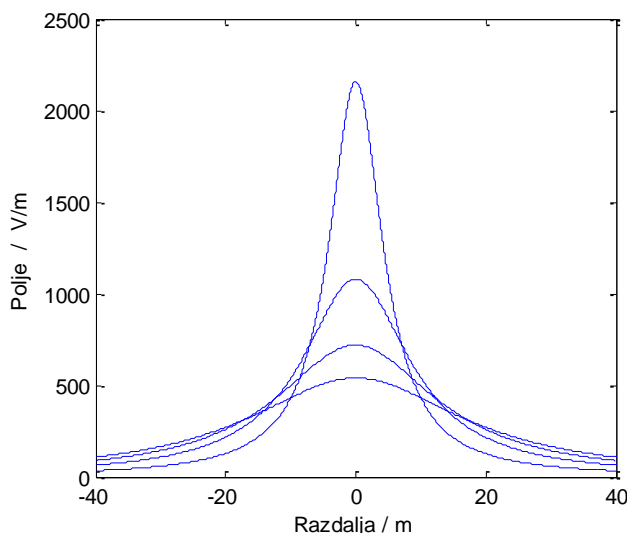
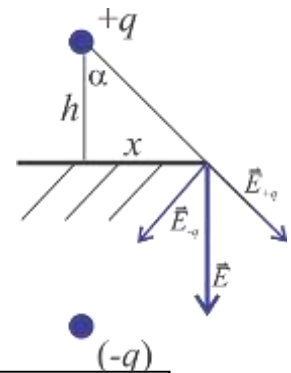
Koliko pa je površinska gostota naboja na tem mestu? Ugotovili smo že (glej en. (10.3)), da je na površini prevodnika $\sigma = \epsilon_0 E_n$, torej bo $\sigma = \underline{\underline{-4,77 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}}}$.

V poljubni točki na zemlji je polje

$$\vec{E} = -\vec{e}_y 2 \cdot E_{+q} \cdot \cos(\alpha) = -2 \cdot \vec{e}_y \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + x^2}} \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} = -\vec{e}_y \frac{q \cdot h}{\pi\epsilon_0 (h^2 + x^2)}$$

kjer je x razdalja do točke na zemlji tik pod vrvjo.

To polje je največje na zemlji direktno pod vrvjo in se z oddaljenostjo manjša.



```

q=300e-9; h=20;
eps0=8.854e-12;

for h=5:5:20
x=-40:0.01*h:40;
E=q*h./(pi*eps0*(x.^2+h^2));
plot(x,E)
hold on
end
xlabel('Razdalja / m');
ylabel('Polje / V/m');

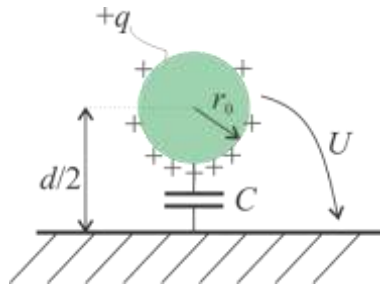
```

Slika 15-4: Električna poljska jakost na površini zemlje za razdalje od zemlje do vrvi 5, 10, 15 in 20 m za naboj na vrvji 30 nC. Bližje zemlji kot se nahaja vrv, večje je polje tik pod vrvjo na zemlji.

Z integracijo površine pod krivuljo polja bi dobili enak rezultat za vse krivulje. Zakaj? Zato, ker je polje na površini sorazmerno gostoti naboja $\sigma = \epsilon_0 E_n$, z integracijo gostote naboja po površini pa dobimo celoten naboj, ki je po iznosu enako velik kot naboj na vrvji, le nasprotnega predznaka je. To je naboj, ki se influira (elektrostatična indukcija) na površini zemlje kot posledica naboja na vrvji.

KAPACITIVNOST MED VRVJO IN ZEMLJO

Pri konstantni napetosti med vrvjo in zemljo se naboj na vrvi spreminja v odvisnosti od višine vrvi. Bližje kot je vrv površini zemlje, večji je njen naboj. In seveda obratno. Pri konstantnem naboju na vrvi ugotavljamo spreminjanje napetosti z višino vrvi. Zakaj je temu tako? Zato, ker bližje, kot je vrv zemlji, večje bo polje in bolj se bodo na površini zemlje pod vrvjo zgostili (influirali) naboji nasprotnega predznaka. Posledično bo pri konstantnem naboju višja napetost med zemljo in vrvjo, pri konstantni napetosti pa bo večji naboj.



Slika 15-5: Kapacitivnost med vrvjo in zemljo.

Med nabojem na vrvi in napetostjo med vrvjo in zemljo velja linearna zveza:

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right) \text{ oziroma } q = \frac{U 2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}. \quad (15.2)$$

Če zapišemo celoten naboj na dolžini l vrvi, dobimo

$$Q = ql = \frac{U 2\pi\epsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}. \quad (15.3)$$

Razmerje Q/U je konstantno. To konstanto imenujemo kapacitivnost. Kapacitivnost sistema vrvi nad zemljo je torej

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}. \quad (15.4)$$

V praksi pogosto za daljnovidne vrvi uporabljamo izraz za kapacitivnost na enoto razdalje,

$$c = C/l = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}. \quad (15.5)$$

Določimo kapacitivnost daljnovidne vrvi na enoto dolžine za prejšnji primer ($h = 20 \text{ m}$, $r_0 = 2 \text{ cm}$, $q = 300 \text{ nC/m}$):

$$C/l = \frac{300 \text{ nC/m}}{41 \text{ kV}} \cong \underline{\underline{7,32 \text{ pF/m}}}.$$

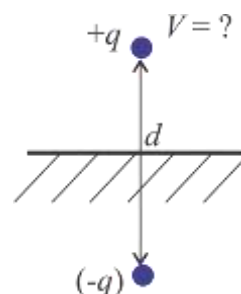
Kapacitivnost smo izračunali iz poznanega naboja in napetosti med vrvjo in zemljo. Ugotovimo lahko, da bi lahko kapacitivnost določili tudi direktno s pomočjo uokvirjene enačbe in da ni odvisna ne od napetosti ne od naboja pač pa le od geometrijskih razmer, torej od razdalje od vrvi do zemlje in njenega polmera. Kapacitivnost je torej geometrijsko pogojena. To bomo bolj natančno obravnavali v naslednjem poglavju.

RAČUNANJE POLJA IN POTENCIALA V OKOLICI DALJNOVODNIH VRVI NAD ZEMLJO

Ugotovili smo, da lahko zaradi mnogo večje razdalje med vrvjo in zemljo v primerjavi s polmerom vodnika zanemarimo vpliv ekscentričnosti. Tedaj je

napetost med vrvjo in zemljo podana z enačbo $U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$. Če

imamo opravka z več daljnovidnimi vrvmi, je potrebno upoštevati potencial posamezne vrvi, zato pogledajmo, kako je sestavljen potencial ene same vrvi:



$V = U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(d-r_0) - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0$. Prvi člen predstavlja potencial, ki ga povzroča zrcalni naboj,

drugi člen pa je vpliv naboja na vrvji.

Običajno zanemarimo tudi r_0 v primerjavi z d in dobimo

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d}{r_0}\right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(d) - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0). \quad (15.6)$$

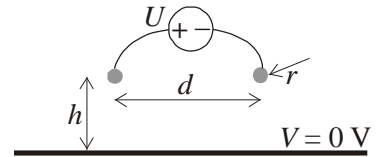
Prvi člen je potencial, ki ga povzroča negativni naboj na mestu pozitivnega od katerega je oddaljen za razdaljo d . Drugi člen je potencial lastnega (pozitivnega) naboja. Da ne bi pri izračunu pozabili, da se pozitivni predznak nanaša na razdaljo od negativnega naboja, lahko enačbo zapišemo tudi v obliki:

$$V = \frac{+q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{r_0}\right) + \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{d}\right). \quad (15.7)$$

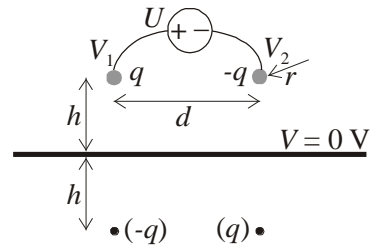
Če je vrvi več, je potrebno seveda sešteti (superpozicija) vpliv vseh na vsako vrv posebej. Če bi na primer imeli nad zemljo dve vrvji, je potencial take vrvi prispevek štirih premih nabojev: lastnega in lastnega zrcaljenega ter sosednjega in sosednjega zrcaljenega.

Primer izpitne naloge (izpitna naloga 4.2.2005):

Vodnika simetričnega dvovoda dolžine 5 m ležita vzporedno nad ozemljeno prevodno ploščo. Med njiju je priključen vir napetosti $U = 400$ V. Izračunajte naboja na vodnikih. ($h = 3$ cm, $d = 6$ cm, $r = 2$ mm)



Izračun: Glede na priključitev vira sta vzdolžni gostoti nabojev na vodnikih enakih absolutnih vrednosti, vendar nasprotnih predznakov, ($\pm q$). Polje naboja ozemljene prevodne plošče določata polji zrcalnih nabojev ($\pm q$). Naboja $Q_{1,2} = \pm ql$ vodnikov (dolžine $l = 5$ m) določa napetost vira, ki je enaka razliki potencialov vodnikov: $U = V_1 - V_2$. Njiju zapišemo kot vsoto prispevkov dveh parov nabojev:



$$V_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{\sqrt{(2h)^2 + d^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}}$$

$$V_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{d} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(2h)^2 + d^2}}{2h} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}}{2hd} = -V_1$$

$$U = V_1 - V_2 = 2V_1 = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}} \Rightarrow Q_{1,2} = \pm ql = \pm \frac{\pi\epsilon_0 l U}{\ln \left(\frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}} \right)} \approx \underline{\underline{18,2 \text{ nC}}}$$

Druge variante možnih izračunov:

- Dve vrvi sta priključeni na vir napetosti. Postopek izračuna: na eni vrvi je pozitiven, na drugi pa negativnen naboj enake absolutne vrednosti.
- Naboja na vrveh nista priključena na vir napetosti. Postopek izračuna: v tem primeru sta naboja (lahko) različna tako po predznaku kot velikosti.
- Poleg drugih imamo tudi nevtrani vodnik. Postopek izračuna: na nevtralnemu vodniku ni naboja. Vodnika na katerem ni naboja ne zrcalimo.
- Vodnik se nahaja v homogenem polju. Postopek izračuna: poleg ostalih prispevkov je potrebno upoštevati še potencial vrvi zaradi homogenega polja (Eh), kjer je h višina vrvi.
- Zrcalimo tudi točkaste in druge naboje; zrcalni naboji imajo nasprotni predznak.



Domača naloga: kako izračunati polje na zemlji tik ob steburu?

ZRCALJENJE TOČKASTEGA NABOJA NA KOVINSKI KROGLI

Vzemimo dva točkasta naboja vzdolž X osi. Potencial v točki T je

$$V(T) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (15.8)$$

Poiščimo točke (ekvipotencialno ravnino), kjer je potencial enak nič. Tedaj bo

$$V(T_0) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{10}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{20}} = 0 \Rightarrow \frac{R_{20}}{R_{10}} = -\frac{Q_2}{Q_1}. \quad (15.9)$$

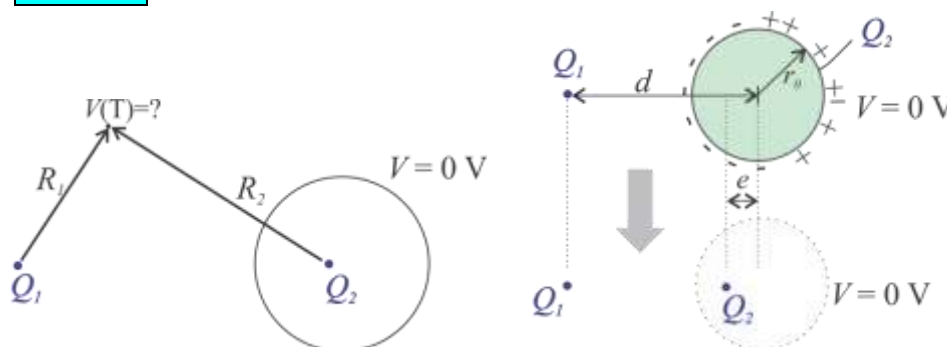
Tudi pri razmerju dveh premih nabojev smo dobili, da je razmerje radijev konstantno, ekvipotencialne ploskve pa so bile krožnice. V tem primeru je ekvipotencialna ploskev kroglja s polmerom R_{20} , če je $|Q_1| > |Q_2|$.

Če izenačimo potenciala v dveh različnih točkah na kroglji, dobimo enačbo za ekscentrično lego naboja Q_2 znotraj krogle:

$$e = \frac{r_0^2}{d}, \quad (15.10)$$

kjer je r_0 polmer krogle, d pa razdalja od središča krogle do naboja Q_1 . Poleg tega dobimo še zvezo

$$\text{med } Q_1 \text{ in } Q_2: \frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{d}{r_0}. \quad (15.11)$$



Slika 15-6: Levo: Dva točkasta naboja imata ekvipotencialke, od katerih je ena kroglja s potencialom nič. Desno: To lahko izkoristimo za izračun polja, ki ga povzroča naboj (Q_1) v okolici ozemljene krogle. To analiziramo s pomočjo zrcalnega naboja, ki leži ekscentrično od geometrijskega središča krogle.

Primer določitve sile na točkast naboj v bližini prevodne krogle:

Določimo silo na točkasti naboj $Q_1 = 10 \text{ nC}$, ki je oddaljen za 10 cm od prevodne ozemljene krogle polmera 8 cm.

Izračun:

$$e = \frac{r_0^2}{d} = \frac{(8 \text{ cm})^2}{10 \text{ cm} + 8 \text{ cm}} \approx \underline{\underline{3,556 \text{ cm}}}.$$

Naboj Q_2 moramo torej postaviti za 3,556 cm od središča krogle v smeri naboja Q_1 . Po velikosti pa mora biti

$$Q_2 = -Q_1 \frac{r_0}{d} = -10 \text{ nC} \cdot \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = -8 \text{ nC}.$$

Sila med nabojema (hkrati tudi sila med prevodno naelektreno kroglo in točkastim nabojem) je

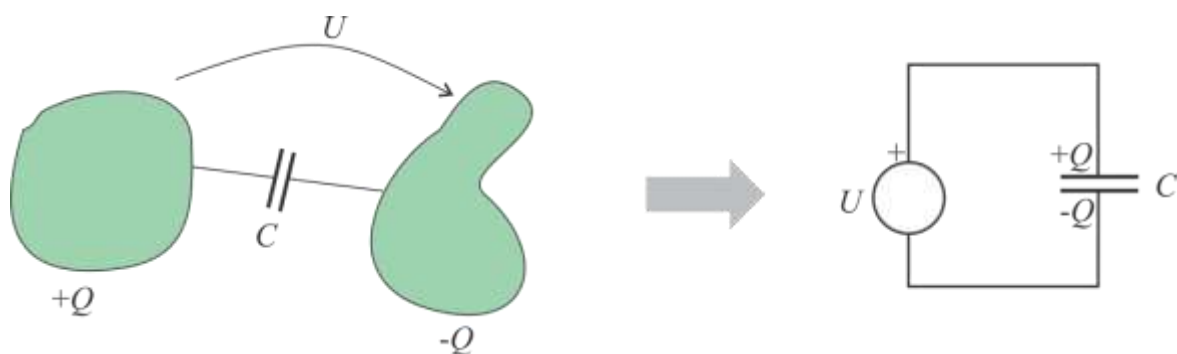
$$F = \left| \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right| = \left| \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 (d - e)^2} \right| = \left| \frac{10 \text{ nC} \cdot (-8 \text{ nC})}{4\pi\epsilon_0 (10 \text{ cm} - 3,556 \text{ cm})^2} \right| \approx \underline{\underline{498 \mu\text{N}}}.$$

16. Kapacitivnost

Vsebina poglavja: definicija kapacitivnosti, kondenzator, merjenje in računanje kapacitivnosti, kapacitivnost osnovnih struktur, zaporedna in vzporedna vezava kondenzatorjev, analiza vezij s poljubno vezavo kondenzatorjev.

Kapacitivnost je nedvomno en pomembnejših pojmov, ki jih v elektrotehniki zelo pogosto uporabljamo. Zato si ga velja podrobneje pogledati in razložiti. V prejšnjem poglavju smo že spoznali **sorazmerje med količino naboja med dvema prevodnima telesoma in napetostjo med njima. Faktor sorazmernosti imenujemo kapacitivnost.** Ali z drugimi besedami: večanje napetosti med prevodnima telesoma povzroči sorazmerno povečanje naboja. V matematični obliki pa to zapišemo kot

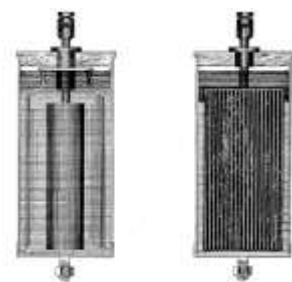
$$Q = C(V_A - V_B) \text{ oziroma } Q = CU, \text{ od koder je } C = \frac{Q}{U} \quad (16.1)$$



Slika 16-1: Kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma.

KONDENZATOR KOT »KONCENTRIRAN« ELEMENT

Dve poljubni prevodni telesi lahko prikažemo kot električni sistem, ki ga imenujemo kondenzator. Kljub temu, da iz srednješolske fizike (elektrotehnike) že poznamo simbol za kondenzator, ga omenimo še enkrat. Simbol za kondenzator sta torej dve vzporedni enako dolgi daljici, prečno na vodnika, razmaknjeni za malo razdaljo. Če je med telesoma priključimo napetost U , se bo na telesu priključenem na + sponko vira nakopičil naboj $+Q$, na telesu priključenem na negativno sponko pa naboj $-Q$. Velja zveza $\pm Q = CU$. C imenujemo kapacitivnost sistema, sistem, ki »shranjuje« naboj pa kondenzator. Enota za kapacitivnost je farad (F), v čast pomembnemu znanstveniku in raziskovalcu Michaelu Faraday-u. Pogosto tudi enoto za dielektričnost vakuumu ϵ_0 označujemo z enoto F/m.



Kondenzator, ki ga je patentiral Nikola Tesla leta 1896. Patent US567818.

Zanimivo je to, da na prvi pogled na kapacitivnost med dvema telesoma vplivata tako napetost, kot tudi naboj na telesih, v resnici pa ni tako. **Kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma v zraku je odvisna le od geometrijskih značilnosti teles (oblike teles in postavitve)!!**

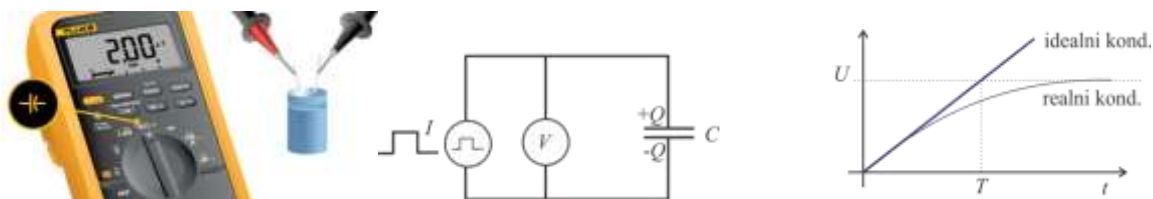
MERJENJE KAPACITIVNOSTI

Kako bi določili kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma? Eksperimentalno bi to lahko naredili tako, da bi ti dve telesi naelektrili z znanim nabojem in izmerili napetost, ki se pojavi med telesoma.

Kapacitivnost bi določili iz razmerja $C = \frac{Q}{U}$.

Preprosti univerzalni merilni inštrumenti določajo kapacitivnost s pomočjo znanega tokovnega vira in merjenjem (časovne spremembe) napetosti. Iz kontinuitetne enačbe $i = \frac{dQ}{dt}$ in $Q = CU$ dobimo

$i = C \frac{dU}{dt}$. Z integracijo obeh strani dobimo $\int i dt = C \int dU \Rightarrow iT = CU \Rightarrow C = \frac{iT}{U}$.



Slika 16-2: Univerzalni inštrumenti običajno omogočajo tudi merjenje kapacitivnosti. Pri tem skozi kondenzator pošljejo določen tok in ga s tem električno napolnijo. Kapacitivnost je sorazmerna času elektrenja in obratno sorazmerna napetosti.

Pri elektrenju s konstantnim tokom je sprememba napetosti v določenem času sorazmerna $1/C$. V primeru idealnega kondenzatorja narašča napetost linearno s časom. Take meritve so lahko zelo nenatančne, če kondenzator ni idealen (kar pogosto drži). Težave povzročajo predvsem uporovne lastnosti kondenzatorjev.

Nekoliko izpopolnjen način upošteva še uporovne lastnosti kondenzatorja. V tem primeru napetost ne narašča linearno, pač pa eksponentno. Iz eksponentnega naraščanja se določi časovna konstanta in upošteva pri izračunu kapacitivnosti. Seveda je potrebno kondenzator pred meritvijo razelektriti. To lahko naredimo tako, da ga izpraznimo preko upora ali pa nanj priključimo izmenični tokovni signal. Več informacij najdete na spletnih straneh*.

Za natančnejše meritve se uporablja izmeničen vir, pogosto tudi v kombinaciji z mostičnim vezjem. Več o tem v naslednjem semestru.

RAČUNANJE KAPACITIVNOSTI

V principu smo že doslej sproti opozarjali na kapacitivnost, ko smo izračunavali napetost med naelektrenima telesoma in je bila le-ta sorazmerna naboju: $U = Q \frac{1}{C}$. Matematično torej določimo kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma tako, da predpostavimo, da sta telesi naelektreni z

* Več o meritvah kapacitivnosti: <http://www.mobilehandsetdesignline.com/howto/192300586>
http://www.repairfaq.org/REPAIR/F_captest.html#CAPTEST_004

nabojema $+Q$ in $-Q$ ter izračunamo napetost med njima. Kapacitivnost pa je enaka kvocientu naboja in izračunane napetosti: $C = \frac{Q}{U}$.

(Pogosto za računanje kapacitivnosti uporabljamo numerične metode, kjer izračunamo polje in potencial v prostoru med objektoma. V takem primeru uporabimo lahko za izračun kapacitivnosti tudi izraz za električno energijo, shranjeno v kondenzatorju. Več v nadaljevanju.)

KAPACITIVNOSTI OSNOVNIH STRUKTUR

Uporabili bomo ugotovitve iz poglavja o potencialu in napetosti osnovnih struktur in določili kapacitivnosti. Poiskati moramo le povezavo med U in Q pri različnih strukturah.

Kapacitivnost zračnega ploščatega kondenzatorja:

$U = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$ oziroma $U = \frac{QA}{\varepsilon_0} d$, kjer je A površina ene plošče, d pa razdalja med njima.

Kapacitivnost je

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}. \quad \text{KAPACITIVNOST PLOŠČNEGA ZRAČNEGA KONDENZATORJA} \quad (16.2)$$

Dobili smo enačbo, ki jo poznamo že iz srednješolske fizike (elektrotehnike).

Kapacitivnost zračnega koaksialnega kabla:

$U = \int_{r_n}^{r_z} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_n}^{r_z} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_z}{r_n}$, kjer je r_n polmer žile, r_z pa polmer oklopa.

Kapacitivnost je

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{ql}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{r_z}{r_n}}. \quad \text{KAPACITIVNOST ZRAČNEGA KOAKSIALNEGA KABLA} \quad (16.3)$$

Kapacitivnost zračnega sferičnega kondenzatorja:

Napetost med sferama s polmeroma r_n in r_z je

$U = \int_{r_n}^{r_z} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_n}^{r_z} \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_n}^{r_z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right)$. Kapacitivnost je torej

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z} \right)}. \quad \text{KAPACITIVNOST ZRAČNEGA SFERIČNEGA KONDENZATORJA} \quad (16.4)$$

Iz zgornje enačbe lahko določimo še **kapacitivnost osamljene prevodne krogle**, ki je ($r_z \rightarrow \infty$):

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 r_n. \quad \text{KAPACITIVNOST OSAMLJENE PREVODNE KROGLE} \quad (16.5)$$

Kapacitivnost med valjem in zemljo:

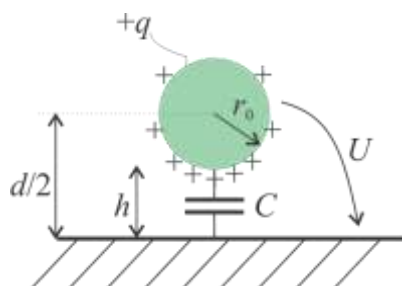
Z zanemaritvijo ekscentričnosti smo dobili zvezo med napetostjo in linijsko gostoto naboja:

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right). \quad \text{Kapacitivnost je:}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{ql}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}. \quad \text{KAPACITIVNOST MED PREVODNIM VALJEM IN ZEMLJO} \quad (16.6)$$

d je razdalja med geometrijskima središčema dveh valjev. Tistega nad zemljo in prezrcaljenega. Če se torej valj nahaja na višini h nad zemljo bo $d/2 = h + r_0$ in enačbo za izračun kapacitivnosti med prevodnim valjem nad zemljo lahko zapišemo tudi v obliki:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{ql}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{2h+r_0}{r_0}\right)}. \quad (16.7)$$



Slika 16-3: Prevodni valj nad zemljo.

Kapacitivnost med dvema valjema:

Napetost med dvema valjema je 2x večja kot med valjem in zemljo: $U = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$, torej bo

kapacitivnost med valjema (ob zanemaritvi ekscentričnosti):

$$C = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}. \quad \text{KAPACITIVNOST MED PREVODNIMA VALJEMA} \quad (16.8)$$



Slika 16-4: Dva prevodna valja.

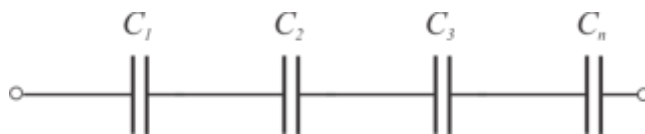
KONDENZATORSKA VEZJA

ZAPOREDNA VEZAVA KONDENZATORJEV

Narišimo sliko zaporedno vezanih več kondenzatorjev. Med skrajnima sponkama je napetost U , torej bo na pozitivni sponki naboj $+Q$, na negativni pa $-Q$, zveza med njima pa je $Q = CU$. Tudi na vsakem posameznem zaporedno vezanem kondenzatorju bo enako velik naboj, saj bo med dvema sosednjima kondenzatorjema prišlo le do prerazporeditve naboja. Na plošči kondenzatorja, ki je bliže negativni sponki vira, se bo nakopičil negativen naboj ($-Q$), na drugi plošči kondenzatorja pa hkrati pozitiven naboj. Hkrati bo prišlo do prerazporeditve naboja tudi na ostalih zaporedno vezanih kondenzatorjih. Torej velja: $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$. Celotna napetost bo vsota posameznih padcev napetosti: $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$, kar lahko izrazimo z nabojem in kapacitivnostjo kondenzatorjev

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{Q}{C_i}. \text{ Če enačbo delimo z nabojem } Q, \text{ dobimo:}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad \text{KAPACITIVNOST ZAPOREDNO VEZANIH KONDENZATORJEV} \quad (16.9)$$



Slika 16-5: Zaporedna vezava kondenzatorjev.

Primer izračuna nadomestne kapacitivnosti zaporedno vezanih kondenzatorjev:

Določite nadomestno kapacitivnost zaporedne vezave treh kondenzatorjev: 1 nF, 2 nF in 5 nF.

$$\text{Izračun: } \frac{1}{C} = \frac{1}{1 \text{ nF}} + \frac{1}{2 \text{ nF}} + \frac{1}{5 \text{ nF}} = \frac{10+5+2}{10 \text{ nF}} = \frac{17}{10 \text{ nF}}, \quad C = \frac{10}{17} \text{ nF} \cong \underline{\underline{0,588 \text{ nF}}}.$$

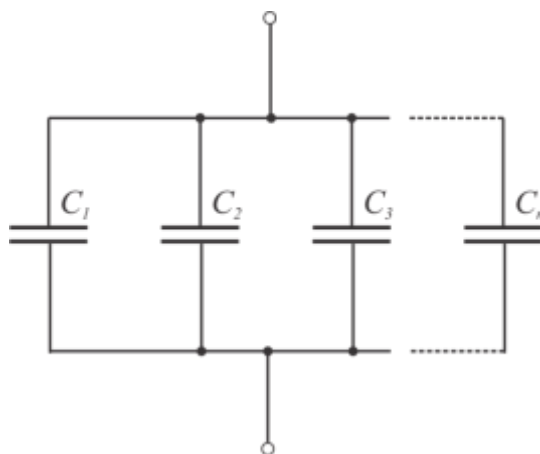
Velja si zapomniti, da je nadomestna kapacitivnost zaporedno vezanih kondenzatorjev vedno manjša od vsake posamezne kapacitivnosti. V konkretnem primeru je najmanjša 1 nF, torej bo skupna gotovo manjša od 1 nF. Kako si to razložimo? Preprosto iz ugotovitve, da je kapacitivnost razmerje med nabojem in napetostjo. Več kot je kondenzatorjev vezanih zaporedno, večji je skupni padec napetosti, obenem pa se naboj ne spreminja. Števec torej ostaja enako velik, imenovalc pa se večja in posledično se manjša kapacitivnost.

VZPOREDNA VEZAVA KONDENZATORJEV

Pri vzporedni vezavi kondenzatorjev je na vseh kondenzatorjih enaka napetost, naboj pa je sorazmeren kapacitivnosti vsakega posebej:

$$Q = CU = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_1U + C_2U + \dots + C_nU = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)U, \text{ torej bo}$$

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i. \quad \text{KAPACITIVNOST VZPOREDNO VEZANIH KONDENZATORJEV} \quad (16.10)$$



Slika 16-6: Vzporedna vezava kondenzatorjev.

Primer izračuna nadomestne kapacitivnosti vzporedne vezave kondenzatorjev:

Med dvema ravnima vzporednima ploščama površine 100 cm^2 je razdalja 2 cm .

- Določite kapacitivnost med ploščama.
- Za koliko se kapacitivnost poveča/zmanjša, če plošči razmaknemo za trikratno razdaljo?
- Za koliko se kapacitivnost poveča/zmanjša, če površino plošč povečamo za trikrat?
- Za koliko se skupna kapacitivnost poveča/zmanjša, če ploščama zaporedno priključimo še 2 enako velika kondenzatorja?

Izračun:

a) Kapacitivnost med ploščama je

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{0,02 \text{ m}} = 4,427 \cdot 10^{-12} \text{ F} = \underline{\underline{4,427 \text{ pF}}}.$$

b) Če plošči razmaknemo za $3x$, se poveča razdalja d za $3x$, torej bo posledično kapacitivnost $3x$

manjša: $C = \varepsilon_0 \frac{A}{3d} \cong \underline{\underline{1,48 \text{ pF}}}.$

c) Če povečamo površino plošč za $3x$, bo kapacitivnost trikrat večja: $C = \varepsilon_0 \frac{3A}{d} \cong \underline{\underline{13,3 \text{ pF}}}.$

d) Če ploščama zaporedno priključimo še dva enaka kondenzatorja, bo skupna kapacitivnost $3x$

manjša: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{3}{C_1} \Rightarrow C = \frac{C_1}{3} \cong \underline{\underline{1,48 \text{ pF}}}.$ Ugotovimo, da je zaporedna vezava treh

enakih kondenzatorjev ekvivalentna povečanju razdalje med ploščama enega za $3x$. Hkrati je vzporedna vezava enakih kondenzatorjev ekvivalentna povečanju površine plošč enega kondenzatorja.

Preprosta kondenzatorska vezja so kar vzporedne in zaporedne vezave kondenzatorjev. V tem primeru moramo ob upoštevanju zveze $Q = CU$ vedeti le to, da je skupna (nadomestna) kapacitivnost vzporedne vezave kondenzatorjev vsota posameznih kapacitivnosti in da moramo pri zaporedni vezavi seštevati inverzne vrednosti.

Primer izračuna nadomestne kapacitivnosti:

Zaporedni vezavi kondenzatorjev $C_1 = 1 \text{ nF}$ in $C_2 = 2 \text{ nF}$ priključimo vzporedno še kondenzator $C_3 = 2 \text{ nF}$. Določimo naboj na kondenzatorju C_2 , če vezje priključimo na napetost 100 V .

Izračun: Določimo nadomestno skupno kapacitivnost, ki je

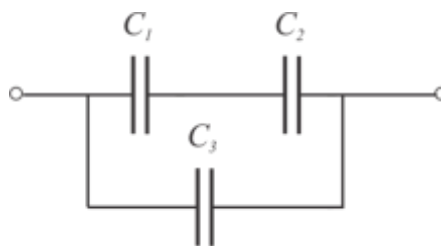
$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} \text{ nF} \cong 0,67 \text{ nF}.$$

$$C_{nad} = C_{12} + C_3 \cong 0,67 \text{ nF} + 2 \text{ nF} = 2,67 \text{ nF}.$$

$$\text{Naboj na } Q_3 \text{ je } Q_3 = C_3 U_3 = C_3 \cdot 100 \text{ V} = 267 \text{ nC}.$$

Koliko naboja pa je na Q_2 ?

Zaradi zaporedne vezave kondenzatorjev C_1 in C_2 , je naboj na kondenzatorju C_2 enak naboju na C_1 in tudi na zaporedni skupni vezavi, torej $Q_2 = C_{12} U \cong 0,67 \text{ nF} \cdot 100 \text{ V} = \underline{\underline{67 \text{ nC}}}$.



ENAČBE POTREBNE ZA ANALIZO SPLOŠNEGA KONDENZATORSKEGA VEZJA

Kako pa bi analizirali vezje z več kondenzatorjev in virov, ko ni mogoče preprosto vzporedno in zaporedno seštevati kondenzatorje? V tem primeru je potrebno napisati sistem enačb ob upoštevanju osnovnih zakonitosti elektrostatičnega polja: potencialnost elektrostatičnega polja in zakon o ohranitvi naboja):

- 1) Vsota vseh napetosti v zaključeni zanki je enaka nič:

$$\sum_i U_i \Big|_{\text{v zanki}} = 0. \quad (16.11)$$

- 2) Vsota nabojev v »spojišču« je enaka nič:

$$\sum_i Q_i \Big|_{\text{spojišča}} = 0. \quad (16.12)$$

Primer določitve enačb za izračun napetosti na kondenzatorjih v vezju:

Določite enačbe, potrebne za izračun napetosti na kondenzatorjih za poznane C_1 , C_2 in U_0 .

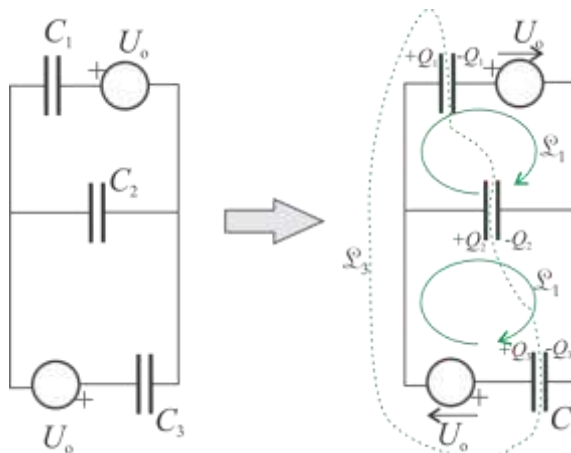
Iz slike na levi, ki je podana, je pametno skicirati smeri napetosti na virih ter se določiti porazdelitev naboja na kondenzatorjih, kar tudi določa smer napetosti na njih (glej sliko desno). Glede na smeri napetosti lahko zapišemo dve enačbi z upoštevanjem Kirchoffovega zakona, da je vsota vseh napetosti vzdolž zanke enaka nič.

Z upoštevanjem enačbe (16.11) za zanki L1 in L2 napišemo

$$U_{C1} + U_0 - U_{C2} = 0 \text{ in } U_{C2} - U_{C3} + U_0 = 0.$$

Poleg tega upoštevamo še enačbo ohranitve naboja, enačbo (16.12). Naboj se le prerazporeja iz ene elektrode kondenzatorja na druge. Znotraj

prostora zaobjetega z zanko L3 mora veljati $+Q_{C1} + Q_{C2} + Q_{C3} = 0$. To enačbo lahko izrazimo z napetostmi $C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 = 0$ in tako dobimo sistem treh enačb za tri neznane napetosti na kondenzatorjih. Izračunana napetost na kondenzatorjih je seveda lahko tudi negativna, kar pomeni, da je usmerjena drugače kot smo predpostavili na začetku.



17. Dielektrik v električnem polju

Vsebina poglavja: relativna dielektričnost, povečanje kapacitvnosti z uporabo dielektrika, vezan in prosti naboj, vektor polarizacije, površinska gostota vezanega naboja, električna susceptibilnost, vektor gostote električnega pretoka, povezave med E, D in P, modificiran Gaussov zakon, mejni pogoji električnega polja med dvema dielektrikoma, mejni pogoji med prevodnikom in dielektrikom.

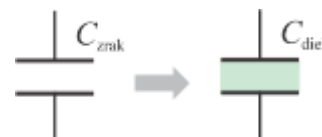


Podvodni kabel, 420 kV.

Do sedaj smo imeli opravka le s prevodniki v vakuumu oziroma zraku. Kako pa vplivajo različni materiali (snovi) na električne razmere? Na primer, kaj se zgodi, ko med plošči ploščnega kondenzatorja vložimo material, ki je idealen (električni) izolator in ju priključimo na vir napetosti? Takemu materialu pogosto rečemo dielektrik in s tem poudarimo njegove dielektrične (kapacitivne) lastnosti, medtem ko izolatorjem praviloma predpisujemo uporovne lastnosti; dober izolator ima zelo veliko (specifično) upornost.

DIELEKTRIK VSTAVLJEN V ZRAČNI KONDENZATOR

Če izmerimo kapacitivnost pred vložitvijo dielektrika in po vložitvi ugotovimo, da se kapacitivnost po vložitvi poveča:



$$\frac{C_{\text{diel}}}{C_{\text{zrak}}} = \epsilon_r \geq 1. \quad (17.1)$$

ϵ_r imenujemo relativna dielektrična konstanta in pove, za koliko se kapacitivnost poveča ob vstavitvi dielektrika med plošči zračnega kondenzatorja.

Kapacitivnost zračnega ploščatega kondenzatorja pred vstavitvijo dielektrika je $C_{\text{zrak}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$, po vstavitvi pa je

$$C_{\text{diel}} = \epsilon_r C_{\text{zrak}} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (17.2)$$

Pomni: Izrazi za kapacitivnosti različnih tipov zračnih kondenzatorjev veljajo tudi v primeru, ko je namesto zraka dielektrik, le konstanto ϵ_0 nadomestimo z $\epsilon_r \epsilon_0$.

Primer izračuna kapacitivnosti ploščnega kondenzatorja:

Vzemimo ploščni kondenzator s površino plošče 100 cm^2 . Med plošči stisnemo list papirja debeline 2 mm ($\epsilon_r = 2$) in 2 mm debelo gumo z $\epsilon_r = 6$. Kondenzator priključimo na napetost 100 V.

- Kolikšen je padec napetosti na plasti papirja in kolikšen na steklu?
- Kolikšno je polje v steklu in v papirju?
- Kolikšno je polje na meji med steklom in papirjem?

Izračun:

$$a) C_1 = C_{\text{papir}} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d_1} = 2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 8,854 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

$$C_2 = C_{\text{steklo}} = \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 \frac{A}{d_2} = 6 \cdot 8,854 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 3C_1 = 26,562 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

Nadomestna kapacitivnost je

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 3C_1}{C_1 + 3C_1} = \frac{3}{4} C_1 = 6,6405 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \text{torej je naboj na skupni vezavi}$$

$$Q_{12} = C_{12} U = 6,6405 \text{ nC}.$$

Ta naboj je tudi enak naboju na kondenzatorju C_1 , zato je $U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 75 \text{ V}$ in $U_2 = U - U_1 = 25 \text{ V}$.

b) Električna poljska jakost v papirju je: $E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{75 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 37,5 \text{ kV/m}$, v steklu pa

$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{25 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 12,5 \text{ kV/m}.$$

c) Iz $Q_1 = Q_2$ sledi $C_1 U_1 = C_2 U_2$ oziroma $\varepsilon_{r1} \varepsilon_0 \frac{A}{d_1} \cdot E_1 d_1 = \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 \frac{A}{d_2} \cdot E_2 d_2$, od koder je

$\varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_{r2} E_2$. Polje na meji med dielektrikoma ima skok, je torej nezvezno. Polje v dielektriku z manjšo dielektričnostjo je večje od polja v dielektriku z večjo dielektričnostjo.

RELATIVNE DIELEKTRIČNOSTI IN PREBOJNE TRDNOSTI MATERIALOV

Večina plinov ima vrednosti dielektričnosti okoli 1, med 1 in 1,001 in prebojno trdnost okoli 3 MV/m, medtem, ko imajo običajni izolatorji relativne dielektričnosti med 2 in 10 in prebojne trdnosti od nekaj do nekaj sto MV/m.

Plin	relativna dielektričnost brez enot	prebojna trdnost MV/m
vodik	1,00027	2
suh zrak	1,00058	3
CO ₂	1,00099	2,9
Tekočine in izolatorji	relativna dielektričnost	prebojna trdnost v MV/m
papir	2,3	20
etanol	3,7	16
voda (destilirana)	81	65-70
olja	2-5	15
guma	3	10
Silicij - Si	11	30

Na spletu lahko najdete tabele še za druge materiale:

- za relativne dielektričnosti - [Honeywell](#),
- za prebojne trdnosti - [Berger](#).

FIZIKALNA RAZLAGA SPREMEMBE KAPACITIVNOSTI OB UPORABI DIELEKTRIKA

Raziščimo dva primera: v prvem je zračni ploščni kondenzator naelektren z določenim nabojem, v drugem primeru pa je priključen na vir napetosti.

1) PLOŠČNI KONDENZATOR NAELEKTREN S PROSTIM NABOJEM MED PLOŠČAMA

Vzemimo, da imamo na elektrodah ploščnega kondenzatorja prosti naboj, torej $\pm Q_{\text{prosti}} = \pm \sigma_{\text{prosti}} A$.

Med plošči vstavimo dielektrik. Pozitivni in negativni naboji na ploščah delujejo s silo na naboje v dielektriku tako, da se le ti prerazporedijo. To prerazporeditev nabojev lahko ponazorimo z modelom dipola. Dipoli se usmerijo v smer polja (navor $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ je enak nič, ko sta vektorja vzporedna), pri čemer je potrebno upoštevati, da so negativni poli dielektrika bližje pozitivni elektrodi. Polje med ploščama je vsota prispevkov vseh nabojev, tistih na ploščah kondenzatorja in ločenih nabojev (dipolov) v dielektriku med ploščama.

Dipoli so nanizani v verigi, kjer se minus pol enega dipola kompenzira s plus polom naslednjega dipola. Tako lahko smatramo, da se **znotraj dielektrika kompenzirajo naboji dipolov, ostane pa na površini nekompenziran naboj, ki pa je nasprotnega predznaka kot prosti naboj na plošči**. Ti nekompenzirani (**vezani**) naboji povzročajo polje, ki je nasprotno usmerjeno od polja, ki je povzročil polarizacijo. Zato se polje med ploščama ob vstavitvi dielektrika pri konstantnem naboju zmanjša.

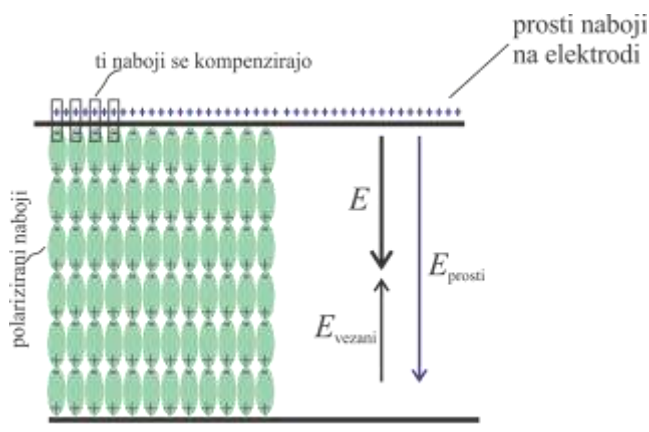
Posledično se **zmanjša tudi napetost med ploščama** $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Ker pa je kapacitivnost določena

kot $C = \frac{Q}{U}$, se ob zmanjšanju napetosti med ploščama in konstantnem prostem naboju na ploščama kapacitivnost poveča.

Ob vložitvi dielektrika med naelektreni plošči pri konstantnem (prostem) naboju bo torej:

$$C \uparrow = \frac{Q}{U \downarrow}$$

(17.3)

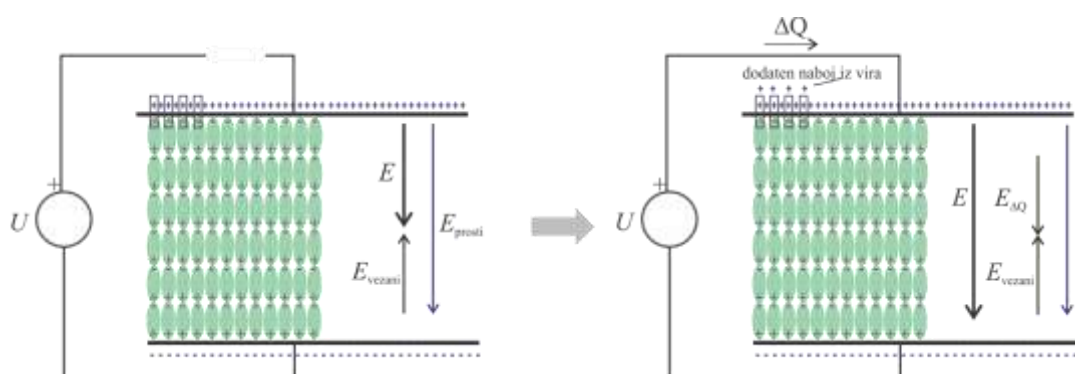


Slika 17-1: Prosti naboj na ploščah kondenzatorja polarizira snov med ploščama, kar prikažemo s kreiranjem električnih dipolov. Ti ustvarjajo električno polje, ki zmanjšuje polje prostih nabojev. Zato se napetost med ploščama zmanjša.

2) PLOŠČNI KONDENZATOR PRI PRIKLJUČENI FIKSNI NAPETOSTI MED PLOŠČAMA

Kako pa razložimo enako povečanje kapacitivnosti pri vložitvi dielektrika med plošči zračnega kondenzatorja ob **konstantni napetosti**? Tudi v tem primeru si zamislimo, da se na elektrodah zaradi napetosti nakopiči določen naboj. Ko pa vstavimo dielektrik, polje, vzpostavljeno med ploščama povzroči polarizacijo dielektrika. Zopet tako, da so negativni naboji dielektrika v povprečju bližje pozitivnim nabojem na plošči. Ti polarizirani naboji bi ob ohranjeni količini naboja na ploščama povzročili zmanjšanje polja in zmanjšanje napetosti med ploščama. Ker pa je zunanja napetost vsiljena, priteče ob fiksni napetosti na elektrodi dodaten naboj, ki kompenzira polariziran naboj. Tudi v tem primeru se torej poveča kapacitivnost, saj se poveča količina prostega naboja na ploščah kondenzatorja.

Ob vložitvi dielektrika pri konstantni napetosti bo: $C \uparrow = \frac{Q \uparrow}{U}$. (17.4)

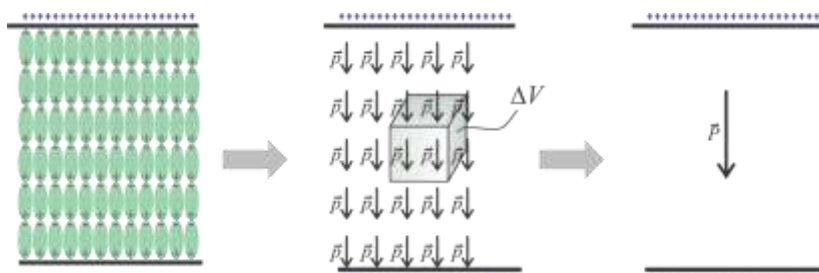


Slika 17-2: Ker se polje znotraj dielektrika zmanjša zaradi polarizacije nabojev v dielektriku, mora za vzpostavitev priključene napetosti iz vira priteči dodaten naboj. Levo: naelektrjen kondenzator brez priključene napetosti. Desno: kondenzator ob priključeni napetosti.

VEKTOR POLARIZACIJE

Električni dipolni moment smo že spoznali. Definiran je kot $\vec{p} = Q\vec{d}$. Ugotovili smo, da na dipol v polju deluje navor $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$. V dielektriku, ki ga postavimo v polje se ustvarijo in usmerijo dipoli. Vpeljemo pojem **vektorja polarizacije**, ki je določen kot **prostorska gostota dipolskih momentov**:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV}. \quad (17.5)$$



Slika 17-3: Vpeljava koncepta vektorja polarizacije: množico polariziranih molekul (levo) predstavimo kot množico dipolov in pripadajočih dipolnih momentov (sredina), gostoto teh dipolnih momentov pa predstavimo z vektorjem polarizacije (desno).

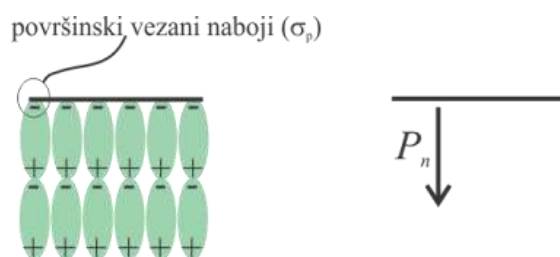
Enota vektorja polarizacije je $\frac{\text{C} \cdot \text{m}}{\text{m}^3} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$.

Zakaj vpeljati nov vektor? Zopet imamo problem, da je sicer smiselno vpliv polja na dielektrik ponazoriti z množico dipolov, ker pa je v snovi zelo veliko molekul in torej veliko dipolov, je potrebno njihovo skupno delovanje predstaviti na primeren način. Vektor polarizacije je torej makroskopski model in ponazarja povprečno delovanje velike množice dipolnih momentov v majhnem volumnu. Na podoben način smo se lotili tudi obravnave naboja: s konceptom gostote naboja.

POVRŠINSKA GOSTOTA POLARIZIRANEGA NABOJA

Enako kot o gostoti prostega površinskega naboja lahko »govorimo« tudi o **gostoti polariziranega (vezanega) površinskega naboja**. Vzemimo en majhen del površine. Tam je $dQ = \sigma dA$ in če je normala na površino v smeri Y, lahko diferencial dipola zapišemo v obliki $dp = dQdy = \sigma dV$, kar pomeni, da bo v skladu z definicijo vektorja polarizacije ($\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$) (17.5) na površini telesa normalna komponenta vektorja polarizacije enaka površinski gostoti vezanega naboja:

$$\sigma_p = P_n \quad (17.6)$$

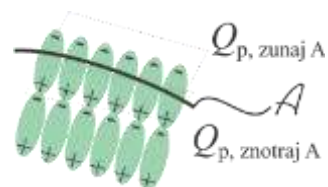


Slika 17-4: Na površini je normalna komponenta vektorja polarizacije enaka gostoti površinskega polariziranega (vezanega) naboja.

Vzemimo primer enakomerno polariziranega valja površine A . Na površini je vezan (polariziran) naboj velikosti $Q_p = P \cdot A$. Če smer vektorja polarizacije ni v smeri normale na površino je potrebno upoštevati le normalno komponento vektorja polarizacije $Q_p = P_n \cdot A$. Če pa polariziran naboj ni enakomerno porazdeljen, pa je potrebno pisati

$$Q_p = \int_A \vec{P} \cdot d\vec{A} \quad (17.7)$$

Polariziran (vezan) naboj po zaključeni površini dobimo z integracijo normalne komponente vektorja polarizacije po celotni površini: $Q_{P, \text{zunaj } A} = \oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A}$. Ker ta naboj ni nujno enak nič, ostane ob



polarizaciji znotraj zaključene površine površinski polariziran naboj, ki je enak

$$Q_{P, \text{znotraj}} = -\oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A} \quad (17.8)$$

Ta naboj je potrebno razlikovati od naboja, ki se »prosto« giblje po prevodni površini, saj je polariziran naboj vezan v snovi. Lahko se premika, vendar le znotraj določenega omejenega območja.

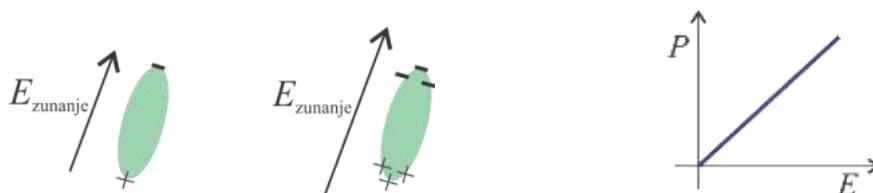
ELEKTRIČNA SUSCEPTIBILNOST

Ko dielektrik postavimo v polje se naboji v snovi prerazporedijo - **polarizirajo**. Ta prerazporeditev je lahko večja ali manjša, odvisno od lastnosti materiala. Prerazporeditev naboja predstavimo z modelom električnih dipolov oziroma njihove gostote z vektorjem polarizacije P . Za večino snovi velja, da povečanje polja povzroči sorazmerno povečanje polarizacije (Slika 17-5), kar matematično zapišemo kot:

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \quad (17.9)$$

Spomnimo se, kaj je $\epsilon_0 E$. Na površini prevodnika je produkt $\epsilon_0 E$ enak površinski gostoti naboja. Konstanto χ (chi) imenujemo **električna susceptibilnost** in »govori« o odzivnosti snovi na električno polje. Je brezdimenzijska konstanta. V vakuumu je torej χ enak nič, saj tam ni snovi oz. polariziranega naboja.

Dielektrik imenujemo **linearen**, če susceptibilnost ni odvisna od velikosti polja (napetosti), **homogen**, če je neodvisen od pozicije in **izotropen***, če je neodvisen od smeri polja.



Slika 17-5: Večje kot je zunanje električno polje, večja je polarizacija. Za večino materialov je zveza med polarizacijo in električnim poljem linearna.

MODIFICIRAN GAUSSOV ZAKON IN VPELJAVA VEKTORJA GOSTOTE ELEKTRIČNEGA PRETOKA - D.

Tudi pri obravnavi polja v snovi upoštevamo osnovna zakona elektrostatičnega polja, ki smo ju spoznali doslej: zakon potencialnosti elektrostatičnega polja $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ in Gaussov zakon

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Prvi integral je po zaključeni poti, drugi pa po zaključeni površini. Q je naboj, ki je

zaobjet z integracijo. Zakon potencialnosti polja se ne spremeni tudi, če gre del poti skozi dielektrik, medtem, ko se drugi spremeni, saj je potrebno upoštevati, da z integracijo polja po zaključeni površini ne zajamemo le prosti naboj pač pa tudi ujetega, polariziranega. Ugotovili smo že, da je

* **Anizotropen material** ima različno dielektričnost (susceptibilnost) v različnih smereh. V tem primeru bo polarizacija v vsaki smeri drugačna. Polarizacija v smeri X osi bo torej enaka

$P_x = \epsilon_0 \chi_{xx} E_x + \epsilon_0 \chi_{xy} E_y + \epsilon_0 \chi_{xz} E_z$. Podobno zapišemo za ostale smeri. V tem primeru susceptibilnost ni več skalarna količina, pač pa jo moramo predstaviti kot tenzor (v obliki matrike).

količina tega ujetega naboja po zaključeni površini enaka $Q_{P, \text{znotraj}} = -\oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A}$, torej moramo

Gaussov zakon zapisati v obliki

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{prosti, znotraj } A}}{\epsilon_0} + \frac{Q_{P, \text{znotraj } A}}{\epsilon_0}. \quad (17.10)$$

Dopolnjeni Gaussov zakon lahko zapišemo tudi kot

$$\oint_A \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} + \oint_A \vec{P} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj } A} \quad (17.11)$$

oziroma

$$\oint_A (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj } A} \quad (17.12)$$

Zgodovina elektrotehnike je doprinesla še eno veličino (lahko smatramo tudi dvopomensko), ki v osnovi izhaja iz zgornje enačbe. J.C. Maxwell* je namreč vpeljal vektor D , ki ga imenujemo **vektor gostote električnega pretoka** in je definiran kot

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (17.13)$$

Enota vektorja D je C/m^2 , enako kot gostota naboja na površini prevodnika. V osnovi je vektor D na površini enak površinski gostoti naboja, je pa za razliko od površinskega naboja definiran tudi povsod po volumnu.

S pomočjo tega vektorja lahko zapišemo zgornjo enačbo v obliki

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj } A}, \quad \text{MODIFICIRAN GAUSSON ZAKON} \quad (17.14)$$

ki ga imenujemo **modificiran Gaussov zakon**[†]. Z besedami bi rekli, da je pretok vektorja D skozi zaključeno površino enak zaobjetemu prostemu naboju. Odlika tega zapisa je predvsem ta, da je zapis

* James C. Maxwell je pomembna osebnost v zgodovini raziskovanja in odkrivanja zakonitosti električnih pojavov in teorije električnega polja. Dandanes govorimo o sistemu štirih Maxwellovih enačb, ki v celoti opisujejo interakcijo električnega in magnetnega polja. Drži, da jih ni prvi zapisal Maxwell, jih je pa izluščil iz mnogih enačb ter jih ustrezno dopolnil. Doslej smo obravnavali že dva od štirih zakonov: zakon potencialnosti polja in (modificiran) Gaussov zakon. Med drugim je pomembna tudi njegova vpeljava gostote električnega pretoka D . Hkrati je prvi pravilno ugotovil, da je izmenični tok v dielektrikih (kondenzatorju) posledica časovne spremembe električnega polja in časovne spremembe polariziranega naboja, kar opišemo kot $\vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Temu toku rečemo tudi premikalni ali včasih tudi poljski tok.

[†] Velja povedati, da oznaka "modificiran" ni ravno mednarodno ustaljen tērmin (strokovni izraz), mi ga uporabimo zato, da ta zapis Gaussovega zakona razlikujemo od zapisa z vektorjem E . Bistvena razlika med zapisoma je, da pri zapisu z E Q predstavlja celoten naboj (tako prosti kot vezani), v zapisu z D pa le prostega. To je dobro vedeti, ker se v literaturi pogosto pojavljata oba zapisa Gaussovega zakona s Q vendar običajno brez dodatne obrazložitve, na kateri naboj se nanaša.

neodvisen od vplivov snovi na vektor \vec{D} . Ta vektor je izključno odvisen od lege prostih nabojev, to pa so tisti, ki jih običajno vzpostavimo z zunanjim poljem. S tem si bistveno olajšamo upoštevanje vplivov dielektrika.

ZVEZA MED \vec{D} IN \vec{E}

Združimo enačbi $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ in $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ in dobimo

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

Ponovimo pomembno zvezo med \vec{E} in \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}, \quad (17.15)$$

kjer ϵ_r imenujemo **relativna dielektrična konstanta**, ϵ pa **dielektričnost**. Relativna dielektričnost je brez enote, dielektričnost, ki je $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, pa ima enoto dielektričnosti vakuuma, torej F/m.

Povezava med električno susceptibilnostjo in relativno dielektrično konstanto je preprosta:

$$\epsilon_r = 1 + \chi. \quad (17.16)$$

ZVEZA MED \vec{P} IN \vec{D}

Če smo ugotovili enostavno zvezo med \vec{D} in \vec{E} , velja seveda tudi enostavna zveza med \vec{D} in \vec{P} , saj velja

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E} = \frac{(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{D}}{\epsilon_r \epsilon_0}, \text{ torej je } \vec{P} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \vec{D}. \quad (17.17)$$

NAČINI IZRAČUNAVANJA POLJA V DIELEKTRIKIH ZA PREPROSTE STRUKTURE, KJER LAHKO UPORABIMO PRINCIP SIMETRIČNE PORAZDELITVE NABOJA IN UPORABIMO MODIFICIRAN GAUSSOV ZAKON

Med dvema prevodnima telesoma je priključena napetost (npr. ploščni, koaksialni ali sferični kondenzator). Zanima nas polje, naboj na telesu, itd.

Postopek: Najprej predpostavimo, da je na telesu nek naboj Q in z uporabo modificiranega Gaussovega zakona z upoštevanjem simetrije naboja določimo D , ki ni odvisen od električnih lastnosti snovi. Nato upoštevamo zvezo med D in E da določimo E . E je sedaj odvisen od relativne dielektričnosti snovi. E še vedno nastopa kot funkcija naboja, ki ga ne poznamo. Z integracijo E -ja med elektrodama dobimo napetost, ki je poznana. Iz te napetosti lahko izračunamo naboj oziroma D in nato E ali karkoli nas zanima. Glej sledeče primere.

Primer analize ploščnega kondenzatorja z dielektrikom:

Vzemimo ploščni kondenzator površine plošč 100 cm^2 in ga priključimo na napetost 20 V . Vmes stisnimo 2 mm debel list papirja z relativno dielektrično konstanto 2 . Določimo naboj na površini, površinsko gostoto naboja, vektor gostote pretoka, vektor polarizacije, električno poljsko jakost in kapacitivnost.

Izračun: Izračuna se lahko lotimo na več načinov. Običajni postopek je tak, da najprej določimo D , ki ni odvisen od snovi, potem E , nato U , itd.. V ploščnem kondenzatorju velja:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj}} \Rightarrow DA = \sigma A \Rightarrow D = \sigma$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

$$U = \int_0^d E dx = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} d, \text{ od koder lahko določimo } \sigma \text{ ali } D: \sigma = D = 177,08 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2. \text{ Sledi}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = 10 \text{ kV/m in } P = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} D = \frac{2-1}{2} D = \frac{D}{2} = 88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2.$$

$$\text{Polje lahko določimo tudi direktno kot } E = \frac{U}{d} = \frac{20 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 10 \text{ kV/m}.$$

Sigma, ki smo jo izračunali, je gostota površinskega naboja. D je enak sigmi, vendar je D definiran povsod v prostoru, sigma pa le na površini. Ker obravnavamo primer ploščnega kondenzatorja, je D povsod enako velik. Ker je normalna komponenta P -ja na površini enaka površinski gostoti polariziranega naboja, je $\sigma_p = P = 88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$. Prostega naboja na površini plošče je $2x$ več od polariziranega površinskega naboja, torej, vsak drugi prosti naboj ima svoj nasprotni – polariziran naboj. Pri dielektrikih z veliko relativno dielektričnostjo bo P kar enak D .

Pri konstantni napetosti je polje v dielektriku neodvisno od dielektrika in je enako

$$E = \frac{U}{d} = \frac{20 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 10 \text{ kV/m}. \text{ Zato pa bo v primerjavi z zrakom potrebna gostota naboja, ki bo}$$

vzdrževala to polje v dielektriku večja kot v primeru, če med ploščama ni dielektrika (je le zrak), saj

$$\text{velja } E = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = \varepsilon_r \varepsilon_0 E = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{U}{d}. \text{ Ko bomo vstavili dielektrik, se bo površinska gostota naboja}$$

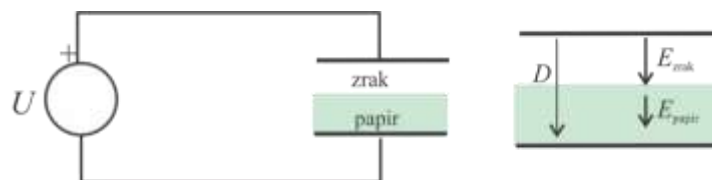
povečala za $2x$: od $88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$ na $177,08 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$. Razlika je ravno posledica polarizacije, ki na površini dielektrika vzpostavi površinsko gostoto polariziranega naboja (nasprotnega predznaka kot prosti naboj) velikosti $88,54 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$.

Če pa imamo konstantno gostoto naboja, se bo polje po vložitvi dielektrika med plošči zmanjšalo za

$$\varepsilon_r, \text{ saj velja } E = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0}, \text{ torej na } 5 \text{ kV/m}. \text{ To pomeni, da se bo zmanjšala tudi napetost in sicer na } 10 \text{ V}.$$

Primer analize ploščnega kondenzatorja z dvema dielektrikoma:

Nekoliko drugačne pa bodo razmere, če bomo med plošči kondenzatorja vstavili dielektrik, ki bo le delno zapolnil vmesni prostor. Vzemimo, da v zračni kondenzator, ki je priključen na napetost 20 V in ima 2 mm razdalje med ploščama potisnemo 1 mm debel kos papirja.



Slika 17-6: Ploščni kondenzator z dvema dielektrikoma.

Izračun: D bo neodvisen od dielektrikov in bo povsod konstanten. Spremenilo pa se bo polje, ki bo

$E = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0}$ v dielektriku (papirju) in $E = \frac{D}{\epsilon_0}$ v zraku. Da bi določili vrednosti polja moramo zapisati še

napetost, ki bo

$$U = \int_0^d E dx = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} d_1 + \frac{D}{\epsilon_0} d_2 = D \left(\frac{d_1}{\epsilon_r \epsilon_0} + \frac{d_2}{\epsilon_0} \right)$$

torej bo

$$D = \frac{U}{\left(\frac{d_1}{\epsilon_r \epsilon_0} + \frac{d_2}{\epsilon_0} \right)} = \frac{20 \text{ V}}{\frac{1 \text{ mm}}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} = 118,053 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

Toliko je tudi površinska gostota naboja. Električno polje je torej $E = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = 6,667 \text{ kV/m}$ v

dielektriku (papirju), v zraku pa je 2x večje - 13,33 kV/m.

Gostota polariziranega površinskega naboja na meji med papirjem in ploščo in papirjem in zrakom je enaka $D/2$.

Reševanje istega primera s pomočjo kapacitivnosti:

$$U = Q \left(\frac{d_1}{A \epsilon_r \epsilon_0} + \frac{d_2}{A \epsilon_0} \right) = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right). \text{ Iz te zveze lahko določimo naboj na površini, iz znanega}$$

naboja pa napetosti na papirju in v zraku: $U_1 = \frac{Q}{C_1}$ in $U_2 = \frac{Q}{C_2}$. Nato iz znanih napetosti določimo

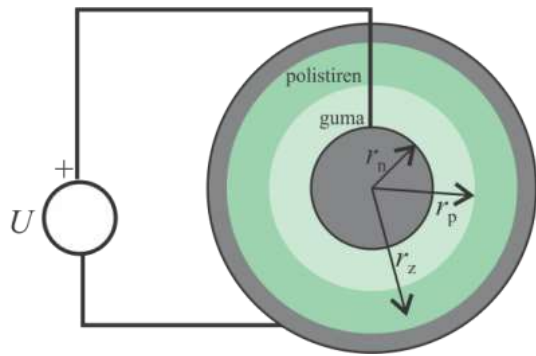
$$\text{polji: } E_1 = \frac{U_1}{d_1} \text{ in } E_2 = \frac{U_2}{d_2}.$$

Na meji med dvema dielektrikoma, v našem primeru med papirjem in zrakom, je skokovit prehod polja. Ker je D enak v obeh medijih bo veljalo:

$\epsilon_{r1} \epsilon_0 E_1 = \epsilon_{r2} \epsilon_0 E_2$. To je mejni pogoj za prehod med dvema dielektrikoma, ki velja splošno, vendar le za tisto komponento polja, ki je pravokotna na mejo.

Primer analize koaksialnega kabla z dvoplastnim dielektrikom:

Vzemimo primer dvoplastnega koaksialnega kabla, ki ga želimo dimenzionirati za delovanje na napetosti 20 kV. Prva, notranja plast je iz gume z relativno dielektričnostjo 3,2, druga pa iz polistirena z $\epsilon_r = 2,6$. Prebojna trdnost gume je 25 kV/mm, polistirena pa 20 kV/mm. Koaksialni kabel polmera žile 4 mm želimo dimenzionirati tako, da maksimalno polje v dielektrikih ne preseže 25% prebojne trdnosti. Določiti moramo debelino obeh dielektrikov, torej radij do plasti polistirena r_p in zunanji radij r_z .

**Izračun:**

Pri vzpostavljeni napetosti 20 kV imamo na žili $+q$ naboj, na oklopu pa $-q$. Da bi določili polje v enem in drugem dielektriku, se poslužimo Gaussovega stavka za vektor \vec{D} , ki je neodvisen od dielektrikov. Za poljubni radij med notranjim in zunanjam dobimo

$$D(r) = \frac{q}{2\pi r} \text{ oziroma } \vec{D} = \vec{e}_r D(r) = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi r}. \text{ Polje v dielektrikih dobimo iz zveze } \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r \epsilon_0}, \text{ torej}$$

bo polje v plasti gume

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_{rg} \epsilon_0} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi \epsilon_{rg} \epsilon_0 r},$$

v plasti polistirena pa

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_{rp} \epsilon_0} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi \epsilon_{rp} \epsilon_0 r}.$$

Maksimalno polje v gumi ne sme preseči 25% prebojne trdnosti, kar zapišemo kot

$$E_{\max, \text{guma}} = 25\% E_{\text{preb, guma}} = 0,25 \cdot 25 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 6,25 \cdot 10^6 \text{ V/m},$$

za polistiren pa bo veljalo

$$E_{\max, \text{poli}} = 25\% E_{\text{preb, poli}} = 0,25 \cdot 20 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 5 \cdot 10^6 \text{ V/m}.$$

Polje bo maksimalno pri čim manjšem radiju, torej pri

$$E_{\max, \text{guma}} = \frac{q}{2\pi \epsilon_{rg} \epsilon_0 r_n} = 6,25 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

in

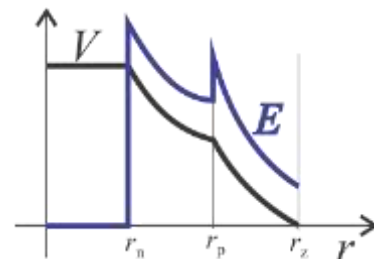
$$E_{\max, \text{poli}} = \frac{q}{2\pi \epsilon_{rp} \epsilon_0 r_p} = 5 \cdot 10^6 \text{ V/m}.$$

Če enačbi delimo, lahko določimo r_p :

$$r_p = \frac{\epsilon_{rg}}{\epsilon_{rp}} \cdot r_n \cdot \frac{6,25}{5} = \underline{\underline{0,62 \text{ cm}}}.$$

Lahko tudi določimo linijsko gostoto naboja, ki bo $q = 2\pi \epsilon_{rg} \epsilon_0 r_n \cdot 6,25 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$.

Preostane nam še, da določimo potrebno debelino plasti polistirena, za kar pa potrebujemo še eno enačbo, ki jo dobimo iz enačbe za napetost. Integrirati je potrebno polje od notranjega do zunanega radija, pri čemer pa se polje spremeni med dvema dielektrikoma. Zato je potrebno ločiti integral v dva, enako, kot da bi zapisali celotno napetost kot vsoto padcev napetosti v gumi in v polistirenu. Tako dobimo



$$U = \int_{r_n}^{r_z} \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_{gume} + U_{poli} = \int_{r_n}^{r_p} \vec{E}_{gume} \cdot d\vec{l} + \int_{r_p}^{r_z} \vec{E}_{poli} \cdot d\vec{l}$$

$$U = \int_{r_n}^{r_p} e_r \frac{q}{2\pi\epsilon_{rg}\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr + \int_{r_p}^{r_z} e_r \frac{q}{2\pi\epsilon_{rp}\epsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r dr =$$

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_{rg}\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_p}{r_n}\right) + \frac{q}{2\pi\epsilon_{rp}\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_z}{r_p}\right)$$

V gornji enačbi je edina neznanka zunanji polmer, ki jo določimo z vstavitvijo vrednosti in dobimo 0,77 cm.

POVEČANJE KAPACITIVNOSTI ZARADI VSTAVITVE DIELEKTRIKA V KONDENZATOR PRI PRIKLJUČENI

NAPETOSTI

Sedaj, ko imamo dopolnjen Gaussov zakon tako, da velja tudi za primer dielektrikov, lahko pokažemo, da se kapacitivnost kondenzatorja poveča za faktor relativne dielektričnosti tudi bolj matematično.

Uporabimo osnovno zvezo $C = \frac{Q}{U}$, najprej za zrak in potem še za dielektrik z upoštevanjem

Gaussovega zakona in definicije napetosti. Ker je napetost konstantna, mora biti polje znotraj kondenzatorja nespremenjeno tudi po vstavitvi dielektrika. (Je pa res, da je v dielektriku zaradi polja polariziranega naboja določeno polje, ki je zmanjšalo prvotno polje. To polje polariziranih nabojev pa je kompenzirano z dodatnim nabojem, ki pride na elektrode iz vira.) Velja:

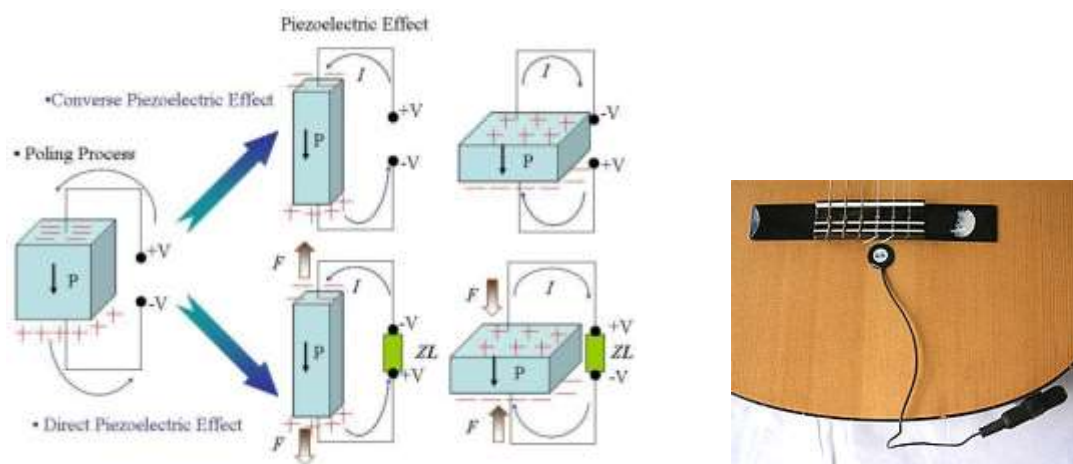
$$C_{zrak} = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}} \quad \text{in} \quad C_{diel} = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

Vidimo, da v splošnem velja $C_{diel} = \epsilon_r C_{zrak}$, kar smo zapisali že v začetku poglavja, sedaj pa tudi dokazali.

Če bi želeli enako pokazati tudi za primer konstantnega naboja, bi ostal Q nespremenjen, U pa bi pisali kot $U = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_L \vec{D} / \epsilon_0 \cdot d\vec{l}$ za zrak in $U = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_L \vec{D} / (\epsilon_r \epsilon_0) \cdot d\vec{l}$ za dielektrik. In bi zopet prišli do enakega zaključka.

* PIEZOELEKTRIKI

Piezoelektriki so materiali, katerih električne lastnosti se spremenijo, če na njih deluje mehanska sila. Piezoelektrične lastnosti imajo na primer določeni kristali kot so kvarc, sukroza (kristali sladkorja) ali svinčev titanat (PbTiO_3), pa tudi biološki materiali kot kost, svila, les, sklenina itd. in celo molekule DNA ali virusi.



Slika 17-7: Levo: Piezoelektrični material polariziramo tako, da ga izpostavimo velikemu električnemu polju. Pri mehanski obremenitvi deluje v generatorskem principu – na površini se pojavi vezan naboj zaradi spremembe polarizacije. Če pa nanj priključimo napetost, se bo pojavila mehanska sila in s tem deformacija piezoelektrika (stisk ali raztezek). Desno: piezoelektrik kot senzorski element za zaznavanje tresljajev.

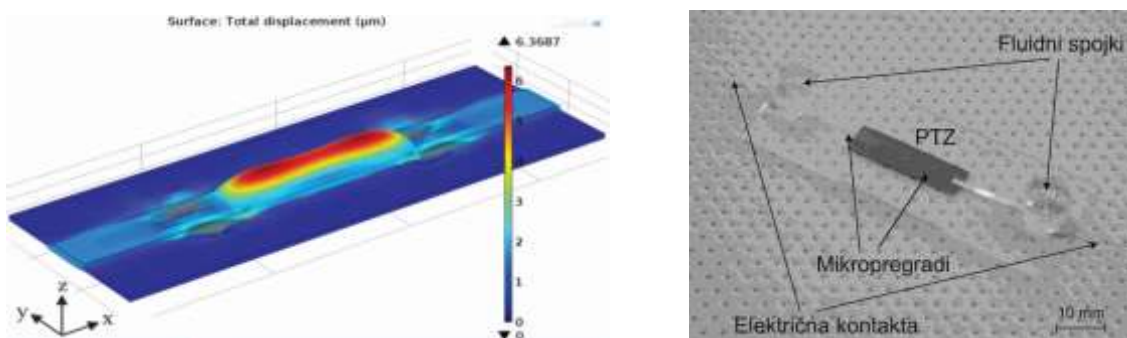
Ob delovanju mehanske ploskovne sile T (ang. stress), se na površini piezoelektrika pojavi površinski naboj in s tem napetost med nasprotnima stranema. Velikost tega naboja opisuje piezoelektrični koeficient d . Sklopitev električnih in mehanskih lastnosti opišemo z enačbo za gostoto električnega pretoka, ki je pri piezoelektrikih $\vec{D} = d\vec{T} + \epsilon\vec{E}$. Običajno je piezoelektrični koeficient odvisen od smeri polarizacije piezoelektrika in ga je v splošnem potrebno obravnavati kot tenzor.

Prav tako pri piezoelektrikih velja tudi obraten efekt: če je piezoelektrik izpostavljen električnemu polju, nanj deluje sila, ki povzroči mehansko deformacijo piezoelektrika, ki jo označimo s črko S (ang. strain). Velja enačba $\vec{S} = s\vec{T} + d'\vec{E}$, kjer je s koeficient elastičnosti materiala. V bistvu gre za razširjen Hookov zakon z upoštevanjem učinka električnega polja na raztezanje materiala*.

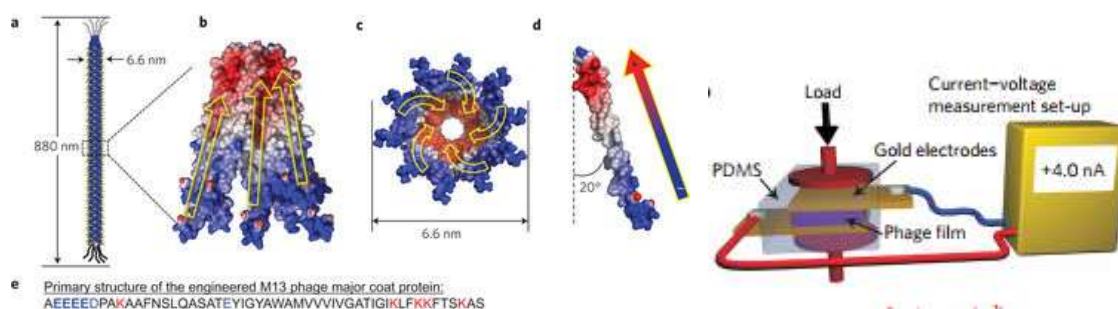
Piezoelektrični efekt lahko izkoriščamo v različne namene (piezoelektrični zvočnik, aktuator, motor, šoba pri tiskalnikih, mikroskop na atomsko silo, itd.). Zanimiv primer uporabe piezoelektričnega aktuatorja je izdelava mikročrpalke. Z razvojem takih črpalk se ukvarja [Laboratorij za mikrosenzorske strukture in elektroniko](#), ki je razvil vrsto črpalk na osnovi MEMS (Mikro-Elektro-Mehanske) tehnologije, kjer za potiskanje tekočine poskrbi tanek piezoelektrični listič vzbujan z izmeničnim

* Bolj plošna oblika zapisa je s tenzorsko notacijo, saj ima tako vektor mehanske napetosti kot tudi vektor razteška šest neodvisnih elementov, ker je potrebno poleg raztega upoštevati tudi velikost striga (strižne sile). Koeficient elastičnosti materiala s je torej v splošnem tenzor, ki ima 6×6 elementov. Podobno velja za piezoelektrični koeficient d , ki je v splošnem tenzor s 3×6 elementi, vendar je le 5 različnih od nič in le tri so neodvisne vrednosti.

napetostnim signalom. Take mikročrpalke so osnova za t.i. Lab-on-a-chip naprave, kjer z MEMS tehnologijo na enem mestu realiziramo celoten sistem za npr. kemijsko analizo. Zanimivo je tudi to, da je celoten razvoj temeljil na uporabi zahtevne 3D elektro-mehansko-fluidne simulacije. Spodnja slika prikazuje rezultat simulacije, desno pa izdelan prototip mikročrpalke.



Spodnja slika kaže manj običajno uporabo piezoelektričnega efekta – gre v bistvu za poskus (raziskavo) uporabe gensko modificiranega virusa (bakteriofag) s povečanim piezoelektričnim učinkom za proizvodnjo električne energije.



Slika 17-8: a) M13 bakteriofag (ali na kratko fag) spada med viruse, ki zajedajo bakterije. Dolg je 800 nm, premera 6,6 nm. Z genskim inženiringom so mu raziskovalci iz Kalifornije povečali neenakomerno porazdelitev naboja, kar se odraža v povečanju električnega polja b) in c) znotraj virusa in s tem povečanjem njegovega dipolnega momenta d). Raziskovalci so pokazali, da ima fag piezoelektrični koeficient $d = 0.30 \text{ pm/V}$ in lahko ob delovanju mehanske sile proizvaja električno energijo (6 nA pri 400 mV). Vir: [Nature Nanotechnology · Maj 2012](#)

Razlika med piezoelektriki, piroelektriki in feroelektriki

Piezoelektriki so podmnžica dielektrikov, so torej dielektriki s posebnimi lastnostmi, to je, da se generira električni naboj, če nanje deluje mehanska sila. Velja pa tudi obratno. Piroelektriki so tudi piezoelektriki, ki pa imajo še to posebnost, da so naravno polarizirani, hkrati pa se njihova polarizacija spremeni ob spremembi temperature. Pogosto se uporabljajo kot detektorji infrardečega sevanja. Feroelektriki so tudi piroelektriki s to posebnostjo, da je njihova polarizacija odvisna od električnega polja. Imajo podobno karakteristiko kot feromagnetiki, od tu tudi izvira njihovo poimenovanje.

SLIKA: Razdelitev feroelektrikov, piroelektrikov in piezoelektrikov kaže, da so vsi dielektriki vendar z določenimi specifičnimi lastnostmi. Feroelektriki so tako tudi piroelektriki in piezoelektriki, ne velja pa tudi obratno.



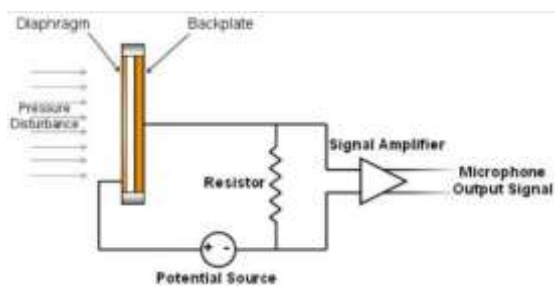
* MIKROFONI

Mikrofon je naprava, ki pretvarja zvok v električni signal. Obstaja več vrst mikrofonov, za nas so trenutno zanimivi kondenzatorski in elektretski mikrofoni. Osnova kondenzatorskega (v ang. literaturi se imenuje condenser in ne capacitor microphone) mikrofona je ploščni kondenzator, ki ga sestavlja fiksna elektroda (back panel) in membrana (diafragma). Membrana je narejena iz zelo tankega materiala (običajno milar) prekrita s prevodno plastjo (običajno zlato ali titan). Kakovost mikrofona je seveda odvisna tudi od izdelave, saj gre v bistvu za elektro-mehanski sistem. Poleg tega je delovanje odvisno od napajanja, saj kondenzatorski mikrofon ob vibraciji ne daje dovolj energije za ojačanje, če sploh kaj.

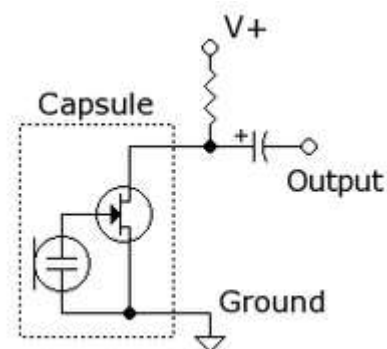
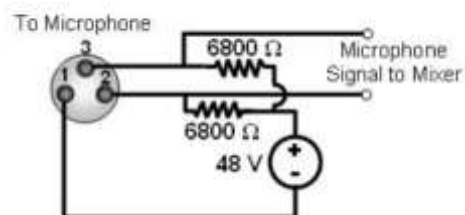
Enostaven način napajanja in zajemanja signala je s pomočjo baterije, oz. vira enosmerne napetosti, ki polarizira elektrodi kondenzatorja pozitivno in negativno. Ob akustičnem signalu membrana zaniha, s čimer se spremeni njena kapacitivnost (ki je inverzno proporcionalna razdalji med elektrodama). Ob konstantni priključeni napetosti se spremeni velikost naboja na elektrodah, saj velja $Q = CU$. Sprememba naboja se odraža kot tok skozi upor ($i = \frac{dQ}{dt}$), ki povzroči spremembo napetosti. To je potrebno še ojačati.

Drugi način napajanja (ki ga razpoznamo po treh izhodnih kontaktih) se imenuje [fantomsko](#). To je napajanje (12-48V DC, običajno 48), ki se ga nekako »ne vidi« oziroma je na istih priključnih vodnikih, kot se prenaša signal iz mikrofona. Masa (1) je priključena na ohišje mikrofona. Obe elektrodi (2 in 3) sta na isti napetosti, zato nihanje vira napetosti ne vpliva na izhodni signal. Kondenzatorski mikrofoni so lahko zelo občutljivi in odzivni, saj je membrana lahko zelo tanka in se ukloni že ob najmanjšem akustičnem signalu. Zato se kondenzatorski mikrofoni večinoma uporabljajo kot studijski mikrofoni.

Alternativna kondenzatorskim mikrofonom so **elektretski** mikrofoni. Ti so običajno cenejši (ni pa nujno) kot kondenzatorski. Elektreti so snovi, v katerih so vgrajeni električni dipoli – so v bistvu ujeti v strukturo in se v zelo dolgem časovnem obdobju »razgradijo«. Elektrete se [izdelata tako](#), da se najprej dielektrični material (npr. PTFE (Poli Tetra Fluor Etilen)), ki vsebuje močno polarne molekule (dipole) stali, potem pa se ga v močnem električnem polju shladi. Tako dobimo element, ki ima vgrajene in enako orientirane električne dipole in s tem v svoji okolici učinkuje z vgrajenim električnim poljem. Iz te podobnosti s trajnim magnetom, ki v okolici učinkuje z magnetnim poljem, tudi izhaja njegovo ime: magnet ↔ elektret. Večina malih mikrofonov, ki jih vidite na oblačilih, videokamerah, v računalniških mikrofoni, v mobilnih telefonih, so elektretski mikrofoni. Načeloma ne potrebujejo dodatnega napajanja, saj se ob upogibu membrane iz elektreta spremeni razdalja med elektrodama in s tem (ob konstantem polju) napetost med elektrodama, ki pa je zelo majhna in jo je potrebno ojačati. Da bi čim bolj zmanjšali šum, je običajno tik ob elektretskem elementu tudi ojačevalni element (običajno JFET – Junction Field Effect Transistor), lahko pa tudi posebno prirejen integriran čip kot npr. [MAX9810](#). [O lastnostih](#).

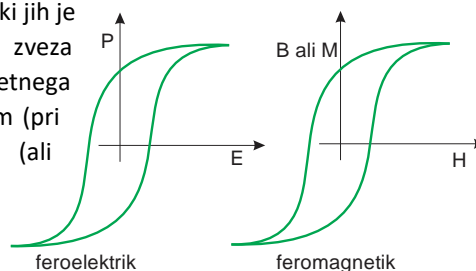


48 Volt Phantom Powering:



Dodatno:

- Elektreti imajo lahko trajno vgrajen električni naboj (real charge electrets) ali pa trajno vgrajene električne dipole (oriented-dipole electrets). Sledji elektreti spadajo med feroelektrične materiale. Te ne gre zamenjevati s feromagnetnimi, saj ne vsebujejo magnetnih struktur. Podobnost v imenu izhaja iz podobnosti karakteristike – odvisnost od naelektritve/magnetizacije od električnega/magnetnega vzbujanja. Medtem, ko je feromagnetne materiale mogoče namagnetiti - ohranijo magnetne lastnosti tudi, ko vzbujalno magnetno polje izklopimo - se feroelektrični materiali v električnem polju polarizirajo in ostanejo polarizirani tudi po izklopu električnega polja. Elektreti so snovi, ki jih je težko razelektriti, magneti pa snovi, ki jih je težko razmagnetiti. Za oboje je značilna nelinearna in histerezna zveza med vzbujanjem (pri magnetih jo obravnavamo z jakostjo magnetnega polja H , pri elektretih pa z jakostjo električnega polja E) in učinkom (pri magnetih ga obravnavamo z gostoto magnetnega pretoka B (ali magnetizacijo M), pri elektretih pa s polarizacijo P).



- Elektrete s trajno vgrajenim električnim nabojem običajno naredijo tako, da dielektrični material vzpostavijo visokonapetostni DC koroni.
- Elektrete in feroelektrike se pogosto uporabi tudi za »energijsko žetje«. [En članek](#).

- Izdelavo miniaturnih mikrofонов omogoča tudi polprevodniška tehnologija z dodatno mikro-mehansko obdelavo, s pomočjo katere se izdelata t.i. [MEMS strukture](#) (Micro-Electro-Mechanical Structures). Ker je ta tehnologija nadgradnja polprevodniške, je mogoče elektronske elemente vgraditi v enako polprevodniško strukturo – ASIC (Application Specific Integrated Circuit) tehnologija. Princip delovanja pa je praktično enak kondenzatorskemu mikrofону.



Figure 2 Cross-section diagram of a MEMS microphone sensor

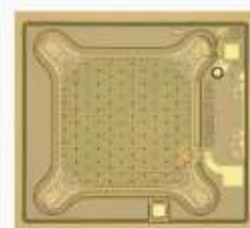
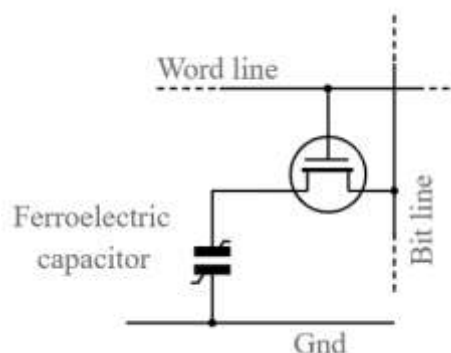


Figure 3 A typical MEMS microphone sensor viewed from above

- Če že omenjamo feroelektrike, je zanimiva tudi njihova uporaba v bralno-pisalnih pomnilnikih (RAM – Random Access Memory), kjer se namesto navadnega kondenzatorja, namenjenega shranjevanju naboja (kar predstavlja 1 ali 0, če kondenzator ima ali nima naboja), uporabi feroelektrični kondenzator. Zato se imenuje FeRAM ali FRAM. Glavna prednost FeRAM-a v primerjavi z bolj znanim DRAM-om je manjša potreba po stalnem osveževanju naboja na kondenzatorju in s tem skupna poraba energije. Ne more pa se doseči take gostote celic kot v DRAMU, ker pri zelo majhnih dimezijah material izgubi tipične feroelektrične lastnosti (histerezo). Zato se uporablja v [specifičnih aplikacijah](#), kjer je potrebno zagotoviti majhno porabo energije (določene medicinske aplikacije, RFID, ...). Resna alternativa FeRAM-u je MRAM (Magnetic Random Access Memory), ki shranjuje informacijo v magnetizaciji.



- V praksi se pogosto uporabljajo tudi t.i. dinamični mikrofoni, ki pa jih tu ne obravnavamo, saj je njihovo delovanje povezano s snovjo, ki jo obravnavamo v drugem semestru. Lahko pa vsaj omenimo, da ti uporabljajo princip (magnetne) indukcije, ko se tuljava pomika v magnetne polju trajnega magnetna.

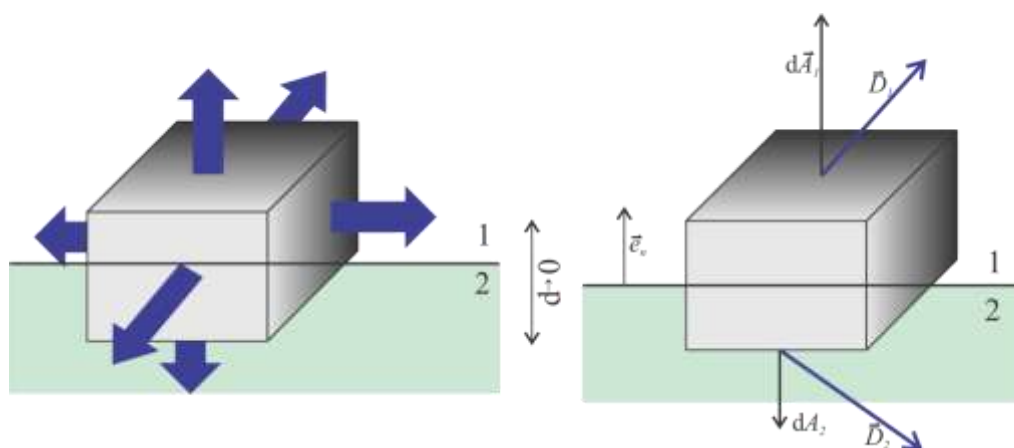
MEJNI POGOJI

Posredno smo se z obravnavo polja v dveh stikajočih se dielektrikih že spoznali. Ugotovili smo, da pride na meji med dvema dielektrikoma z različnima dielektričnostima do nezveznega prehoda (skoka) električnega polja. V tem poglavju želimo spoznati splošne zakonitosti prehoda polja iz ene snovi v drugo. Izpeljemo jih iz Gaussovega zakona in zakona o potencialnosti (konzervativnosti) elektrostatičnega polja.

MEJNI POGOJ ZA NORMALNO KOMPONENTO POLJA

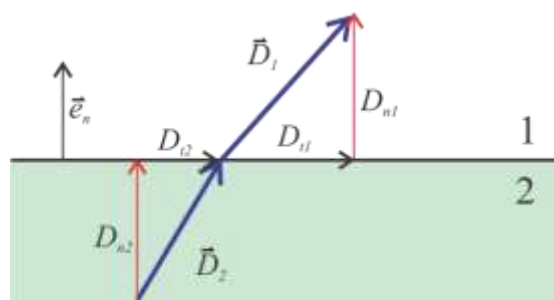
Mejni pogoj za normalno (pravokotno) komponento dobimo iz Gaussovega zakona:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prosti, znotraj}} \quad (17.18)$$



Slika 17-9: Na meji dveh dielektrikov upoštevamo Gaussov zakon, da mora biti pretok polja skozi zaključeno površino enak nič (če znotraj zaobjetega objekta ni nabojev). S tanjšanjem navidezne kocke dobimo mejni pogoj za normalno komponento gostote električnega pretoka.

Zamislimo si površino med dvema dielektrikoma in kocko, ki jo stiskamo v smeri meje. Ob stiskanju postanejo stranski pretoki zanemarljivi (limitirajo proti nič) in ostanejo le pretoki pravokotno na površino:



$$\vec{D}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \vec{D}_2 \cdot d\vec{A}_2 = \sigma_{\text{prosti}} \cdot dA_1 \quad (17.19)$$

Z upoštevanjem $d\vec{A}_2 = -d\vec{A}_1$ dobimo

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_{\text{prosti}} \quad (17.20)$$

ali tudi

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma_{\text{prosti}} \quad (17.21)$$

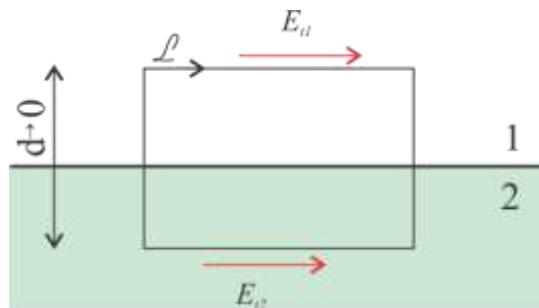
Enotski vektor kaže iz dielektrika z indeksom 2 v dielektrik z indeksom 1. Če je površinska gostota prostega naboja na meji dveh dielektrikov enaka nič, velja

$$\boxed{D_{n1} = D_{n2}} \quad \text{ali tudi} \quad \boxed{\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}}. \quad (17.22)$$

Če torej poznamo normalno komponento polja na meji na eni strani dielektrika, z enačbo (17.20) ali (17.21) ali (17.22) (če na površini ni prostega naboja) izračunamo normalno komponento na meji v drugem dielektriku.

MEJNI POGOJ ZA TANGENCIALNO KOMPONENTO POLJA

Potrebujemo še mejni pogoj za komponente polja, ki so vzporedne (tangencialne) z mejo. Tu uporabimo zakon potencialnosti polja: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$.

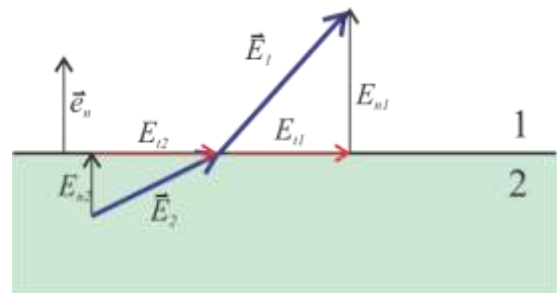


Slika 17-10: Na meji dveh dielektrikov upoštevamo zakon potencialnosti polja in s tanjšanjem zanke, ki zaobjema oba dielektrika dobimo mejni pogoj za tangencialni komponenti električne poljske jakosti.

Vzemimo zanko v obliki pravokotnika na meji dveh dielektrikov in ga stiskajmo v smeri meje ($d \rightarrow 0$). Integral polja po poti zanke bo imel le različni od nič le komponenti v smeri meje – tangencialni komponenti. Veljalo bo torej:

$$E_{t1} \cdot l - E_{t2} \cdot l = 0 \Rightarrow E_{t1} = E_{t2}.$$

$$\boxed{E_{t1} = E_{t2}}. \quad (17.23)$$



Združimo obe enačbi v »lomni zakon«. Če na meji dveh dielektrikov ni površinskega (prostega) naboja, velja:

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (17.24)$$

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad (17.25)$$

Če enačbi delimo, dobimo:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{E_{t1}}{E_{n1}} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{E_{t2}}{E_{n2}} \quad (17.26)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \tan(\alpha_1) = \frac{1}{\varepsilon_2} \tan(\alpha_2) \quad \text{ali} \quad \frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (17.27)$$

α je vpadni kot med normalo na površino in smerjo polja.

Primer upoštevanja mejnega pogoja:

Homogeno polje 100 V/m je usmerjeno pod kotom 45° iz zraka v olje z $\varepsilon_r = 2$. Izračunajte električno poljsko jakost v olju in skicirajte vektorja polja na meji zrak-olje.

Izračun: Ohranja se tangencialna komponenta električne poljske jakosti, ki bo tudi v olju enaka

$E_{t1} = E_{t2} = 100 \text{ V/m} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Normalna komponenta polja v olju pa se zmanjša za $\frac{1}{2}$, saj velja

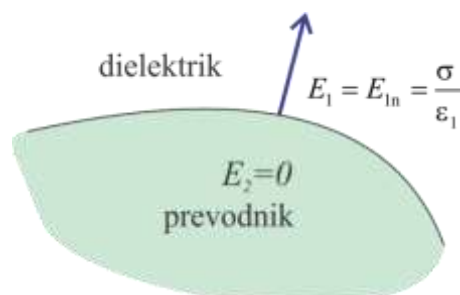
$E_{n2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n1} = \frac{1}{2} E_{n1} = \frac{1}{2} 100 \text{ V/m} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Absolutna vrednost polja v olju pa je

$E_2 = \sqrt{E_{n1}^2 + E_{t2}^2} \cong \underline{\underline{79 \text{ V/m}}}$. Polje v olju se zmanjša, saj se zmanjša normalna komponenta polja, tangencialna pa ostane enaka.

POLJE NA MEJI DIELEKTRIKA IN KOVINE

Poseben primer je meja dielektrik - prevodnik. Vzemimo, da označimo dielektrik z indeksom 1, prevodnik pa z 2. Predhodno smo že ugotovili, da je elektrostatično polje znotraj prevodnika enako nič: $E_2 = 0$. Ker velja $E_{t1} = E_{t2}$, bo tangencialna komponenta polja v izolatorju na meji z dielektrikom enaka nič. To pa obenem pomeni, da bo imelo polje v izolatorju na meji s prevodnikom le normalno komponento, ki bo enaka $D_{n1} - 0 = \sigma_{\text{prosti}}$ oziroma,

$$E_1 = E_{n1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}. \quad (17.28)$$



Prišli smo do že znane ugotovitve, da je polje na površini prevodnika pravokotno na površino in sorazmerno površinski gostoti naboja.

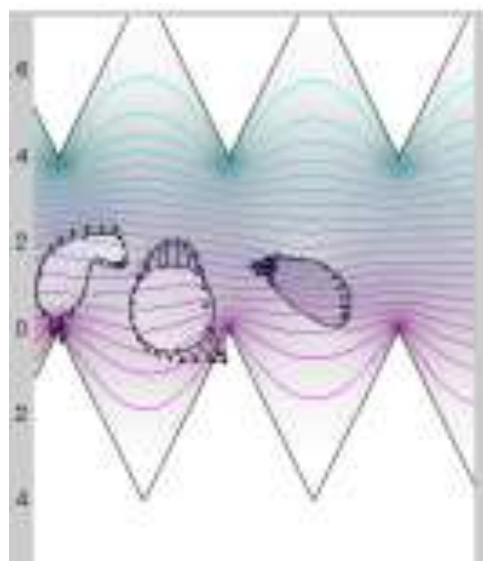
Zapišimo še enkrat tudi ploskovno silo na prevodnik: $f = \sigma \frac{\sigma}{2\varepsilon}$.

* SILA MED DIELEKTRIKI / DIELEKTROFOREZA

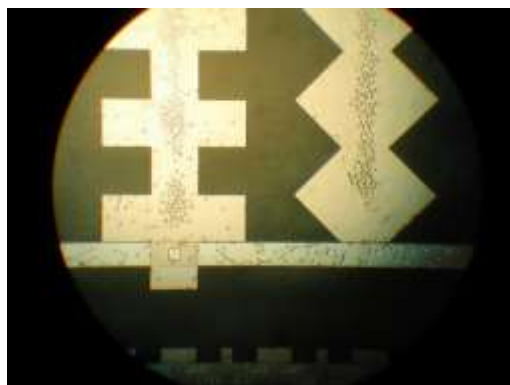
Če sta dva dielektrika z različnimi dielektričnimi lastnostmi v električnem polju, deluje med njima električna sila. Primer je sila na nevtralne dielektrične delce v nehomogenem polju. Zaradi različne dielektričnosti delca in medija se na površini dielektrika inducirajo vezani naboji na katere deluje polje s ploskovno silo (pritisk), ki bo (brez izpeljave):

$$f = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2} \left(E_i^2 + \frac{D_n^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right).$$

z integracijo ploskovne sile na delec. Smer te ploskovne sile je v smeri prostora z manjšo dielektričnostjo. Tako je mogoče dielektrične delce usmerjati z vzpostavitvijo električnega polja med dvema ali več elektrodami (glej sliko na desni).



Delci se naberejo tam, kjer je polje največje – na ostrih robovih elektrod ali pa na mestih, kjer je električno polje najmanjše. Dodatno kontrolo nad gibanjem delcev nam ponuja vzbujanje z izmeničnim signalom. Dielektrične lastnosti snovi (relativna dielektričnost) se s frekvenco signala spreminja, kar omogoča manipulacijo delcev z električnim poljem. V Laboratoriju za bioelektromagnetiko smo skupaj z Laboratorijem za mikrosenzorske strukture in Laboratorijem za biokibernetiko načrtali in izdelali strukture za manipulacijo bioloških celic s pomočjo dielektroforeze. Če je elektroforeza pojav, v katerem izkoriščamo silo na naelektrene delce, je dielektroforeza pojav, kjer izkoriščamo silo na dielektrične (električno nevtralne) delce.

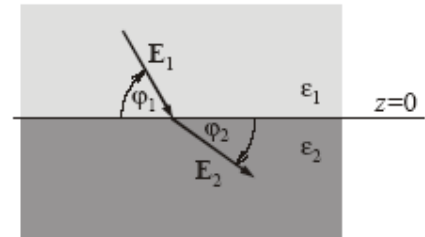


Slika 17-11: Manipulacija bioloških celic z električnim poljem. Celice se koncentrirajo na mestu najmanjšega polja, ki je v sredini in na površini elektrod. Razdalja med elektrodama je 50 μm . Na desni sta prikazana modula z izdelanimi mikrostrukturami. Mikrostrukture so izdelane s polprevodniško tehnologijo na pyrex steklu z dvoslojno metalizacijo.

Delovanje dielektroforeze smo ugotavljali tudi pri eksperimentu s semenkami v enosmernem polju. Semenke so iz dielektrika in se usmerijo v smer polja, ker pa so v dovolj gostem mediju, se težje prosto gibljejo. Potrebovali bi še večjo silo, da bi premagali silo viskoznosti. Smo pa opazili značilnost veriženja, ki jo opazimo tudi pri celicah na mikrostrukturah. Poleg tega so pazljivi lahko opazili, da se giblje tudi olje v katerem so bile semenke. Tudi na molekule olja (dielektrik) deluje sila, ki jih premakne v smeri elektrod.

Primer kolokvijske naloge z dne 11.12.2001:

Ravnina $z = 0$ je meja med dvema dielektrikoma, z relativnima dielektričnostima $\epsilon_{r1} = 5$ za prostor $z > 0$ in $\epsilon_{r2} = 12$ za prostor $z < 0$. V prvem prostoru je električna poljska jakost $E_1 = 10^5$ V/m in je usmerjena pod kotom $\varphi_1 = 60^\circ$ glede na ravnino $z = 0$. Določite velikost električne poljske jakosti v drugem prostoru in kot φ_2 , ki ga oklepa z ravnino $z = 0$.



$$E_1 = 10^5 \text{ V/m} \quad E_{1t} = E_1 \cos \varphi_1 = 50 \text{ kV/m}$$

$$\varphi_1 = 60^\circ \quad E_{1n} = E_1 \sin \varphi_1 = 86,6 \text{ kV/m}$$

$$\epsilon_{r1} = 5 \quad E_{2t} = E_2 \cos \varphi_2$$

$$\epsilon_{r2} = 12 \quad E_{2n} = E_2 \sin \varphi_2$$

$$E_{2t} = E_{1t} = 50 \text{ kV/m}$$

$$D_{2n} = D_{1n} \rightarrow E_{2n} = E_{1n} \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} = 36,1 \text{ kV/m}$$

$$E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = 61,7 \text{ kV/m}$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{E_{2n}}{E_{2t}} \rightarrow \varphi_2 = 35,8^\circ$$

Nalogo bi lahko rešili tudi z uporabo lomnega zakona $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$, pri čemer pa bi morali paziti,

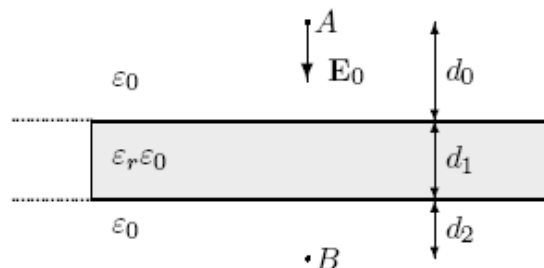
da je kot alfa definiran glede na normalo in ne na mejo, torej je $\alpha_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ in

$$\tan(\alpha_2) = \tan(\alpha_1) \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \tan(30^\circ) \frac{12}{5} = 1,386, \text{ od koder je } \alpha_2 \cong 54,2^\circ \text{ in } \varphi_2 = 35,8^\circ.$$

Primer kolokvijske naloge 17.12.2003 (UNI):

Napetost med točkama A in B je 300 V. Določite navpično komponento električne poljske jakosti v praznem prostoru, če je relativna dielektričnost vmesne plasti $\epsilon_r = 8$!

Podatki: $d_0 = d_2 = 2$ cm, $d_1 = 16$ cm.



18. Energija

Vsebina poglavja: Delo in potencialna energija (ponovitev), energija naboja pri preletu polja, potencialna energija sistema nabojev, električna energija v polju kondenzatorja, energija sistema porazdeljenih nabojev, gostota energije, energija pri gibalnih procesih – sila.

PNOVITEV: DELO ELEKTRIČNIH SIL, POTENCIALNA ENERGIJA, NAPETOST IN POTENCIAL

V tem poglavju bomo ponovili določena spoznanja iz poglavja 12 (Delo in energija) in jih nadgradili s celostnim pogledom na pojem energije v elektrostatiki. V poglavju 12 smo spoznali, da je delo

električnih sil potrebno za premik naboja Q iz točke T_1 v točko T_2 : $A_e = A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = Q \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

Električna napetost je enaka delu, ki jo enota pozitivnega naboja (1 C) opravi pri premiku iz točke T_1 v točko T_2

$$U = \frac{A_e}{Q} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (18.1)$$

Hkrati smo ugotovili, da je potencialna energija naboja enaka delu, ki ga opravi zunanja sila pri prenosu iz oddaljenosti (kjer je njegov potencial enak nič) do mesta, kjer se nahaja. Enakovredno lahko rečemo, da je ta energija enaka delu električnih sil za premik z mesta, kjer se nahaja do neskončnosti (kjer je potencial enak nič): $W(T) = A_e(T \rightarrow T_\infty)$. Ta definicija pa je hkrati definicija potenciala, le da je definirana s potencialno energijo enote naboja:

$$V(T) = \frac{A_e(T \rightarrow \infty)}{Q} = \int_T^{T(V=0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (18.2)$$

ENERGIJA POSAMEZNEGA NABOJA PRI PRELETU ELEKTRIČNEGA POLJA

Če se v električnem polju giblje le en naboj, se njegova potencialna energija poveča ali zmanjša za $\Delta W = Q\Delta V = QU$. Tak primer je na primer gibanje elektrona v električnem polju. Če preleti elektron v smeri polja napetost 20 kV, se bo njegova kinetična energija povečala na račun zmanjšanja potencialne za $\Delta W = QU = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 20 \text{ kV} = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}$. Pogosto namesto enote Joule pri zapisu energije osnovnih delcev uporabljamo enoto elektron-volt, kjer je $1 \text{ eV} = Q_e \cdot 1V = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. V tem smislu je kinetična energija delca po preletu polja 20 kV enaka $20 \cdot 10^3 \text{ eV}$ ali 20 keV .

POTENCIAL V OKOLICI OSAMLJENEGA NABOJA IN ENERGIJA SISTEMA DVEH NABOJEV

Potencial na razdalji r od osamljenega točkastega naboja Q je $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Da bi na razdaljo r od

naboja Q pripeljali naboj Q_2 , bi torej potrebovali energijo $W = Q_2 V = Q_2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Ali tudi: v sistemu

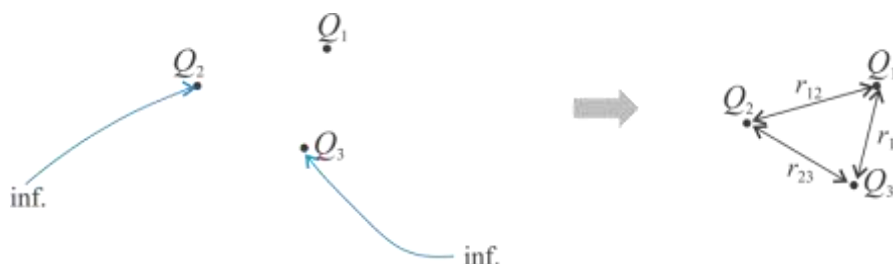
dveh nabojev Q in Q_2 je shranjena potencialna energija $W = \frac{Q_2 Q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

POTENCIALNA ENERGIJA SISTEMA TOČKASTIH NABOJEV

Vzemimo, da imamo prostor brez nabojev in torej brez električnega polja. Če želimo v ta prostor prenesti naboj, moramo opraviti delo. V električnem smislu za prenos prvega naboja (Q_1) ni potrebno vložiti nič dela, saj ni nobene električne sile na ta delec. Ko pa želimo v njegovo bližino prenesti naboj

$$Q_2, \text{ moramo za to opraviti delo, ki bo } A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q_2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}},$$

kjer je r_{12} razdalja med nabojema Q_1 in Q_2 .



Slika 18-1: Potencialna energija sistema nabojev je določena kot delo, ki ga potrebujejo naboji, da premagajo električne sile pri njihovem premiku iz neskončnosti.

Ko prenašamo tretji naboj, mora ta premagovati dvoje sil, tako na naboj Q_1 , kot na naboj Q_2 . Torej potrebujemo opraviti delo $\frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$, kjer sta r_{12} in r_{23} razdalji med nabojema Q_1 in Q_3 ter Q_2 in Q_3 . In tako dalje. To delo se shrani v obliki potencialne energije v pozicijah delcev. Potencialna energija sistema treh nabojev je torej

$$W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}. \quad (18.3)$$

Zapišimo to vsoto nekoliko drugače:

$$W = \frac{1}{2} Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} \right) + \frac{1}{2} Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) + \frac{1}{2} Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right). \quad (18.4)$$

Ugotovimo, da so vrednosti v oklepajih enake potencialom V_1 , V_2 in V_3 , kjer je V_1 potencial na mestu naboja Q_1 , ki ga povzročata naboja Q_2 in Q_3 . Enačbo torej lahko zapišemo v obliki:

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3. \quad (18.5)$$

Očitno bi lahko za sistem n nabojev zapisali potencialno energijo v obliki:

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 + \dots + \frac{1}{2} Q_n V_n, \quad (18.6)$$

oziroma na kratko

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i, \quad (18.7)$$

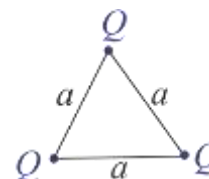
kjer je V_i je potencial na mestu naboja Q_i in ga zapišemo kot vsoto:

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{Q_j}{r_{ij}}, \quad (18.8)$$

kjer so r_{ij} razdalje med nabojem Q_i in Q_j .

Primer določitve energije sistema nabojev:

Določimo energijo sistema treh enako velikih nabojev $Q = 20$ nC, ki se nahajajo v ogliščih enakostraničnega trikotnika stranice $a = 10$ cm.



Izračun: Ker so naboji enako veliki in simetrično razporejeni, je tudi potencial na vseh mestih nabojev enako velik. Vzemimo, da imamo v ogliščih naboje Q_1 ,

$$Q_2 \text{ in } Q_3. \text{ Na mestu naboja } Q_1 \text{ je enak: } V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2}{a} + \frac{Q_3}{a} \right) = 2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Energija sistema bo torej

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 = 3 \cdot \frac{1}{2} Q_1 V_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} Q^2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a},$$

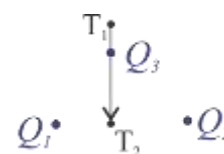
in številčno

$$W = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \cdot \frac{3 \cdot (20 \cdot 10^{-9} \text{C})^2}{0,1 \text{ m}} = \underline{\underline{108 \mu\text{J}}}.$$

Primer izračuna dela za premik naboja v električnem polju:

Koliko dela moramo vložiti za premik naboja iz enega oglišča v sredino med druga dva naboja?

Izračun: Vzemimo zgornji naboj (označen kot Q_3) in ga premaknimo med Q_1 in Q_2 . Delo bi lahko določili iz osnovne formule za izračun dela, torej kot



$$A_e = Q_3 \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \text{ kjer je } E \text{ polje na mestu naboja } Q_3. \text{ Izračunati bi morali polje na mestu naboja (kar v}$$

konkretnem primeru ne bi bilo ravno zahtevno) in ga integrirati po poti. Še bolj enostavno pa je določiti delo iz razlike potencialnih energij sistema pred in po premiku:

$$A(T_1 \rightarrow T_2) = W(T_1) - W(T_2) = W_{\text{začetna}} - W_{\text{končna}}. \quad (18.9)$$

Energijo v začetni legi smo že določili, preostane še izračun v končni legi $W(T_2)$.

$$W(T_2) = W_{končna} = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 = 2 \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 =$$

$$= Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a/2} \right) + \frac{1}{2} Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a/2} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a/2} \right) = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{2Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{5Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Energija sistema se bo po premiku očitno povečala, torej bo delo negativno. To pomeni, da ga bodo morale opraviti zunanje sile. To delo bo enako

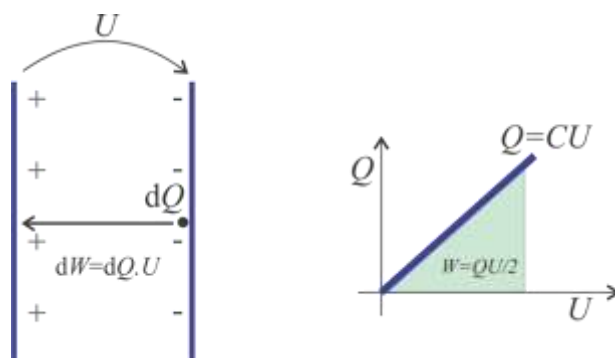
$$A = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{5Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{2Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \underline{\underline{-72 \mu\text{J}}}.$$

ENERGIJA V POLJU KONDENZATORJA

Tako kot smo potrebovali določeno energijo, da smo v prostor pripeljali naboje, je potrebna določena energija, da naelektrimo kondenzator. V najpreprostejši obliki si lahko kondenzator predstavljamo kar kot dve prevodni telesi. Med njiju priključimo vir napetosti in povečujemo napetost. Z večanjem napetosti med telesoma se povečuje tudi množina naboja na telesih. Pač skladno z enačbo $Q = CU$. Vzemimo (diferencialno) majhen naboj dQ in ga premaknimo iz enega telesa na drugega, pri čemer je napetost med telesoma U . Sprememba energije ob premiku bo enaka $dW = dQU$. Napetost lahko

izrazimo tudi z nabojem in kapacitivnostjo, tako da je diferencial energije enak $dW = \frac{Q}{C} dQ$. Celotno energijo, ki smo jo pridobili z elektrenjem kondenzatorja dobimo z integracijo naboja od začetnega (0), do končnega $Q_{končni}$:

$$W = \int_0^{Q_{končni}} \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q_{končni}^2}{2C} \quad (18.10)$$



Slika 18-2: Pri elektrenje kondenzatorja mora naboj pri prehodu iz ene plošče na drugo premagovati vedno večjo silo, saj se spoti povečuje napetost oz. polje med ploščama. Skladno s povečevanjem napetosti in naboja med ploščama se povečuje tudi energija.

To je energija v naelektrenem kondenzatorju, ki jo lahko izkoristimo v različne namene. Ni pa nujno, da je to tudi celotna energija, ki jo lahko koristno uporabimo. Del energije se ob razelektritvi lahko porabi tudi znotraj kondenzatorja (baterije) - na njeni notranji upornosti.

Enačbo lahko s pomočjo zveze $Q = CU$ zapišemo tudi v obliki

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}$$

(18.11)

Primer izračuna energije v kondenzatorju:

Določimo energijo v zračnem ploščnem kondenzatorju kapacitivnosti 20 nF, ki je priključen na enosmerni vir napetosti 60 V. Za koliko procentov se spremeni energija shranjena v kondenzatorju, če razdaljo med ploščama razpolovimo?

Izračun: Električna energija shranjena v kondenzatorju je $W = \frac{CU^2}{2} = \frac{20 \text{ nF} \cdot (60 \text{ V})^2}{2} = \underline{\underline{36 \mu\text{J}}}$. Iz

enačbe za kapacitivnost ploščnega kondenzatorja $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ ugotovimo, da zmanjšanje razdalje med ploščama za polovico predstavlja zvečanje kapacitivnosti za 2x, kar pomeni, da se bo energija povečala za 2x, na 72 mJ, torej za 100%.

Dodatno: Za koliko procentov se bo spremenila energija v kondenzatorju, če pred zmanjšanjem razdalje med ploščama kondenzatorja za polovico odklopimo kondenzator od vira napajanja?

Izračun: Sedaj se ohranja naboj, ki ga je pred odklopom $Q = CU = 20 \text{ nF} \cdot 60 \text{ V} = 1,2 \mu\text{C}$, enako pa tudi po preklopu. Torej bo ob 2x večji kapacitivnosti ob premiku energija enaka

$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(1,2 \mu\text{C})^2}{2 \cdot 2 \cdot 20 \text{ nF}} = \underline{\underline{18 \mu\text{J}}}$. Energija v kondenzatorju se bo očitno zmanjšala za 2x. Zakaj?

Med pozitivno in negativno naelektreno ploščo deluje sila, ki plošči privlači. Če ne bi delovale druge sile (težnosti, lepenja), bi se plošči združili, naboji bi se razelektrili in energija bi se pretvorila v drugo obliko (recimo toplotno). Torej se energija sistema manjša z zmanjševanjem razdalje med elektrodama.

Dodatno: V zračni kondenzator vstavimo dielektrik z relativno dielektrično konstanto 10. Za koliko se poveča energija v kondenzatorju pri ohranitvi priključene napetosti 60 V ali pri konstantnem naboju 1,2 μF.

Izračun: V skladu z izrazom $C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$ se kapacitivnost kondenzatorja poveča za 10x. V skladu s tem se energija v kondenzatorju pri priključenosti napetosti poveča za 10x, v primeru konstantnega naboja pa se zmanjša za 10x.

Vprašanje: Kako razložimo povečanje oz. zmanjšanje energije pri vstavitvi dielektrika?

Dodatno: Koliko je energija v kondenzatorju, če pri priključenosti napetosti vstavimo vanj dielektrični listič debeline, ki je enaka polovici razdalje med elektrodama in ima relativno dielektričnost 6?

Izračun: Spremeni se kapacitivnost $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ in sicer tako, da imamo sedaj zaporedno vezavo dveh

kapacitivnosti $C_{zraka} = \epsilon_0 \frac{A}{d/2}$ in $C_{diel} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d/2}$, torej je $C_{diel} = 6 \cdot C_{zraka}$ in nadomestna

kapacitivnost $C_{nad} = \frac{C_{diel} \cdot C_{zraka}}{C_{diel} + C_{zraka}} = \frac{6C_{zraka} \cdot C_{zraka}}{6C_{zraka} + C_{zraka}} = \frac{6}{7} C_{zraka} = \frac{6}{7} 2 \cdot C = \frac{12}{7} C$. Kapacitivnost

kondenzatorja je po vložitvi dielektrika približno 2x večja (za 12/7) od začetne kapacitivnosti. Ker je

priključena napetost fiksna, bo energija po vložitvi lističa večja od prvotne za 12/7 in bo enaka

$$W = \frac{12}{7} CU^2 = \frac{61,71 \text{ mJ}}{2} .$$

Pred vložitvijo dielektričnega lističa pa je bila energija v kondenzatorju 36 μJ . Zakaj se je energija povečala? Ko vstavimo dielektrik med plošči kondenzatorja, se na površini kondenzatorja poveča naboj (ki pride iz vira), ki kompenzira zmanjšanje polja v dielektriku zaradi polarizacije dielektrika.

Dodatno: Kaj pa, če pred vstavitvijo dielektrika odklopimo vir? V tem primeru se bo na ploščama kondenzatorja ohranil naboj (ne bo se povečal), kapacitivnost pa se bo povečala kot smo že izračunali

– za 12/7. Energija pa se bo posledično zmanjšala, kar sledi iz $W = \frac{Q^2}{2 \cdot \frac{12}{7} C}$, torej za 7/12.

DOLOČITEV KAPACITIVNOSTI IZ ENERGIJE V KONDENZATORJU

Pogosto enačbo (18.11) uporabimo tudi za določitev kapacitivnosti. Če znamo energijo ob poznani napetosti med elektrodama v kondenzatorju določiti na nek drug način, potem lahko izračunamo

kapacitivnost iz $C = \frac{2W}{U^2}$. (18.12)

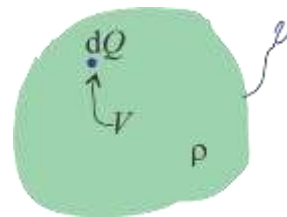
ENERGIJA ELEKTROSTATIČNEGA SISTEMA PORAZDELJENIH NABOJEV

Poslužimo se izraza iz prejšnjega odstavka, pri čemer zamenjamo napetost U za potencial V , ki je potencial na mestu diferencialno majhnega naboja dQ . Diferencial energije kot prispevek naboja dQ k celotni energiji je

$$dW = dQ \cdot V . \quad (18.13)$$

Z integracijo po vseh nabojih in upoštevanju potenciala na mestu teh nabojev je energija elektrostaticnega sistema enaka

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{po vseh } Q\text{-jih}} V dQ ,$$



pri čemer smo pred integral dodali $\frac{1}{2}$ in sicer iz istega razloga, kot smo to pokazali pri seštevanju prispevkov diskretnih nabojev. Tudi tu s $\frac{1}{2}$ izognemo dvakratnemu upoštevanju potencialne energije, saj je ta odvisna od sosednjih nabojev in jo upoštevamo 2x ob integracijo po vseh nabojih.

Če upoštevamo še $dQ = \rho \cdot d\mathcal{V}$, dobimo

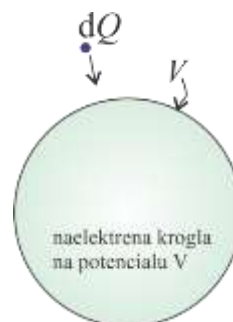
$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} V \rho d\mathcal{V} . \quad (18.14)$$

Nerodnost te enačbe je, da uporabljamo enak simbol za volumen in potencial. Da bi to razmejili, smo v zadnji enačbi uporabili za integracijo po volumnu simbol \mathcal{V} .

GOSTOTA ENERGIJE IN ENERGIJA POLJA

Do sedaj smo izračunavali energijo polja iz kapacitivnosti, naboja in napetosti. Ker je vez med napetostjo in nabojem električna poljska jakost, mora obstajati tudi povezava med energijo in jakostjo polja. Vzemimo primer naelektrene kroglice z nabojem Q , ki je na potencialu V . Električna energija, potrebna, da smo zbrali skupaj ta naboj, je v skladu z enačbo (18.7) enaka $W = \frac{1}{2}QV$.

V tem smislu bi za prestavitev naboja dQ pri potencialu V potrebovali energijo $dW = \frac{1}{2}VdQ$. dQ izrazimo z uporabo Gaussovega zakona $E \cdot dA = dQ / \epsilon_0$, diferencial energije pa zapišemo v obliki $dW = \frac{1}{2}V(\epsilon_0 E dA)$. Poleg tega zapišemo še diferencial potenciala kot $dV = E dl$, od koder lahko za diferencial energije zapišemo $dW = \frac{1}{2}E \cdot dl(\epsilon_0 E dA)$. Ker je diferencial volumna enak $d\mathcal{V} = dA \cdot dl$, je $dW = \frac{1}{2}E \epsilon_0 E d\mathcal{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\mathcal{V}$. Z integracijo po volumnu pa dobimo celotno energijo sistema:



$$W = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\mathcal{V} \quad (18.15)$$

Izraz v integralu lahko prepoznam kot **gostoto energije** in ga tako tudi poimenujemo ter uporabimo simbol w^* :

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (18.16)$$

Enota je energija na volumen, torej J/m^3 .

Enačba za energijo, ki smo jo zapisali, velja za polje v vakuumu oz. zraku. Če imamo polje v dielektriku, bi do izraza za energijo prišli na podoben način, le z uporabo Gaussovega zakona za dielektrike. V tem smislu bi dobili za energijo

$$W = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot d\mathcal{V}, \quad (18.17)$$

za diferencial energije pa $w = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$. (18.18)

Bolj splošen izraz, ki pa ga ne bomo izpeljevali je

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

oziroma za diferencial gostote energije:

$$dw = \vec{E} \cdot d\vec{D}. \quad (18.19)$$

* Sedaj smo prišli do enačbe, ki nakazuje, da je elektrostatična energija shranjena v električnem polju. Prejšnji zapis pa nam kaže, da je vezana v medsebojni interakciji nabojev. Kateri način razmišljanja je bolj pravilen? Za izračune sta oba ustrezna, za pojasnila pa si preberite npr. razmišljanje Richarda Feynmana v njegovih [lekcijah](#).

Primer izračuna energije v kondenzatorju:

Določimo izraz za energijo ploščnega kondenzatorja površine plošč A in razdalje med ploščama d z uporabo enačbe $W = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 d\mathcal{V}$.

Izračun: $E = \frac{U}{d}$,

$$\begin{aligned} W &= \int_{Vol} \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 \cdot d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2 \mathcal{V} = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2 \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{U^2}{d} \cdot A = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot U^2 = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \end{aligned}$$

Dobimo seveda enak izraz, kot smo ga že izpeljali za energijo v polju kondenzatorja. Razlika je le v tem, da znamo sedaj ugotavljati tudi energijo shranjeno v električnem polju, izraženo z gostoto električne energije, ta pa je sorazmerna kvadratu električne poljske jakosti.

GIBALNI PROCESI – SILA NA NAELEKTRENA TELESA

Želimo določiti elektrostatično silo med naelektrenima telesoma. Fizikalno ločimo dva različna primera: v prvem obravnavamo dve naelektreni telesi brez priključene napetosti, v drugem pa v primeru, ko sta prevodni telesi priključeni na vir napetosti.

1) PRIMER GIBALNIH PROCESOV NAELEKTRENIH TELES BREZ PRIKLJUČENEGA VIRA NAPETOSTI

Vzemimo sistem dveh naelektrenih teles z naboji $+Q$ in $-Q$ (Slika 18-3). Energija shranjena v električnem polju je enaka $W_e = \frac{QU}{2}$. Če dopustimo, da se eno od teles premakne v smeri drugega

za neko majhno razdaljo dl , pri tem opravi delo $dA = \vec{F}_e \cdot d\vec{l}$. To delo se je opravilo na račun zmanjšanja električne energije sistema, saj mora veljati, da je vsota opravljenega dela in zmanjšane električne energije enaka nič: $dW_e + dA = 0$. Če izrazimo delo le v smeri X , bo veljalo:

$$F_{e,x} \cdot dx = -dW_e \text{ in torej}$$

$$F_{e,x} = -\frac{dW_e}{dx}. \text{ Če se razmere spreminjajo tudi v drugih smereh, je bolj korektno uporabiti parcialni}$$

odvod:

$$\boxed{F_{e,x} = -\frac{\partial W_e}{\partial x}} \quad (18.20)$$

Enako lahko določimo tudi silo v drugih smereh. V splošnem je torej sila enaka*

$$\boxed{\vec{F}_e = \left(-\frac{\partial W_e}{\partial x}, -\frac{\partial W_e}{\partial y}, -\frac{\partial W_e}{\partial z} \right)} \quad (18.21)$$

* Enako povezavo smo imeli v poglavju 11 (str. 90), kjer smo ugotovili povezavo med E in V : $\vec{E} = -\text{grad}(V)$.

2) PRIMER GIBALNIH PROCESOV PRI PRIKLJUČENI NAPETOSTI

V tem primeru je potrebno v energijsko bilanco vključiti tudi energijo, ki pride ali se vrne v vir. Torej bo spremembe energije polja in dela premika enaka spremembi energije vira:

$$dW_e + \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = dA_g, \quad (18.22)$$

kjer smo z dA_g označili spremembo energije vira.

Če se bosta telesi ob priključenju napetosti približali za majhno razdaljo, se bo povečala kapacitivnost sistema dveh teles, zato se bo tudi povečal naboj med telesoma za dQ . Ta naboj bo prišel iz vira na račun opravljenega dela $dA_g = dQU$. Zaradi povečanja naboja med telesoma se bo povečala tudi

energija v polju kondenzatorja: $dW_e = \frac{U}{2}(Q + dQ) - \frac{U}{2}dQ = \frac{U}{2}dQ$.

Velja torej: $\frac{U}{2}dQ + \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = dQU$, torej je (18.23)

$$\vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \frac{dQU}{2} = dW_e, \text{ od koder sledi}$$

$$\vec{F}_e = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}, \frac{\partial W_e}{\partial y}, \frac{\partial W_e}{\partial z} \right). \quad (18.24)$$

Ugotovimo, da se bo ob premiku nabojev v polju pri konstantni napetosti polovico dela generatorja porabilo za premik, druga polovica pa za gradnjo električnega polja. Lahko pa je tudi obratno, da vir deluje kot porabnik, torej, da dobi energijo iz gibalnega procesa, na primer, če bi se enako naelektrena naboja približevala.

IZRAČUN SILE IZ SPREMEMBE KAPACITIVNOSTI

Silo med telesi je običajno najlažje izračunati iz povezave med energijo in kapacitivnostjo. Če imamo telesi s konstantnim nabojem, odvajamo izraz $W = \frac{Q^2}{2C}$, če pa sta telesi priključeni na napetost U pa

odvajamo izraz $W = \frac{CU^2}{2}$. Vzemimo, da nas zanima sila v smeri osi X. V prvem primeru dobimo

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{Q^2}{2C} = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right), \text{ v drugem pa } F_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{CU^2}{2} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}.$$

V bistvu gre za identična izraza. Vzemimo recimo ploščni kondenzator in izračunajmo silo med ploščama s prvo ali drugo enačbo. Kapacitivnost ploščnega kondenzatorja je $C = \frac{\epsilon A}{x}$. Po prvi enačbi

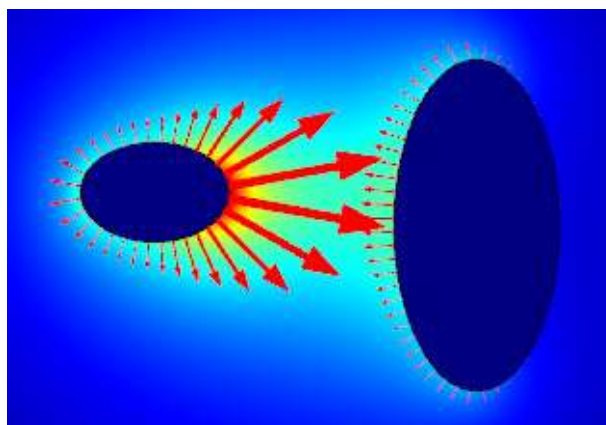
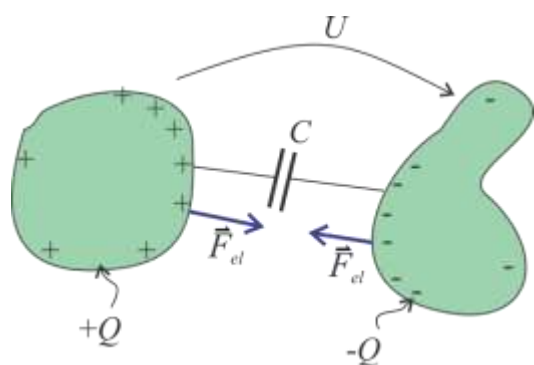
$$\text{dobimo } F_x = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\epsilon A} \right) = -\frac{Q^2}{2\epsilon A},$$

po drugi pa $F_x = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon A}{x} \right) = \frac{U^2}{2} \left(-\frac{\epsilon A}{x^2} \right)$. Če sledjo predružačimo, dobimo

$$F_x = \frac{U^2}{2\epsilon A} \left(-\frac{\epsilon A}{x} \right)^2 = -\frac{U^2 C^2}{2\epsilon A} = -\frac{Q^2}{2\epsilon A}.$$

Lahko pa bi enakost prikazali tudi bolj splošno, saj velja $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x}$ in torej

$$F_x = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}.$$



Slika 18-3: Levo: sila med naelektrenima telesoma. Desno: prikaz površinskih sil med dvema nasprotno naelektrenima telesoma - rezultat numerične simulacije.

19. Kondenzator

Vsebina poglavja: kondenzator kot naprava za shranjevanje naboja, kot naprava za shranjevanje električne energije, pomembne lastnosti kondenzatorjev, aplikacije kondenzatorjev.

KONDENZATOR KOT NAPRAVA ZA SHRANJEVANJE

NABOJA

Kondenzator je naprava za shranjevanje naboja. Večja kot je napetost med ploščama (elektrodama), večja količina naboja se nakopiči na elektrodah. Konstanto sorazmernosti imenujemo kapacitivnost: $Q = CU$. Večja kot je kapacitivnost, več naboja lahko shranimo.

V začetnih raziskavah električnih pojavov pojma kondenzatorja niso poznali. Nabojne so ločevali z ročno gnanimi elektrostatičnimi napravami, ki so z inventivnimi načini ločevale naboje in jih običajno kopičile na dveh ločenih prevodnih kroglih. Tipični primer je Whimshurstov elektrostatični generator. Če so bile krogle blizu, na primer ne več kot nekaj centimetrov, je ob primernih pogojih kopičenja naboja med krogli preskočila iskra. Torej je morala biti ob krogli dosežena prebojna trdnost zraka. Vzemimo kar skrajni primer osamljene naelektrene krogle polmera 2 cm. Prebojna trdnost bo dosežena pri električni poljski jakosti 3 MV/m, od koder izračunamo naboj pri preboju

$$E_{\text{preb}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}, \quad \text{od koder sledi } Q = 133,5 \text{ nC. Napetost bo tedaj}$$

$$V(E_{\text{preb}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = E_{\text{preb}} r_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m} \cdot 0,02 \text{ m} = 60 \text{ kV. Seveda druge elektrode ne moremo imeti v}$$

neskončnosti, lahko pa je večjega polmera in dovolj daleč. Vsekakor večje napetosti od 60 kV ne moremo doseči. Določimo lahko tudi kapacitivnost za primer, ko je druga elektroda v neskončnosti $C = 4\pi\epsilon_0 r_n \approx 2,2 \text{ pF}$. To je precej mala kapacitivnost. Torej med elektrodama v obliki kovinskih krogel ne moremo shraniti večje količine naboja. Ta količina je omejena s prebojno trdnostjo. Lahko pa povečamo polmer krogle, kot smo to videli pri izgradnji Van de Graffovih generatorjev, kjer sta imeli kroglji 7 MV generatorja polmera 4,6 m.

Table 7.5 Sphere-gap breakdown voltages (kilovolts at peak)*; BS 358:1960

Gap (mm)	Sphere diameter			
	0.02	0.0625	0.125	0.25
0.5	2.8	—	—	—
1	4.7	—	—	—
1.5	6.4	—	—	—
2	8.0	—	—	—
4	14.4	14.2	—	—
5	17.4	17.2	16.8	—
6	20.4	20.2	19.9	—
8	25.8	26.2	26.0	—
10	30.7	31.9	31.7	31.7
15	(40)	45.5	45.5	45.5
20	—	58.5	59.0	59.0
30	—	79.5	85.0	86.0
40	—	(95)	108	112
50	—	(107)	129	137
100	—	—	(195)	244
150	—	—	—	(314)

Na sliki je del tabele iz Electrical Engineering Reference Book, kjer pa so podane prebojne napetosti med dvema sferama enakega polmera. Ugotovimo, da so prebojne napetosti seveda manjše, kot smo jo izračunali teoretično.

Slika 19-1: Del tabele prebojnih napetosti med krogli za različne razdalje med krogli (gap) in premerom krogle (diameter). Vir: Electrical engineering reference book.



Superkondenzator (ali ultrakondenzator) podjetja Maxwell ima kapacitivnost 3000 F omogoča napetosti 75 V.

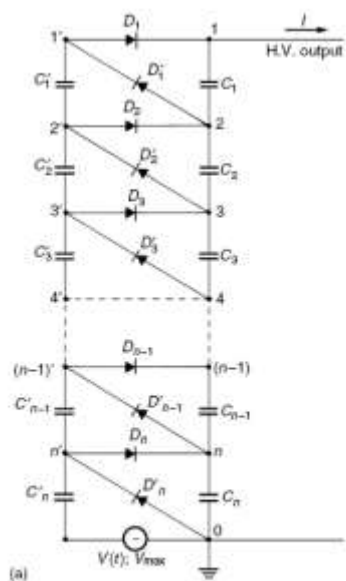


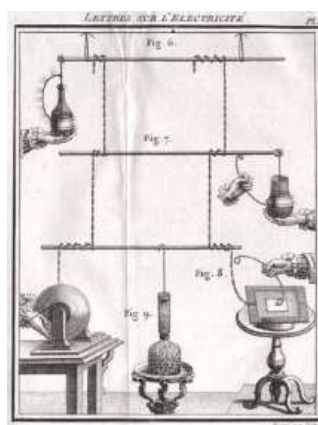
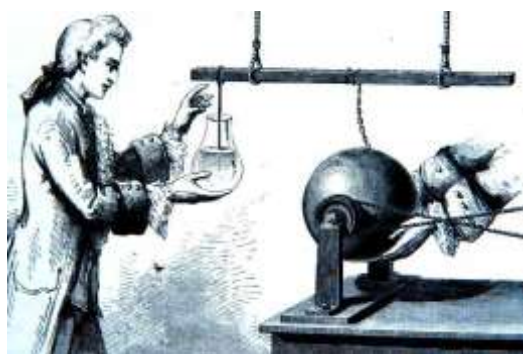
Figure 2.3 (a) Cascade circuit according to Cockcroft–Walton or Greinacher. (b) Waveform of potentials at the nodes, no load



Slika 19-2: Levo: kaskadno vezje za zvišanje napetosti, tipična uporaba do 200 kV. Desno: Cockroft-Waltonov CD generator na ETH (Švica) 900kV/10 MA.

Prve večje vrednosti kapacitivnosti so dosegli leta 1745 z **Leidensko steklenico**, imenovano po kraju Leiden na Nizozemskem. Zaslužen za inovacijo »steklenice« je profesor Pieter van Musschenbroek (1692 – 1791). Hkrati je do podobnih ugotovitev prišel tudi Ewald Georg von Kleist v Nemčiji. Notranjost in zunanost steklenice je bila delno prekrita s prevodnikom, steklenica pa je delovala kot dielektrik. Vzemimo hipotetičen primer steklenice premera 8 cm s 3 mm debelo steno. Znotraj steklenice naj bo voda nalita do višine 15 cm, zunaj pa je prekrita s prevodnikom (aluminijasto folijo). Relativna dielektričnost stekla naj bo 10. Kapacitivnost steklenice je

$$C \approx \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = 10 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{2\pi \cdot 0,08 \text{ m} \cdot 0,15 \text{ m}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 742 \text{ pF} .$$



Slika 19-3: Primer prvih eksperimentov v zgodovini elektrostatike. Levo preprost elektrostatični generator z ročno gnano stekleno kroglo. Naboj se ločuje z roko, ki na eni strani drsa ob kroglo, druga roka pa drži prevodno verigo. Desno: primeri eksperimentov z uporabo Leidenske steklenice.

V primerjavi s kapacitivnostjo kovinske krogle je to že kar solidna kapacitivnost. To veliko odkritje je prineslo tudi nekaj več previdnosti pri uporabi. Razelektritev naboja iz steklenice z dotikom namreč ni več tako »nedolžna«. Je pa doprinesla k razvoju znanosti, saj je bilo šele z Leidensko steklenico mogoče nakopičiti in shranjevati večjo količino naboja. Naslednja prav tako pomembna in znamenita inovacija je bila Voltina baterija. Volta je med drugim tudi predlagal uporabo imena kondenzator. V tedanjem času sta bili to vsekakor zelo pomembni inovaciji, primerljivi z današnjimi dosežki nagrajenimi z Nobelovimi nagradami.

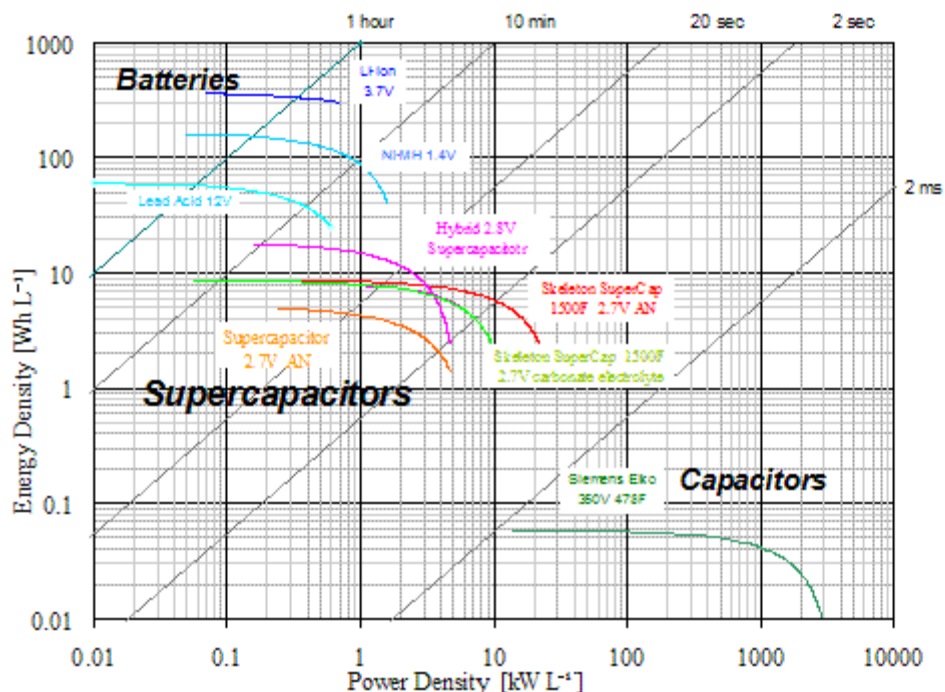


Slika 19-4: Levo so trije primeri Leidenskih steklenic. Četrti z leve je primer inštrument na podlagi Leidenske steklenice, za uporabo kot oddajnik. Desno je primer elektroskopa.

KONDEZATOR KOT NAPRAVA ZA SHRANJEVANJE ELEKTRIČNE ENERGIJE

Še bolj pomembna kot količina shranjenega naboja, je množina shranjene električne energije. Za velikost shranjene električne energije v kondenzatorju je pomemben produkt naboja in napetost med elektrodama $W = \frac{1}{2}QU$. Vzemimo primer osamljene kovinske krogle polmera 2 cm, ki je maksimalno naelektrena, toliko, da električno polje na površini doseže prebojno trdnost. Izračunali smo naboj 133,5 nC in napetost 60 kV. Shranjena energija bo enaka $W = \frac{QU}{2} = \frac{133,5 \text{ nC} \cdot 60 \text{ kV}}{2} = 4 \text{ mJ}$. Vzemimo za primerjavo kondenzator povprečno velike kapacitivnosti 1 μF in nanj priključimo napetost 100 V. Energija shranjena v kondenzatorju je $W = \frac{CU^2}{2} = \frac{1 \mu\text{F} \cdot (100 \text{ V})^2}{2} = 5 \text{ mJ}$. Torej je v kondenzatorju velikem za palec ali tudi dosti manj, shranjeno enako veliko energije, kot med naelektreno kroglo polmera 2 cm in neskončnostjo.

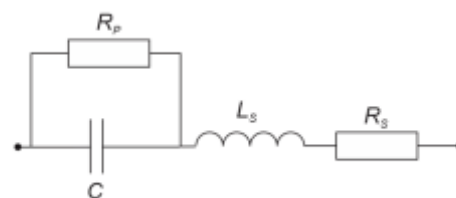
Poleg uspešnosti shranjevanja energije je pomembno tudi to, kako hitro lahko to energijo izčrpamo iz kondenzatorja. Na primer, elektrolitske baterije zelo uspešno shranjujejo veliko količino energije, je pa ne morejo hitro izprazniti. Na drugi strani so elektrolitski kondenzatorji, ki so majhnih dimenzij, so nekoliko manj učinkoviti v smislu gostote shranjene energije, se pa lahko njihov shranjen naboj zelo hitro razelektri. Vez med baterijami in elektrolitskimi kondenzatorji so t.i. superkondenzatorji ali ultrakondenzatorji, ki ne omogočajo visokih napetosti, imajo pa izredno visoke kapacitivnosti (več sto faradov) in so trenutno posebno primerni za vmesno shranjevanje energije.



Slika 19-5: Primerjava med različnimi tipi kondenzatorjev, baterijami in superkondenzatorji glede na zmožnost shranjevanja in porabe energije. Elektrolitski kondenzatorji omogočajo razelektritev velikih tokov v zelo kratkem času. Baterije omogočajo shranjevanje velike količine energije vendar jo ne morejo zelo hitro izkoristiti. Superkondenzatorji so vez med navadnimi kondenzatorji in baterijami. Omogočajo relativno velike toke razelektritve v precej daljšem času kot navadni kondenzatorji. Vir: skeleton supercaps.

POMEMBNE LASTNOSTI KONDENZATORJEV

Kondenzatorji imajo v idealnem smislu le kapacitivne lastnosti in so idealni izolatorji. V resnici pa idealnih lastnosti ni mogoče doseči. Neidealne električne lastnosti lahko prikažemo z nadomestno shemo realnega kondenzatorja, ki je v osnovi vzporedna vezava kondenzatorja z uporom R_p , zaporedno z induktivnostjo L_s in upornostjo R_s .



Slika 19-6: Nadomestna shema realnega kondenzatorja.

Pri različnih aplikacijah so pomembne različne lastnosti kondenzatorjev. Na primer, izgubna (vzporedna R_p) upornost je pomembna v aplikacijah pri izmeničnih tokih in aplikacijah, kjer je pomembno natančno shranjevanje naboja, kot na primer za integratorje ali »sample-hold« vezja ali ko jih uporabljamo pri visokih frekvencah. Elektrolitski (tantalovi ali aluminijasti) kondenzatorji dosegajo visoke kapacitivnosti vendar zaradi slabe izolacije tudi velike izgubne toke, na primer 5 – 20 nA na μF . V omenjene namene je bolje uporabiti »plastične« kondenzatorje: polipropilenske ali polistirenske.

Zaporedna (ang. equivalent series resistance) upornost R_s je pomembna pri aplikacijah z velikimi tokovi, saj se na kondenzatorjih z veliko serijsko upornostjo porablja velika (izgubna) moč. Kondenzatorji z majhno R_s so iz filmov ali iz sljude (ang. mica).






Serijska induktivnost je tudi lahko problematična pri visokih frekvencah. Elektrolitski, papirni in plastični kondenzatorji niso primerni za visokofrekvenčne aplikacije, saj so večinoma sestavljeni iz dveh kovinskih plasti, ločenih s plastjo dielektrika in zviti v svitke. Za visokofrekvenčne aplikacije so primerni keramični kondenzatorji.

Pomemben podatek je faktor disipacije (polnilni faktor), ki predstavlja razmerje energije, ki jo kondenzator potroši, z energijo, ki jo shrani.

Dielektrična absorpcija izraža histerezne lastnosti kondenzatorja. Torej, kako je ponovljivo elektrenje kondenzatorja brez efekta spomina.

* TIPI KONDENZATORJEV

Dandanes poznamo veliko različnih tipov kondenzatorjev, ki so iz različnih materialov, dimenzij, oblik z zelo različnimi električnimi (in mehanskimi) lastnostmi. Pa si jih oglejmo nekaj:

- 1) Elektrolitski kondenzatorji so izdelani iz dveh tankih aluminijastih elektrod. Prva ima dodano tanko oksidno membrano (izolator, dielektrik), druga elektroda pa je v kontaktu s papirjem omočenim z elektrolitom . Tanka oksidna plast povzroči veliko kapacitivnost kondenzatorja ($C \sim \varepsilon \frac{A}{d}$), visoko prebojno trdnost, pa tudi polarizacijo. To pomeni, da ga lahko obremenimo le tako, da je ena od sponk vedno bolj pozitivna od druge. V nasprotnem primeru postane neuporaben oziroma nevaren, saj lahko eksplodira. Ti kondenzatorji so ceneni in se pogosto uporabljajo, recimo kot filtri. Ker se kondenzator lahko pokvari, če je obremenjen z višjo napetostjo kot je nazivna, je v praksi modro uporabiti kondenzator z dvakrat višjo nazivno napetostjo, kot je potrebna. Prednosti elektrolitskih kondenzatorjev so predvsem velika kapacitivnost (cenenost), ki je posledica uporabe tanke izolacijske plasti dielektrika in visoka napetost določena s prebojno trdnostjo dielektrika. Pomanjkljivost pa je neidealna karakteristika zaradi polprevodniških lastnosti kombinacije prevodnika in oksida, relativno velika upornost, slabša visokofrekvenčna karakteristika in manjša življenjska doba (v primerjavi z drugimi tipi kondenzatorjev).
 
- 2) Posebni tip elektrolitskega kondenzatorja je tantalov elektrolitski kondenzator. Namesto aluminijaste elektrode ima tantalovo, oziroma iz tantalovega pentoksida. Ima boljše električne lastnosti kot »navadni« elektrolitski kondenzatorji, predvsem glede temperaturnih in frekvenčnih karakteristik. So pa nekoliko dražji kot »navadni«.
 
- 3) Poliesterski film: ti kondenzatorji uporabljajo kot dielektrik plast poliesterskega filma. So poceni, temperaturno stabilni in se pogosto uporabljajo.
 
- 4) Polipropilenski kondenzator: uporabimo, ko so zahteve po tolerancah večje. Do frekvence 100 kHz imajo zelo majhne tolerance (1%).
- 5) Polistirenski kondenzator: so izdelani kot koluti in niso primerni za visoke frekvence. So uporabni za aplikacije do nekaj sto kilohercov.
 
- 6) Metalizirani poliesterski: imajo boljše lastnosti od navadnih poliesterskih. So dimenzijsko majhni.
 

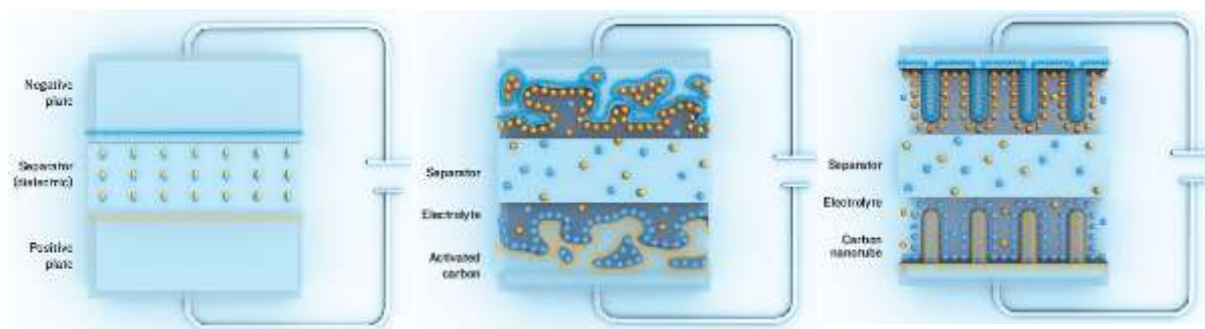
- 7) Epoksi:
- 8) Keramični: imajo obliko malih diskov in niso izdelani v zvitkih, zato imajo dobre frekvenčne karakteristike in jih uporabljamo za visokofrekvenčne aplikacije. Na primer za filtriranje visokofrekvenčnih motenj.
- 9) Nastavljivi kondenzatorji (trimerji): vsebujejo lahko keramični ali plastični dielektrik.
- 10) Nastavljivi zračni kondenzatorji: uporabljajo zrak kot dielektrik. Običajno jih najdemo v radijih.
- 11) Superkondenzatorji: imajo izrazito veliko kapacitivnost, na primer 0,47 F, kljub temu pa so majhnih dimenzij. Te lastnosti je mogoče doseči z uporabo električnega dvojnega sloja. Zapolnjujejo vrzel med baterijami, ki sicer shranjujejo velike količine naboja, ne morejo pa se hipno izprazniti in »klasičnimi« kondenzatorji, ki omogočajo hitre naelektritve in razelektritve vendar relativno majhno kapacitivnost (gostoto energije). Ultrakondenzatorji trenutno omogočajo gostote energij velikosti 30 Wh/kg, se pa ta vrednost z izboljšavo tehnologije stalno povečuje. Poleg tega v primerjavi s klasičnimi baterijami ultrakondenzatorji omogočajo zelo veliko ciklov praznjenja in polnjenja in ne izgubijo svojih lastnosti niti po daljšem času izpraznitve. Za primerjavo dosežejo klasične svinčeve baterije energijsko gostoto 30 Wh/kg, litij-ionska baterija pa 120 Wh/kg. Hkrati pa je kalorična vrednost bencina 12000 Wh/kg.



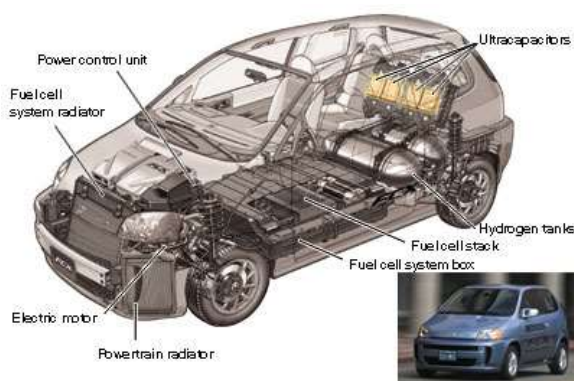
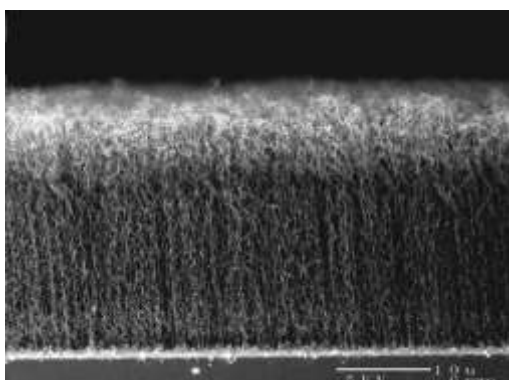
plastic



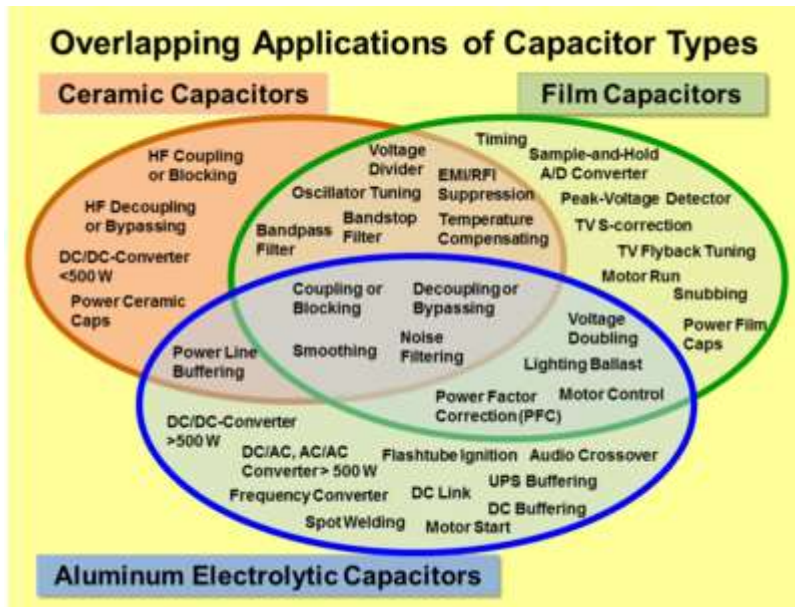
ceramic



Slika 19-7: Razlika med klasičnim tipom »ploščnega« kondenzatorja in ultrakondenzatorji je v veliki površini elektrod, ki jih pri ultrakondenzatorjih uspemo doseči s tehnologijo poroznega ogljika, v novjšem času pa z uporabo ogljikovih nanocevk. Vir: [HTTP://WWW.SPECTRUM.IEEE.ORG/PRINT/5636](http://www.spectrum.ieee.org/print/5636)



Slika 19-8: Prerez elektrode ultra-kondenzatorja, izdelanega iz ogljikovih nanocevk. Na ta način se izjemno poveča površina kondenzatorja in s tem kapacitivnost. Vir: <http://www.spectrum.ieee.org/print/5636>. Na desni, možnosti uporabe ultrakondenzatorjev v avtu: honda fcx.



Slika 19-9: Primerjava kondenzatorjev glede na uporabo.(wikipedia)

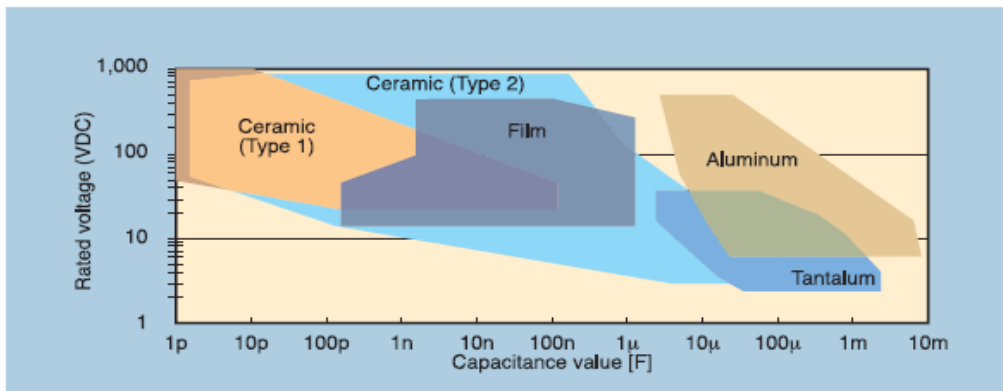


Fig. 1: Relation between capacitance value and rated voltage in each capacitor

Slika 19-10:Različni tipi kondenzatorjev glede na zahtevano nazivno napetost. Vir: www.murata.com.

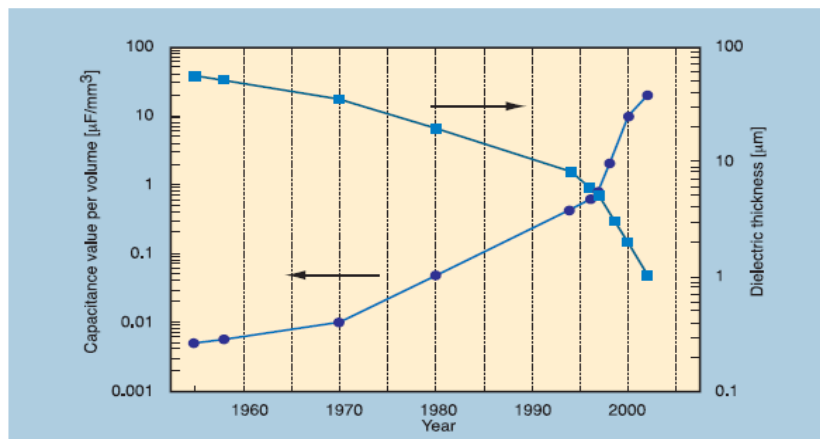


Fig. 2: Transition of capacitance value per volume and dielectric thickness

Slika 19-11: Primer napredovanja tehnike izdelave kondenzatorjev. Hkrati s tanjšanjem debeline dielektrika se večja kapacitivnost na enoto volumna. (Murata)

Nekaj aplikacij kondenzatorjev:

- začasno nadomeščanje baterijskega napajanja v vezjih
- za usmerjanje v močnostnih aplikacijah
- charge-pump kasakada (zvišanje napetosti)
- glajenje signalov
- izločanje AC komponente
- izločanje DC komponente
- kompenzacija moči
- fluorescenčna osvetlitev
- filtracija signalov
- za doseganje resonančne frekvence

Uporaba kondenzatorskega principa:

- senzor razdalje (majhne razdalje)
- senzor pospeška (ADXL)
- senzor nivoja tekočine
- kondenzatorski mikrofoni
- senzorji dotika
- visokonapetostni kondenzatorji za shranjevanje energije in hitro praznjenje (pulzni laserji, elektromagnetno izstreljevanje, radar, pospeševalniki, detonatorji,



Podnapis pod fotografijo: Filtrska kompenzacija s KLV-kondenzatorji, Acroni, Jesenice.

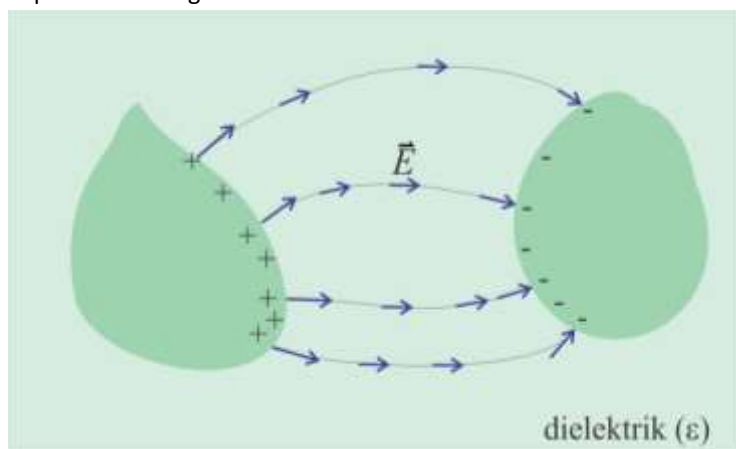
Slika 19-12: Kompenzacijski kondenzatorji v Acroni Jesenice. Vir:
<http://www.iskra.si/upload/iskra%20kondenzatorji.pdf>

* NUMERIČNO RAČUNANJE ELEKTROSTATIČNIH POLJ

Gaussov zakon povezuje porazdelitev električnega naboja s porazdelitvijo potenciala oziroma električnega polja:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad A(1.1)$$

V integralski obliki omogoča izračun porazdelitve potenciala in polja za enostavnejše strukture, ko je naboj porazdeljen simetrično. Za bolj splošne porazdelitve pa s pomočjo zapisa v integralski obliki ne moremo določiti porazdelitve potenciala. Slika 19-13 prikazuje sistem dveh prevodnih naelektrenih teles v okolici katerih želimo določiti potencial in polje. V takšnih primerih je potrebno uporabiti numerične metode reševanja, te pa običajno temeljijo na zapisu Gaussovega zakona v diferencialni obliki..



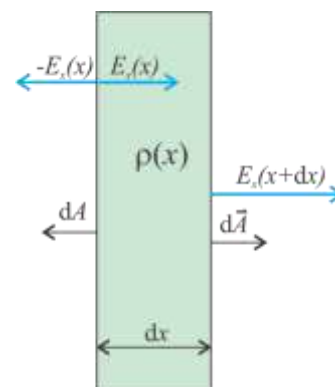
Slika 19-13: na sliki je primer dveh naelektrenih prevodnih teles. Poznamo potencial na površini obeh teles (ekvipotencialni ploskvi), želimo pa izračunati porazdelitev polja, potenciala, površinsko porazdelitev naboja, itd.

Postopek prehoda iz zapisa Gaussovega zakona v integralski obliki v diferencialno obliko si naprej pogledjmo za eno-dimenzionalen primer prikazan na sliki desno, kjer se gostota naboja spreminja le v smeri X osi, v smeri Y in Z pa ni polja. V skladu z Gausovim zakonom mora biti pretok polja iz objekta debeline dx in površine A sorazmeren naboju znotraj objekta:

$$-E_x(x)A + E_x(x+dx)A = \frac{\rho(x)A dx}{\epsilon_0} \quad A(1.2)$$

Z upoštevanjem, da lahko spremembo polja zapišemo z diferencialom $dE_x = E_x(x+dx) - E_x(x)$, dobimo

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad A(1.3)$$



Enačba (1.3) predstavlja Gaussov zakon zapisan v diferencialni obliki, vendar le za omejen primer, ko je polje le v smeri osi X. V splošnem 3D primeru pa je potrebno upoštevati pretok polja v vseh smereh, ne le v smeri osi X. Zanima nas pretok polja skozi majhno kocko dimenzij dx, dy in dz, torej skozi kocko z volumnom $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Če želimo zapisati le spremembo polja v smeri osi X, moramo namesto totalnega odvoda uporabiti parcialni odvod. Skupni pretoka polja iz kockice v osi X je torej :

$$\int_{A \text{ pri } x+dx} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A \text{ pri } x} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx (dy \cdot dz) \quad A(1.4)$$

Pretok skozi vse tri površine kockice je

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx(dy \cdot dz) + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy(dx \cdot dz) + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz(dy \cdot dx) = \frac{\rho dx dy dz}{\epsilon_0} \quad A(1.5)$$

Če upoštevamo, da je $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, dobimo

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV + \frac{\partial E_y}{\partial y} dV + \frac{\partial E_z}{\partial z} dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0} \quad A(1.6)$$

oziroma (delimo z dV):

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad A(1.7)$$

, kar je posplošena oblika enačbe (1.3). To obliko Gaussovega zakona v diferencialni obliki se da zapisati še bolj »elegantno«, kar običajno pomeni, da se ga da zapisati na bolj »zgoščen« način. Ugotovimo lahko, da imamo v enačbi parcialne odvode in komponente vektorja $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$. Te odvode lahko zapišemo kot operator odvajanja po komponentah, torej v obliki vektorja $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Ta zapis v obliki vektorja imenujemo operator nabra (v ang. tudi del operator)

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad A(1.8)$$

Če skalarno pomnožimo vektor nabra z vektorjem električne poljske jakosti, dobimo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (E_x, E_y, E_z) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad A(1.9)$$

kar pa je ravno levi del enačbe (1.7). Gaussov zakon v skrajšani obliki torej lahko zapišemo kot

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad A(1.10)$$

Sedaj lahko ugotovimo, da je zapis Gaussovega zakona z enačbo (1.10) celo nekoliko bolj splošen kot z enačbo (1.7), saj lahko operator nabra zapišemo tudi za drug koordinatni sistem, recimo cilindričnega ali sferičnega.

Namesto zapisa z nablo se pogosto uporablja tudi zapis v obliki

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.11)$$

kar beremo kot divergenca polja je enaka gostoti naboja deljeni z ϵ_0 .

DIVERGENCA POLJA

Če primerjamo enačbo (1.11) z enačbo (1.5), ugotovimo, da divergenca fizikalno predstavlja pretok polja skozi majhno površino, ki jo limitiramo proti nič:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\Delta V} \quad A(1.12)$$

kar tudi fizikalno opiše lastnost električnega polja, ki je izvorno, izvor pa so seveda naboji.

TEOREM GAUSS-OSTROGRADSKEGA

Če zamenjamo ρ v enačbi (1.1) z zapisom iz enačbe (1.10), dobimo

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV. \quad A(1.13)$$

To enačbo imenujemo tudi teorem Gauss-Ostrogradskega. Predstavlja enega temeljev vektorske algebre, saj nam pokaže, da lahko neko integracijo po površini prevedemo v integracijo po volumnu – in seveda tudi obratno.

GAUSSOV ZAKON V POSPLOŠENI OBLIKI

Le še korak nas loči do oblike Gaussovega zakona, ki je primeren za izračune polja in potenciala poljubnih elektrostatičnih pojavov. Najprej zapišemo Gaussov zakon v diferencialni obliki na bolj splošen način, torej z upoštevanjem lastnosti snovi. Vemo, da velja $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ za vakuum in $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$ za poljuben material, katerega (di)električne lastnosti opišemo z relativno dielektrično konstanto ε_r . Gaussov zakon v diferencialni obliki za poljuben material je torej oblike

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho} \quad \text{A(1.14)}$$

POISSONOVA IN LAPLACEOVA ENAČBA

Vemo, da velja $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$, kar lahko zapišemo tudi v obliki $\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V$ ali

skrajšano

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad \text{A(1.15)}$$

ali tudi $\vec{E} = -\text{grad}V$,

kjer je grad operator, ki ga imenujemo gradient. Čeprav je operator nabra ($\vec{\nabla}$) uporabljen tako za zapis Gaussovega zakona (enačba (1.14), kot tudi povezave med poljem in potencialom (enačba (1.15)), moramo ugotoviti, da v prvem primeru ta operator deluje v povezavi s skalarnim produktom vektorske funkcije (\vec{E} ali \vec{D}) in je torej rezultat skalar (ρ), medtem ko v primeru izračuna polja iz potenciala (en. (1.15)) operator nabra deluje na skalarno funkcijo (potencial V) in je zato rezultat vektorska funkcija (\vec{E}).

Vstavimo enačbo (1.15) v Gaussov zakon (1.14) in dobimo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \varepsilon \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \varepsilon (-\vec{\nabla}V) = \rho \quad \text{A(1.16)}$$

ali tudi $\boxed{\text{div} \varepsilon (\text{grad}V) = -\rho}$. A(1.17)

Če zapišemo ti enačbi še v daljši obliki, torej z upoštevanjem, da je $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, dobimo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad \text{A(1.18)}$$

Iz skalarnega množenja dobimo druge odvode potenciala, torej obliko

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}. \quad \text{A(1.19)}$$

To enačbo imenujemo **Poissonova enačba** in je temelj za vse izračune elektrostatičnega polja. Z upoštevanjem $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta V$, kjer Δ imenujemo Laplaceov operator (delta), je znana tudi z zapisom

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \quad \text{A(1.20)}$$

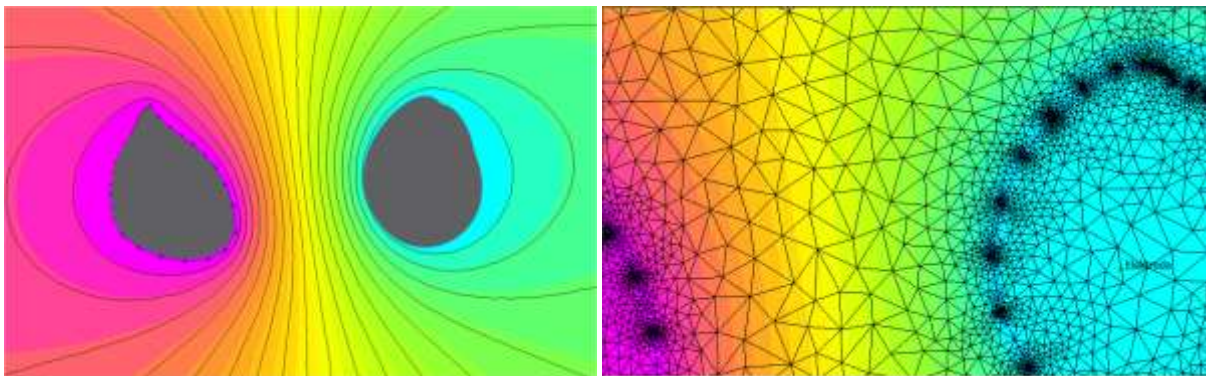
Če je desni člen v enačbi (1.20) enak nič (ni prostih nabojev v prostoru), je enačba oblike

$$\boxed{\Delta V = 0}$$

in je znana kot **Laplaceova enačba**.

NUMERIČNO REŠEVANJE POISSONOVE ENAČBE

Za reševanje parcialne diferencialne enačbe (1.19) je potrebno poznati porazdelitev naboja v prostoru (razen če ga ni ☺) ter robne pogoje, torej potencialne na robovih strukture. Če analitična rešitev problema ne obstaja, kot v primeru na spodnji sliki, kjer sta naelektreneni telesci zelo »neregularnih« oblik, je potrebno uporabiti za izračun numerične metode. En od načinov je, da odvode v enačbi (1.19) zamenjamo z diferenciali v končnih intervalih. Celotno strukturo, ki jo analiziramo tako sestavimo iz množice (mreže) točk, za vsako točko pa zapišemo Poissonovo enačbo, kjer je potencial v točki odvisen le od potencialov v okoliških točkah ter od gostote naboja v bližnji okolici te točke. S tem postopkom pridemo do sistema enačb, običajno kar velikega, odvisnega pač od števila točk diskretizacije. Običajno so točke razporejene v obliki pravokotne mreže, metodo pa imenujemo metoda končnih diferenc (razlik) (ang. finite differences method). Sistem enačb rešimo z določeno metodo za reševanje sistema enačb, kar običajno opravi za nas računalnik. Rešitev je porazdelitev potencialov v izbranih točkah, z interpolacijo pa lahko določimo potencial v poljubni točki analizirane strukture. Iz znanih potencialov nato z operacijo gradienta izračunamo še električno polje v prostoru, iz polja pa še gostoto pretoka in morda še druge veličine. Npr. površinsko gostoto naboja, ki je kar enaka normalni komponenti gostote pretoka na površini, površinsko silo, gostoto energije ali kar celotno elektrostatično energijo z integracijo gostote energije po volumnu, naboj na prevodnem telesu z integracijo površinske gostote po površini telesa itd. Slika * prikazuje s programom FEMM izračunano porazdelitev potenciala med dvema prevodnima naelektrenima telesoma, kjer je velikost potenciala prikazana z barvami, s črtami pa so prikazane ekvipotencialne ravnine. Na sliki desno je prikazana tudi mreža s točkami, v katerih se računa potencial. Mreža je sestavljena iz trikotnikov, kar običajno pomeni, da se je za diskretizacijo diferencialne enačbe uporabila t.i. metoda končnih elementov (FEM – finite elements method). Pri tej metodi se predpostavi, da je porazdelitev potenciala v prostoru določenim s trikotnim elementom neka enostavna funkcija kraja, običajno linearna, potem pa se za pretvorbo v diskretno obliko uporabi variacijsko formulacijo, ki v konkretnem primeru temelji na principu minimizacije elektrostatične energije.



Slika 19-14: Porazdelitev potenciala med dvema naelektrenima elektrodama prikazana z barvami in ekvipotencialnimi ploskvami. Na desni je prikazan detajl mreže s točkami, v katerih je izračunan potencial. Celotna mreža je sestavljena iz 14814 točk, kar tudi predstavlja število enačb, ki jih je potrebno rešiti. Za simulacijo je bil uporabljen program FEMM (finite elements magnetics), ki omogoča tako reševanje elektrostatičnih primerov in tokovnega polja, kot tudi magnetih ter toplotnih pojavov. Njegova glavna omejitev je ta, da je omejen za računanje v dveh dimenzijah, ter ne omogoča bolj kompleksnih analiz. Zelo pa je primeren in enostaven za uporabo za analizo preprostejših struktur. Predvsem pa je brezplačen.

<http://www.femm.info>

2. DEL: TOKOVNO POLJE

20. Časovno konstantno tokovno polje

Vsebina poglavja: Kontinuitetna enačba, gostota toka, časovno konstantno tokovno polje, tok v snovi, konvektivni tok, konduktivni tok, mobilnost, Ohmov zakon v diferencialni obliki, specifična prevodnost in specifična upornost, temperaturne lastnosti, Joulov zakon, mejni pogoji tokovnega polja, dualnost tokovnega in elektrostatičnega polja.

GOSTOTA TOKA

Spomnimo se zveze med električnim pretokom in gostoto električnega pretoka. Gostoto pretoka smo označili z vektorjem \vec{D} , pretok pa kot integral \vec{D} -ja preko določene površine: $\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$. Na enak način

izrazimo gostoto toka s črko J , tok pa je integral gostote toka po površini A

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (20.1)$$

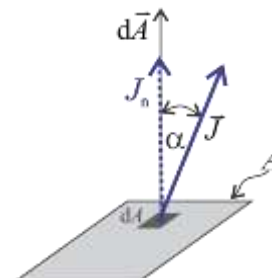
Znotraj integrala je skalarni produkt dveh vektorjev, kar pomeni, da k toku prispeva le tista komponenta gostote toka, ki je pravokotna na površino, oziroma tista, ki je v smeri normale na površino: $\vec{J} \cdot d\vec{A} = \vec{J} \cdot \vec{e}_n dA = J_n \cdot dA$.

Če se gostota toka po preseku ne spreminja in je pravokotna na ravnino preseka, lahko integral poenostavimo v $I = J \int_A dA = JA$.

Če želimo gostoto toka določiti iz toka, pa uporabimo obratno operacijo od integracije:

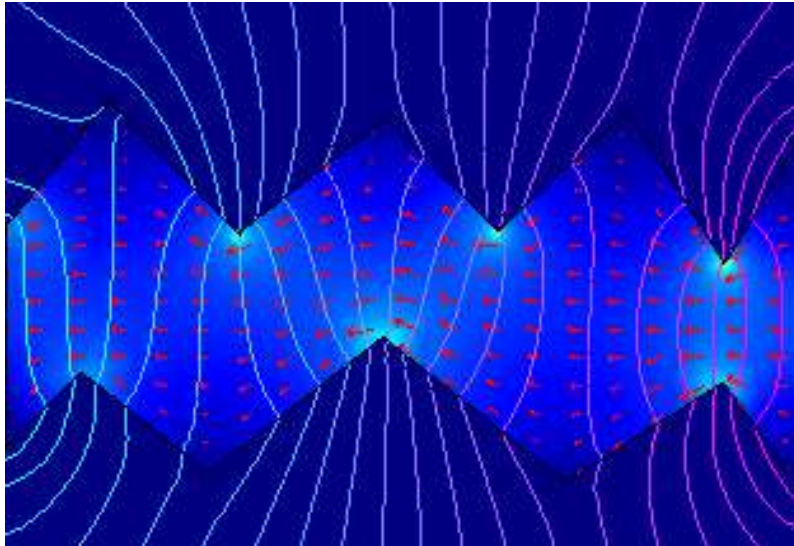
$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$, torej bo gostota toka enaka odvodu toka po površini*:

$$J = \frac{dI}{dA} \quad (20.2)$$

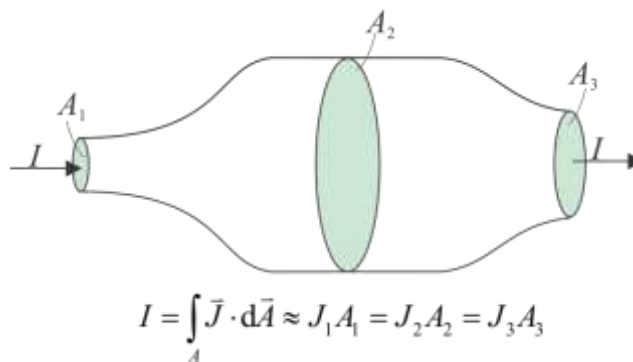


Električni tok je skalarna veličina (ima le vrednost, ne pa tudi smeri), gostota toka pa je vektorska veličina (ima tako velikost kot smer).

* Ali pa: $dI = \vec{J} \cdot d\vec{A} = \vec{J} \cdot \vec{e}_n dA = J_n \cdot dA$ torej $\vec{J} = \vec{e}_n \frac{dI}{dA}$.



Slika 20-1: Primer simulacije tokovnega polja prevodne proge: barva prikazuje velikost gostote polja, ki je večja na izpostavljenih robovih. Puščice prikazujejo smer in velikost (vektorji) gostote toka, linije pa so ekvipotencialne ploskve.



Slika 20-2: Tok in gostota toka. Če predpostavimo, da je na presekih homogena gostota toka, mora veljati, da je gostota toka večja tedaj, ko je presek manjši. Torej mora veljati $J_1 > J_3 > J_2$.

Primer izračuna gostote toka pri homogenem tokovnem polju:

Skozi žico premera 2 mm teče tok 50 A. Kolikšna je gostota toka v žici?

Izračun: Ploščina preseka je $A = \pi r^2 = \pi (1 \text{ mm})^2 = \pi \text{ mm}^2$, gostota toka pa je

$$J = \frac{I}{A} = \frac{50 \text{ A}}{\pi \text{ mm}^2} \approx \underline{\underline{16 \text{ A/mm}^2}}.$$

Primer izračuna gostote toka pri nehomogenem tokovnem polju:

Med oklopom in žilo koaksialnega kabla z notranjim polmerom 1 mm in zunanjim polmerom 3 mm je tok 1 mA. Določimo gostoto toka pri notranjem in zunanjem polmeru na dolžini 10 m.

Izračun: Zapišemo tok skozi zamišljen presek na polmeru r : $I = JA = J2\pi rl$, od koder je gostota

$$\text{toka pri polmeru } r: J = \frac{I}{2\pi rl}.$$

Sledi:

$$J(r_n) = \frac{1 \text{ mA}}{2\pi \cdot 1 \text{ mm} \cdot 10 \text{ m}} \approx \underline{\underline{16 \text{ mA/m}^2}}$$

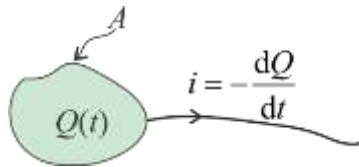
$$J(r_z) = \frac{1 \text{ mA}}{2\pi \cdot 3 \text{ mm} \cdot 10 \text{ m}} \approx \underline{\underline{5,3 \text{ mA/m}^2}}$$

Tokovno polje med žilo in oklopom je nehomogeno. Pri žili je gostota toka večja, kot pri oklopu.

KONTINUITETNA ENAČBA

S kontinuitetno enačbo smo se srečali že v prvem poglavju. Električni tok smo definirali kot hitrost odtekanja pozitivnega naboja:

$$i(t) = -\frac{dQ_+}{dt}. \quad (20.3)$$



Slika 20-3: Prikaz definicije toka kot časovno odtekanje pozitivnega naboja.

Če sedaj upoštevamo še povezavo med tokom in gostoto toka (en. (20.1)), mora biti integral gostote toka po zaključeni površini v skladu s kontinuitetno enačbo ravno enak časovni spremembi naboja znotraj te zaključene površine. Kontinuitetna enačba torej »govori« o kontinuiteti naboja znotraj zaključene površine. Kopičenje ali zmanjševanje naboja v zaključeni površini je posledica električnega toka ali tudi obratno: tok skozi zaključeno površino je posledica kopičenja ali odtekanja naboja skozi to površino. Matematično to zapišemo v obliki*:

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad \text{KONTINUITETNA ENAČBA} \quad (20.4)$$

* ** Pogosto to enačbo izrazimo še nekoliko drugače, pri čemer naboj izrazimo z gostoto naboja $Q = \int_V \rho dV$:

$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV = -\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$. Znana pa je tudi oblika te enačbe v diferencialni obliki, kjer je potrebno uporabiti operator

divergence: $\text{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ali tudi $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (ker velja $\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{J} \cdot dV$).

ČASOVNO KONSTANTNO TOKOVNO POLJE

Govorimo o časovnem konstantnem tokovnem polju, kjer v volumnu objetem z zaključeno površino A

velja $\frac{dQ}{dt} = 0$ in s tem

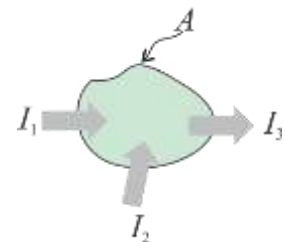
$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

(20.5)

Zgornja enačba ne govori o tem, da ni toka v in izven zaključene površine, temveč le o tem, da enaka količina toka, ki vstopa v prostor z zaključeno površino, ta prostor tudi zapušča. Da torej v zaobjetem volumnu ni kopičenja naboja. Recimo, da zaključeno površino razdelimo na tri dele. V prva dva dela toka vstopata (I_1 in I_2), skozi tretjega pa zapušča tok I_3 . Velja* $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

Prepoznamo 1. Kirchoffov zakon, da je vsota vseh tokov, ki vstopajo (ali izstopajo) v spojišče enaka nič: $\sum_{i=1}^N I_i = 0$. Tok smo označili z veliko tiskano črko, ker obravnavamo le stacionarne pojave, torej take, kjer se tok s časom ne spreminja.

Slika 20-4: Zaključena površina s tremi toki od katerih dva vstopata, en pa izstopa iz površine. Vsota tokov v zaključeno površino je enaka nič.



Enak pogoj kot za časovno konstantno tokovno polje, smo uporabili tudi za elektrostatično polje ($dQ/dt = 0$). Torej bodo za časovno konstantno tokovno polje veljale enake ugotovitve (zakoni) kot za elektrostatičnega polja:

$$\text{zakon potencialnosti polja: } \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (20.6)$$

in

$$\text{Gaussov zakon: } \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{prost. znotraj } A} \quad (20.7)$$

Podobno, kot pri zakonu o ohranitvi naboja prepoznamo 1. Kirchoffov zakon, lahko v zakonu o potencialnosti polja $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ prepoznamo 2. Kirchoffov zakon, saj, če razdelimo zaključeno pot na

* V bistvu bi bilo bolj korektno pisati $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = -I_1 - I_2 + I_3 = 0$, kar sicer izračun ne spremeni, le bolj je v

skladu s tem, da je vektor površine $d\vec{A}$ usmerjen pravokotno ven iz površine, s tem pa je pozitiven tok, ki gre iz telesa in ne v telo.

več delnih poti $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{L_N} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, jih lahko nadomestimo z napetostjo

med koncema delnih poti: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_1 + U_2 + \dots + U_N = 0$ ali tudi $\sum_i U_i = 0$.

Kljub temu pa ima časovno konstanto polje določeno »komponento«, ki je elektrostatično nima. Pri elektrostatičnem polju predpostavimo razmere, ko toka ni; niti enosmernega. Kljub temu da vemo, da je tok potreben za proces elektrenja. V teh razmerah je polje znotraj prevodnikov vedno enako nič. Drugače pa je pri tokovnem polju, ki sicer ima določene »komponente« elektrostatičnega polja, recimo ohranjeno veljavnost Gaussovega zakona in zakona o potencialnosti polja, pa pri razmerah tokovnega polja dovolimo časovno konstanten tok.

Ustreznost enačb elektrostatičnega polja, časovno konstantnega tokovnega polja in dinamičnega polja prikazuje naslednja tabela:

	Elektrostatično polje	Tokovno polje	Dinamično polje
Gaussov zakon	$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\substack{\text{prosti,} \\ \text{znotraj } A}}$	Enako	Enako
Potencialnost polja	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	Enako	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$
Kontinuitetna enačba	$\frac{dQ}{dt} = 0$ (znotraj zaključene površine) Oziroma $\rho(t) = konst$ Ali tudi $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$	$\frac{dQ}{dt} = 0$ (znotraj zaključene površine) Oziroma $\rho(t) = konst$ Ali tudi $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$	$-\frac{dQ}{dt} = i(t)$ $\rho = \rho(t)$
Tok	$i(t) = 0$	$i(t) = konst$	$i(t) = f(t)$

TOK V SNOVI

Povežimo gostoto toka z lastnostmi snovi. Vemo, da nekatere snovi prevajajo tok bolje, druge pa slabše. Najbolj preprosta delitev prevodnih lastnosti snovi bi bila lahko na prevodnike, ki odlično prevajajo tok in izolatorje, ki v idealnih razmerah toka ne prevajajo. Vemo pa, da imamo tudi »vmesne« materiale, ki bolj ali manj prevajajo tok.

Poiščimo zvezo med tokom in hitrostjo gibanja nabojev:

Vzemimo tok nabojev skozi presek žice A s homogeno gostoto toka. Tok v smeri naraščanja množine

pozitivnega naboja je v skladu s kontinuitetno enačbo $i = \frac{dQ}{dt}$. Tok izrazimo z gostoto toka, naboj pa

z gostoto naboja: $i = JA = \frac{d(\rho V)}{dt}$. Vzemimo tok nabojev v smeri x osi, kjer na delu volumna s

konstantno volumsko gostoto naboja zapišemo: $J_x A = \rho \frac{dx}{dt} A = \rho v A$. Sledi, da je gostota toka

enaka gostoti (prostega) naboja in hitrosti potovanja tega naboja: $J = \rho v$. Bolj splošna oblika enačbe upošteva gostoto toka kot vektorsko veličino in je *

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

(20.8)

Naboji se v različnih pogojih gibljejo na različne načine. V grobem ločimo dva načina gibanja: konvektivni in konduktivni.

KONVEKTIVNI TOK

Gibanje nabojev je zelo odvisno od medija v katerem se gibljejo. Če se naboji gibljejo v vakuumu ali razredčenemu plinu (zraku), je njihovo gibanje pospešeno, saj je sila na naboje enaka $m\vec{a} = Q\vec{E}$. V

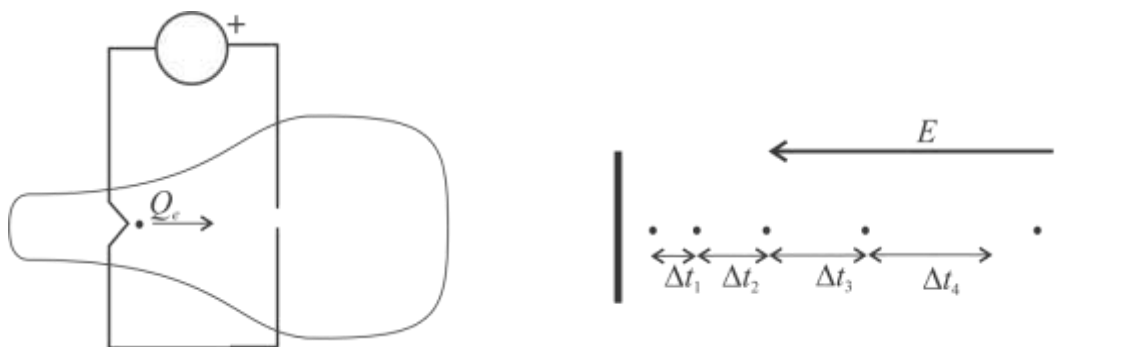
prostoru, kjer ni »večjih ovir«, se naboji gibljejo pospešeno $\vec{a} = \frac{QE}{m}$. Hitrost nabojev v homogenem

električnem polju linearno narašča: $\vec{v} = \int \vec{a} dt = at$. Če je pospešek konstanten (homogeno polje), bo

naboj v času t opravil pot $s = \frac{at^2}{2}$. Takemu načinu gibanja rečemo **konvektivno prevajanje in toku**

konvektivni tok.

* ρ (ro) v enačbi predstavlja volumsko gostoto (gibajočega se) naboja. V nadaljevanju bomo enak simbol uporabili tudi za označitev specifične električne upornosti. Ne smemo zamešati njun različni pomen v enačbah.



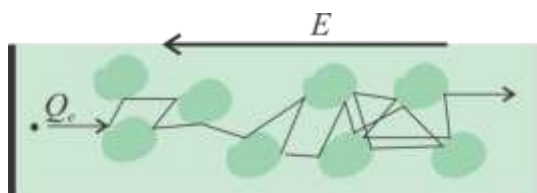
Slika 20-5: Levo: konvektivni tok v katodni cevi. Desno: prikaz pospeševanja hitrosti elektrona ob izpostavitvi električnemu polju.

KONDUKTIVNI TOK

Če se naboji gibljejo v gostejši snovi, se ne gibljejo neovirano, pač pa trkajo z atomi snovi. Zato se njihova hitrost bistveno upočasni, kar se odraža v toplotnih izgubah prevodnika. Za mnogo snovi velja, da je povprečna hitrost gibanja nabojev sorazmerna električni poljski jakosti, kar zapišemo z izrazom*

$$\vec{v} = \mu \vec{E}$$

(20.9)



Slika 20-6: Konduktivni tok v prevodniku. Elektron trka z drugimi atomi v snovi, zato se mu hitrost zmanjšuje. Giblje se z neko povprečno hitrostjo, ki je odvisna od velikosti električnega polja kateremu je izpostavljen ter od lastnosti snovi, ki jo opišemo z mobilnostjo.

* Kako pridemo do te zveze? Vzemimo, da opazujemo let elektrona v električnem polju. Nanj deluje pospešek $\vec{a} = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e}$,

torej se v času t njegova hitrost od začetne v_z poveča za $\vec{v} = \vec{v}_z + \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} t$. Ker je trkov elektrona z atomi zelo veliko, moramo za

pravilno obravnavo upoštevati povprečno hitrost, kar zapišemo z izrazom $\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_z \rangle + \left\langle \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} t \right\rangle$. Po trku z atomom se

elektron odbije v naključno smer, zato je začetna hitrost v povprečju enaka nič, celotna povprečna hitrost pa je enaka $\langle \vec{v} \rangle = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} \langle t \rangle$. $\langle t \rangle$ je povprečni čas med trki in ga označimo s τ . Za kovine je ta velikosti 10^{-14} s, za pline pa 10^{-9} s.

Povprečni hitrosti pogosto s tujko (angleško) rečemo hitrost drifta, po slovensko bi morda prevedli v hitrost odnašanja. Pišemo torej lahko $v_d = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} \tau$, od koder razpoznamo zapisano linearno zvezo med povprečno hitrostjo in električno

poljsko jakostjo $\vec{v} = \mu \vec{E}$, kjer je mobilnost enaka $\mu = \frac{Q_e}{m_e} \tau$.

Konstanto μ (mi) imenujemo **mobilnost** in je snovna lastnost (tako kot električna susceptibilnost oz.

relativna dielektrična konstanta). Izpeljimo enoto za mobilnost: $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right] = [\mu] \left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right] \Rightarrow [\mu] = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}\right]$

OHMOV ZAKON V DIFERENCIALNI OBLIKI

Z upoštevanjem zveze med povprečno hitrostjo gibanja nabojev in električno poljsko jakostjo, lahko gostoto toka zapišemo kot

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \mu \vec{E} \quad (20.10)$$

oziroma

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}, \quad \text{OHMOV ZAKON V DIFERENCIALNI OBLIKI} \quad (20.11)$$

kjer konstanto* γ (gama) imenujemo **specifična električna prevodnost** in je enaka[†] $\gamma = \rho \mu$.

Dobili smo pomemben izraz, da je gostota toka v prevodnikih sorazmerna električni poljski jakosti. Tak tip toka imenujemo **konduktivni** (prevodni), ker z njim ustrezno opišemo prevajanje toka v prevodnikih. Konstanto sorazmernosti imenujemo specifična električna prevodnost (gama), celoten izraz pa kar **Ohmov zakon v diferencialni obliki**. Poglejmo zakaj:

Vzemimo pravokoten kos prevodnika dolžine l in preseka A z znano specifično prevodnostjo. Med konca prevodnika priključimo napetost. Znotraj prevodnika je homogeno električno polje, iz zveze za

napetost $U = \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l}$ pa dobimo:

$$U = \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^l E \cdot dx = \int_0^l \frac{J}{\gamma} dx = \int_0^l \frac{I}{\gamma A} dx = \frac{I}{\gamma A} \int_0^l dx = \frac{I}{\gamma A} l. \quad (20.12)$$

ali pa takole:

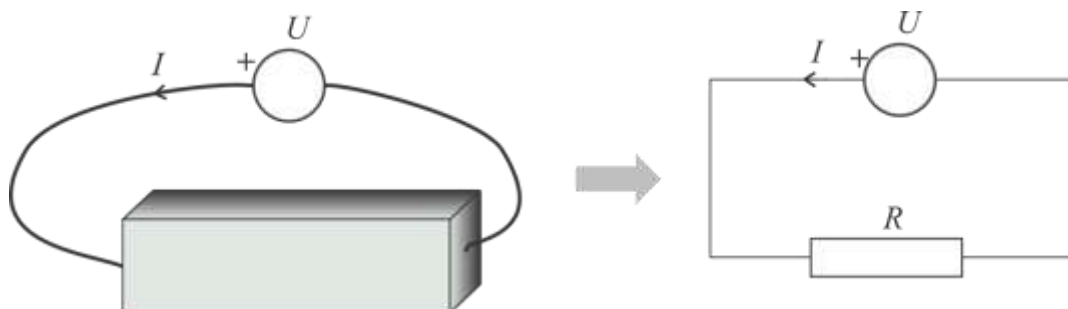
* Pogosto v tuji (posebno angleški) literaturi za specifično električno prevodnost namesto simbola γ zasledimo simbol σ . Mi smo σ že uporabili za površinsko gostoto naboja, zato v izogib nevarnosti zamenjave uporabimo γ . Je pa tako, da se pogosto podvajanju enot ne moremo izogniti, pravilen pomen je pač potrebno razbrati iz konteksta.

† Izraz $\gamma = \rho \mu$ lahko zapišemo tudi drugače, če gostoto nabojev izrazimo s koncentracijo mobilnih elektronov n : $\rho = nQ_e$

. Sledi $\gamma = \frac{nQ_e^2 \tau}{m}$. Ta izraz sicer ne da točnih vrednosti za specifično prevodnost, saj je vendarle nekoliko poenostavljen,

kljub temu pa je iz njega razvidno, da imajo snovi z večjo koncentracijo prostih elektronov večjo specifično prevodnost. Poleg tega večja masa pomeni manjšo prevodnost, kar je predvsem pomembno pri prevajanju ionov. Poleg tega se povprečni čas trkov manjša z višanjem temperature, saj tedaj atomi bolj vibrirajo in so trki v povprečju pogostejši.

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_A \frac{\vec{E}}{\gamma} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\gamma} \int_A \frac{U}{l} dA = U \frac{A}{\gamma l} \quad (20.13)$$



Slika 20-7: Pravokoten kos prevodnika priključen na vir napetosti (levo) lahko modeliramo kot vezje z uporom, priključenim na vir napetosti.

Če dobljen izraz zapišemo nekoliko drugače, prepoznamo Ohmov zakon v znani (integralni) obliki:

$$U = \frac{I}{\gamma A} l = I \frac{l}{\gamma A} = IR, \quad (20.14)$$

kjer je

$$R = \frac{l}{\gamma A} \quad (20.15)$$

električna upornost. Enota je Ω (Ohm).

Določimo še enoto za specifično prevodnost. Če je enota za upornost Ohm, potem ugotovimo, da lahko specifično prevodnost izrazimo kot $\frac{1}{\Omega \text{ m}}$, pogosto tudi kot $\frac{\text{S}}{\text{m}}$ (Siemens na meter).

Iz enačbe za upornost je razvidno, da je upornost med dvema elektrodama odvisna tako od električnih kot geometrijskih lastnosti. Enako smo ugotavljali tudi za kapacitivnost.

Inverzno vrednost od specifične prevodnosti imenujemo **specifična upornost** (enota je $\Omega \cdot \text{m}$):

$$\rho = \frac{1}{\gamma}, \quad R = \frac{\rho l}{A}. \quad (20.16)$$

Običajno je podana ena ali druga vrednost, v določenih primerih (predvsem v elektrolitih) pa mobilnost nabojev. Tu je potrebno ločiti način prevajanja v tekočinah in prevodnikih. V tekočinah prevajajo tako elektroni kot ioni (pozitivni in negativni), medtem, ko v prevodnikih prevajajo samo elektroni. Obstajajo tudi posebne snovi, ki jim rečemo polprevodniki, pri katerih lahko električne lastnosti spreminjamo z dodajanjem primesi. Kos kristala silicija je izolator, zelo slab prevodnik, ki pa lahko postane dober prevodnik, če mu dodamo primesi. To dodajanje poteka pri zelo visokih temperaturah, nad 1000° . Način prevajanja je odvisen od tipa dodanih primesi. Če je dodana snov fosfor (pri čemer se med kristalno rešetko silicija le vsake toliko vrine kakšen atom fosforja),

imenujemo tak tip polprevodnika n-tip, saj vsebuje določeno število šibko vezanih elektronov, ki se lahko (dokaj) prosto gibljejo ob priključeni napetosti. Če dodamo siliciju atome bora se v kristalno rešetko silicija vrinejo atomi bora, ki ustvarijo pomanjkanje elektronov, kar imenujemo vrzel. Izkaže se, da tudi takšno pomanjkanje elektronov lahko deluje kot prevodnik. V polprevodniku prevajajo tako elektroni kot vrzeli.

Primer izračuna upornosti palice:

Specifična prevodnost bakra je $5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$. Določimo upornost ravne palice pravokotnega preseka stranic $1 \times 2 \text{ mm}^2$ in dolžine 5 m.

Izračun: Uporabimo enačbo $R = \frac{l}{\gamma A}$ in določimo upornost

$$R = \frac{5 \text{ m}}{5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} \approx \underline{\underline{44 \text{ m}\Omega}}.$$

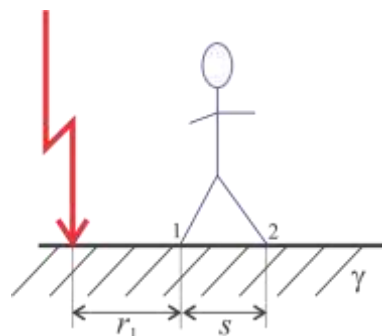
Primer izračuna napetosti koraka pri udaru strele:

Določimo napetost koraka pri udaru strele s tokom 20 kA, če je človek oddaljen za $r_1 = 15 \text{ m}$ stran od udara. Specifična prevodnost zemlje je 10^{-4} S/m , razdalja koraka je $s = 0,8 \text{ m}$.

Izračun: Predpostavimo homogeno porazdelitev gostote toka, ki je na radiju r od mesta udara strele v tla enaka

$$J(r) = \frac{I}{A(r)} = \frac{I}{\frac{4\pi r^2}{2}} = \frac{I}{2\pi r^2}. \text{ Ker je gostota toka vektorska}$$

veličina, jo kot vektor zapišemo kot $\vec{J} = \vec{e}_r \frac{I}{2\pi r^2}$. Iz Ohmovega zakona sledi polje $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} = \vec{e}_r \frac{I}{2\pi\gamma r^2}$



$$\text{Napetost koraka je } U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{e}_r \frac{I}{2\pi\gamma r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + s} \right).$$

$$U_{12} = \frac{I}{2\pi\gamma} \frac{s}{r_1(r_1 + s)} \approx \underline{\underline{107 \text{ kV}}}.$$

Iz primera smo ugotovili, da lahko nastopi pri udaru strele ob razkoraku do precej velike napetosti med stopaloma. Ta je lahko v določenih primerih tudi nevarna za človeka (in živali). Po preprosti enačbi za

izračun še dovoljene napetosti koraka* $U_{koraka,max} = \frac{200 + \rho(\Omega \cdot m)}{\sqrt{\text{čas trajanja}}}$, ki da približno 10 kV pri izbrani

specifični prevodnosti, ugotovimo, da smo pri 15 m znotraj nevarne cone. Ocenimo lahko varno razdaljo, pri čemer bomo predpostavili $r_1 \gg s$ (sicer bi morali rešiti kvadratno enačbo):

$$U_{koraka,max} \approx \frac{I}{2\pi\gamma} \frac{s}{r_{1,min}^2} \Rightarrow r_{1,min} \approx \sqrt{\frac{I}{2\pi\gamma} \frac{s}{U_{koraka,max}}}. \text{ Za } U_{koraka,max} = 10 \text{ kV} \text{ dobimo kritično}$$

razdaljo približno 50 m. Pri toku 1 kA je ta razdalja 16 m, pri 200 kA pa kar 160 m.

* Z.Cheng: »Calculation of step voltage near lightning current«, IEEE 2004.

Pri manjših specifičnih upornostih tal je maksimalna (kritična) napetost koraka manjša, kljub temu pa je varnostna razdalja večja².

Primer izračuna ozemljitvene upornosti:

Izračunajmo ozemljitveno upornost, če je ozemljilo v obliki prevodne polkrogle v zemlji s specifično prevodnostjo 10^{-4} S/m. Polkrogla ima polmer 0,5 m.

Izračun: Predpostavili smo določen tok I v kroglo, ki povzroči med

točkama T_1 in T_2 napetost $U_{12} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$. Napetost med

površino krogle in neskončno okolico ($r_1 = r_0, r_2 \rightarrow \infty$) bo torej $U_{0\infty} = \frac{I}{2\pi\gamma r_0}$, torej bo upornost

ozemljila enaka $R = \frac{U_{0\infty}}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma r_0}$. Za izbrane vrednosti je upornost ozemljila enaka 3,2 kΩ. To je

kar velika vrednost za ozemljitveno upornost, ki naj bo v praksi čim manjša; v praksi se smatra kakovostna ozemljitev z upornostjo manjšo od 5 Ω. Pri izbrani specifični prevodnosti zemlje bi bil potrebni polmer krogle za 5 Ω ozemljilo kar 320 m. Kar seveda ni smiselno ozemljilo. V praksi se okoli objekta položi ozemljitvena žica ali mreža, če pa je specifična prevodnost tal večja, zadostuje tudi posebno oblikovan ozemljitveni klin. V posebnih primerih se specifično prevodnost tal lahko poveča z določenimi substancami, ki se jih vlije v področje ozemljitve in strnjene predstavljajo lokalno povečano specifično prevodnost tal. Specifične prevodnosti tal se gibljejo od vrednosti nekaj deset mS/m (močvirna tla) do 0,1 mS/m (skalna tla).

TUDI ZANIMIVO: Merjenje specifične prevodnosti tal, merjenje ozemljitvene upornosti.

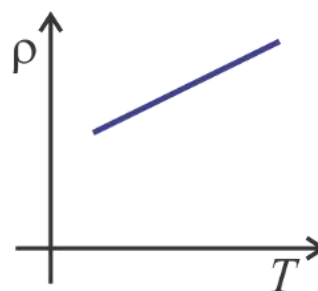
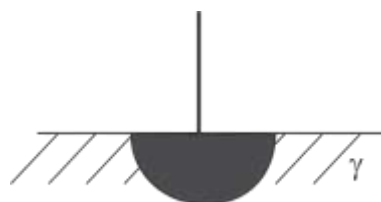
TEMPERATURNÁ ODVISNOST SPECIFIČNE UPORNOSTI

V nekaterih primerih je zaželeno, da se uporovne lastnosti s temperaturo čim bolj spreminjajo. Če jih na primer izkoriščamo za določanje temperature. V drugih pa je nezaželena, saj spreminja pogoje delovanja vezja, itd. Pogosto zadostuje, da uporabimo linearen zvezo, torej, da predpostavimo linearno spreminjanje specifične upornosti s temperaturo:

$$\rho(T) = \rho(T_0)(1 + \alpha(T - T_0)) \quad (20.17)$$

α imenujemo temperaturni koeficient, ki je običajno podan pri sobni temperaturi $T_0 = 20^\circ$. Za večino prevodnikov je temperaturni koeficient pozitiven, kar pomeni, da se specifična upornost snovi večja s temperaturo, kar pomeni, da se z višanjem temperature večja tudi upornost prevodnega kosa materiala. To lahko zapišemo kot (zgornjo enačbo množimo z l/A):

$$R(T) = R(T_0)(1 + \alpha(T - T_0)) \quad (20.18)$$



Snovne lastnosti nekaterih prevodnikov:

SNOV	$\gamma(\text{S/m})$	$\rho(\Omega\text{m})$	$\alpha(K^{-1})$
baker	$5,7 \cdot 10^7$	$1,75 \cdot 10^{-8}$	0,0039
zlato	$4,1 \cdot 10^7$	$2,44 \cdot 10^{-8}$	0,0034
aluminij	$3,5 \cdot 10^7$	$2,86 \cdot 10^{-8}$	0,0041
silicij	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$2,56 \cdot 10^3$	-0,07
voda	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^3$	
zemlja	$10^{-5}-10^{-2}$	10^5-10^2	
steklo	10^{-12}	10^{12}	
guma	10^{-17}	10^{17}	

JOULOV ZAKON

Joulov zakon opisuje segrevanje v snovi zaradi trkanja elektronov z atomi v snovi.

Diferencial dela, ki ga opravi diferencial elektrine dQ v polju E , se pretvori v toplotno energijo

$$dW_t = dA_e = dQ \int_0^l \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = dQ \cdot U. \quad (20.19)$$

Moč je definirana kot (časovna) hitrost spreminjanja energije $P = \frac{dW}{dt}$, ki je v našem primeru

$$P = \frac{dW_t}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = IU. \quad (20.20)$$

Dobimo že znano enačbo za moč pri enosmernih signalih:

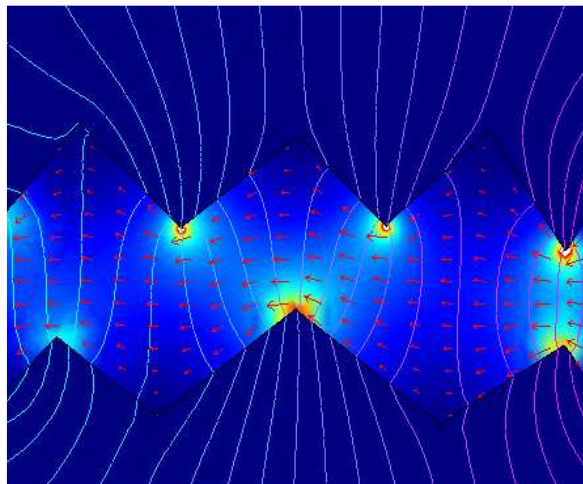
$$P = IU = I^2 R = U^2 G. \quad (20.21)$$

Definiramo lahko tudi **gostoto moči** in sicer kot moč na enoto volumna. V majhnem volumnu je diferencial moči enak $dP = p \cdot dV$, kjer p imenujemo gostota moči, dV pa je diferencial volumna. Hkrati lahko diferencial moči zapišemo kot

$$dP = dI \cdot dU = (J \cdot dA)(E \cdot dl) = (J \cdot E) dV.$$

Gostoto moči lahko torej izrazimo kot produkt gostote toka in električne poljske jakosti, bolj natančna izpeljava pa pokaže, da je potrebno vzeti skalarni produkt obeh veličin:

$$p = \vec{J} \cdot \vec{E}. \quad (20.22)$$



Prikaz gostote moči v lomljenemu vodniku: bolj »vroča« barva = večja gostota moči. Vektorji kažejo gostoto toka, ki je večja ob ožinah in ostrih robovih.

Enota za gostoto moči je W/m^3 . Z upoštevanjem Ohmovega zakona v diferencialni obliki $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ lahko gostoto toka zapišemo tudi kot

$$p = \gamma E^2 \quad (20.23)$$

ali kot $p = \frac{J^2}{\gamma}$.

Celotno (izgubno) moč v prevodniku določimo kot integral gostote moči v volumnu:

$$P = \int_V p dV = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (20.24)$$

Ta zapis imenujemo tudi **Joulov zakon v integralni obliki**.

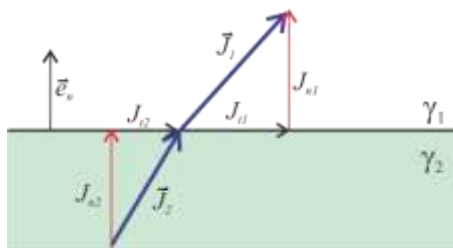
MEJNI POGOJI V TOKOVNEM POLJU

Podobno kot pri elektrostatičnem polju, izhajamo iz dveh osnovnih zakonov. Iz $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$ sledi (podobno kot iz $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$), da se **ohranja normalna komponenta gostote toka**:

$$J_{n2} = J_{n1} \quad (20.25)$$

Če upoštevamo Ohmov zakon v diferencialni obliki ($J = \gamma E$), velja v primeru, da na meji ni prostih nabojev

$$\gamma_2 E_{n2} = \gamma_1 E_{n1} \quad (20.26)$$



Slika 20-8: »Lom« gostote toka na meji dveh medijev z različnima prevodnostima.

Iz zakona o potencialnosti polja pa sledi, da se ohranja še tangencialna komponenta električne poljske jakosti:

$$E_{t2} = E_{t1} \text{ oziroma } \boxed{\frac{J_{t2}}{\gamma_2} = \frac{J_{t1}}{\gamma_1}} \quad (20.27)$$

Z deljenjem z mejnim pogojem za tangencialno komponento polja dobimo

$$\boxed{\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}, \quad (20.28)$$

kjer sta kota definirana med normalo in smerjo polja. Iz enačbe ugotovimo, da je v primeru velikih razlik med specifičnimi prevodnostmi dveh materialov (recimo na meji prevodnik/izolator) tok v prevodniku neodvisno od kota gostote toka v izolatorju praktično vzporedna z mejo.

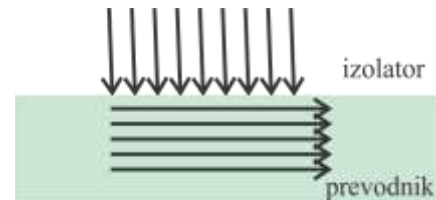
Primer izračuna prehoda toka iz izolatorja v prevodnik:

Vektor gostote toka je usmerjen pod kotom 1° iz izolatorja z $\gamma_i = 10^{-10}$ S/m na prevodnik s specifično prevodnostjo $\gamma_p = 10^7$ S/m. Določite kot odklona vektorja gostote toka v prevodniku.

Izračun:

$$\frac{\tan(\alpha_p)}{\tan(1^\circ)} = \frac{10^7 \text{ S/m}}{10^{-10} \text{ S/m}} \Rightarrow \tan(\alpha_p) \approx 10^{15} \Rightarrow \alpha_p \cong 90^\circ.$$

Tokovna gostota v prevodniku je praktično vzporedna s prevodnikom.



MEJNI POGOJ ZA J

Če upoštevamo bolj splošno obliko Gaussovega zakona $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \sigma$, ugotovimo, da mora biti razlika normalnih komponent gostote električnega pretoka enaka površinski gostoti naboja:

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma \quad (20.29)$$

Pri tem smo upoštevali, da je smer polja iz medija z indeksom 2 v medij z indeksom 1. V tej smeri kaže tudi normala na površino.

Ker pa sta normalni komponenti gostote toka enaki (glej en. (20.25)), kar zapišemo kot $J_{n1} = J_{n2} = J_n$ in hkrati velja Ohmov zakon v diferencialni obliki ($J = \gamma E$), iz (20.29) sledi $\varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2} = \sigma$ in torej

$$\boxed{\left(\begin{array}{cc} \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right) J_n = \sigma}. \quad (20.30)$$

Iz enačbe ugotovimo, da bo, razen v posebnih pogojih (ko velja $\frac{\epsilon_1}{\gamma_1} = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}$), na meji dveh dielektrikov prišlo ob prevajanju toka zaradi razlike med električnimi lastnostmi materialov do presežne ploskovne gostote naboja.

Primer izračuna naboja na meji dveh prevodnikov:

Vzemimo žico sestavljeno iz kosa bakra, aluminija in bakra. Velja $\gamma_{Cu} = 5,6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ in $\gamma_{Al} = 3,5 \cdot 10^7 \text{ S/m}$. Določimo površinsko gostoto naboja na meji, če teče skozi prevodnike tok z gostoto toka 1 A/mm^2 .

Izračun: Vzemimo, da teče tok iz leve proti desni. Na meji Cu/Al bo veljalo

$$\sigma = \epsilon_0 \left(\frac{1}{\gamma_{Al}} - \frac{1}{\gamma_{Cu}} \right) J_n = 9,5 \cdot 10^{-14} \text{ C/m}^2$$

.Ker je specifična prevodnost aluminija manjša od specifične prevodnosti bakra (dielektričnosti pa sta enaki 1), bo na meji Cu/Al v smeri toka presežek pozitivnega naboja, na meji Al/Cu pa negativnega naboja.



Nadalje lahko ugotovimo, da bo polje na površini enako $E_n = \sigma / \epsilon_0 = \left(\frac{1}{\gamma_{Al}} - \frac{1}{\gamma_{Cu}} \right) J_n$.

Dodatno: Če si zamislimo, da je namesto aluminija vmes plast izolatorja z zelo majhno prevodnostjo

($\gamma_i \ll \gamma_{Cu}$), bo iz enačbe za površinski naboj $\sigma \cong \frac{\epsilon_i}{\gamma_i} J_n = \frac{\epsilon_i}{\gamma_i} \gamma_i E_n = \epsilon_i E_n$, kar je znan izraz iz elektrostatike.

Povzetek:

- Zaradi velikih razlik v specifičnih prevodnosti med izolatorjem in prevodnikom, je pri ne-direktnem vpadu gostote toka na prevodnik v prevodniku dominantna tangencialna komponenta gostote polja, v izolatorju pa normalna komponenta električnega polja.
- Na meji dveh snovi z različnimi električnimi lastnostmi pride ob prehodu toka iz enega v drug material do kopičenja pozitivnega ali negativnega naboja. Na meji izolator/prevodnik je ta naboj kar enak ϵE , kar je znan rezultat elektrostatike.

DUALNOST TOKOVNEGA IN ELEKTROSTATIČNEGA POLJA

Vzemimo dve prevodni telesi, priključeni na enosmerno napetost U . Med telesoma je medij katerega električne lastnosti določata specifična prevodnost in relativna dielektričnost. Prevodni telesi lahko smatramo za ekvipotencialki, električno polje med telesoma se porazdeli v skladu z zakonitostmi elektrostaticnega polja. Obstaja neposredna zveza med gostoto toka in električno poljsko jakostjo: $J = \gamma E$, pa tudi

gostoto pretoka $J = \gamma E = \gamma \frac{D}{\epsilon}$, torej so

gostotne cevke za obe polji enaki. V tem smislu govorimo o dualnosti obeh polj. Če izračunamo porazdelitev električnega polja, poznamo tudi porazdelitev tokovnega polja. Torej mora obstajati tudi neka neposredna zveza med kapacitivnostjo in upornostjo med dvema telesoma:

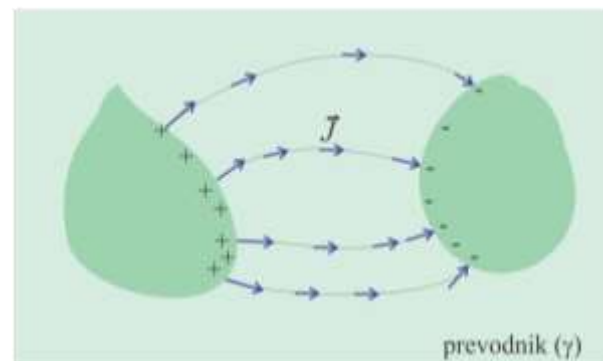
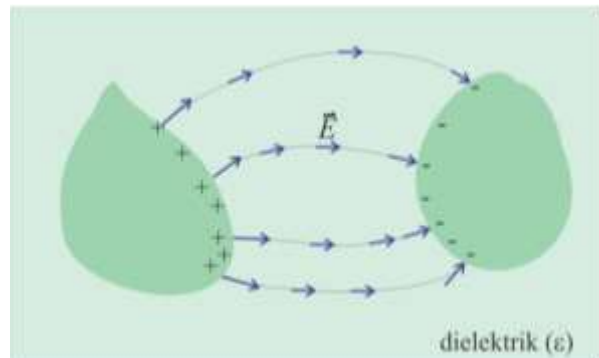
$$RC = \frac{U}{I} \frac{Q}{U} = \frac{\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}} = \frac{\epsilon \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\gamma \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}} = \frac{\epsilon}{\gamma} = \rho \cdot \epsilon \quad (20.31)$$

Ponovimo rezultat: $RC = \rho \epsilon$. (20.32)

Praktična uporaba tega izraza je velika. Vzemimo, da znamo izračunati kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma. Potem lahko iz izraza za kapacitivnost zelo enostavno dobimo tudi izraz za upornost. V principu je izraz za prevodnost kar enak izrazu za kapacitivnost, le dielektričnost moramo

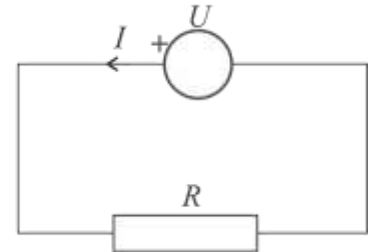
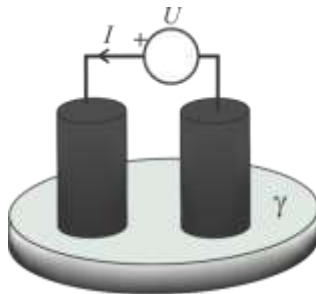
zamenjati s specifično prevodnostjo: $G = C \frac{\gamma}{\epsilon}$. Na primer, kapacitivnost ploščnega kondenzatorja je

$$C = \frac{\epsilon A}{d}, \text{ upornost pa } G = C \frac{\gamma}{\epsilon} = \frac{\epsilon A}{d} \frac{\gamma}{\epsilon} = \frac{A}{\gamma d}.$$



Primer izračuna s pomočjo dualnosti električnega in tokovnega polja:

Med dve prevodni palici okroglega preseka polmera $r_0 = 2$ mm, razmaknjeni za 2 cm priključimo napetost 10 V in ju potopimo za $l = 3$ cm v prevodni medij. Izmerimo tok 0,2 mA. Določimo upornost med elektrodama in specifično prevodnost medija.



Izračun: V poglavju o okovinjenju ekvipotencialk smo imeli primer dveh nasprotno naelektrenih valjev, kjer smo z upoštevanjem ekscentričnosti določili napetost med valjema kot

$U = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)$, brez upoštevanja ekscentričnosti pa $U = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$. Od tod je

kapacitivnost $C = \frac{Q}{U} = \frac{ql}{U} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$. Iz pogoja dualnosti določimo prevodnost med palicama

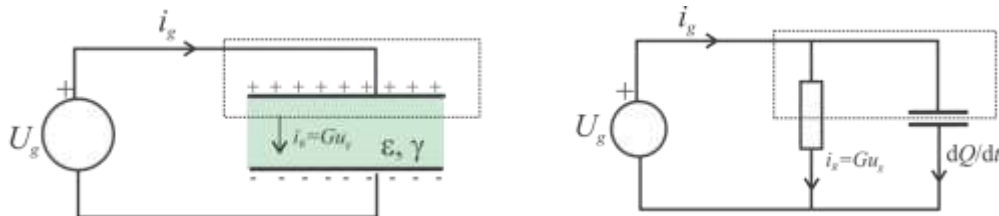
$$G = C \frac{\gamma}{\epsilon} = \frac{\pi\gamma l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$$

Specifična prevodnost dobimo kot $G = \frac{0,2 \text{ mA}}{10 \text{ V}} = 20 \mu\text{S} = \gamma \frac{\pi \cdot 0,03 \text{ m}}{\ln\left(\frac{22 \text{ mm}}{2 \text{ mm}}\right)} = \gamma \cdot 39,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$,

od koder sledi $\gamma \cong \underline{\underline{509 \text{ S/m}}}$.

* REALNI KONDENZATOR

Do sedaj smo ločeno obravnavali kondenzator in upor, čeprav je v realnosti tako upor kot kondenzator element, ki ima med dvema prevodnima kontaktoma snov, katere električne lastnosti so podane z relativno dielektrično konstanto in specifično prevodnostjo. Za obravnavo realnega kondenzatorja moramo vzeti primer časovno spreminjajočega se toka, saj v enosmernih razmerah kondenzator v idealnih razmerah ne prevaja toka, v realnih pa ima določeno upornost in tok prevaja. Realni kondenzator priključimo torej na vir izmenične napetosti u_g in določimo tok skozi realni kondenzator.



Slika 20-9: Levo: realni kondenzator priključen na vir napetosti U_g . Desno: preprost model realnega kondenzatorja upošteva njegovo notranjo upornost.

Zaobjemimo enega od kontaktov kondenzatorja in uporabimo zakon o ohranitvi naboja (kontinuitetno enačbo):

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt}. \quad (20.33)$$

Levi člen je enak razliki izstopnega (v kondenzator) in vstopnega toka (iz vira) $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = Gu_g - i_g$,

desni pa poljskemu toku v kondenzatorju, ki je posledica časovne spremembe naboja na površini kontaktov

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d(Cu_g)}{dt}. \quad (20.34)$$

Velja torej

$$Gu_g - i_g = -C \frac{du_g}{dt}. \quad (20.35)$$

Dobimo diferencialno enačbo (linearno, prvega reda), katere rešitev je zveza med napetostjo in tokom na kondenzatorju. Ugotovimo, da lahko tok skozi kondenzator (enak toku i_g) ločimo na dva toka, enega zaradi ohmske upornosti, drugega pa zaradi kapacitivnih lastnosti:

$$i(t) = i_g = Gu_g + C \frac{du_g}{dt}. \quad (20.36)$$

Ta ločitev je seveda lahko samo modelna. Znotraj kondenzatorja je to hkraten in neločljiv pojav.

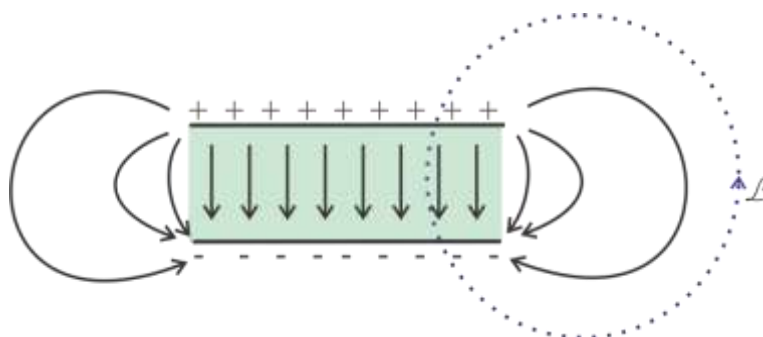
Pri obravnavi kondenzatorja smo že omenili vzporedno, pa tudi serijsko upornost, ki je pomemben podatek za kakovost kondenzatorja. V praksi pa je lahko kondenzator modelno zelo kompleksen element, ki vsebuje več idealnih uporov, kondenzatorjev ter tudi tuljavo.

21. Viri napetosti

Vsebina poglavja: elektromotorna sila, generatorska napetost, električni tokokrog, baterije, sončna celica.

GENERATORSKA SILA

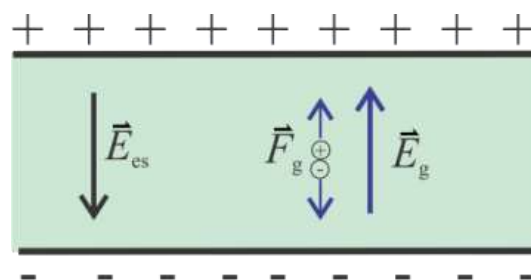
Do sedaj smo se ukvarjali le z učinki električnega polja, ne pa tudi z načinom, kako sploh ustrezno matematično opisati ločevanje naboja in generiranje napetosti. Vzemimo na primer naelektren kondenzator, ki ima ločene pozitivne in negativne naboje. Smer elektrostatičnega polja je od + nabojev proti – nabojem, tako v notranjosti kot v zunanosti kondenzatorja.



Slika 21-1: Naelektren kondenzator z ločenimi naboji in elektrostatičnim poljem v notranjosti in zunanosti. S pomočjo elektrostatičnega polja ni mogoče ločevati nabojev.

Če bi upoštevali le elektrostatično polje (E_{es}) za katero velja, da je delo električnih sil po zaključeni poti enako nič $\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = 0$, ugotovimo, da to polje ne more biti generatorsko, da to polje ni sposobno ločevanja nabojev, pač pa le združevanja. Torej mora biti neka druga sila, ki omogoča ločevanje nabojev nasprotnega predznaka. Tej sili lahko rečemo **generatorska ali razdvajalna sila**. V angleškem jeziku se pogosto uporablja izraz **electromotive force**, poslovenjeno bi ji rekli elektromotorna ali elektro-generatorska sila. Označimo jo z \vec{F}_g , pripadajoče električno polje pa

$\vec{E}_g = \frac{\vec{F}_g}{Q}$. Vzemimo, da znotraj kondenzatorja deluje generatorska sila, ki je sposobna razdvajanja nabojev. Hkrati, ko deluje generatorska sila in razdvaja naboje, se vzpostavlja tudi elektrostatična sila, ki pa je usmerjena v nasprotno smer. Na elektrodah se ustvarja akumulacija naboja, ki je v ravnovesju taka, da je $\vec{E}_g + \vec{E}_{es} = 0$.

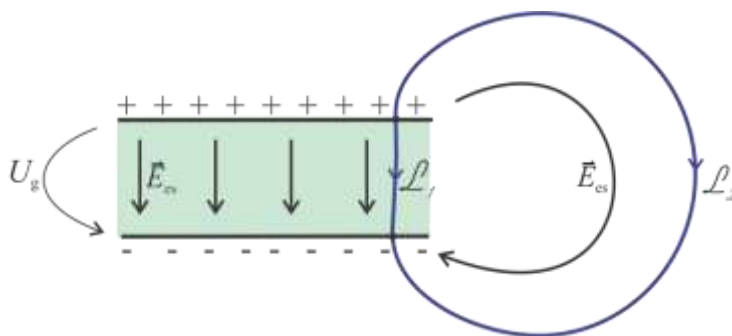


Slika 21-2: V kondenzatorju (bateriji) deluje generatorska sila, ki razdvaja naboje in jih »nalaga« na elektrodi.

GENERATORSKA NAPETOST

Poglejmo, koliko je integral $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$, če

je \vec{E} sumarna električna poljska jakost, ki vključuje tako generatorsko kot elektrostaticno silo. L_1 naj bo pot znotraj, L_2 pa zunaj kondenzatorja, pri čemer naj bo L_2 usmerjena v nasprotno smer. Za elektrostaticno polje E_{es} velja



$$\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1-L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{L_1} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l}.$$

Ker pa električno polje v kondenzatorju ni le elektrostaticne narave, velja

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} (\vec{E}_{es} + \vec{E}_g) \cdot d\vec{l} + \int_{-L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1-L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} + \int_{L_1} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = -U_g, \quad \text{torej velja tudi}$$

$$\int_{L_1} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = U_g.$$

Ali drugače: Znotraj kondenzatorja je elektrostaticno polje (v stacionarnem stanju) enako veliko a nasprotno usmerjeno generatorskemu in je torej $\int_{L_1} (\vec{E}_{es} + \vec{E}_g) \cdot d\vec{l} = 0$, preostane del

$$\int_{L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = U_g. \quad (21.1)$$

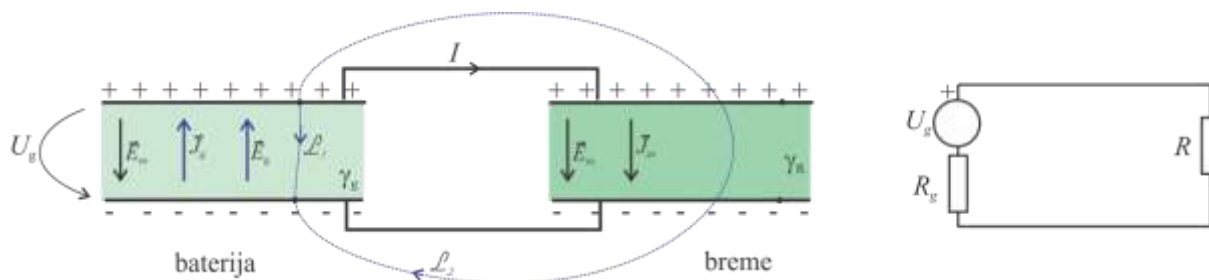
Generatorska napetost je usmerjena od + naboja proti – naboju, enako kot elektrostaticno polje in nasprotno smeri generatorskega polja.

Povzetek: Integral $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$, ki ne vsebuje le elektrostaticne električne poljske jakosti, pač pa tudi sile drugega izvora, ni nujno enak nič, pač pa neki napetosti, ki ji rečemo generatorska napetost

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -U_g. \quad (21.2)$$

V naslednjem semestru (OE2) bomo ugotovili, da je ta integral različen od nič tudi v primeru časovno spreminjajočega se magnetnega polja skozi zanko.

TOKOKROG



Slika 21-3: Tokokrog iz generatorskega in bremenskega dela. Desno model ekvivalentnega vezja

Zaključimo generator v tokokrog s ploščnim kondenzatorjem s presekom A , razmikom med ploščama l in specifično prevodnostjo γ . Ponovno pogledamo, kako lahko razdelimo integral $\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = 0$.

Integral razdelimo na pot znotraj vira in preko kondenzatorja s prevodnim materialom. Ker je sedaj zaradi toka v tokokrogu $\vec{E}_{es} + \vec{E}_g \neq 0$, bo znotraj generatorja

$$\int_{L_1} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = U_g - \int_{L_1} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = U_g - \int_{L_1} \frac{\vec{J}_g}{\gamma_g} \cdot d\vec{l}.$$

Enako velja za integral znotraj prevodnika

$$\int_{L_2} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2} \frac{\vec{J}_{es}}{\gamma_R} \cdot d\vec{l}.$$

Če predpostavimo homogeno polje v preseku A tako za generatorski medij, kot za breme, dobimo:

$$\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = U_g - \int_{L_1} \frac{I/A}{\gamma_g} \cdot dl - \int_{L_2} \frac{I/A}{\gamma_R} \cdot dl = U_g - I \frac{l}{\gamma_g A} - I \frac{l}{\gamma_R A} = 0.$$

Prvi člen je generatorska napetost, drugi člen predstavlja padec napetosti na notranji upornosti vira, tretji pa padec napetosti na bremenskem prevodniku (uporu):

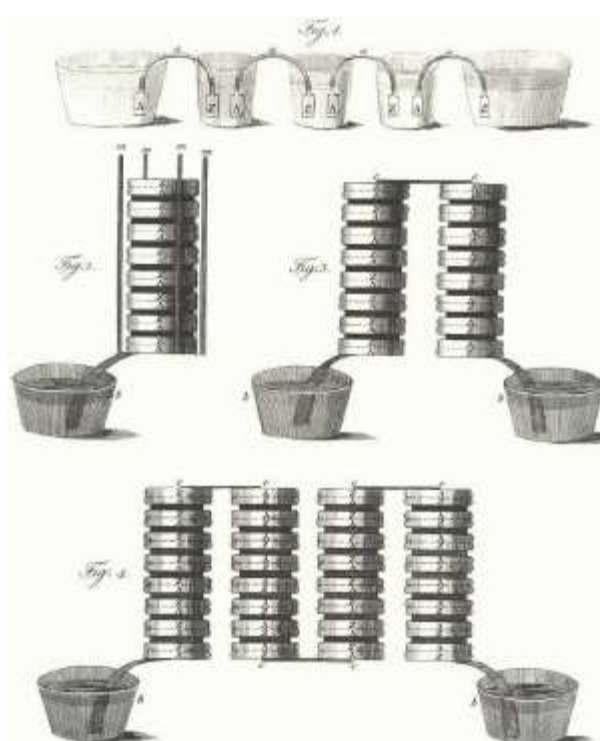
$$U_g - IR_g - IR_R = 0. \quad (21.3)$$

Ugotovimo, da je ločevanje med generatorsko upornostjo in napetostjo mogoče le modelno, v realnosti pa sta ta dva elementa vezij integrirana v eni strukturi.

Tak princip generacije naboja si lahko predstavljamo v bateriji (akumulatorju), kjer ločevanje naboja nastopa zaradi elektro-kemijskih reakcij.

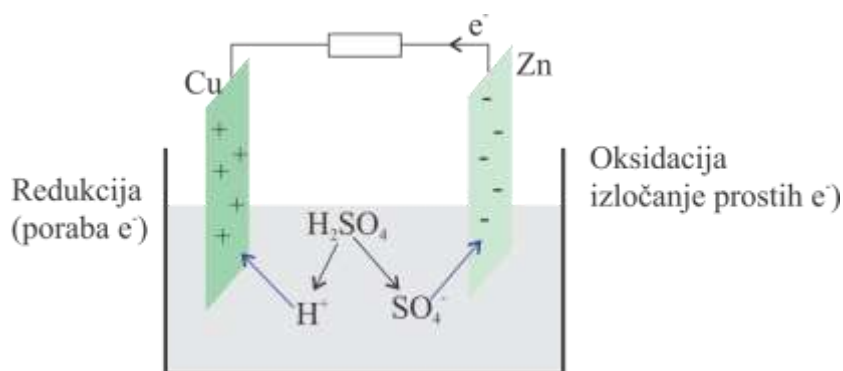
* BATERIJE

Galvani in Volta. Zanimiva je zgodba nastanka Voltinega izuma, ki je povezana s poskusi Luigija Galvanjija, Voltinega sonarodnjaka, ki je presenečeno ugotavljal, da mrtvi žabji kraki reagirajo na dotik s kovino, kar je razlagal z živalsko elektriko (slika desno). Volta je tej teoriji nasprotoval in trdil, da je to posledica zunanje generirane napetosti. To je tudi dokazal z uporabo elektrike shranjene v Leidenski steklenici ali pa z bimetalom, torej s stikom dveh različnih kovinskih materialov. Dandanes vemo, da smo tudi ljudje sestavljeni iz celic, ki za svoje delovanje uporabljajo elektrokemijske principe in da je prenašanje signalov živčnih celic električne narave. Torej je imel delno Galvani prav, obstaja živalska elektrika, le da je bila njegova interpretacija napačna. V njegovem primeru je bil rezultat trzljaja električni sunek, ki je bil zunanje (ekstrinzično) in ne notranje kreiran. Voltini eksperimenti in dognanja so mu prinesli pomembna priznanja (nagrada Royal Society leta 1791, Copleyeva nagrada leta 1794) in veliko slavo. Raziskave je nadaljeval v smeri povečanja napetosti, ki je bila zelo šibka (manj kot 1 V) in jo je bilo težko zaznati s tedaj najpopolnejšimi elektrometri. Uspelo mu je z zaporedno povezavo skodelic z elektrolitom in bimetalnimi elektrodami. Povezal je diske iz cinka in srebra ter vmes dodal šibko kislino ali slano vodo in dobil Voltino kaskado, pri kateri se je napetost na skrajnih koncih povečevala v sorazmerju s številom uporabljenih členov. Zgodovinsko je morda zanimivo, da je njegovo delo močno podprl Napoleon, ki mu je podelil naziv vitez (Conte) in celo pokojnino. Hkrati je Napoleon, ki se je zavedal pomena novih odkritij, razpisal nagrado 60000 frankov za vsakogar, ki bi dosegel podobne dosežke kot Franklin in Volta. Leta 1881 na prvem internacionalnem električnem (elektrotehničnem) kongresu v Parizu, so v čast Volti po njemu poimenovali enoto za napetost.



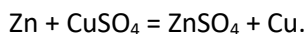
ZN/CU BATERIJA

Vzemimo primer dveh elektrod, ene iz cinka (Zn) in druge iz bakra (Cu). Če med elektrodi vlijemo tekočino, ki ji rečemo elektrolit, med elektrodama zaradi elektrokemijske reakcije nastane t.i. galvanski člen. Če je elektrolit žveplena kislina H_2SO_4 , le ta v vodi disociira (tvorijo se ioni) na ione H^+ in SO_4^{2-} . H^+ ioni se nabirajo na bakrovi elektrodi, kjer tvorijo presežek pozitivnega naboja. Ioni SO_4^{2-} se nabirajo na cinkovi elektrodi, tam tvorijo cinkov sulfat in presežek negativnega naboja. Na Cu elektrodi se tvori presežek pozitivnega naboja. Vzpostavi se napetost, ki jo lahko izkoristimo kot generatorski vir napetosti. Ob priključitvi bremena (upora) na baterijo v priključnih žicah steče tok (elektronov), ki zmanjšuje količino generiranega naboja. Elektrokemijska reakcija nadomešča porabo naboja dokler je v elektrolitu dovolj ionov ali dokler se cinkova elektroda ne iztroši.*



Slika 21-4: Baterija iz bakrene in cinkove elektrode v elektrolitu iz razredčene žveplene kisline. Na bakreni elektrodi poteka redukcija (poraba e^-), na cinkovi pa oksidacija (izločanje e^-)

Kemijsko bi lahko reakcijo zapisali



Vodikovi ioni imajo pomanjkanje elektrona, ki priteče iz tokokroga na bakrovo elektrodo preko priključnih žic kot električni tok. Vodikov ion pridobi iz bakrene elektrode elektron in se izloči iz elektrolita. Temu procesu rečemo redukcija. Na cinkovi elektrodi se vrši oksidacija (izločanje presežnih prostih elektronov) pri čemer nastaja cinkov sulfat, ki se useda na dnu posode.

Faraday je z eksperimenti ugotovil, da je količina snovi, ki se nabere na elektrodah (v našem primeru baker) sorazmerna toku, ki steče skozi priključne žice. Količina elektrike, ki je potrebna za en ekvivalent kemične akcije (ki ustreza kemični reakciji potrebni za izločitev 1g vodika iz kisline), je enaka enemu Faradayju, kar ustreza naboju 96494 amperskih sekund. Za zgornjo reakcijo, v kateri sta udeležena ena enota cinka in ena enota bakra, ustreza generacija naboja 2 F ali 193 988 C.

Poskuse s podobno baterijo je prvi delal Alessandro Volta v Italiji, ki se po njem imenuje Voltova celica ali Voltin člen. Kovinske elektrode imajo negativen potencial glede na raztopino. Da bi jih lahko

* Priznati je potrebno, da se napetost med dvema različnima kovinama pojavi že brez delovanja elektrolita, torej pri neposrednem stiku dveh kovin. Ta napetost je posledica različnih izstopnih del različnih kovin in je med drugim temperaturno odvisna. Zato stik dveh različnih kovinskih materialov izkoristimo kot senzor temperature. Tak spoj pa ne more delovati kot generator toka, razen v primeru, da na tak spoj delujemo z zunanjo silo. Na primer, da spoj segrevamo ali ohlajamo.

primerjali med seboj, jih primerjamo s potencialom t.i. referenčne elektrode, ki je iz platine z dodatki vodika. Tako primerjane elektrodne napetosti so za različne materiale sledeče:

zlato	1,5 V
platina	1,2 V
srebro	0,8 V
ogljje	0,74 V
baker	0,34 V
železo	-0,44 V
cink	-0,76 V
aluminij	-1,67 V

Če torej sestavimo t.i. galvanski člen iz elektrode iz bakra in cinka, bo med njima napetost $0,34\text{ V} - (-0,76\text{ V}) = 1,2\text{ V}$.

SVINČEVA BATERIJA – AKUMULATOR

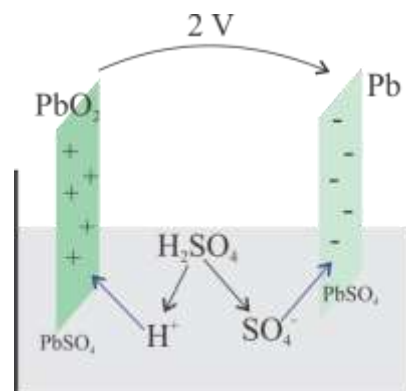
Druga znana baterija je svinčeva baterija, v kateri imamo dve elektrodi, eno iz svinca, drugo pa iz svinčevega dioksida. Kot elektrolit nastopa razredčena žveplena kislina. Elektroda iz svinčevega dioksida ima za dobra 2 V višjo napetost od svinčeve. Z vezavo šestih takih celic dobimo baterijo z izhodno napetostjo 12 - 14 V (avtomobilski akumulator). Reakcija, ki poteka je sledeča:

na negativni elektrodi: $\text{Pb} + \text{SO}_4^{2-} = \text{PbSO}_4 + 2\text{e}^-$

na pozitivni elektrodi: $\text{PbO}_2 + \text{Pb} + 2\text{H}_2\text{SO}_4 + 2\text{e}^- = 2\text{PbSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$

Na obeh elektrodah nastaja svinčev sulfat, kar pomeni, da je ob popolni razelektritvi napetost med elektrodama enaka nič. Kot vemo, je mogoče te tipe baterij ponovno naelektriti, pri čemer s tokom ustvarimo generacijo svinca na eni in svinčevega dioksida na drugi elektrodi. Proces je torej reverzibilen.

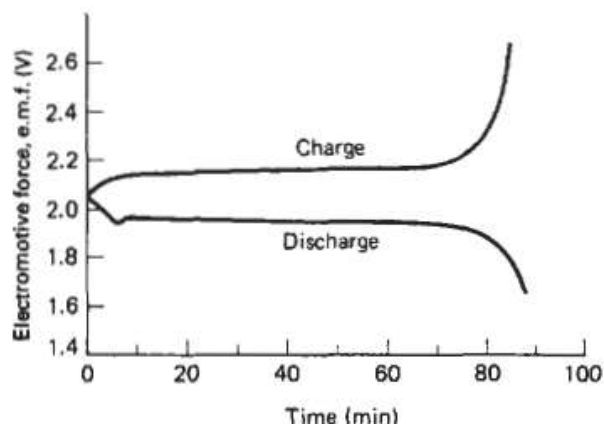
$2\text{PbSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O} = \text{PbO}_2 + 2\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{Pb}$



Slika 21-5: Baterija iz svinčeve elektrode in iz elektrode iz svinčevega dioksida. Na obeh elektrodah ob porabi nastaja svinčev sulfat.

Zanimivo je to, da se med razelektritvijo manjša, med naelektritvijo pa večja koncentracija kisline, medtem ko ostane napetost celice več ali manj konstanta. V tem smislu nam merjenje napetosti na akumulatorju ne predstavlja posebno natančnega merila »polnosti«.

Slika 21-6: Karakteristika naelektritve in razelektritve baterije (napetost – čas). Vir: T.R. Crompton: Battery reference book, Newnes, 2000.



Svinčene baterije so verjetno še vedno najbolj razširjene. Predvsem se uporabljajo v avtomobilski industriji. Njihova prednost pred ostalimi je nizka cena, visoka napetost na celico in »dobra« življenjska doba (mnogokratno polnjenje). Slabosti pa velika teža, slabe nizko-temperaturne lastnosti in ne sme biti v stanju razelektritve za daljše obdobje.

V prodaji so tudi t.i. zaprti tip akumulatorjev (suhi), katerih prednost je, da jim ni potrebno dolivati elektrolita / destilirane vode. Pri standardnih svinčenih baterijah namreč lahko posebno pri koncu elektritve ali pri prekomerni naelektritvi pride do elektrolize žveplene kisline, pri čemer se kreirata kisik in vodik, kar v končni konsekvenci lahko škodno vpliva na karakteristiko baterije. Novi tipi baterij omogočajo, da generiran kisik in vodik tvorita vodo. Pri razelektritvi ima svinčeva »celica« določeno notranjo upornost; standardni tip D ima pri napetosti celice 2 V notranjo upornost 10 mΩ.

NIKEJ – KADMIJEVE BATERIJE (Ni-Cd)

so mehansko trdne in imajo dolgo življenjsko dobo. Imajo tudi dobro nizkotemperaturno karakteristiko in so hermetično zaprte. Imajo pa višjo ceno kot svinčene ali nikelj-cinkove baterije. V grobem jih po izdelavi delimo na dva tipa: celice z debelimi ploščami v katerih je aktiven material stisnjen v perforiran metalni trak v obliki žepkov ali cevčic in na celice s sintranimi ploščami, v katerih je aktivni material deponiran v porozne reže metala. Posebno slednje imajo majhno notranjo upornost in sposobnost velike obremenitve. Uporabljajo se na primer v biomedicinskih napravah, igračkah, itd. Vsebujejo toksične substance.

NIKEJ – METAL – HIDRIDNE BATERIJE

Omogočajo večjo gostoto energije (energija na kilogram teže), vendar manjše število ponovnih polnjenj kot nikelj-kadmijeve baterije.

LITIJ – IONSKE BATERIJE

So trenutno najpogosteje uporabne baterije v prenosnikih, mobilnih in drugih aparatih, kjer je potrebna velika gostota in obnovljivost energije .

Litij je najlažji kovinski element, ima zelo velik elektrokemijski potencial in torej omogoča zelo velike gostote energije.

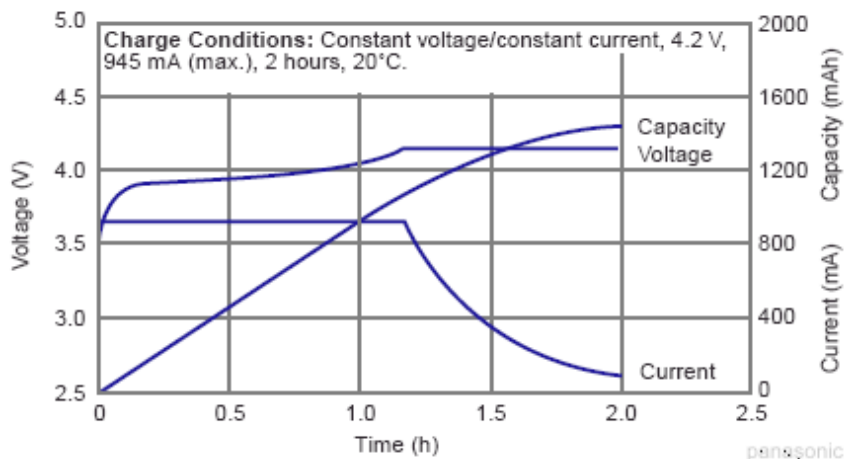
Veliko razvoja je bilo potrebna, da so se odpravile težave temperaturne nestabilnosti litijeve elektrode pri ponovnih polnjenjih, ker je prihajalo do eksplozij baterij. Da bi se izognili težavam, so litij nadomestili z litij-ionsko elektrodo, ki ima sicer nekoliko manjšo gostoto energije, je pa bolj varna. Prve tovrstne baterije so začeli proizvajati in tržiti pri Sony-ju leta 1991. Obstaja več različnih tipov litij-ionskih baterij, ki se predvsem razlikujejo materialu iz katerega sta anoda in katoda. Anoda je najpogosteje iz grafita, katoda pa iz kobalta ali magnezija. Elektrolit je iz litijeve soli ([LiPF₆](#), [LiBF₄](#), or [LiClO₄](#)). Napetost ene celice je višja kot pri drugih celicah, običajno med 4,1 V in 4,2 V. Precej pomembno je, da se te napetosti ne preseže. Hitrost polnjenja je približno 3h za 1 C naboja.

Slika 21-7: Polnilni tok in napetost za litij-ionsko baterijo. Vir: http://www.electronic-lab.com/articles/li_ion_reconstruction/

Običajno litij-ionske baterije potrebujejo določeno zaščitno vezje, ki baterijo izklopi, če je napetost celice večja od 4,3

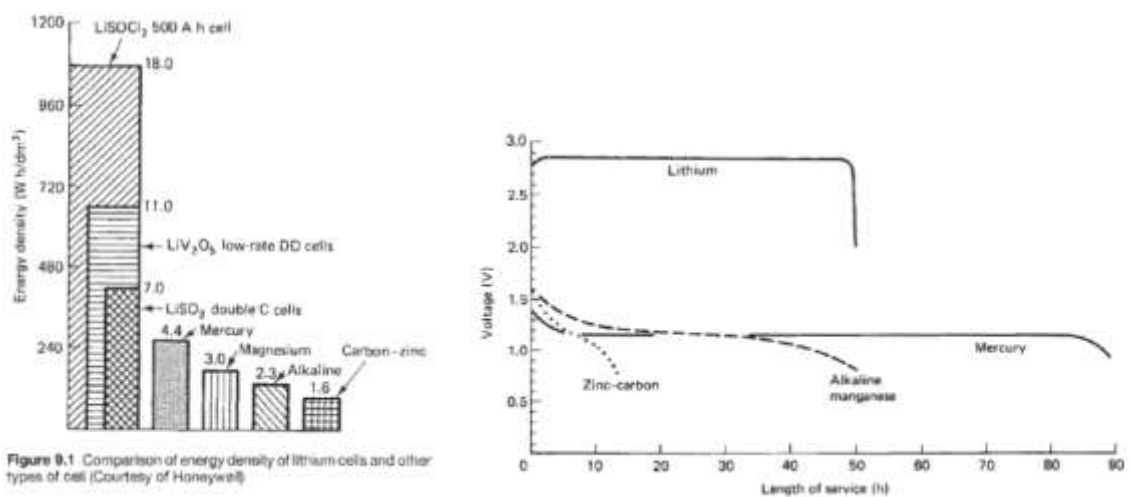
V ali če temperatura celice preseže 90°C. Tipična življenjska doba Li-ionskih baterij je 300 do 500 polnjenj/praznjenj. Neugodno je, da ob koncu življenjske dobe običajno baterija še vedno kaže visoko napetost, bistveno pa se zmanjša njena kapacitivnost. Poveča se tudi notranja upornost baterije

Namesto »klasičnega«
elektrolita iz litijevih soli, se v zadnjem času uporablja tudi bolj kompaktne snovi – polimere. Te tipe baterij imenujemo litij-ionske polimerske baterije. Prednost teh baterij je cenejša izdelava, manjši volumen in manjša teža, saj jih lahko oblikujemo v obliki folij (slika desno), pa tudi večja gostota energije (130-200 W/kg in 300 Wh/L).



	Nickel-cadmium	Nickel-metal-hydride	Lead-acid sealed	Lithium-ion cobalt	Lithium-ion manganese	Lithium-ion phosphate
Gravimetric Energy Density (Wh/kg)	45-80	60-120	30-50	150 - 190	100 - 135	90 - 120
Internal Resistance in mΩ	100 to 200 ¹ 6V pack	200 to 300 ¹ 6V pack	<100 ¹ 12V pack	150 - 300 ¹ pack 100-130 per cell	25 - 75 ² per cell	25 - 50 ² per cell
Cycle Life (to 80% of initial capacity)	1500 ²	300 to 500 ^{3,4}	200 to 300 ³	300 - 500 ³	Better than 300 - 500 ⁴	>1000 lab conditions
Fast Charge Time	1h typical	2 to 4h	8 to 16h	1.5 - 3h	1h or less	1h or less
Overcharge Tolerance	moderate	low	high	Low. Cannot tolerate trickle charge.		
Self-discharge / Month (room temperature)	20% ⁵	30% ⁵	5%	<10% ⁶		
Cell Voltage Nominal Average	1.25V ⁷	1.25V ⁷	2V	3.6V 3.7V ⁶	Nominal 3.6V Average 3.8V ⁶	3.3V
Load Current peak best result	20C 1C	5C 0.5C or lower	5C ⁹ 0.2C	<3C 1C or lower	>30C 10C or lower	>30C 10C or lower
Operating Temperature ¹⁰ (discharge only)	-40 to 60°C	-20 to 60°C	-20 to 60°C	-20 to 60°C		
Maintenance Requirement	30 to 60 days	60 to 90 days	3 to 6 months ¹¹	not required		
Safety	Thermally stable, fuse recommended	Thermally stable, fuse recommended	Thermally stable	Protection circuit mandatory; stable to 150°C	Protection circuit recommended; stable to 250°C	Protection circuit recommended; stable to 250°C
Commercial use since	1950	1990	1970	1991	1996	2006
Toxicity	Highly toxic, harmful to environment	Relatively low toxicity, should be recycled	Toxic lead and acids, harmful to environment	Low toxicity, can be disposed in small quantities		

Slika 21-8: Primerjava baterij po gostoti energije, notranji upornosti, času polnjenja, itd. Vir: www.cadex.com



Slika 21-9: Levo: primerjava prednosti litijevih baterij pred ostalimi glede na gostoto energije. Desno: napetostne karakteristike $v(t)$ raznih tipov baterij. Vir: T.R. Crompton: Battery reference book, Newnes, 2000.

Batteries News

September 6, 2017

a)

Breakthrough in Magnesium Batteries

b)

Flexible Batteries Powered by IV, Cellular Fluids

c)

Battery-Inspired Strategy for Carbon Fixation

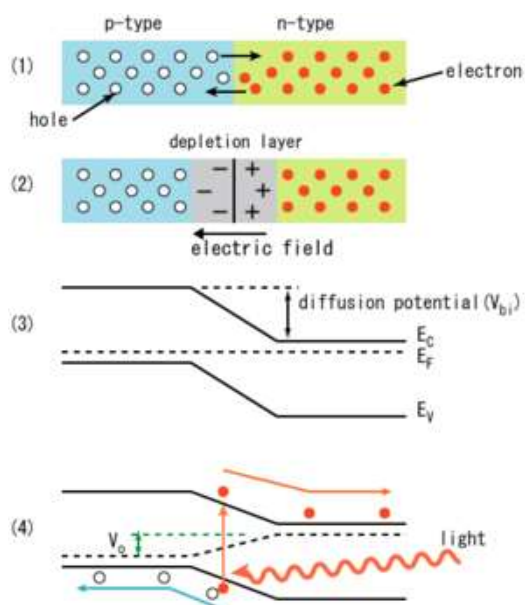
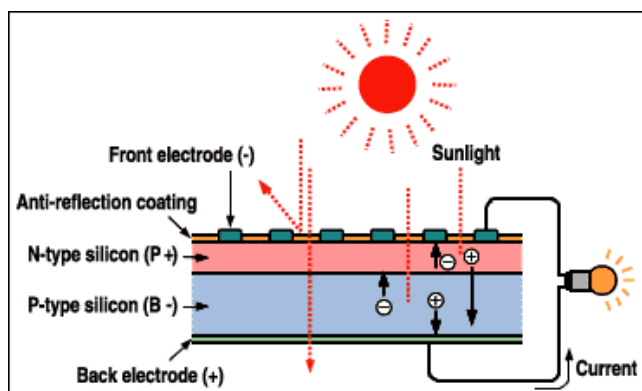
d)

New Battery Is Activated by Your Spit

Razvoj na področju materialov vsako leto prinese nove izboljšave in možnosti uporabe. Slika zgoraj prikazuje novice na strani https://www.sciencedaily.com/news/matter_energy/batteries/ z dne 6 septembra 2017: **a)** Magnezijeve baterije bodo morda zamenjale sedaj najbolj uporabljene litij-ionske, saj niso vnetljive in imajo poleg tega veliko gostoto shranjevanja naboja (400 mAh/g). **b)** Implantabilne baterije so lahko problem, še posebno, če niso biokompatibilne, kot npr. trenutno popularne litij-ionske baterije. Kitajskim znanstvenikom je uspelo izdelati fleksibilno baterijo z raztopino natrijevega sulfata (Na_2SO_4), ki spada med biokompatibilne materiale. Imajo pa te baterije tudi zanimiv stranski učinek, saj pospešujejo pretvorbo raztopljenega kisika v hidroksidne ione, kar pa je lahko zanimivo za biomedicinske aplikacije, kjer se želi z deoksigenacijo doseči spremembo pH-ja in s tem omejevanjem rasti npr. rakavih celic. **c)** ob raziskavah litij-zrak baterij ($\text{Li}-\text{CO}_2$) so Kitajski in Japonski znanstveniki ugotovili, da princip delovanja omogoča pretvarjanje izpustov CO_2 v zraku v trdno obliko – prašne delce. To pa predstavlja možnost izkoriščanja za čiščenje izpustov CO_2 -ja v zraku. **d)** ameriški raziskovalci so razvili baterije, ki delujejo na principu gorivne celice, kjer so "gorivo" biološke celice, ki ob aktivaciji – stiku z elektrolitom v obliki sline generirajo napetost, ki zadostuje za nekaj mikrovatov moči. Možna uporaba je v biomedicinskih "point-of-care" aplikacijah – to so aplikacije, ki omogočajo uporabo neposredno na mestu – ob pacientu. Pa smo spet na začetku – pri Galvaniju in Volti

* SONČNA CELICA

Alternativen vir energije omogoča uporaba sončnih celic. Te postajajo ob zahtevah po uporabi "čistejši" energije vedno bolj zaželeni. Zato si na kratko pogledajmo osnovni princip delovanja. Spodnja slika prikazuje tipično sestavo sončne celice. Osnova je polprevodniška struktura in na njej formiran t.i. pn spoj, na spodnji strani je metalizirana elektroda, na zgornji pa ima antirefleksni film in grabljasto strukturo zgornje elektrode.



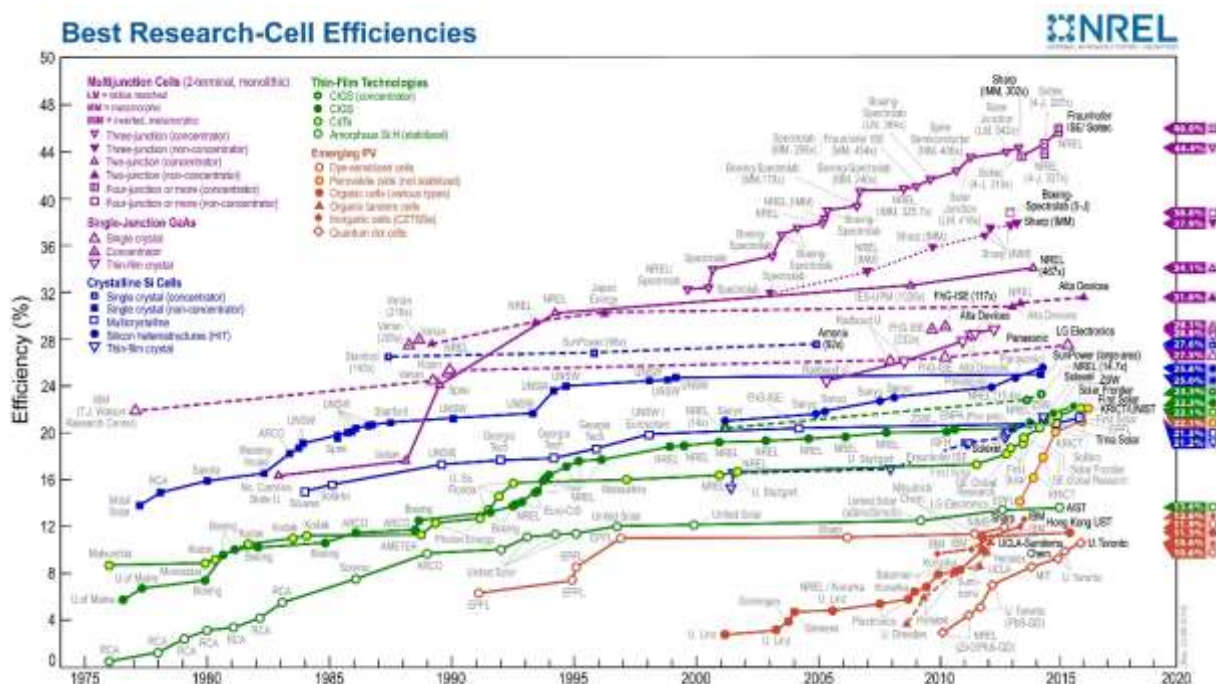
Slika 21-10: Levo: Sončna celica sestavljena iz polprevodniškega pn spoja. Na površini je antirefleksni sloj, ki povečuje absorpcijo svetlobne energije. Desno: ob stiku p in n tipa polprevodnika pride do prerazporeditve nabojev in vgrajenega električnega polja. Sončni žarki imajo dovolj veliko energijo, da povzročijo generacijo para elektron-vrzel. Če se to zgodi v (osiromašenem) področju električnega polja, se naboja ločita, presežki pa povzročijo tok v sklenjenem tokokrogu.

Čist in nedopiran polprevodniški material (recimo Si ali Ge) je izolator. Njegova specifična prevodnost je zelo majhna. Če pa ga dopiramo z določenimi atomi, recimo fosforja (P) ali bora (B), se ti atomi vgradijo v kristalno strukturo silicija. Dopiranje se vrši na zelo visoki temperaturi (čez 1000°C). Z dopiranjem vnesemo v kristalno strukturo silicija atome (primesi), ki s sosednjimi atomi silicija tvorijo nezaključene vezi, kar v končni obliki pomeni, da je v primeru vgrajenega atoma fosforja na mestu fosforja višek elektrona, ki je zelo šibko vezan na atom in je praktično prosto gibljiv. Na ta način lahko s kontrolo množine (koncentracije) dopiranih atomov uravnavamo prevodnost polprevodniškega materiala. Tak tip polprevodnika imenujemo n (negative) tip. Kljub določeni koncentraciji prostih (šibko vezanih) elektronov v snovi, pa je ta material še vedno električno nevtralen. Če podobno dopiramo silicij z atomi bora, tvori atom bora z okoliškimi vezmi silicija nezaključeno vez, kar predstavlja pomanjkanje elektrona, kar imenujemo vrzel. Tak tip polprevodnika imenujemo p (positive) tip. Tudi tak tip polprevodnika je prevoden, le da je mobilnost vrzeli manjša kot mobilnost elektronov. Zanimiv pa je stik dveh polprevodnikov različnega tipa. Ob stiku se tvori t.i. pn spoj. Tu pride zaradi izenačenja potenciala na meji do prerazporeditve nabojev, kar pomeni, da postane del prevodnika na meji brez nosilcev naboja in s tem ne več nevtralen. Ostane vezan naboj, ki ustvari vgrajeno električno polje. To polje kaže od n-tipa proti p-tipu polprevodnika. To vgrajeno polje se veča z večanjem t.i. zaporne napetosti, torej tedaj, ko je na zunanji sponki n-tipa bolj pozitiven potencial kot na zunanji sponki p-tipu polprevodnika. V tem primeru skozi prevodnik teče le majhen,

zaporni tok. V nasprotnem primeru pa zunanja napetost povzroči zmanjšanje vgrajenega polja in poveča prevodno progo. Ko zunanji vir vgrajeno polje (pri pn diodi iz Si pri cca. 0,7 V) izniči, postane pn spoj prevoden in tok hitro (eksponentno) naraste. pn dioda je tipičen nelinearen element in osnovni element vseh polprevodniških struktur.

Za delovanje sončne celice pomembna generacija parov elektron-vrzel. Če ta generacija, povzročena od absorbcije fotonov, nastopi v osiromašenem področju (kjer je vgrajeno polje), to polje potegne elektrone v nasprotni smeri polja, vrzeli (pozitivni naboj) pa v smeri polja. Ti naboji zmanjšajo vgrajeno polje in hkrati povzročijo presežek negativnih nabojev v n-tipu in presežek vrzeli v p-tipu polprevodnika. Povzročijo neravnovesje, ki ga lahko zmanjšamo, če tako strukturo kratko sklenemo oziroma, če nanjo priključimo določeno breme. Skozi breme steče tok, ki povzroči ponovno vzpostavitev ravnovesja. Če je fotogeneracija konstantna, je konstanten tudi tok, ki teče skozi priključeno breme. Dobimo generator toka.

Razvoj sončnih celic ne zastane. Obstaja mnogo različnih materialov (monokristalne, amorfne, polikristalne, ...), ki jih je mogoče uporabiti kot osnovo za sončno celico (glej spodnjo sliko). Bistveno za splošno rabo pa je pravo razmerje med ceno in izkoristkom celice. V iskanju celice s čim večjim izkoristkom je bil nedavno (2018) udeležen tudi Laboratorij za fotovoltaike in optoelektroniko naše fakultete, saj je [podoktorski študent](#) sodeloval pri razvoju heterospojnih tandemskih celic z izkoristkom do 25,5%.



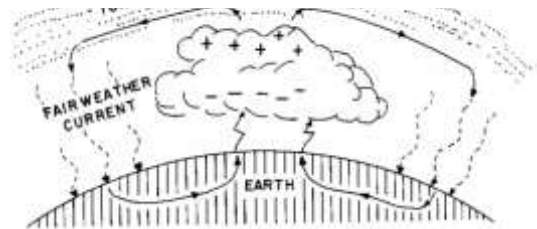
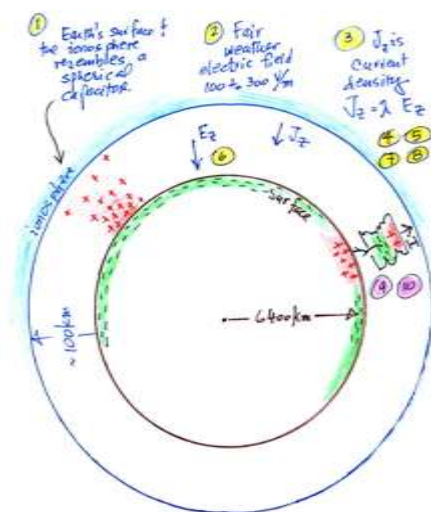
Slika prikazuje izboljšave izkoristka različnih tipov sončnih celic s časom.

* ATMOSFERSKA ELEKTRIKA

Ene prvih eksperimentov z atmosfersko elektriko je izvajal Benjamin Franklin. Morda najbolj znanj je njegov eksperiment z zmajem, ki ga je spuščal med nevihtami in na ključu, ki je bil obešen na konec vrvice zaznaval iskrenje. S tem je dokazal, da gre pri atmosferskih pojavih za električne pojave. Iz te ugotovitve sledijo tudi njegovi predlogi zaščite pred udarom strel, na primer z ozemljitvijo (slika desno). Glede na zgodovino elektrotehnike pa je njegov velik prispevek, da je razvrstil električni naboj na le dve vrsti, na pozitivnega in negativnega. Ugotovil je tudi, da je naboj na oblakih negativen, na površini zemlje pa pozitiven. Ta ugotovitev se sklada tudi z današnjimi meritvami, ki pa kažejo, da to večinoma velja le tedaj, ko je nad površino zemlje naelektrjen oblak, v običajnih vremenskih razmerah (fair weather conditions) pa je površina zemlje negativno naelektrjena.

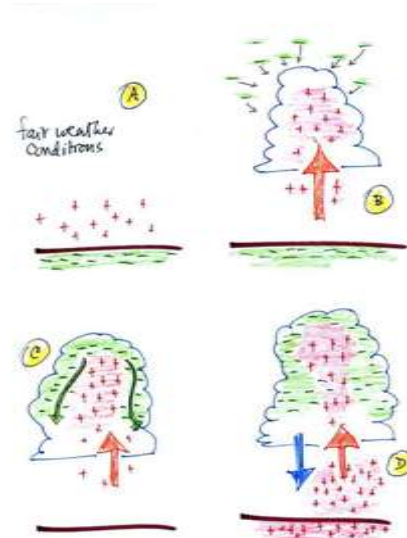


Električni pojavi v atmosferi so tako zapleteni, da se še dandanes porajajo različne teorije, še posebno o tem, kako se naelektrujejo in razelektrujejo oblaki. Od obširne literature bi morda veljalo zainteresiranega bralca usmeriti na lekcije [E. Philip Kriderja iz Univerze v Arizoni](#) (iz njih so potegnjene slike) ali pa na knjigo Atmospheric Electrostatics Larsa Wählunga (dostopna na spletu). Slika na desni (iz prve lekcije) opisuje osnovne električne pojave v atmosferi: 1) zemlja deluje kot sferični kondenzator; zemlja je pretežno negativno naelektrjena, atmosfera je pretežno pozitivno naelektrjena, nosilci pozitivnega naboja so aerosoli (majhni delci v zraku, ki so slabo mobilni), 2) na površini zemlje je v običajnih razmerah polje velikosti 100-300 V/m usmerjeno v smeri zemlje, 3) električno polje deluje na naboje v atmosferi, kar zaznamo kot tok pozitivnih nabojev v smeri zemlje. Če je prevodnost atmosphere ocenjena na $2 \cdot 10^{-14} \text{ 1}/\Omega\text{m}$ in je polje na površini zemlje 200 V/m, je gostota toka $J = \gamma E = 4 \cdot 10^{-12} \text{ A/m}^2$. Če to pomnožimo s površino zemlje dobimo celoten tok na površino zemlje cca 2000 A. Gostoto naboja na zemlji dobimo iz $\sigma = \epsilon_0 E \cong 2 \cdot 10^9 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$, celoten naboj je tako $Q = \sigma A = 10^6 \text{ C}$. Površina zemlje se torej očitno s časom razelektruje in to s tokom 2000 A.

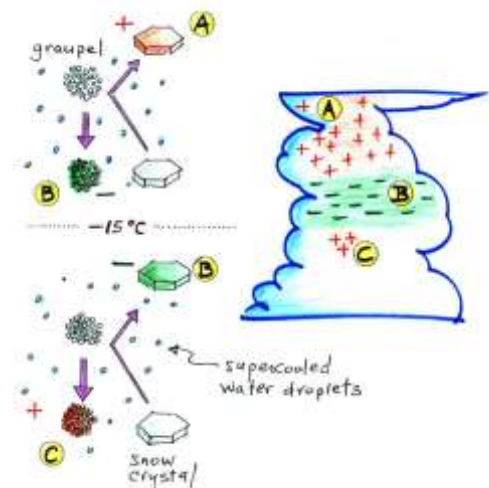


Torej bi se morala razelektriti v času (iz $Q = I \cdot t$ sledi) $t = \frac{Q}{I} = \frac{10^6 \text{ C}}{2000 \text{ A}} = 500 \text{ s}$. To se očitno ne zgodi, torej mora biti nek mehanizem stalnega elektrenja zemljinega ozračja oziroma neka generatorska sila, ki to omogoča. (Kot vemo iz teorije, to ne more biti elektrostatično polje). Ena od možnosti je, da se to dogaja ob pojavu strele, ko se razelektri naboj med oblakom in zemljo, se v resnici tudi naelektri atmosfera. To teorijo prikazuje slika C.T.R. Wilson-a iz leta 1920 (C. Saunders, [Charge Separation Mechanisms in Clouds](#)). Negativni naboj na spodnjem delu oblaka se v obliki strele

razelektri na površini zemlje, ki je zaradi elektrostatske indukcije pozitivno naelektrena. Ta t.i. konvektivna teorija izhaja iz vedenja, da nad površino zemlje prevladujejo pozitivno naelektreni delci, ki se v običajnih vremenskih razmerah s konduktivnim tokom razelektrujejo na površino zemlje, ob nastanku oblakov pa jih konvekcija dvigne v oblake. Tam se pritrdijo na delce v oblaku, hkrati pa ti pozitivni naboji pritegnejo negativne naboje iz ozračja, ki se kot koprena navlečejo okoli pozitivnih nabojev. Ta negativni naboj se že bolj približa površini zemlje in še poveča količino pozitivnih nabojev v ozračju pod oblakom in njihovo dodatno konvekcijo.

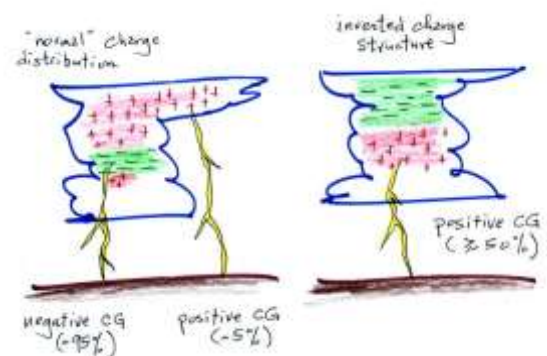


Poleg te teorije je trenutno najbolj uveljavljena t.i. ne-indukcijska teorija znan tudi kot (Reynolds, Brook, Gourley proces). Ta izhaja iz vedenja, da se v nevihtnih oblakih združujejo ledena zrnca v večje delce (sodra), ki zaradi teže padajo proti tlem, ob tem pa trkajo z drugimi zmrznjenimi delci, pri čemer (triboelektrenje) pride do prerazporeditve naboja. Pri temperaturi pod -15 stopinj naj bi se sodra naelektrila bolj negativno in se zadrževala v sredini oblaka, pozitivno naelektrene snežinke pa naj bi prevladovale v zgornjem delu oblaka. Pri temperaturi večji od -15 stopinj pa naj bi bil proces naelektritve obrnjen.



Iz tega izhaja več načinov razelektritve. Naelektrenost oblakov ima namreč lahko različne oblike; običajno je dipolarna (ločena + in - področja), lahko pa tudi tripolarna ali še bolj kompleksna.

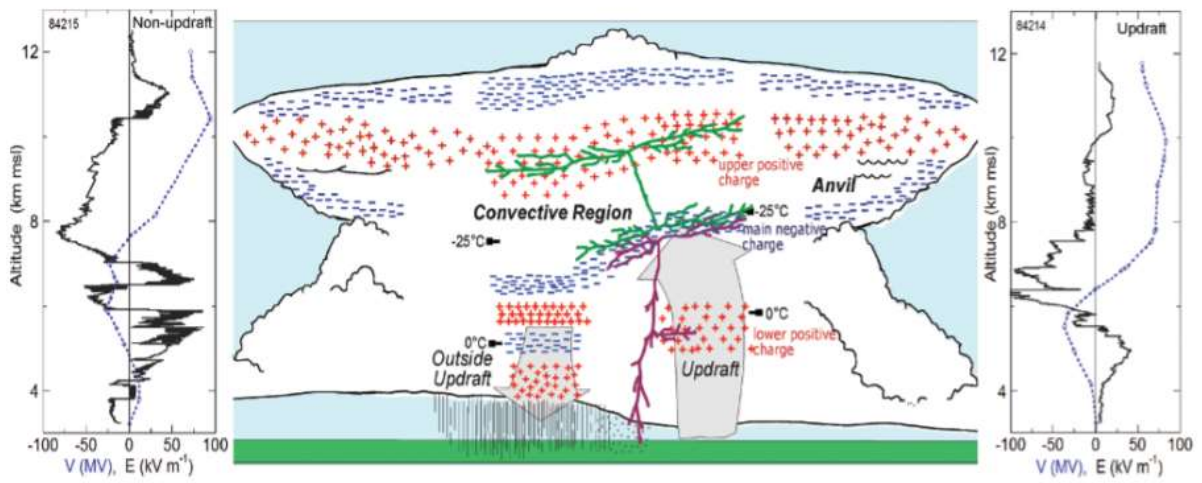
Večina razelektritev je "negativnih", to pomeni, da se razelektri negativni naboj v oblaku. Občasno pa je lahko razelektritev tudi "pozitivna", ko se razelektri pozitivni naboj v oblaku. Slednje naj bi bile pogosto po velikosti toka celo mnogo večje od negativnih.



Ugotavljanje porazdelitve naboja v oblakih ni ravno enostavno. Običajno se v ta namen uporablja letala ali balone, ki imajo ustrezno merilno opremo. Porazdelitev naboja v oblaku se ne meri neposredno, pač pa se jo določa posredno, preko merjenja električnega polja.

Slika spodaj prikazuje še nekoliko bolj kompleksno obliko porazdelitve nabojev znotraj nevihtnega oblaka (Stolzenburg M., Marshall T.C. (2009) Electric Field and Charge Structure in Lightning-Producing Clouds v knjigi Lightning: Principles, Instruments and Applications. Springer). Na desni je izmerjena električna poljska jakost na področju vzgornika (updraft) in iz nje izpeljana porazdelitev potenciala (integral polja). Porazdelitev naboja sledi iz uporabe Gaussovega zakona. Kot zanimivost,

se največje izmerjene vrednosti polja znotraj nevihtnega oblaka gibljejo okoli vrednosti 300 kV/m, kar pa je 10x manj, kot je prebojna trdnost zraka (3000 kV/m), ki naj bi bila potrebna za iniciacijo preboja – torej začetek nastanka strele.... Torej, raziskovanja atmosfere elektrike še zdaleč ni konec.



3 DEL: ENOSMERNA VEZJA

22. Enosmerna vezja – osnovni zakoni

Vsebina poglavja: elementi enosmernih vezij, Ohmov zakon, Kirchoffova zakona.

Enosmerna vezja so vezja, v katerih so vsi viri konstantni – enosmerni. Načeloma ta vezja lahko vsebujejo tudi kondenzatorje in tuljave, vendar pri analizi enosmernih vezij v stacionarnem stanju smatramo, da toka skozi kondenzator ni, medtem ko pri tuljavi upoštevamo le njeno ohmsko upornost. Zato bomo v poglavjih, namenjenih enosmernim vezjem, analizirali le vezja, ki so sestavljena iz uporov in tokovnih in napetostnih virov. V ta namen potrebujemo (matematično) povezavo med tokom in napetostjo na elementih vezja (uporih) ter splošne lastnosti toka in napetosti pri enosmernih signalih. Vse te zakone smo že spoznali v poglavjih iz elektrostatike in tokovnega polja, zato jih bomo v tem poglavju le na kratko povzeli.

1. KIRCHOFFOV ZAKON

Prvi Kirchoffov zakon sledi iz zakona o ohranitvi naboja. Če v določeno (zaključeno) telo pritekajo naboji in se v njem ne kopičijo, morajo v enaki množini tudi iz njega izhajati. Pri tokovnem polju smo to zapisali v obliki $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$, če pa razdelimo površino telesa na N delov iz katerega izhaja N tokov mora veljati

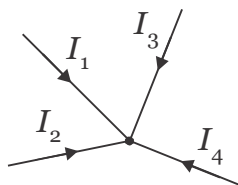
$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_N = 0 \quad (22.1)$$

ali v bolj strnjeni obliki

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0. \quad (22.2)$$

Pri tem ne pozabimo, da imajo tokovi, ki odtekajo iz vozlišča, negativen predznak.

Ta zapis imenujemo prvi Kirchoffov zakon. Če telo zmanjšamo v »točko«, dobimo stik tokovodnikov v spojišče. Za vezja 1. Kirchoffov zakon opišemo kot: **vsota vseh tokov v spojišče (ali iz spojišča) je enaka nič.**



Slika 22-1: Vsota tokov v spojišče mora biti enaka nič: 1 KZ.

Primer uporabe 1. Kirchoffovega zakona:

V spojišče so povezani štirje vodniki. Po prvem priteka tok 4 A, po drugem odteka tok 2 A in v tretjem priteka tok 1 A. Določimo tok v četrtem vodniku.

Izračun: Velja $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ od koder sledi $I_4 = -(I_1 + I_2 + I_3) = -(4A - 2A + 1A) = \underline{\underline{-3A}}$.

2. KIRCHOFFOV ZAKON

Drugi Kirchoffov zakon sledi iz zakona o nevrtničnosti oz. potencialnosti električnega polja, od koder sledi, da je integral električnega polja (oz. dela električnih sil) po zaključeni poti enak nič: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$.

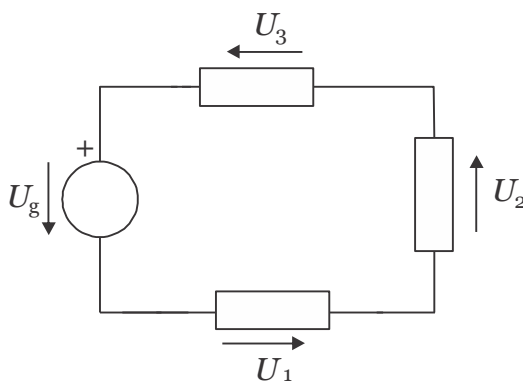
Če ta integral zapišemo v obliki delnih padcev napetosti za M odsekov, mora veljati

$$U_1 + U_2 + \dots + U_M = 0. \quad (22.3)$$

Ta zapis velja po poljubni zaključeni poti, torej tudi znotraj zaključene poti v vezju, kjer je potrebno upoštevati padce napetosti na vseh elementih vzdolž zaključene poti. V strnjeni obliki zapišemo 2. Kirchoffov zakon v obliki

$$\sum_{i=1}^M U_i = 0. \quad (22.4)$$

In z besedami: vsota padcev napetosti v (zaključeni!) zanki je enaka nič.



Slika 22-2: Idealni napetostni generator in zaporedno vezani upori v zanki. Po 2. Kirchoffovem zakonu mora veljati, da je vsota vseh padcev napetosti v zanki enaka nič

$$(U_g + U_1 + U_2 + U_3 = 0).$$

Primer uporabe 2. Kirchoffovega zakona:

Na enosmerni vir napetosti 12 V priključimo dva upora. Na enem je padelec napetosti 4 V. Kolikšna napetost je na drugem uporu?

Izračun: $U_2 = U_g - U_1 = 12\text{V} - 4\text{V} = \underline{\underline{8\text{V}}}$.

OHMOV ZAKON

Ohmov zakon opisuje zvezo med tokom in napetostjo pri konduktivnem prevajanju toka v snoveh. Pri obravnavi tokovnega polja smo ugotovili, da se naboji v snovi gibljejo z neko povprečno hitrostjo, kar se odraža v linearni povezavi med električno poljsko jakostjo in gostoto toka. To zapišemo v obliki $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, kjer je γ (električna) specifična prevodnost. Ta zapis smo imenovali Ohmov zakon (v diferencialni obliki). Z integracijo električne poljske jakosti vzdolž smeri gostote toka v elementu lahko izrazimo zvezo med tokom in napetostjo na elementu v obliki

$$U = RI, \quad (22.5)$$

kar je običajen zapis Ohmovega zakona za vezja. * (Pri obravnavi v nestacionarnih razmerah običajno za tok in napetost uporabljamo manjshne črke: $u = Ri$.)



Slika 22-3: Levo: tok in napetost na upor; Desno: grafično prikazana karakteristika upora.

Analogno izrazu upornost lahko uporabimo tudi izraz prevodnost. Velja $G = 1/R$. Enota za prevodnost je S (Siemens). Ohmov zakon bi tako lahko pisali tudi v obliki $I = U/R$ ali pogosto kot $I = GU$. Koristno se je spomniti še izraza za upornost ravnega vodnika specifične prevodnosti γ ,

dolžine l , s presekom A : $R = \frac{l}{\gamma A}$.

OZNAČEVANJE SMERI TOKOV IN NAPETOSTI NA ELEMENTIH VEZJA

Na vseh elementih vezja imamo določeno smer napetosti in toka. Na viru označimo smer napetosti od sponke plus proti sponki minus, na bremenu pa lahko smer toka ali napetosti določimo poljubno. Ne pa tudi obeh. Smer toka na bremenu določa tudi smer napetosti in obratno ($U = IR$).

* Zvezo med napetostjo in tokom na določenem elementu vedno lahko poiščemo, ni pa vedno linearna. V elektrotehniki pogosto uporabljamo elemente, kot so diode in tranzistorji. Pri teh ravno izkoriščamo njihove nelinearne lastnosti med tokom in napetostjo za usmerjanje, ojačanje ipd. Ohmov zakon v smislu linearne zveze med tokom in napetostjo je omejen na tiste elemente, kjer pač velja linearnost – to pa so linearni upori, ki jih bomo uporabljali pri analizi enosmernih vezij. Omejenost Ohmovega zakona ne sme zmanjšati njegovega zgodovinskega in praktičnega pomena. Kar se tiče zgodovine elektrike se je potrebno zavedati, da so bili sprva pojmi kot so naboj, tok in napetost še popolnoma nejasni in so različni raziskovalci uporabljali različne pojme. Ohm je na tem področju razjasnil razlike med napetostjo in tokom. Poleg tega seveda zvezo med tokom in napetostjo v elektrotehniki zelo pogosto uporabljamo in je za »enostavne« elemente pogosto upravičena linearna zveza.

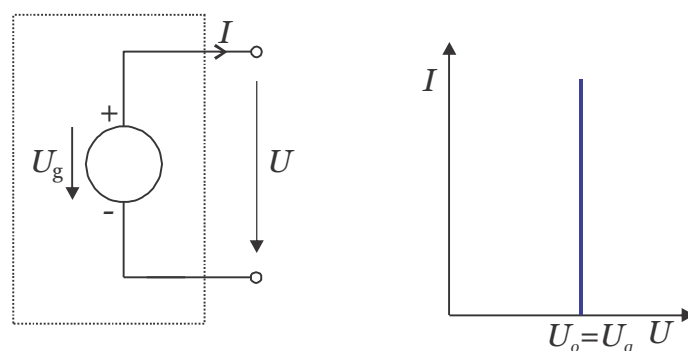
23. ELEKTRIČNI VIRI

Vsebina poglavja: idealni in realni napetostni vir, idealni in realni tokovni vir, delovna točka.

Ločimo dva vira tipa virov: napetostne in tokovne. Obravnavali bomo idealni tokovni in napetostni vir ter realni tokovni in napetostni vir. Ugotovili bomo, da sta realna vira ekvivalentna, če imata enaki I - U karakteristiki.

IDEALNI NAPETOSTNI VIR

Idealni napetostni vir zagotavlja na zunanjih sponkah konstantno napetost neodvisno od obremenitve. Tej napetosti rečemo tudi napetost odprtih sponk oziroma napetost prostega teka. I - U karakteristiko idealnega napetostnega vira zapišemo kot $U = U_0$.



Slika 23-1: Simbol za idealni napetostni vir, napetost odprtih sponk in karakteristika vira.

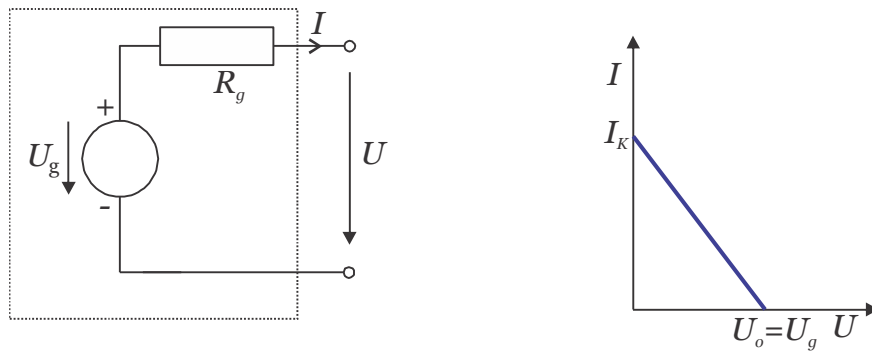
Problem predstavitve (uporabe) idealnih virov je v tem, da je tok kratkega stika pri napetostnem viru neskončen (ker je notranja upornost idealnega napetostnega vira enaka nič). V realnih razmerah je potrebno upoštevati še notranjo upornost vira. Za tak vir uporabimo izraz realen vir, kljub temu, da je v realnosti lahko električna karakteristika vira v praksi še bolj zapletena.

REALNI NAPETOSTNI VIR

Napetost na zunanjih sponkah idealnega napetostnega vira je konstantna - neodvisna od priključenega bremena. Takih virov v praksi seveda ni. Če na realni napetostni vir priključimo breme z majhno upornostjo, se napetost na zunanjih sponkah vira zmanjša, pogovorno rečemo, da se »sesede«. Vsak vir ima namreč določeno notranjo upornost in ob priključitvi vira na breme steče tok, ki povzroči padec napetosti na tako bremenu, kot tudi na notranji upornosti vira. Kar tudi pomeni, da na zunanjih sponkah vira nimamo več napetosti odprtih sponk, pač pa napetost, ki je zmanjšana za padec napetosti na notranji upornosti vira. Realni napetostni vir ponazorimo z zaporedno vezavo idealnega napetostnega vira in zaporedno vezanega upora.

Če na zunanjih sponkah realnega napetostnega vira ni priključeno breme, je seveda tok enak nič in ni padca napetosti na notranji upornosti vira. Napetost na priključnih sponkah je enaka napetosti odprtih sponk: $U = U_g = U_0$. Če pa priključimo breme, se napetost na priključnih sponkah zmanjša za padec napetosti na notranji upornosti vira:

$$\boxed{U = U_g - IR_g} \text{ Karakteristika realnega napetostnega vira} \quad (23.1)$$



Slika 23-2: realni napetostni vir: levo) električna shema, desno) karakteristika vira.

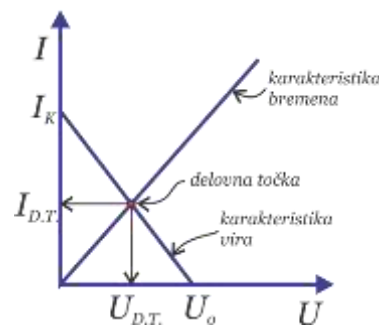
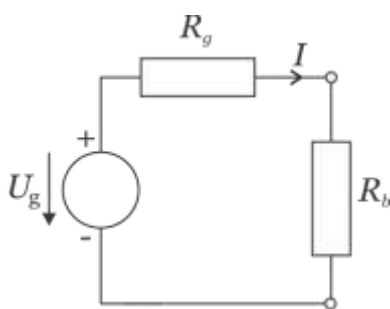
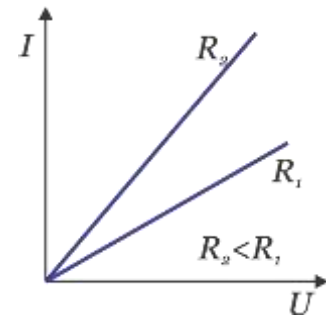
To enačbo lahko prikažemo tudi grafično in ji rečemo *karakteristika vira*. Na abscisi označimo napetost, na ordinati pa tok (lahko tudi obratno). Enačba predstavlja enačbo premice, ki jo najlažje določimo v točkah, kjer premica seka napetostno in tokovno os. Ko je tok enak nič, je $U = U_o = U_g$, to je stanje odprtih sponk, napetosti pa rečemo **napetost odprtih sponk**. Ko pa je napetost enaka nič, je tok enak $I_k = U_g / R_g$. To pa je stanje kratkega stika, toku rečemo **tok kratkega stika ali kratkostični tok**. Med točkama kratkega stika in napetostjo odprtih sponk mora potekati premica, ki ji rečemo **karakteristika realnega napetostnega vira**.

BREME, PRIKLJUČENO NA REALNI NAPETOSTNI VIR

Če na realni napetostni vir priključimo breme (upor), je njegova delovna točka (napetost in tok skozi breme) določena z velikostjo upornosti bremena. Matematično dobimo delovno točko tako, da združimo karakteristiki bremena in vira. Dobimo $R_b I = U_g - I R_g$. Tok v

vezju bo torej $I = \frac{U_g}{R_g + R_b}$, napetost na bremenu pa $U = \frac{U_g}{R_g + R_b} R_b$.

Delovno točko lahko določimo tudi grafično. Če je breme upor, je njegova (matematična) karakteristika $U = R_b I$ in predstavlja enačbo premice z eno točko v izhodišču. Naklon premice predstavlja upornost. Velik naklon predstavlja majhno upornost, majhen naklon pa veliko upornost. Če narišemo to zvezo v graf poleg karakteristike realnega vira, dobimo v presečišču delovno točko.



Slika 23-3: Levo: shema realnega napetostnega vira s priključenim bremenom. Desno: karakteristika realnega napetostnega vira in karakteristika priključenega bremena. V presečišču dobimo delovno točko.

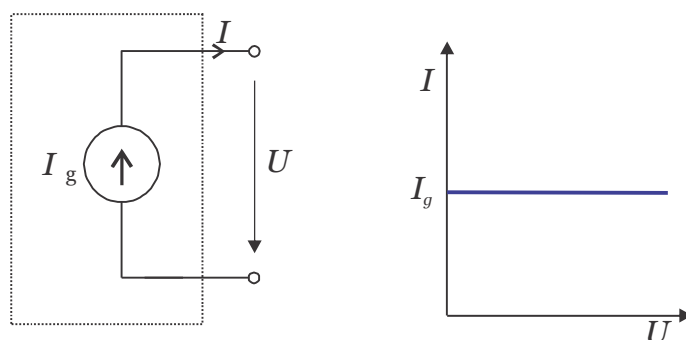
Primer izračuna delovne točke:

Na 9 V baterijo z notranjo upornostjo 1Ω priključimo breme z upornostjo 5Ω . Določite napetost in tok na bremenu grafično in analitično.

$$\text{Izračun: } I_{D.T.} = \frac{U_g}{R_g + R_b} = \frac{9 \text{ V}}{1 \Omega + 5 \Omega} = 1,5 \text{ A}, \quad U_{D.T.} = 1,5 \text{ A} \cdot 5 \Omega = 7,5 \text{ V}.$$

IDEALNI TOKOVNI VIR

Idealni tokovni vir na svojih sponkah zagotavlja tok, ki je neodvisen od priključitve bremena. Matematično zapišemo karakteristiko takega vira kot $I = I_0$. Če sponke takega vira kratko sklenemo, bo tekel tok kratkega stika, kar predstavlja tudi nazivni tok tega vira.



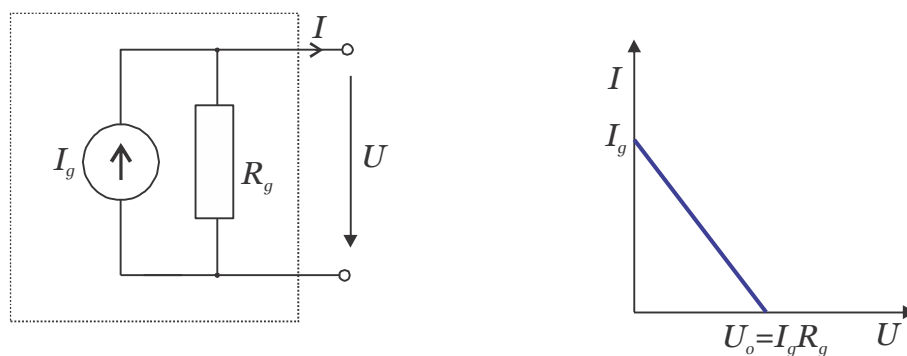
Slika 23-4: Levo) simbol za idealni tokovni vir. Desno) karakteristika idealnega tokovnega vira.

REALNI TOKOVNI VIR

Je sestavljen iz idealnega tokovnega vira s tokom I_g in vzporedno vezane upornosti R_g . Če ni priključenega bremena, je na zunanjih sponkah napetost enaka $U = R_g I_g$. Če na zunanji sponki priključimo breme (upor R_b), se tok skozi breme zmanjša za tok skozi notranjo upornost vira:

$$\boxed{I = I_g - U / R_g}. \text{ Karakteristika realnega tokovnega vira} \quad (1.2)$$

Ta enačba predstavlja (matematično) karakteristiko realnega tokovnega vira, ki jo prav tako lahko grafično prikažemo. Pri kratkem stiku je napetost na bremenu enaka nič, tok pa je kar enak toku idealnega tokovnega vira: $I(U = 0) = I_k = I_g$. Pri odprtih sponkah pa je tok I enak nič, napetost pa je enaka napetosti odprtih sponk $U_o = I_g R_g$. Če karakteristiko narišemo kot U - I diagram, dobimo zopet premico. V presečišču s karakteristiko bremena pa delovno točko.



Slika 23-5: Realni tokovni vir: levo) shema, desno) karakteristika realnega tokovnega vira.

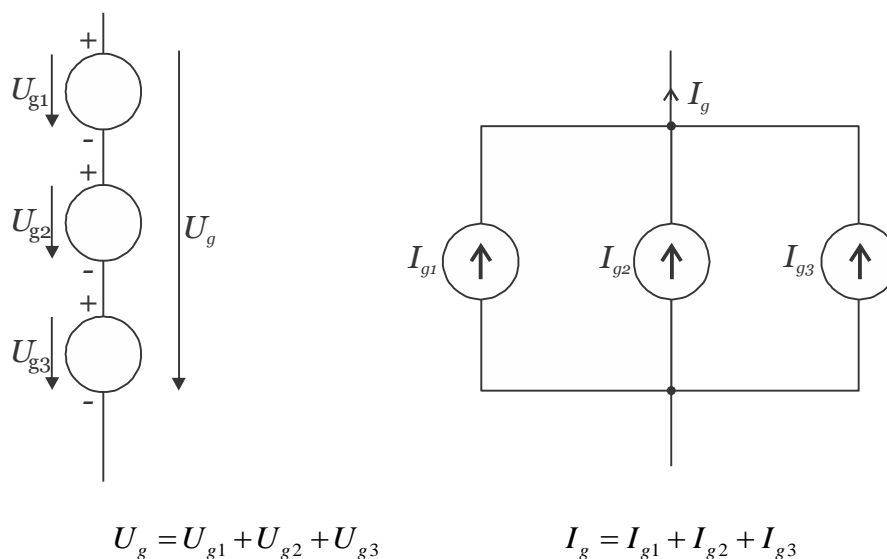
Ugotovimo lahko, da se karakteristika realnega tokovnega vira lahko prilega karakteristiki realnega napetostnega vira. V tem smislu sta to (matematično gledano) dva ekvivalentna vira. Če primerjamo karakteristiki ugotovimo, da bo analogija veljala tedaj, ko bo $U_g = I_g R_g$.

Vprašanje: Kdaj torej govorimo o napetostnem in kdaj o tokovnem viru? Ko imamo vir z zelo veliko notranjo upornostjo nam le ta zagotavlja dokaj konstanten tok (dokler je upornost bremena dosti manjša od notranje upornosti vira), če pa je notranja upornost vira zelo majhna, nam to na zunanjih sponkah zagotavlja konstantno napetost.

VZPOREDNA IN ZAPOREDNA VEZAVA VIROV

Enako kot upore lahko zaporedno vežemo tudi napetostne vire in s tem dosežemo višjo skupno napetost na zunanjih sponkah. To je tudi običajno narejeno pri mnogih elektronskih aparatih, kjer je na primer za delovanje naprave pri 6 V potrebno povezati zaporedno štiri 1,5 voltne baterije.

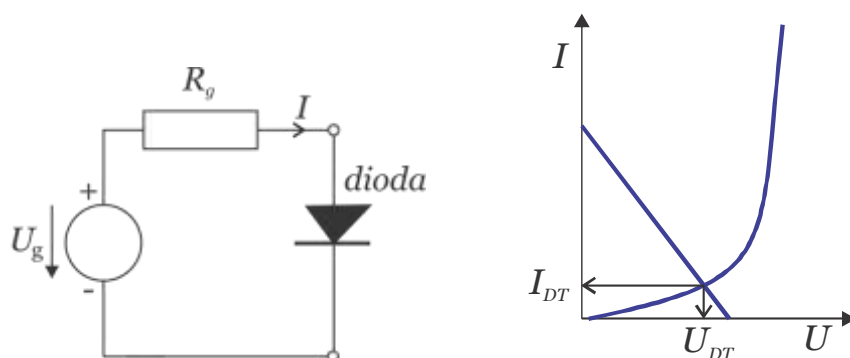
Podobno lahko z vzporedno vezavo tokovnih virov dosežemo vir z večjim nazivnim tokom.



Slika 23-6: Zaporedna vezava napetostnih virov in vzporedna vezava tokovnih virov.

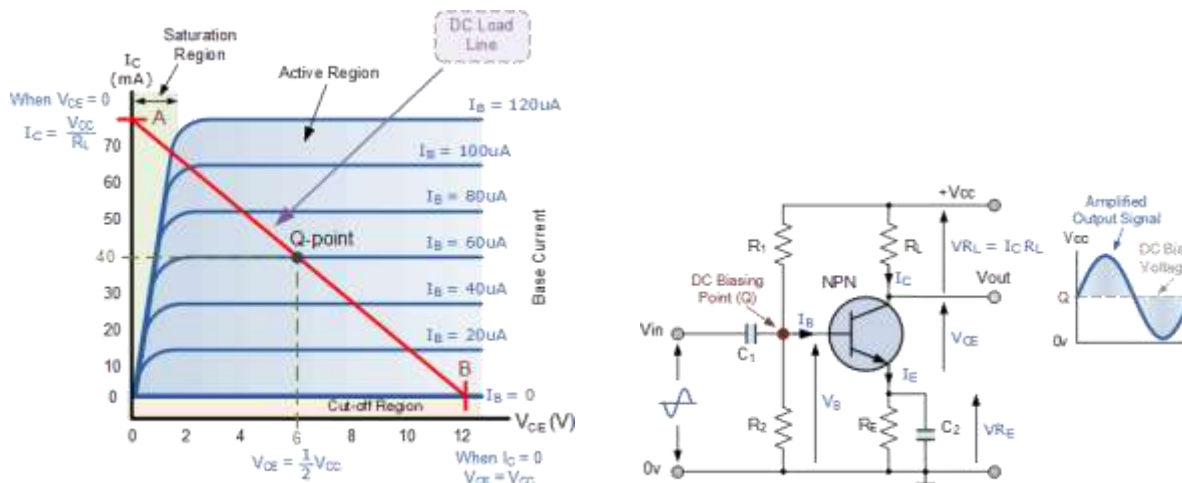
** DOLOČITEV DELOVNE TOČKE PRI NELINEARNEM BREMENU

Če je napetost na sponkah bremena neka nelinearna funkcija toka skozi breme, je pogosto analitičen izračun delovne točke otežen. V teh primerih je posebno primeren grafičen način določanja delovne točke. Tipičen primer je na primer dioda, element, ki ima nizko upornost pri pozitivnih in zelo visoko pri negativnih napetostih (ali obratno, odvisno od priključitve). Pri diodi je v prevodni smeri tok eksponentno odvisen od napetosti: $I = I_0 e^{kU}$, v zaporni smeri pa je tok do določene napetosti majhen, če pa je ta napetost presežena, pride do preboja. Ob preboju tok skozi diodo močno naraste in lahko pride do trajne poškodbe ali uničenja elementa. Delovno točko diode priključene na realni napetostni vir določimo grafično tako, da določimo točko preseka nelinearne karakteristike bremena (diode) in linearne karakteristike realnega vira.



Slika 23-7: Primer določanja delovne točke pri priključitvi diode na realni napetostni vir.

Na enak način lahko določimo tudi delovno točko tranzistorja. Na sliki 23.9 je prikaz tipične vezave npn tranzistorja in grafičen način določitve delovne točke (napetost in tok na emiterju) v odvisnosti od baznega toka.



Slika 23-8: Primer določanja delovne točke pri tranzistorski vezavi. Nelinearne so karakteristike tranzistorja, ki so prikazane za različne vrednosti baznega toka. (Vir: http://www.electronicstutorials.ws/transistor/tran_2.html)

24. OSNOVNA ELEKTRIČNA VEZJA

Vsebina poglavja: zaporedna in vzporedna vezava uporov, napetostni in tokovni delilnik, mostično vezje, transformacija zvezda – trikot, temperaturna odvisnost upornost.

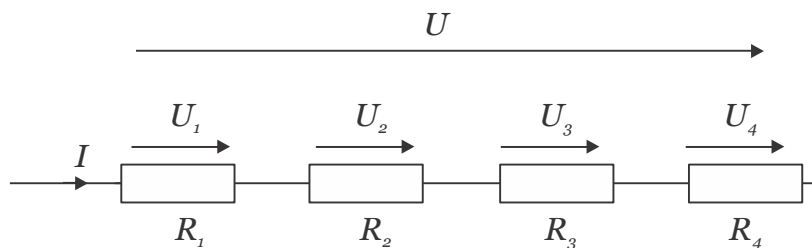
1. ZAPOREDNA VEZAVA UPOROV

Če so zaporedno vezani upori priključeni na vir napetosti, se napetost porazdeli na posamezne upore:

$U = U_1 + U_2 + \dots + U_N = \sum_{i=1}^N U_i$. Ker pa skozi vse upore teče skupen (isti) tok, velja

$$U = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_N = I(R_1 + R_2 + \dots + R_N) = I \sum_{i=1}^N R_i = IR_{nad} \quad (24.1)$$

Nadomestna upornost zaporedno vezanih uporov je seštevek posameznih upornosti: $R_{nad} = \sum_{i=1}^N R_i$.



Slika 23-9: Zaporedna vezava uporov.

Primer izračuna zaporedne vezave uporov:

Določimo nadomestno upornost zaporedne vezave uporov z upornostmi 30 Ω, 100 Ω in 1 kΩ.

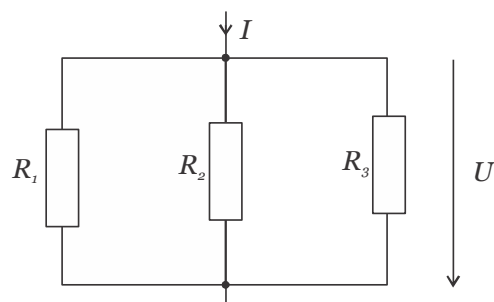
Izračun: $R_{nad} = R_1 + R_2 + R_3 = 1130 \Omega$.

2. VZPOREDNA VEZAVA UPOROV

Skupni tok vzporedno vezanih uporov je enak vsoti tokovi skozi posamezne upore $I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$.

Ker so vzporedno vezani upori na skupni (enaki) napetosti, velja

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_N} = U \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} = \frac{U}{R_{nad}} \quad (24.2)$$



Slika 23-10: Vzporedno vezane upornosti.

Vzporedno vezane upore lahko torej nadomestimo z nadomestno upornostjo, za katero velja $\frac{1}{R_{nad}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$. Če to izrazimo s prevodnostmi dobimo $G_{nad} = \sum_{i=1}^N G_i$. Pri vzporedni vezavi uporov tvorimo torej nadomestno upornost s seštevanjem njihovih prevodnosti, pri zaporednih pa upornosti.

Primer izračuna vzporedne vezave uporov:

Določimo nadomestno upornost vzporedne vezave uporov z upornostmi 30 Ω, 100 Ω in 1 kΩ.

Izračun: $G_{nad} = 1/30 \text{ S} + 1/100 \text{ S} + 1/1000 \text{ S} = 0,044 \text{ S}$, kar ustreza $R_{nad} = 22,556 \text{ Ω}$.

3. NAPETOSTNI DELILNIK

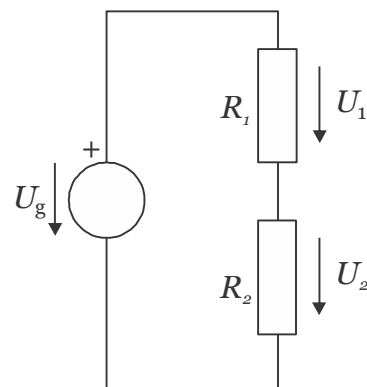
Napetostni delilnik dobimo tako, da na napetostni vir priključimo dva zaporedno vezana upora in »odvzemamo« napetost na enem od uporov.

Slika 23-11: Napetostni delilnik. Zanima nas napetost na uporu R_2 .

Vzemimo, da nas zanima napetost na uporu R_2 . Tok skozi zaporedno vezana upora je $I = \frac{U_g}{R_1 + R_2}$, od koder je

$U_2 = IR_2 = \frac{U_g}{R_1 + R_2} R_2 = U_g \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Dobili smo načbo, ki jo v elektrotehniki zelo pogosto uporabljamo, zato si jo velja vtisniti v spomin. Ponovimo končni rezultat:

$$U_2 = U_g \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (24.3)$$



Primer izračuna napetostnega delilnika:

Iz napetostnega vira z napetostjo 12 V želimo s pomočjo napetostnega delilnika dobiti napetost 9 V, pri čemer tok skozi upore ne sme preseči vrednosti 1 mA.

Izračun: Veljati morda $I = \frac{U_g}{R_1 + R_2} < 1 \text{ mA}$ oziroma $R_1 + R_2 > 12 \text{ kΩ}$. Če izberemo npr.

$R_1 + R_2 = 20 \text{ kΩ}$, bo tok skozi upora 0,6 mA, od koder dobimo $R_2 = 15 \text{ kΩ}$.

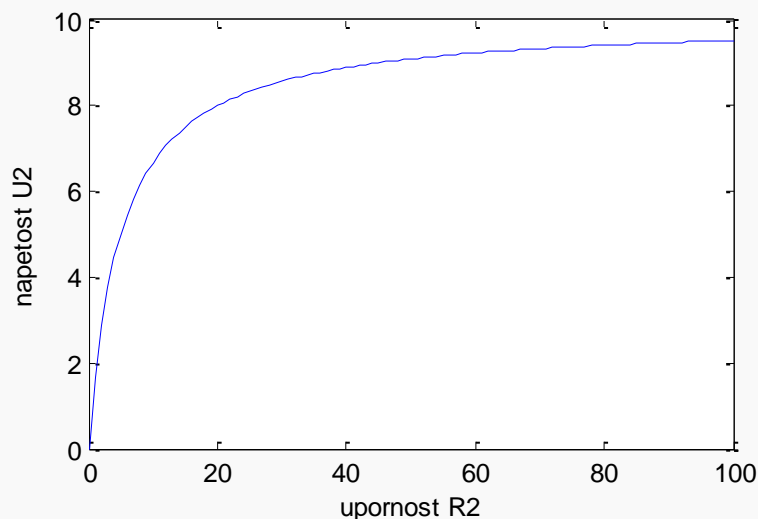
Poleg matematične oblike je zelo pomembno, da si predstavljamo odvisnost napetosti na uporu od vrednosti uporov tudi grafično. Očitno napetost na uporu R_2 ni linearno odvisna od vrednosti upornosti R_2 . Kako bi si lahko skicirali potek odvisnosti napetosti na R_2 od upornosti R_2 ? Tako, da poskušamo poenostaviti enačbo z razmislekom, kakšna bi bila oblika enačbe za zelo majhne R_2 in zelo velike R_2 :

- pri R_2 , ki so mnogo manjši od R_1 (matematično $R_2 \ll R_1$) bo R_2 zanemarljivo velik v primerjavi z R_1 in bo enačba približno enaka $U_2 \approx U \frac{R_2}{R_1}$. Pri majhnih vrednostih R_2 bo torej napetost na R_2 linearno odvisna od velikosti R_2 .
- pri R_2 , ki so mnogo večji od R_1 (matematično $R_2 \gg R_1$) bo R_1 zanemarljivo velik v primerjavi z R_2 in bo enačba približno enaka $U_2 \approx U \frac{R_2}{R_2} = U$. Pri velikih vrednostih R_2 bo torej vsa napetost generatorja na uporu R_2 .

Pomagajmo si izrisati grafično odvisnost napetosti $U_2(R_2)$ z računalnikom. Programov, ki jih lahko v ta namen uporabimo je zelo veliko. Načeloma ni pomembno katerega uporabimo, sta pa se v (elektro)tehniki uveljavila predvsem dva profesionalna programa: Matlab in Mathematica. Poglejmo si, kako bi uporabili program Matlab.

V ukazni vrstici programa vpišemo naslednje vrstice:

```
U=10 % izbrana napetost generatorja
R1=5 % izbrana upornost R1
R2=0:1:100 % tvorimo vrednosti uporov R2 od 0 po 1 do 100
U2=U*R2./(R1+R2) % enačba za izracun napetosti na R2 (deljenje z ./)
plot(R2,U2) % ukaz za izris grafa U2(R2)
xlabel('upornost R2') % zapis osi X
ylabel('napetost U2') % zapis osi Y
```



SLIKA: Sprememba napetosti na bremenu v odvisnosti od upora R_2 .

4. TOKOVNI DELILNIK

Podobno kot napetostni delilnik, pogosto v elektrotehniki uporabljamo tudi **tokovni delilnik**, ki ga sestavljata dva vzporedno vezana upora.

Slika 23-12: Tokovni delilnik. Zanima nas tok skozi upor R_2 .

Določimo tok skozi upor R_2 :

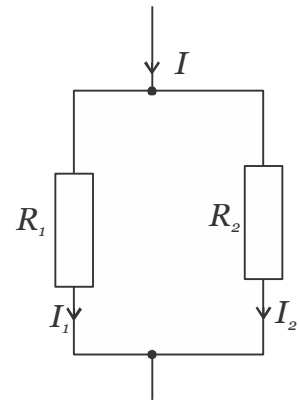
$I = I_1 + I_2$, kjer sta $I_1 = U / R_1$ in $I_2 = U / R_2$. Dobimo

$I = U / R_1 + U / R_2 = U (1 / R_1 + 1 / R_2) = U \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$. Napetost je torej

$U = I \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, tok skozi upor R_2 pa $I_2 = U / R_2 = I \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$. Končni rezultat je

podoben (vendar ne enak) kot pri napetostnem delilniku. Zaradi pogoste uporabe si ga tudi velja zapomniti. Zato ga ponovimo:

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (24.4)$$



5. NAPETOSTNI DELILNIK S POTENCIOMETROM

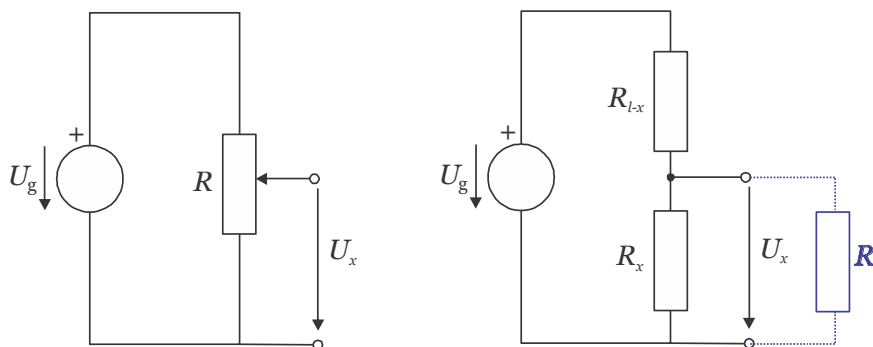
a) brez upoštevanja bremenske upornosti

Poznamo več različnih tipov potenciometrov. Tu bomo obravnavali le linearne, take, katerih spremembo upornosti lahko zapišemo kot $R_x = \frac{x}{l} R$, kjer je R upornost potenciometra med skrajnima legama, l dolžina prevodne proge, x pa dolžinski del, katerega upornost je R_x (glej sliko). Če potenciometer priključimo na vir napetosti U_g , je napetost na uporu R_x enaka

$U_x = IR_x = \frac{U_g}{R} R_x$. Z upoštevanjem zveze $R_x = \frac{x}{l} R$ pa dobimo

$$U_x = \frac{U_g}{R} R_x = \frac{U_g}{R} \frac{x}{l} R = \frac{x}{l} U_g. \quad (24.5)$$

Napetost na uporu R_x se linearno spreminja z lego drsnika.



Slika 23-13: Neobremenjen in obremenjen napetostni delilnik z linearnim potenciometrom.

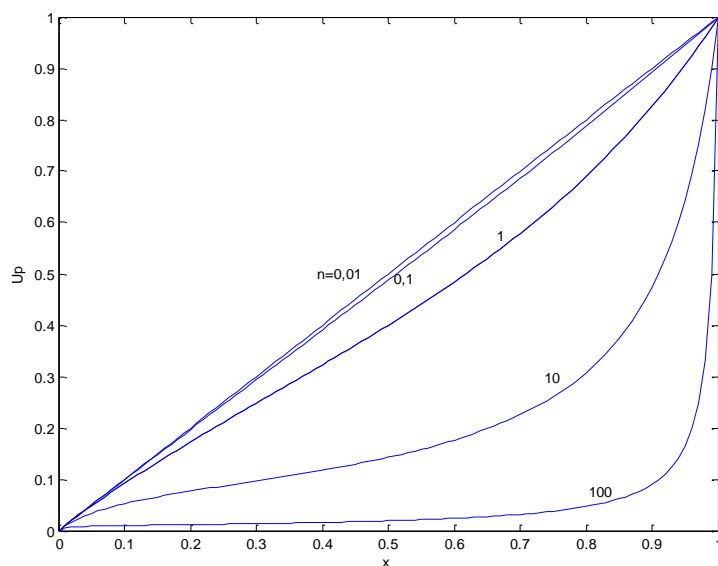
b) z upoštevanjem bremenske upornosti

Če upoštevamo še priključitev bremena na upor R_b , velja

$\frac{U - U_x}{R_{l-x}} = \frac{U_x}{R_x} + \frac{U_x}{R_b}$. Po preureditvi dobimo nekoliko bolj zapleten izraz za napetost na zunanjih

sponkah kot s pomočjo enačbe **Error! Reference source not found.**: $U_x = U \frac{x}{x(1-x/l)n + l}$, kjer je

$n = R / R_b$.



```
x=0:0.01:1;
for n=[0.01,0.1,1,10,100]
Ux=x./(1+x.*(1-x)*n)
plot(x,Ux)
hold on % ohrani graf
end
xlabel('x');
ylabel('Ux');
```

Slika 23-14: U_b za različna razmerja $n = R / R_b$. $n = 0,01, 0,1, 1, 10, 100$. Večjo linearnost se doseže pri $n \ll 1$, torej tedaj, ko je bremenska upornost dosti večja od upornosti uporovnega delilnika.

6. MOSTIČNO VEZJE

Slika 23-15: Mostično vezje.

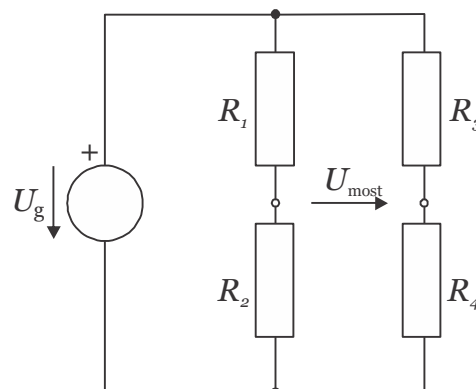
Eno zelo pogosto v praksi uporabljenih vezij je t.i. mostično vezje, ki ga pogosto imenujemo tudi **Wheatstonov** mostič. Zakaj most? Zato, ker premostimo dva napetostna delilnika in merimo napetost med upori. Zgradimo ga iz napetostnega delilnika z uporoma R_1 in R_2 ter delilnika z uporoma R_3 in R_4 .

Napetost na uporu R_2 je $U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, na R_4 pa

$U_4 = U \frac{R_4}{R_3 + R_4}$. Mostično napetost dobimo z uporabo 2 K.Z:

$U_{most} = U_2 - U_4 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} - U \frac{R_4}{R_3 + R_4} = U \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$. Zanimiva situacija nastopi, ko je

mostična napetost enaka nič. Tedaj rečemo, da je mostič *uravnotežen*, pri čemer mora veljati:



$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$. Sledi $R_2(R_3 + R_4) = R_4(R_1 + R_2)$ oziroma $R_2R_3 = R_4R_1$, kar bolj pogosto zapišemo v obliki

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}. \quad (24.6)$$

Mostično vezje lahko uporabimo za določanje neznanne upornosti, ki jo lahko zelo natančno določimo tako, da spreminjamo eno (ali več) vrednosti upora(ov) toliko časa, dokler ni napetost mostiča enaka nič. Potem je upornost enostavno določljiva iz gornje enačbe, npr: $R_2 = R_1 \frac{R_4}{R_3}$.

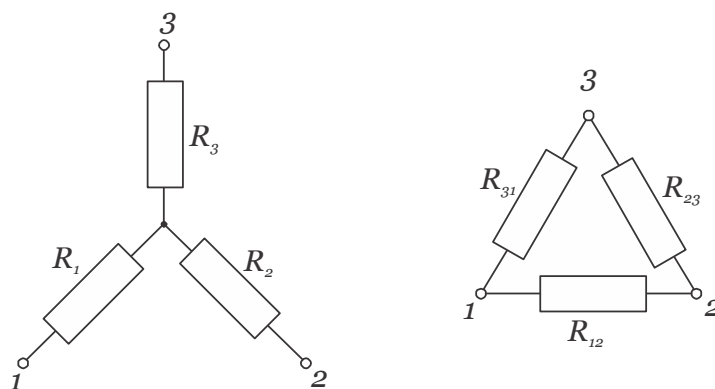
Wheatstonovo mostično vezavo ne uporabljamo le v enosmernih razmerah temveč tudi pri izmeničnih signalih. Poznamo različne tipe mostičev npr. Wienov, Owenov, Maxwellov itd. (glej dodatek k poglavju).

7. TRANSFORMACIJA ZVEZDA – TRIKOT

Pogosto se srečamo z vezavo uporov v obliko, ki ji rečemo trikot, saj so trije upori nameščeni v obliki trikotnika. Druga oblika vezave pa je taka, da so trije upori vezani v skupno spoišče – taki vezavi pravimo vezava v zvezdo. Pogosto si za lažjo analizo vezij pomagamo s t.i. transformacijo vezave trikot v zvezdo in obratno. Če imamo v vezavi zvezda tri spoišča z upori R_1 , R_2 in R_3 , potem ob transformaciji dobimo vezavo trikot z upori R_{12} , R_{23} in R_{32} , katerih vrednosti so

$$R_{12} = \frac{R^2}{R_3} \quad R_{23} = \frac{R^2}{R_1} \quad \text{in} \quad R_{31} = \frac{R^2}{R_2}, \quad (24.7)$$

$$\text{pri čemer je } R^2 = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1. \quad (24.8)$$



Slika 23-16: Transformacija vezja oblike zvezda v obliko trikot.

Zapišimo še obratno pot: če želimo iz vezave trikot preiti v vezavo zvezda, bomo upore določili iz

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (24.9)$$

In podobno lahko pokažemo še za R_2 in R_3 .*

TEMPERATURNE LASTNOSTI UPOROV

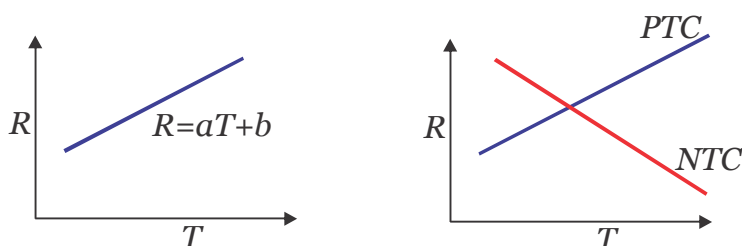
Ko skozi upor teče tok, se nosilci naboja (v uporih običajno elektroni) ne gibljejo premočrtno od ene do druge sponke, pač pa »trkajo« z atomi v snovi. Gibljejo se z neko povprečno hitrostjo, ki pa je odvisna od temperature. Pri višji temperaturi je namreč nihanje atomov večje in s tem tudi število trkov, torej se povprečna hitrost nabojev zmanjša. S tem se tudi zmanjša tok, posredno pa se poveča električna upornost. Meritve pokažejo, da se temperaturna odvisnost upornosti spreminja skoraj linearno s temperaturo, kar lahko zapišemo v obliki

$$R(T) = aT + b, \quad (1.10)$$

kjer sta a in b konstanti, ki ju moramo določiti z meritvijo. Običajno nas zanima sprememba upornosti glede na temperaturo okolice ($20\text{ }^\circ\text{C}$), kjer bo $R(T_{20}) = aT_{20} + b$. Če enačbi odštejemo, dobimo

$R(T) = R(T_{20}) \left(1 + a \frac{T - T_{20}}{R(T_{20})} \right)$. Vpeljemo konstanto α , ki jo imenujemo temperaturni koeficient in pišemo

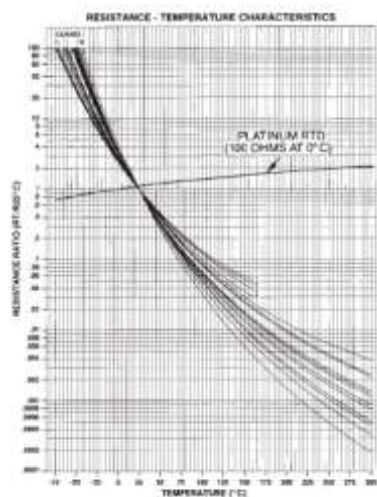
$$R(T) = R(T_{20}) (1 + \alpha(T - T_{20})). \quad (1.11)$$



Slika 23-17: Temperaturna odvisnost upornosti.

Tipične vrednosti temperaturnih koeficientov so (v K^{-1}): Železo 0,006; Aluminij 0,0041; Baker 0,0039; Konstantan 0,00003. Vse zapisane vrednosti koeficientov so pozitivne, torej bo upornost železa, aluminija, bakra in konstantana večja pri višjih temperaturah. Okrajšava za pozitivni temperaturni koeficient je PTK, za negativnega pa NTK (ang. PTC in NTC).

Slika 23-18: Upornost NTC termistorja se zmanjša z višanjem temperature. Za primerjavo je na sliki prikazana tudi odvisnost upornosti platine od temperature. Vir: katalog firme Murata.



* Poskusite sami izpeljati te enačbe. Pot je ta, da mora biti nadomestna upornost med dvema sponkama enaka v obeh vezavah. Veljati mora: $R_1 + R_3 = R_{12} \parallel (R_{31} + R_{23})$, $R_2 + R_3 = R_{23} \parallel (R_{12} + R_{13})$ in še ena zveza za $R_1 + R_2$, ki jo zapišete sami. Nato seštejte prvo in tretjo enačbo ter odštejte drugo in dobili boste enačbo za R_1 .

Primer izračuna upornosti žice pri spremembi temperature:

Kolikšna je upornost bakrene žice pri 80°C , če je njena upornost pri 20°C enaka $10\ \Omega$.

Izračun: $R(80^{\circ}\text{C}) = 10\ \Omega (1 + 0,0039\ \text{K}^{-1} \cdot 60\text{K}) = 12,34\ \Omega$.

Obstaja vrsta elementov, katerim se upornost izrazito spreminja s temperaturo. Tem elementom pravimo termistorji (ang. thermistor = thermal resistor). Njihova uporaba v elektrotehnikih je zelo pogosta, od merjenja temperature do kompenzacije temperaturnih lastnosti drugih elementov v vezju, regulacija ampliture, napetosti, alarm, ...

MERILNI INŠTRUMENTI

Poznamo vrsto merilnih inštrumentov, ki nam omogočajo meritve električnih veličin: voltmeter, ampermeter, ohmeter, vatmeter in drugi. Običajno so bili ti inštrumenti analogni in so bili zasnovani na osnovnih principih lastnosti magnetnega polja. Večinoma so za prikaz uporabljali inštrumente z vrtljivimi tuljavicami. Sodobni inštrumenti so večinoma digitalni, izdelani z uporabo elektronskih elementov. Največji problem merilnih inštrumentov je njihova omejena točnost merjenja, ki je pogosto določena s ceno naprave. Omejeno točnost naprav je potrebno upoštevati pri natančnejših meritvah. S problemi merjenja se ukvarja posebno področje elektrotehnike – metrologija.

VOLTMETER

Voltmeter je inštrument za merjenje napetosti. Simbol je krog s črko V v sredini kroga. Idealni voltmeter bi bil tak, ki bi ga priključili med merilni sponki in se razmere v vezju ne bi spremenile. V resnici ima vsak voltmeter določeno notranjo upornost, ki je velika, ni pa neskončna. Zamislimo si, da merimo napetost odprtih sponk. S priključitvijo voltmetra bomo spremenili razmere v vezju, saj bo skozi voltmeter stekel določen tok, ki pri odprtih sponkah ne bi.



Slika 23-19: Voltmeter: priključitev, razlika med idealnim in realnim voltmetrom.

Razširitev merilnega območja voltmetra je mogoča z dodanim preduporom, ki ga vežemo **zaporedno** voltmetru. S tem izvedemo že omenjen napetostni delilnik.

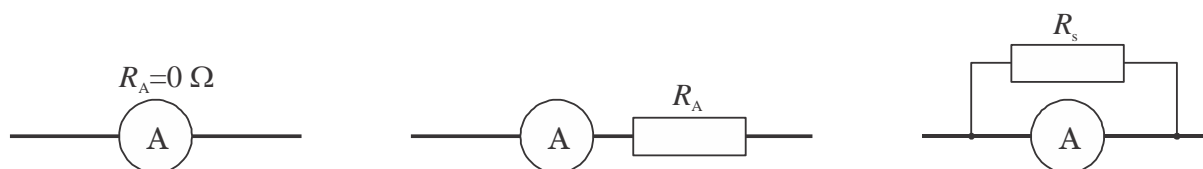
Primer izračuna predupora za razširitev merilnega območja voltmetra:

Vzemimo, da voltmeter meri do 5 V (merilno območje), želimo pa meriti do 100 V, pri čemer je notranja upornost voltmetra 100 kΩ. Določimo predupor tako, da bo voltmeter kazal 5 V tedaj, ko bo na zaporedno vezavo voltmetra in predupora priključena napetost 100 V.

Izračun: $100\text{ V} = IR_p + 5\text{ V}; I = \frac{5\text{ V}}{100\text{ k}\Omega} \Rightarrow R_p = 1900\text{ k}\Omega = 1,9\text{ M}\Omega.$

AMPERMETER

Ampermeter je inštrument za merjenje toka. Umestimo ga v vejo, v kateri želimo meriti tok. Simbol za ampermeter je krogec s črko A v sredini kroga. Tudi ampermeter ni idealen inštrument. V idealnih razmerah naj bi bila notranja upornost ampermetra čim manjša, torej taka, ki ne bi povzročila dodatnega padca napetosti na inštrumentu. V resnici ima neko malo notranjo upornost.



Slika 23-20: idealni ampermeter (levo), ampermeter z notranjo upornostjo (sredina), razširitev merilnega območja ampermetra s souporom (desno)

Prav tako kot voltmetru lahko tudi ampermetru povečamo merilno območje, vendar sedaj tako, da upor vežemo vzporedno z ampermetrom. Tak upor imenujemo tudi soupor ali kar po angleško »šant« (ang. shunt). S tem del toka, ki bi ga sicer meril ampermeter preusmerimo v vzporedno vejo.

Primer izračuna soupora za razširitev merilnega območja ampermetra:

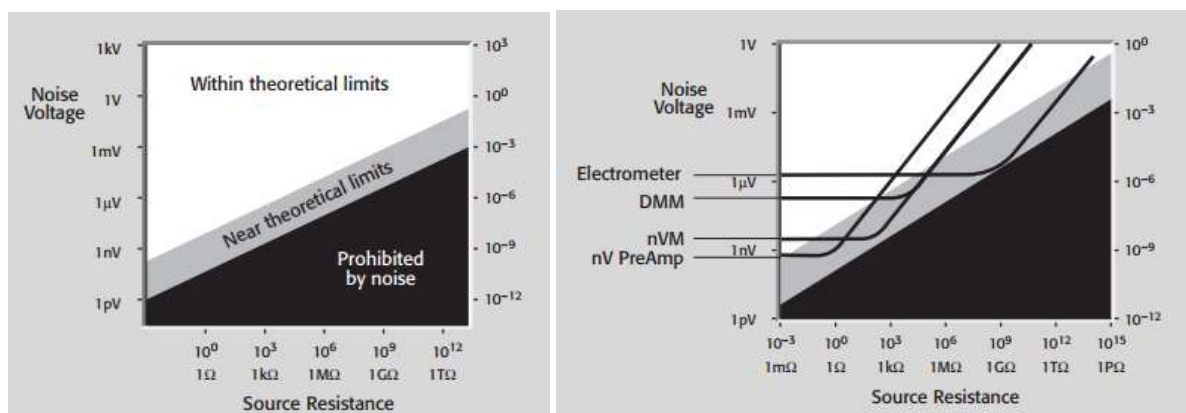
Želimo meriti tok 30 A, pri čemer nam inštrument kaže največ 10 A. Notranja upornost ampermetra v tem merilnem območju je 0,2 Ω. Določimo upornost soupora.

Izračun: Ker ampermeter meri največ 10 A, moramo predvideti, da bi pri toku 30 A v vzporedni veji tekel tok 20 A. Napetost na ampermetru pri 10 A je 2 V, ta napetost mora biti tudi na souporu v vzporedni veji. Veljati mora torej $R_s = \frac{2\text{ V}}{20\text{ A}} = 0,1\ \Omega.$

Vprašanje: Kako realiziramo tako male vrednosti souporov?

* MERILNI INSTRUMENTI V PRAKSI

Dandanes se najpogosteje uporablja digitalne merilne instrumente (ang. **DMM** – digital multimeters), ki tipično omogočajo merjenje napetosti, ki so večje od $1\ \mu\text{V}$, tokov, večjih od $1\ \mu\text{A}$ in upornosti, ki so manjše kot $1\ \text{G}\Omega$. Te omejitve so povezane predvsem z viri šumov, ki so pri uporih sorazmerne korenu upornosti, pasovne širine in temperature. Slika 1 kaže, da je mogoče izmeriti napetosti velikosti $1\ \mu\text{V}$, če je upornost bremena $1\ \Omega$, delno (z dobrim instrumentom), če je upornost bremena $1\ \text{M}\Omega$ in nikakor, če je upornost bremena večja od $1\ \text{G}\Omega$, saj s tem posežemo v področje šuma. Poleg tega so tipične notranje upornosti multimetrov velikosti od $10\ \text{M}\Omega$ do $10\ \text{G}\Omega$, kar pomeni, da s takim instrumentom težko merimo bremena z upornostmi $\text{T}\Omega$. Za merjenje skrajnih vrednosti, ki še ne posegajo v področje šuma, se uporabljajo instrumenti, ki so posebej prilagojeni specifičnim potrebam. **Elektrometri** se odlikujejo po izredno veliki notranji upornosti (velikosti $100\ \text{T}\Omega = 10^{14}\ \Omega$) in so zato primerni za merjenje zelo velikih upornosti (velikosti več sto $\text{G}\Omega$ ali tudi $\text{P}\Omega = 10^{16}\ \Omega$) in zelo majhnih tokov (velikosti $\text{fA} = 10^{-15}\ \text{A}$). Posebna oblika tega instrumenta je **Coulomb-meter**, ki zaradi velike notranje upornosti omogoča zelo natančno merjenje naboja (z integracijo toka). **Nanovoltmetri** so instrumenti, ki omogočajo merjenje zelo majhnih napetosti, velikosti pV . Pogosto se uporabljajo za natančno merjenje temperature. **Pikoampermetri** se odlikujejo po natančnem merjenju zelo majhnih tokov. Pogosto v praksi uporabljamo tudi t.i. source-metre (Source meter – **SMU**), ki združujejo funkcijo vira in merilnega instrumenta v enem instrumentu. S takimi instrumenti lahko na primer izmerimo I-U karakteristiko elementov ali struktur z veliko natančnostjo, omogočajo tudi programabilno nastavljanje oblike signala vira, itd.



Slika 23-21: Levo: omejitve merilnega območja zaradi šumov. Desno: prikaz omejitev merilnega območja različnih merilnih instrumentov (elektrometer, digitalni multimeter (DMM), nanovoltmeter (nVM) Vir: Low level measurements handbook, Keithley.

Model	2400/ 2400-C*	2410/ 2410-C*	2420/ 2420-C*	2425/ 2425-C*	2430/ 2430-C*	2440/ 2440-C*	6430
Description	General Purpose	High Voltage	3 A	High Power	1000 W Pulse	5 A	Ultra-low Current
Power Output	20 W	20 W	60 W	100 W	100 W	50 W	2 W
Voltage Range	±1 μV to ±210 V	±1 μV to ±1100 V	±1 μV to ±63 V	±1 μV to ±105 V	±1 μV to ±105 V	±1 μV to ±42 V	±1 μV to ±210 V
Current Range	±10 pA to ±1.05 A	±10 pA to ±1.05 A	±100 pA to ±3.15 A	±100 pA to ±3.15 A	±100 pA to ±10.5 A (pulse)	±100 pA to ±5.25 A	±10 nA** to ±105 mA
Ohms Range	<0.2 Ω to >200 Ω	<0.2 Ω to >200 MΩ	<0.2 Ω to >200 MΩ	<0.2 Ω to >200 MΩ	<0.2 Ω to >200 MΩ	<2.0 Ω to >200 MΩ	<2.0 Ω to >20 TΩ***
Applications	<ul style="list-style-type: none"> Resistive devices Diodes Optoelectronic components I_{iso} testing 	<ul style="list-style-type: none"> Voltage coefficient Varistors High voltage diodes and protection devices Airbag inflators 	<ul style="list-style-type: none"> Power resistors Thermistors Solar cells Batteries Diodes I_{iso} testing 	<ul style="list-style-type: none"> Power semi-conductors DC/DC converters High power components I_{iso} testing 	<ul style="list-style-type: none"> High 	<ul style="list-style-type: none"> 5 A 	<ul style="list-style-type: none"> Particle beam



Slika 23-22: Tabela različnih tipov Source-metrov (SMU) podjetja Keithley, ki se razlikujejo po izhodni moči ter merilih območjih. V insertu desno spodaj je prikazan inštrument Keithley 2400. www.keithley.com

Kakovost inštrumentov je odvisna od mnogih parametrov (točnost, natančnost (rezolucija), ponovljivost, absolutna in relativna negotovost, napaka, sistematična in naključna napaka, itd). Točnost inštrumenta je lahko podana na različne načine (glej slika 3), npr. v procentih merilnega dosega, v procentih izmerjene vrednosti, v ppm (delih na milijon), pogosto tudi kot kombinacija dveh. Točnost tipičnega DMM inštrumenta je na primer zapisana kot ±(0.0005% of reading (izmerjene vrednosti) and 0.002% of range (merilnega dosega)) ali pa tudi kot ±(25 ppm of reading and 5 ppm of range). Če je inštrument npr. izmeril vrednost 250,685 V pri merilnem dosegu 1000 V, potem inštrument zagotavlja, da je izmerjena vrednost znotraj 250 V ±(0.0005% x250 V + 0.002% x1000)= 250,685 V ± 0,021 V.

Percent	PPM	Digits	Bits	dB	Portion of 10V	Number of time constants to settle to rated accuracy
10%	100000	1	3.3	-20	1 V	2.3
1%	10000	2	6.6	-40	100mV	4.6
0.1%	1000	3	10	-60	10mV	6.9
0.01%	100	4	13.3	-80	1mV	9.2
0.001%	10	5	16.6	-100	100 μV	11.5
0.0001%	1	6	19.9	-120	10 μV	13.8
0.00001%	0.1	7	23.3	-140	1 μV	16.1
0.000001%	0.01	8	26.6	-160	100 nV	18.4
0.0000001%	0.001	9	29.9	-180	10 nV	20.7

Slika 23-23: Primer prikaza različnega opisovanja merilne točnosti in resolucije (na sliki prikaz relativno glede na signal napetosti 10 V).



Function	Range	Resolution	Accuracy ± (% of reading + counts of least significant digit)
			U1231A/U1232A/ U1233A
Voltage			
	600 mV ¹	0.1 mV	0.5% + 2
	6 V	0.001 V	0.5% + 2
	60 V	0.01 V	0.5% + 2
	600 V	0.1 V	0.5% + 2

Slika 23-24: Agilentov univerzalni inštrument U1233A in izsek iz specifikacij o merilnem območju, resoluciji (natančnosti) in točnosti (accuracy). Vir: www.agilent.com

Pogosto se resolucijo inštrumenta podaja s številom mest (digitov), ki jih prikazuje inštrument. Inštrument z resolucijo $3\frac{1}{2}$ mest prikaže izmerjeno vrednost na štiri mesta, od katerih je prvo lahko le 0 ali 1, ostala pa so lahko od 0 do 9. Tako lahko tak inštrument pokaže največ vrednost 1999 (counts of resolution). Nekateri inštrumenti lahko na vodilnem mestu prikažejo tudi več kot 0 ali 1, kot na primer Agilentov inštrument U1233A (glej sliko 4), ki omogoča prikaz s 6000 vrednostmi, kar predstavlja resolucijo $3\frac{3}{4}$ digitov. Tak inštrument ima štirimestno skalo vendar ima resolucijo večjo kot $3\frac{1}{2}$ digitov, saj lahko npr. napetost 62,1234 V prikaže kot 62,12 V, medtem ko bi inštrument z resolucijo $3\frac{1}{2}$ mest prikazal vrednost 62,1.

Spletni viri:

O šumih: <http://www.ti.com/lit/an/slyt470/slyt470.pdf>

O meritvah:

http://www.keithley.com/knowledgecenter/knowledgecenter_pdf/LowLevMsHandbk_1.pdf

Slovar izrazov: <http://www.lotric.si/sredisce-znanja/slovar-izrazov/>

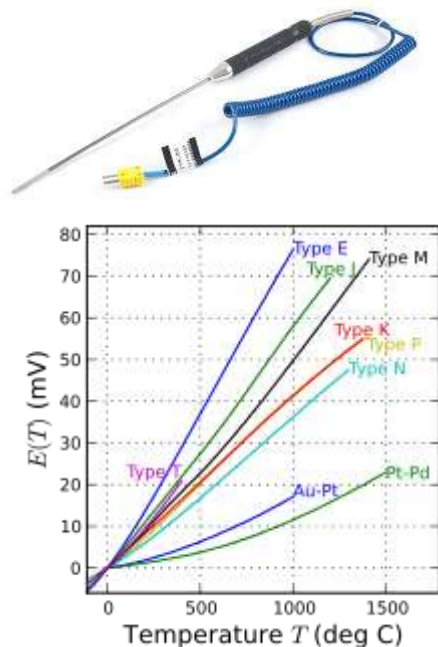
Točnost in natančnosti: http://sl.wikipedia.org/wiki/To%C4%8Dnost_in_natan%C4%8Dnost

O multimetrih: <http://en.wikipedia.org/wiki/Multimeter>

* NA KRATKO O SENZORJIH TEMPERATURE

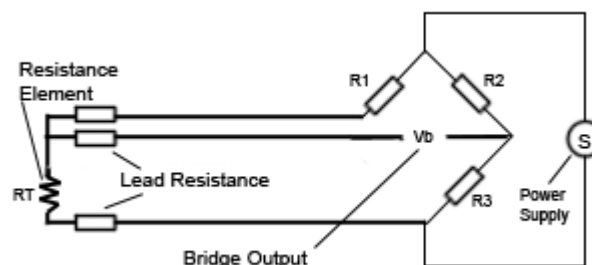
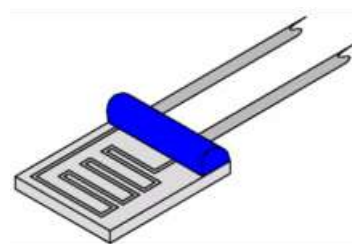
Elektrotehniki najpogosteje za merjenje temperature izbiramo med termoelementi, RTD elementi, termistorji ali že izdelanimi namenskimi integriranimi vezji.

Termoelementi (lahko tudi termopar ali termočlen, ang. thermocouple) so osnovani na merjenju napetosti spoja med dvema različnima materialoma, ki je odvisna od temperature spoja. Ta pojav imenujemo Seebeckov efekt po [Thomasu Johannu Seebecku](#), ki je leta 1921 ugotovil, da se pri segrevanju dveh različnih kovin pojavi magnetno polje, kar je poimenoval termo-magnetizem. V resnici se na spoju pojavi napetost, ki pa v zaključenem tokokrogu požene tok, ki se ga lahko zazna s kompasom ali drugimi merilniki magnetnega polja. V praksi je termočlen zelo uporaben senzor temperature, še posebno za merjenje zelo visokih ali zelo nizkih temperatur. S kombiniranjem različnih materialov je mogoče pridi do zelo različnih senzorjev različnih občutljivosti in temperaturnih območij. V praksi jih označujemo s črkami abecede. Termočlen tipa J je na primer izdelan iz spoja železa in konstantana in je uporaben v območju od $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $+750\text{ }^{\circ}\text{C}$. Njegova občutljivost je $50\text{ }\mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$. Slika prikazuje spremembo napetosti termoelementa v odvisnosti od temperature. Več: <https://en.wikipedia.org/wiki/Thermocouple>



RTD (Resistive Temperature Devices) so elementi, katerim se s temperaturo spreminja električna upornost. Običajno so izdelani iz keramičnega nastavka, na katerem je navita žička iz platine ali pa je tanka plast platine nanešena na keramično ploščico. Platina spada med plemenite kovine in ima zelo stabilen (konstanten) temperaturni koeficient v širokem območju. Poleg platine se uporabljajo tudi nikelj ali baker.

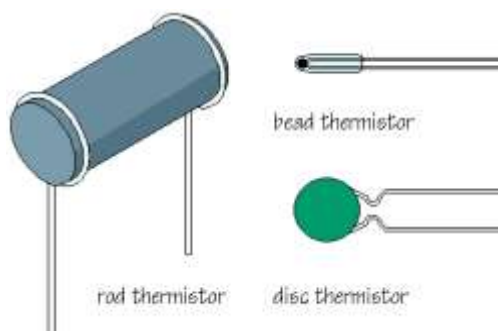
RTD elementi se običajno imenujejo Pt100 ali Pt1000, kjer je Pt predstavlja ime materiala (platina), 100 ali 1000 pa je upornost elementa pri 0°C . Tipičen temperaturni koeficient je okoli $0.00385\text{ ohm}/\text{ohm}^{\circ}\text{C}$. V praksi lahko za merjenje temperature z RTD elementom uporabimo preprost napetostni delilnik, bolj pogosto pa se uporabi mostično vezavo. Ta je lahko dvo, tro ali štiritočkovna, odvisno od zahtevane natančnosti. Trotočkovno vezavo na sliki uporabimo tedaj, ko želimo kompenzirati vpliv upornosti priključnih žic.



http://www.pyromation.com/Downloads/Doc/Training_RT_D_Theory.pdf

<http://precisionsensors.meas-spec.com/pdfs/rtd.pdf>

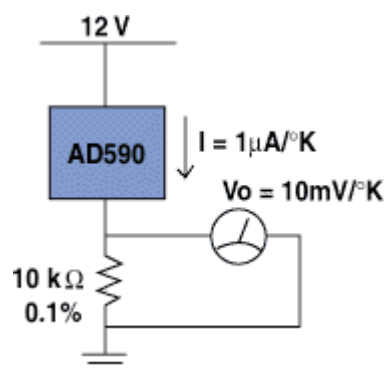
Termistorji (Thermal Resistor) so elementi, katerim se upornost spreminja s temperaturo. Za razliko od RTD elementov, ki vsebujejo temperaturno odvisen prevodnik (običajno platino), termistorji temeljijo na uporabi temperaturno odvisnih keramik ali polimerov. RTD elemente lahko uporabimo v širšem temperaturnem območju (npr. od -200 do +800°C, medtem ko termistorje običajno uporabljamo v bistveno ožjem območju (od -90 do 130°C). Nominalna vrednost upornosti termistorjem je običajno mnogo večja od upornosti RTD elementov, je velikosti 2 kΩ do 10 kΩ. So tudi precej občutljivi na spremembe temperature (občutljivost ~200 Ω/°C). Temperaturna odvisnost ni linearna, običajno jo podamo s t.i. Steinhart-Hart-ovo aproksimacijo tretjega reda:



$$\frac{1}{T} = A + B * \ln R + C * (\ln R)^3$$

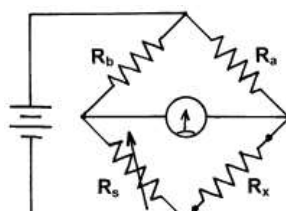
Poznamo termistorje s pozitivnim (PTC) in negativnim temperaturnim koeficientom (NTC). NTC elementi so izdelani iz sintranih kovinskih oksidov, PTC pa iz keramičnih polikristalnih materialov, npr. barijevega titanata. PTC termistor se lahko uporabi za tokovno zaščito vezij, saj se elementu poveča upornost s temperaturo in s tem omeji tok. Na primer v litijevih baterijah, kjer je potrebno paziti, da se le te ne pregrejejo.

PN spoj je tudi primeren senzor temperature. Pri konstantnem toku se padec napetosti na pn spoju polprevodniške diode spremeni za -2 mV/°C. Ker je pn dioda osnovni element vseh polprevodniških elementov in čipov, se pogosto uporablja znotraj čipov za merjenje temperature čipa ali okolice čipa. Na sliki je primer uporabe namenskega čipa AD590, ki uporablja princip spremembe napetosti na pn spoju in deluje kot element z visoko upornostjo. Tok skozi element se spreminja za 1 μA pri spremembi temperature za 1 °C.



* WHEATSTONOV MOSTIČ

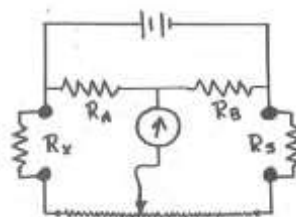
Wheatstonov mostič je pravzaprav prvi »odkril« Hunter Christie leta 1833, vendar se nekako zasluge prepuščajo Charlesu Wheatstonu, ki je leta 1843 to obliko vezja in način uporabe pojasnil mnogo bolj jasno in enostavno kot Christie. Pri tem velja povedati, da je Wheatstone v svojem delu citiral Christiejevo delo. Za njim so občutljivost mostičnega vezja in njegove izboljšave predlagali mnogi raziskovalci, med njimi William Thomson (kasneje Lord Kelvin), Heaviside, Maxwell. Natančnost merjenje je bila omejena tudi zaradi kakovosti napajanja (baterij) ter galvanometrov, ki so izhajali še iz del Ampera in drugih in so temeljili na principu d'Arsonalovega inštrumenta z vrtljivo tuljavico z dodanim zrcalcem, ki je z odbojem fokusirane svetlobe povečal njegovo občutljivost.



1-3 Wheatstone Bridge
or "Resistance Balance"
Christie 1833
Wheatstone 1843



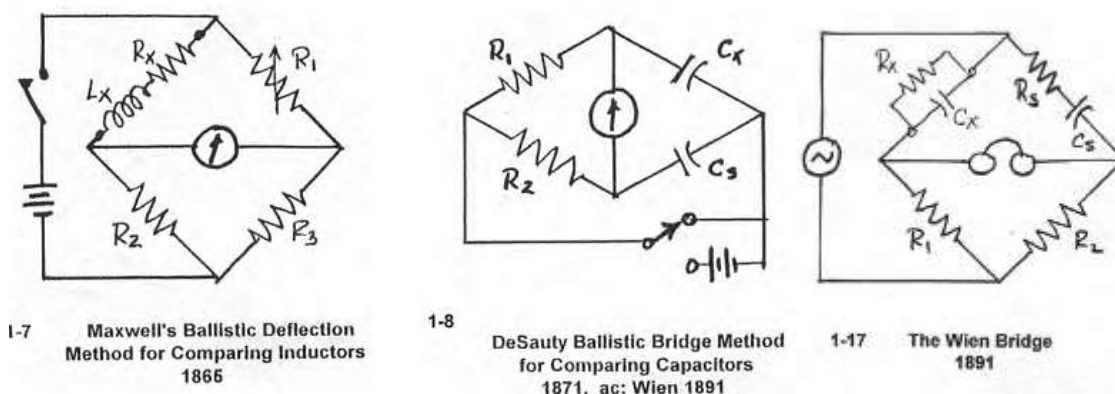
Slika: Ena osnovnih izvedenk Wheatstonovega mostiča, ki ga je sam imenoval diferencialni merilnik upornosti. (Hampden-Sydney College, Virginia), na desni »modernejša« izvedba. (Greenslade collection) Vir: Error! Reference source not found. in Error! Reference source not found..



Slika: Kirchoffov mostič temelji na gibljivem (drsnem) kontaktu in omogoča merjenje majhnih upornosti. (Vir: Error! Reference source not found. in Error! Reference source not found.)

Verzijo mostiča z drsnim kontaktom je predlagal Kirchoff in je omogoča natančno merjenje majhnih upornosti. Leta 1865 je James Clerk Maxwell predlagal mostič za merjenje induktivnosti in upornosti, ki se je sprva uporabljal tako, da se je nanj priklopila enosmerna napetost in se je določilo induktivnost iz prehodnega pojava. De Sauty pa ga je prilagodil za merjenje kapacitivnosti. Za tem je bilo predlaganih še mnogo oblik mostičnih vezij, vendar je nov preboj prišel, ko je Max Wien predlagal uporabo mostiča, priključenega na izmenično napetost. Nekateri ta mostič imenujejo tudi Maxwell-Wienov ali de Sauty-Wienov. Njegova prednost je v omogočanju zelo natančnega določaja neznane kapacitivnosti. Podobne mostiče uporabljajo tudi moderni inštrumenti za merjenje impedance – seveda ti, ki uporabljajo mostično metodo. Oliver Heaviside je prvi, ki je vpeljal imena

impedanca, kapacitivnosti, induktivnost in predlagal uporabo kompleksnih števil za njihov opis in izračune.



Slika: Maxwellov in DeSautyjev mostič za določitev kapacitivnosti iz prehodnega pojava ob vklopu mostiča na enosmerni napetostni vir. Desno: Wienov mostič, kjer se neznan kapacitivnost določa z uravnovešenjem mostiča pri izmeničnih signalih. (Vir: Error! Reference source not found.)

Moderna uporaba Wheatstonovega mostiča

Tudi dandanes sem Wheatstonov mostič pogosto uporablja v praksi. Pogosto ga »najdemo« v modernih senzorskih elementih, kjer je običajno realiziran tako, da je en od uporov spremenljiv in odvisen od določenega parametra (npr. temperature, pritiska, magnetnega polja, kemikalije, itd), drugi pa so fiksno integrirani v elektronskem delu. Na ta način je mogoče zelo povečati občutljivost celotnega senzorja oziroma natančnost merjenja.

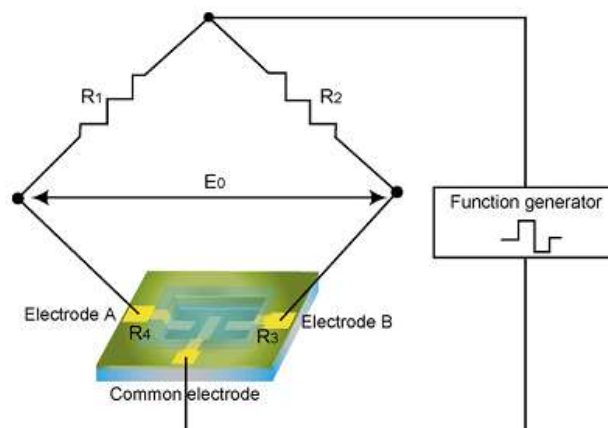
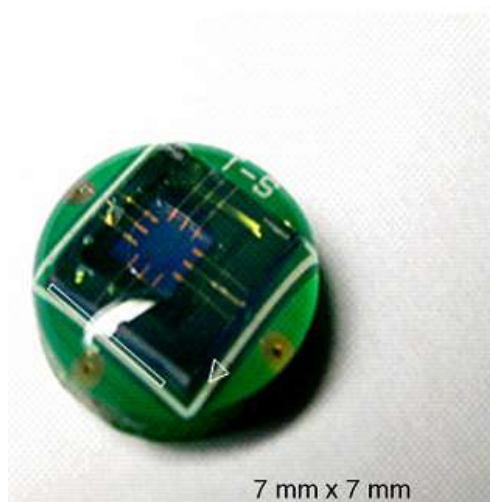
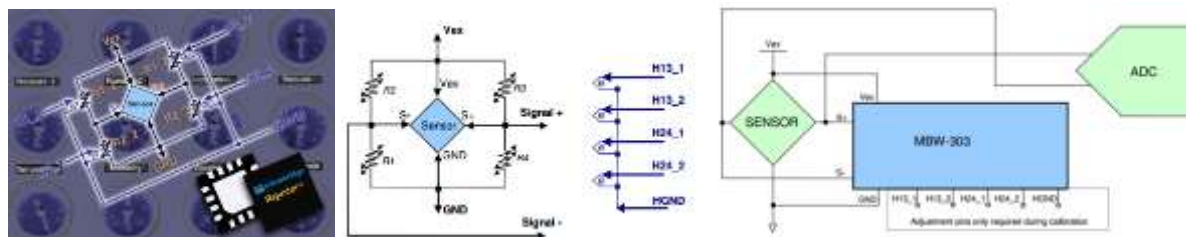
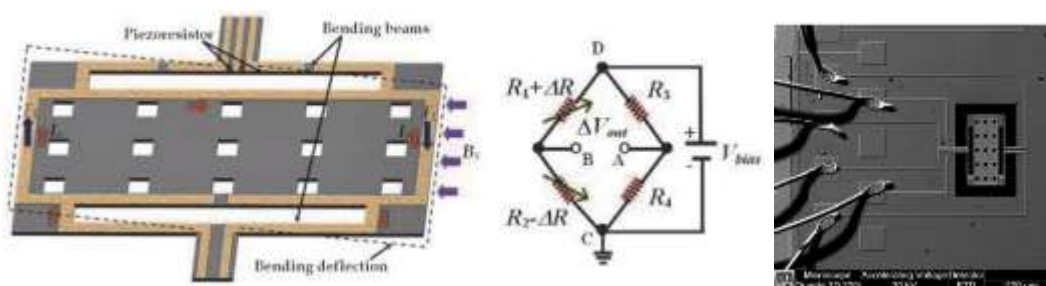


Fig. 10. The AC signal circuit to measure the output voltage of the fabricated tilt sensor.

Slika: Primer uporabe principa Wheatstoneovega mostiča: Zgoraj mikromehansko izdelan senzor naklona. Vir: An optimized MEMS-based electrolytic tilt sensor. Jung et al.: Sensors and Actuators A139 (2007) stran 23–30.

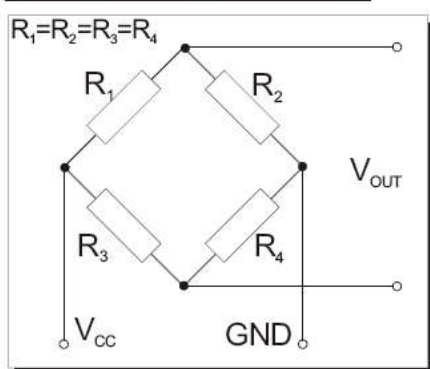


Slika: Microbridge Technologies Inc. je leta 2007 predstavil element MBW-303 Wheatstone Bridge Offset Conditioning Network, ki je v osnovi s pomočjo MEMS in CMOS tehnologije izdelan čip posebno prilagojen za uporabo različnih senzorjev vezanih v Wheatstonovo vezavo. Njegova posebnost je, da je mogoče upornosti v mostiču zelo natančno spreminjati (imenujejo re-justors) in s tem povečati občutljivost mostiča. Vir: Microbridge.com

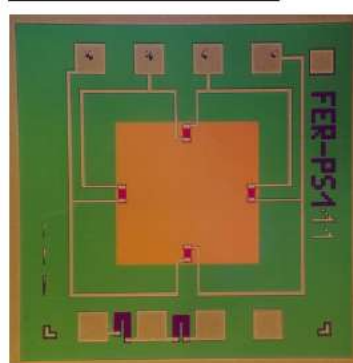


Slika: Senzor magnetnega polja, ki temelji na zaznavanju resonance tanke resonančne strukture senzorja skozi katerega teče tok in je izpostavljen zunanjem magnetnem polju. Zaznava poteka preko piezorezistivnih uporov na robovih strukture. Vir: Error! Reference source not found..

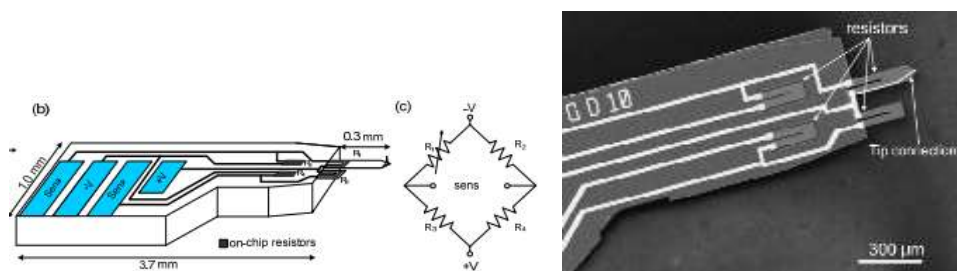
SCHEMATIC DIAGRAM



SENSOR LAYOUT



Spodaj: primer polprevodniškega senzorja tlaka, ki temelji na spremenljivi upornosti difundiranih uporov na tanki membrani zaradi upogiba ob spremembi pritiska (tlaka) . Vir: Laboratorij za mikrosenzorske strukture in elektroniko na Fakulteti za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani.



Slika: Senzor sistema TEM AFM (AFM – Atomic Force Microscopy), ki omogoča merjenje sil velikosti μN in nN , kar omogoča raziskave na področju nanomaterialov. Sam senzor je narejen iz silicija z MEMS obdelavo in pozicioniranjem piezorezistivnih difundiranih uporov v Wheatstonovi vezavi. Vir: Error! Reference source not found.

Viri:

R. 1: http://en.wikipedia.org/wiki/Wheatstone_bridge

R.2:

http://physics.kenyon.edu/EarlyApparatus/Electrical_Measurements/Wheatstone_Bridge/Wheatstone_Bridge.html

R.3: Henry P. Hall: A history of impedance measurements, (http://www.ietlabs.com/pdf/GenRad_History/A_History_of_Z_Measurement.pdf)

R.4: Agustín L. Herrera-May, Luz A. Aguilera-Cortés, Pedro J. García-Ramírez, Nelly B. Mota-Carrillo, Wendy Y. Padrón-Hernández and Eduard Figueras (2011). Development of Resonant Magnetic Field Microsensors: Challenges and Future Applications, Microsensors, InTech, (<http://www.intechopen.com/books/microsensors/development-of-resonant-magnetic-field-microsensors-challenges-and-future-applications>)

R.5: A. Nafari: Microsensors for in situ electron microscopy applications, Ph.D. Thesis, CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, 2010, Goteborg, Sweden (<http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/127399.pdf>)

25. Moč

Vsebina poglavja: definicija moči, delo, moč na bremenu, maksimalna moč, izkoristek.

Moč je merilo za intenzivnost dela, ki ga opravljajo električne sile. Sprememba dela je enaka spremembi električne energije, ki je potrebna npr. za premik naboja za potencialno razliko U , kot smo

ugotavljali v poglavju Joulov zakon (str. 193): $dW = dA_e = dQ \int_0^l \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = dQ \cdot U$.

Hitreje kot se časovno spreminja (ali pretaka) električna energija, večja moč je za to potrebna. Torej je moč določena kot

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (25.1)$$

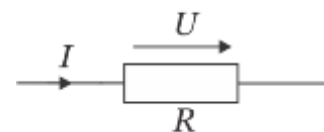
Z upoštevanjem povezave med nabojem in tokom $I = \frac{dQ}{dt}$ dobimo

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = IU \quad (25.2)$$

Enačbo (25.2) smo zapisali za enosmerne razmere, ko sta konstantna tako napetost, kot tudi tok na elementu. V splošnem, ko napetost in tok na elementu nista konstantna pač pa sta funkciji časa, pišemo veličine v enačbi (25.2) z malimi črkami, torej v obliki

$$p(t) = u(t)i(t) \text{ ali tudi samo } p = iu \quad (25.3)$$

Če se moč troši na linearnem uporu (na katerem velja $U = RI$), z upoštevanjem Ohmovega zakona dobimo*:



$$P = RI^2 \text{ ali } P = U^2 / R. \quad (25.4)$$

Enota za moč je vat (W).

Če je moč časovno konstantna, je delo $A = P \int dt = Pt$, kjer je t čas opravljanja dela.

* Te zveze pogosto imenujemo kar Joulov zakon, saj je James P. Joule leta 1841 prvi prišel do ugotovitve, da je sproščena toplota v prevodniku proporcionalna kvadratu toka, ki teče skozi vodnik.

Primer izračuna moči na bremenu:

Ko priključimo breme (npr. avtomobilsko žarnico) na enosmerni vir napetosti 12 V, je skozenj tok 2 A. Določimo moč na bremenu, upornost bremena in energijo, ki se sprosti na bremenu v času 10 minut.

Izračun: Moč je $P = UI = 12 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 24 \text{ W}$. Upornost je $R = P / I^2 = 24 \text{ W} / (2 \text{ A})^2 = 6 \Omega$. Energija je $A = W = Pt = 24 \text{ W} \cdot 10 \cdot 60 \text{ s} = 14400 \text{ J} = 14,4 \text{ kJ}$.

Vprašanje: Ali gre vsa ta energija v toploto (segrevanje)? Vsekakor en del, drugi del pa gre v svetlobno energijo. (Žarnice z žarilno nitko nimajo ravno velikega izkoristka, običajno med 10 in 20 % celotne moči).

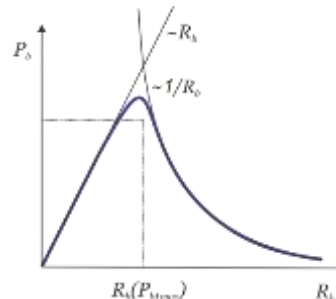
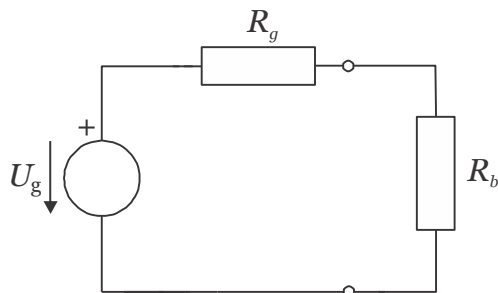
MOČ NA BREMENU

Oglejmo si, kako se moč spreminja na spremenljivem bremenskem upor, ki ga priključimo na realni napetostni vir. Veljati mora

$$P_b = R_b I^2 = R_b \left(\frac{U_g}{R_b + R_g} \right)^2. \quad (25.5)$$

To ni ravno preprosta funkcija, saj R_b nastopa v enačbi dvakrat, tako v števcu, kot v imenovalcu. Poskusimo iz enačbe razbrati, kako se moč na upor spremenja s spreminjanjem bremenske upornosti. Ločimo lahko tri različna področja:

- 1) Ko je bremenski upor enak nič, bo moč enaka nič.
- 2) Pri majhni upornosti bremena ($R_b \ll R_g$) velja približno $P \approx \frac{U_g^2}{R_g^2} R_b$, torej pri majhnih vrednostih upornosti bremena moč na upor linearno raste.
- 3) Ko je bremenski upor zelo velik velja $P \approx \frac{U_g^2}{R_b}$. Moč na bremenu se bo torej pri velikih upornostih bremena zmanjševala obratno sorazmerno velikosti $\left(\sim \frac{1}{R_b} \right)$ in se bo z večanjem očitno zmanjševala proti nič.
- 4) Vmes, med točko 2 in 3 bo imela funkcija (moč) nek maksimum, ki ga lahko določimo z odvajanjem moči po upornosti bremena $\left(\frac{dP}{dR_b} = 0 \right)$.



Slika 23-25: Moč na bremenu R_b , ki je priključen na realni napetostni vir. Levo: breme na realnem napetostnem viru, desno: prikaz moči na bremenu v odvisnosti od R_b .

Primer izračuna moči na bremenu:

Določimo moč na bremenu 10Ω , ki ga priključimo na realni napetostni vir 12 V z notranjo upornostjo 2Ω .

$$\text{Izračun: } P = 10 \Omega \left(\frac{12 \text{ V}}{2 \Omega + 10 \Omega} \right)^2 = 10 \text{ W} .$$

Vprašanje: Ali lahko to moč dosežemo tudi pri kakšni drugi upornosti?

Odgovor je pritrdilen: če enačbo zapišemo tako, da iščemo neznano upornost bremena pri znani moči, dobimo:

$$10(2 + R_b)^2 = 12^2 R_b, \text{ kar je kvadratna enačba, ki je s preureditvijo enaka}$$

$$10R_b^2 - 104R_b + 40 = 0$$

(Pri zapisu v matematični obliki smo zaradi preglednosti opustili pisanje enot. Ko določimo rešitev moramo pravilno enoto dopisati!)

Rešitvi kvadratne enačbe sta dve: že znanih 10Ω , pa tudi $0,4 \Omega$.

Preprosti ukazi s programom Matlab za izračun in prikaz moči na bremenu:

`Rb=0:0.1:50` % tvorimo niz vrednosti Rb od 0 do 50 s korakom 0,1

`Ug=12`

`Rg=2`

`P=Rb*Ug^2./(Rg+Rb).^2` % Izracun moci

`plot(Rb,P)` % izris

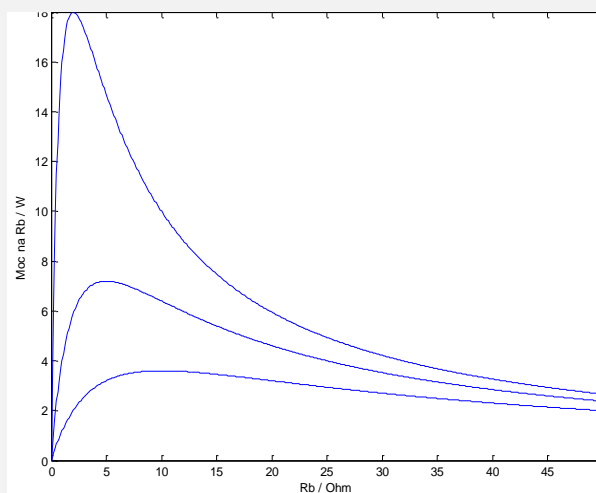
`xlabel('Rb / Ohm')`

`ylabel('Moc na Rb / W')`

% če želimo zrisati za več različnih vrednosti, zapišemo enačbe v datoteko in jo večkrat poženemo s spremenjeno vrednostjo Rg, pri čemer za risanje na isti graf dodamo ukaz

`hold on`

SLIKA: Prikaz moči za različne vrednosti notranje upornosti generatorja (2Ω , 5Ω in 10Ω).



MAKSIMALNA MOČ NA BREMENU

Vzemimo primer bremena, priključenega na realni napetostni vir, in se vprašajmo, kdaj je na bremenu največja moč. Grafična določitev je seveda enostavna, matematično pa jo določimo pri pogoju, da mora biti naklon premice na funkcijo moči enak nič (vzporeden z X osjo). Ker naklon premice dobimo z odvajanjem, moramo maksimalno moč iskati pri pogoju

$\frac{dP}{dR_b} = 0$. Ugotovimo, da z odvajanjem dobimo pogoj, da mora biti za maksimalno moč na bremenu

upornost bremena enaka notranji upornosti vira*:

$$R_b = R_g. \quad (25.6)$$

Kolikšna bo tedaj moč? Vstavimo pogoj ($R_b = R_g$) v enačbo za moč in dobimo:

$$P_{b,\max} = \frac{U_g^2}{4R_b}. \quad (25.7)$$

Primer izračuna maksimalne moči:

Določimo še maksimalno moč iz prejšnjega primera.

To bo tedaj, ko bo $R_b = R_g = 2 \Omega$, moč pa bo tedaj $P_{\max} = \frac{(12 \text{ V})^2}{4 \cdot 2 \Omega} = 18 \text{ W}$. Rešitev se seveda sklada z odčitkom maksimalne moči, ki jo poiščemo na grafu.

IZKORISTEK BREMENA

V smislu zakona o ohranitvi energije se del energije virov prenese na breme, drugi del pa lahko smatramo kot izgubna energija:

$$W_{\text{vhodna}} = W_{\text{izhodna}} + W_{\text{izgubna}}. \quad (25.8)$$

Izkoristek lahko definiramo kot kvocient izhodne in vhodne energije:

$$\eta = \frac{W_{\text{izhodna}}}{W_{\text{vhodna}}}. \quad (25.9)$$

Ker pa je energija pri enosmernih vezjih sorazmerna moči $W = Pt$, lahko definiramo izkoristek tudi kot kvocient moči na bremenu in moči vira (virov):

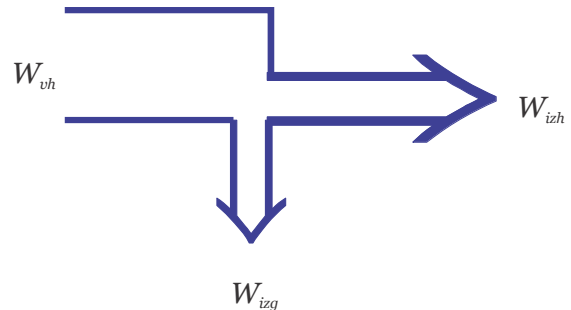
$$\eta = \frac{P_b}{P_g} \quad (25.10)$$

* $\frac{dP}{dR_b} = \left(\frac{U_g}{R_g + R_b} \right)^2 + 2 \left(\frac{U_g^2}{R_g + R_b} \right) (-1) \frac{R_b}{(R_g + R_b)^2} = 0$ in nato $\frac{dP}{dR_b} = \left(\frac{U_g}{R_g + R_b} \right)^2 \left(1 - \frac{2R_b}{R_g + R_b} \right) = 0 \Rightarrow R_b = R_g$

Izkoristek pogosto zapišemo v procentih, torej kot

$$\eta = \frac{P_b}{P_g} \cdot 100\% \quad (1.11).$$

Slika 23-26: Vhodna energija se prenese (transformira) na izgubno in izhodno.



Kako se spreminja izkoristek vezja pri bremenu, priključenem na realni napetostni vir? Izkoristek opisuje enačba

$$\eta = \frac{P_b}{P_g} = \frac{I^2 R_b}{I^2 (R_b + R_g)} = \frac{R_b}{R_b + R_g}. \quad (25.12)$$

Pri majhnih bremenskih upornostih gre izkoristek proti nič, pri velikih pa proti vrednosti 1 (100%). (glej sliko)

Kakšna pa je razlika med izkoristkom in maksimalno močjo na bremenu?

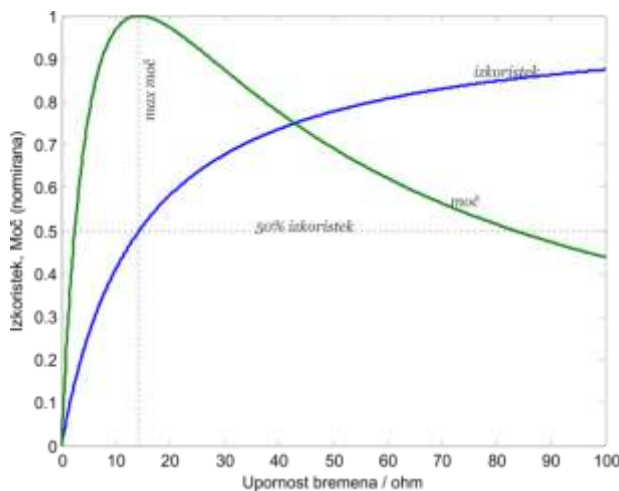
Ugotovimo, da je izkoristek vezja nekaj drugega kot maksimalna moč na bremenu. Največji izkoristek dosežemo pri čim večji upornosti bremena, vendar je tedaj moč na bremenu majhna v primerjavi z maksimalno. Pri maksimalni moči pa je izkoristek vezja ravno 50%.

Kako določimo izkoristek povezanih sistemov?

Če imamo dva zaporedno vezana sistema, lahko izkoristek določimo kot

$$\eta = \frac{P_{izh(2)}}{P_{vh(1)}} = \frac{P_{izh(2)}}{P_{vh(1)}} \cdot \frac{P_{iz(1)}}{P_{vh(2)}} = \eta_1 \eta_2,$$

torej kot produkt posameznih izkoristkov.



```
Rg=14.32
Rb=0:0.1:100
izkoristek=Rb./(Rb+Rg);

P=Rb./(Rb+Rg).^2
plot(Rb,izkoristek,Rb,P/max(P),
'li ... newwidth',2)
xlabel('Upornost bremena / ohm')
ylabel('Izkoristek, Moč (normirana)')
```

Slika 23-27: Izkoristek vezja (modra črta) in moč na bremenu ob spreminjanju bremenske upornosti.

26. Analiza enosmernih vezij

Vsebina poglavja: metoda Kirchoffovih zakonov, metoda zančnih tokov, metoda spojiščnih potencialov.

Spoznali smo že oba Kirchoffova zakona in zvezo med tokom in napetostjo na upor. Zaradi pomembnosti velja ponoviti:

$$1. \text{ KZ: } \sum_{i=1}^N I_i = 0 \text{ v spojišču} \quad (26.1)$$

$$2. \text{ KZ: } \sum_{i=1}^M U_i = 0 \text{ v zanki} \quad (26.2)$$

$$\text{Ohmov zakon: } U = RI \quad (\text{povezuje } U \text{ in } I) \quad (26.3)$$

S pomočjo teh zvez lahko analiziramo (določimo tok in napetost na poljubnem elementu vezja) poljubno vezje. Le zapisati moramo ustrezno število enačb in rešiti sistem enačb. Spoznali pa bomo tudi metode, ki nam omogočajo analizo vezij z manjšim številom enačb.

Najbolj tipične metode reševanja (analize) vezij so:

- 1) Metoda Kirchoffovih zakonov
- 2) Metoda zančnih tokov
- 3) Metoda spojiščnih potencialov

1. METODA KIRCHOFFOVIH ZAKONOV (METODA VEJNIH TOKOV)

Je najosnovnejša metoda, ki se (kot že ime pove) poslužuje uporabe Kirchoffovih zakonov. Način reševanja bomo prikazali na konkretnem primeru.

Najprej moramo označiti smeri tokov v vsaki veji. Ta označitev je lahko poljubna, potrebno pa se je zavedati (kot smo že omenili!), da smer toka (skozi upor) določa tudi smer napetosti. Za lažjo analizo bomo označili tudi spojišča vezja ter tri zanke. Toka v veji s tokovnim virom nismo posebej označili, saj ta tok lahko enačimo kar s tokom tokovnega generatorja.

Zapišemo lahko štiri enačbe z uporabo 1 KZ:

$$\text{spojišče (0): } -I_4 - I_3 - I_5 = 0$$

$$\text{spojišče (1): } I_g + I_1 + I_4 = 0$$

$$\text{spojišče (2): } -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{spojišče (3): } -I_2 - I_g + I_5 = 0$$

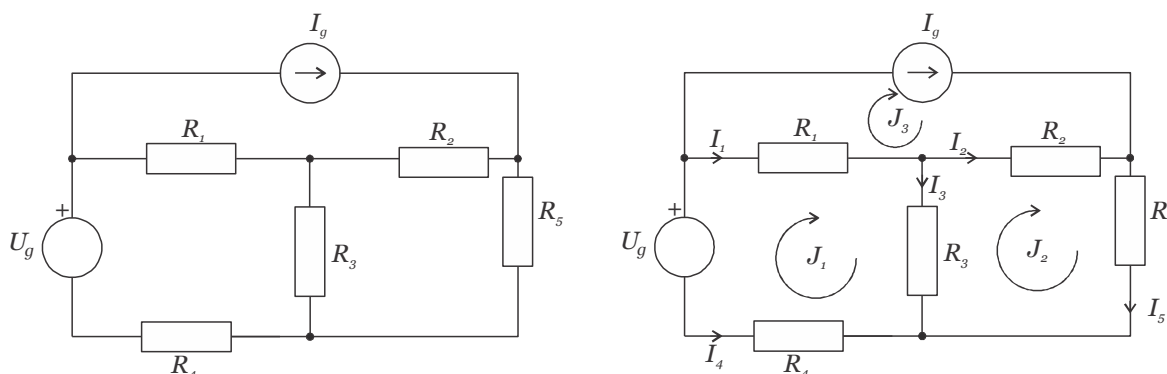
In dve enačbi po 2 KZ:

$$\text{zanka } (J_1): -U_g + I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0$$

$$\text{zanka } (J_2): -I_3 R_3 + I_2 R_2 + I_5 R_5 = 0$$

Za zanko J_3 ne zapišemo enačbe saj ni potrebna. Zančni tok J_3 je znan in kar enak (vsiljenem) toku tokovnega generatorja.

Poglejmo število neznank in število enačb, ki smo jih zapisali. Število neznank je enako številu neznanih vejskih tokov, torej 5. Število enačb, ki smo jih zapisali pa je 6. Ena od enačb je torej odveč, je redundančna. Izkaže se, da je odveč ena od enačb po 1 KZ. Izločimo lahko torej poljubno spojiščno enačbo*.

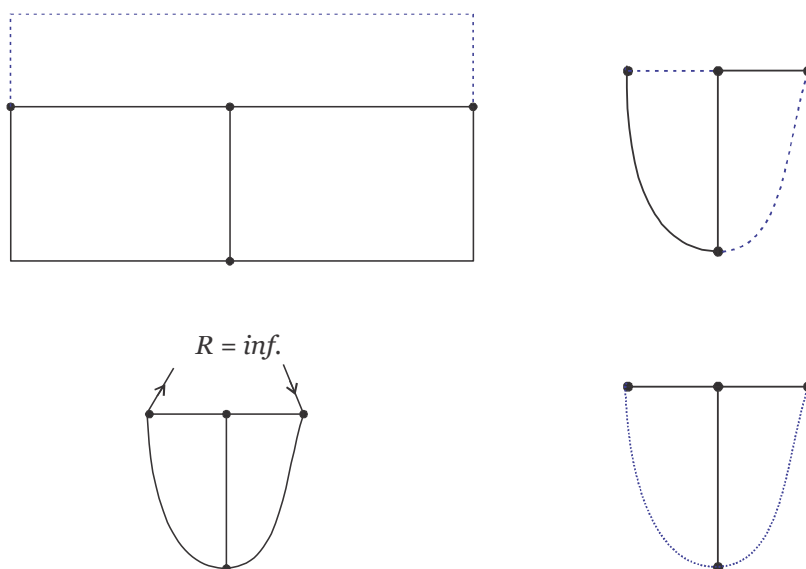


Slika 23-28: Vezje s podatki: $U_g = 10 \text{ V}$, $I_g = 2 \text{ A}$, $R_1 = 20 \ \Omega$, $R_2 = 5 \ \Omega$, $R_3 = 10 \ \Omega$, $R_4 = 1 \ \Omega$, $R_5 = 40 \ \Omega$

TEORIJA GRAFOV (NA KRATKO)

Reševanje takega sistema enačb zahteva sistematičen pristop. Pomagamo si lahko s teorijo grafov, kjer najprej narišemo **graf vezja**, nato **drevo vezja** in vrišemo **dopolnilne veje (kite)**.

Graf vezja narišemo kot vezje, v katerem ostanejo le veje vezja. Drevo vezja sestavimo iz vej vezja, s katerimi moramo doseči vsa spojišča vezja, pri tem pa ne smemo zaključiti nobene zanke. Veje, ki jih nismo uporabili za tvorjenje drevesa, so dopolnilne veje in jih dorišemo s črkanimi črtami†.



Slika 23-29: Levo: graf vezja, Desno: drevo vezja in dopolnilne veje – kite.

* Seštejte spojiščne enačbe (1), (2) in (3) ter množite z -1. Dobili boste spojiščno enačbo (0).

† Vezje, ki ga obravnavamo je nekoliko specifično, ker v eni veji vsebuje idealni tokovni vir. V smislu analize vezij (teorije grafov) take veje ne moremo smatrati kot dopolnilne veje. Za te je značilno, da vsebujejo elemente s končno notranjo upornostjo.

Število enačb, ki jih moramo zapisati po 1 KZ je torej enako $N - 1$, kjer je N število spojišč, število enačb po 2 KZ pa je enako številu dopolnilnih vej. V našem primeru bomo potrebovali $4-1 = 3$ spojiščne enačbe in 2 zračni enačbi.

ZAPIS IN REŠEVANJE SISTEMA ENAČB

Sistem enačb rešimo tako, da ga zapišemo v matrični obliki. Upoštevali bomo spojiščne enačbe od (1) do (3)). Npr prvo spojiščno enačbo (1) zapišemo v obliki

$$1 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + 1 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 = -I_g,$$

drugo v obliki

$$-1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 = 0$$

itd. Koeficiente prepisemo v matriko in dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ 0 \\ I_g \\ U_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Potrebno je le še vstaviti vrednosti in rešiti sistem enačb zapisan v matrični obliki $A \cdot x = b$ (včasih zapišemo tudi kot $\underline{A}x = \underline{b}$), kjer je A matrika velikosti 5×5 , x vektor neznanek (tokovi I_1 do I_5) in b vektor sestavljen iz vrednosti na desni strani matričnega zapisa. Sistem enačb pogosto rešimo z uporabo računalniških programov.

S pomočjo Matlaba izračunani vejski toki so $I_1 = -0,2243 \text{ A}$, $I_2 = -1,42953 \text{ A}$ itd.

Sistem enačb rešimo s programom Matlab. Tvoriti moramo matriko A in vektor b ter rešiti sistem enačb tipa $Ax=b$. Rešitev dobimo z Matlabovim ukazom $x=A \backslash b$.

```
>> A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;20,0,10,-1,0;0,5,-10,0,40]
```

```
A =
```

```
 1  0  0  1  0
-1  1  1  0  0
 0 -1  0  0  1
20  0 10 -1  0
 0  5 -10  0 40
```

```
>>b = [ -2; 0 ;2 ;10 ;0];
```

```
>> x=A\b
```

```
x = -0.2243 -1.4953  1.2710 -1.7757  0.5047
```

2. METODA ZANČNIH TOKOV

Metoda zančnih tokov temelji na uporabi 2. K.Z., kjer namesto vejskih tokov uporabimo zančne toke. Slednje tvorimo iz vejskih tako, da je zančni tok v veji, ki ni skupna drugi (sosednji) zanki, kar enak vejskemu toku. Če pa je veja skupna večim zankam, je enak vsoti ali razliki vejskih tokov, odvisno od označitve smeri zančnih tokov. Potrebno število enačb je enako številu dopolnilnih vej.

Za analizirano vezje veljajo sledeče zveze med zančnimi in vejskimi toki:

$$J_1 = -I_4$$

$$J_2 = I_5$$

$$J_3 = I_g$$

in

$$I_3 = J_1 - J_2$$

$$I_2 = J_2 - J_3$$

Če vejske toke izražene z zančnimi vstavimo v napetostni enačbi po 2. K.Z., dobimo sistem zančnih enačb. Običajno je lažje napisati enačbe tako, da sproti upoštevamo padce napetosti v zanki:

$$\text{zanka } (J_1): -U_g + (J_1 - J_3)R_1 + (J_1 - J_2)R_3 - J_1R_4 = 0$$

$$\text{zanka } (J_2): (J_2 - J_1)R_3 + (J_2 - J_3)R_2 + J_2R_5 = 0$$

$$\text{zanka } (J_3): J_3 = I_g$$

Dobimo sistem treh enačb za tri neznane toke. V osnovi le sistem dveh, saj je tretja že določena:

$$J_3 = I_g = 2 \text{ A.}$$

Obstaja še drug pristop k tvorjenju sistema enačb, ki seveda privede do ekvivalentnega zapisa enačb. Pri tem pristopu najprej upoštevamo tok zanke in vse padce napetosti v zanki, ki jih ta tok povzroča. Nato ustrezno prištejemo ali odštejemo še prispevke ostalih zančnih tokov.

Primer:

$$J_1(R_1 + R_3 + R_4) - J_3R_1 - J_2R_3 - U_g = 0$$

$$J_2(R_2 + R_3 + R_5) - J_1R_3 - J_3R_2 = 0$$

REŠEVANJE SISTEMA DVEH ENAČB

Vstavimo vrednosti v zgornjo enačbo in zapišemo enačbi v matematični obliki (brez enot):

$$J_1 31 - 2 \cdot 20 - J_2 10 - 10 = 0$$

$$J_2 55 - J_1 10 - 2 \cdot 5 = 0$$

Enačbi z dvema neznankama lahko preprosto rešimo tako, da iz ene enačbe izrazimo eno od spremenljivk in jo vstavimo v drugo enačbo. Npr. iz 1. enačbe izrazimo J_2 in dobimo $J_2 = 0,1(J_1 - 31 - 50)$. To vstavimo v drugo enačbo in dobimo $0,1(J_1 - 31 - 50)55 - J_1 = 10$ in iz nje izračunamo $J_1 = 1,7757 \text{ A}$ in z vstavitvijo te vrednosti v eno od enačb še $J_2 = 0,5047 \text{ A}$. Ugotovimo lahko, da je dobljeni tok J_1 skladen z rešitvijo, ki smo jo dobili po sistemu reševanja Kirchoffovih enačb: $J_1 = -I_4$.

3. METODA SPOJIŠČNIH POTENCIALOV

Metoda temelji na uporabi 1. K.Z., po katerem zapišemo vsoto tokov v spojišče, ki mora biti enaka nič. Toke izrazimo s potenciali spojišč, razen, če je tok v veji znan, npr. tokovni generator. Označimo vsa spojišča in jim pripišemo neznane potenciale. Potencial enega spojišča lahko prosto izberemo. Ponavadi mu priredimo vrednost 0 V (ga ozemljimo). Če se v veji nahaja upor, izrazimo tok v veji s padcem napetosti na uporu ($I = U / R$), napetost na uporu pa z razliko potencialov spojišč. V primeru, da se v veji nahaja tudi napetostni generator, je potrebno vrednost napetosti generatorja ustrezno upoštevati (odšteti ali prišteti razliki potencialov).

Število potrebnih enačb je enako $N-1$, kjer je N število spojišč. V primeru ki ga obravnavamo je to $4-1=3$.

Reševanje konkretnega primera: V smislu sistematičnega pristopa bomo predpostavili, da vsi toki izhajajo iz spojišča (čeprav smo jih originalno označili drugače).

Spojišče (1): Tok v tej veji določimo iz padca napetosti na uporu R_4 . Napetost na tem uporu pa je razlika potencialov spojišč (1) in (0). Ker smo spojišče (0) ozemljili, potencial spojišča (1) pa je V_1 , je tudi napetost med spojiščema enaka V_1 . Napetost na uporu R_4 je manjša od V_1 za padec napetosti na napetostnem viru, torej je enaka $V_1 - U_g$, tok skozi upor R_4 pa je $\frac{V_1 - U_g}{R_4}$. Na podoben način

določimo ostale toke. Za spojišče (1) dobimo

$$\frac{V_1 - U_g}{R_4} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} + I_g = 0,$$

za spojišče (2)

$$\frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_3} + \frac{V_2 - V_3}{R_2} = 0$$

in za spojišče (3)

$$-I_g + \frac{V_3 - V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_5} = 0.$$

Dobimo sistem treh enačb za tri neznane potenciale. Vstavimo vrednosti in rešimo sistem enačb:

$$\frac{V_1 - 10}{1} + \frac{V_1 - V_2}{20} + 2 = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{20} + \frac{V_2}{10} + \frac{V_2 - V_3}{5} = 0$$

$$-2 + \frac{V_3 - V_2}{5} + \frac{V_3}{40} = 0$$

oziroma

$$V_1 \left(1 + \frac{1}{20}\right) - V_2 \frac{1}{20} = -2$$

$$-V_1 \frac{1}{10} + V_2 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) - V_3 \frac{1}{5} = 0$$

$$-V_2 \frac{1}{5} + V_3 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{40}\right) = 2$$

```
% Uporaba Matlaba
```

```
>> A=[1+1/20,-1/20,0;-1/20,1/10+1/20+1/5 ...  
,-1/5;0,-1/5,1/5+1/40]
```

```
A =
```

```
1.0500 -0.0500 0  
-0.0500 0.3500 -0.2000  
0 -0.2000 0.2250
```

```
>> b=[-2+10;0;2]
```

```
b =
```

```
8  
0  
2
```

```
>>V=A\b
```

```
ans = 8.2243 12.7103 20.1869
```

Potenciali spojišč izračunani s pomočjo Matlaba so: $V_1 = 8,2243$ V, $V_2 = 12,71$ V in $V_3 = 20,1869$ V.

Vejske toke določimo iz že zapisanih zvez, pri čemer pa je sedaj potrebno upoštevati predhodno izbrano smer tokov. Tako je na primer tok I_1 enak $\frac{V_1 - V_2}{R_2} = (8,224 - 12,71) \text{ V} / 20 \Omega = -0,2243$ A.

(Opozorilo: Zaradi preglednosti pisanja enačb namenoma pri vstavljanju številskih vrednosti v enačbe nismo pisali tudi enot. Enačbe smo torej spremenili v matematično obliko. Ko določimo rešitev, pripišemo ustrezne enote).

REŠEVANJE SISTEMA ENAČB S POMOČJO KRAMERJEVEGA PRAVILA

En od načinov reševanja sistema enačb je z uporabo t.i. Kramerjevega pravila*. Pri tem moramo izračunati determinante matrik. Rešitev za potencial V_1 je na primer $V_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$, kjer je

determinanta matrike A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1,05 & -0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,35 & -0,2 \\ 0 & -0,2 & 0,225 \end{vmatrix} = 1,05(0,35 \cdot 0,225 - (-0,2)(-0,2)) - (-0,05)(0,05 \cdot (-0,225) - (-0,2) \cdot 0) + 0 \cdot (0,05 \cdot (-0,2) - (0,35) \cdot 0)$$

$$\det(A) = 0,0401.$$

Determinanto $\det(A_1)$ pa dobimo tako, da prvi stolpec matrike A nadomestimo z vektorjem b):

* Gabriel Cramer (1704 - 1752): http://en.wikipedia.org/wiki/Cramer's_rule

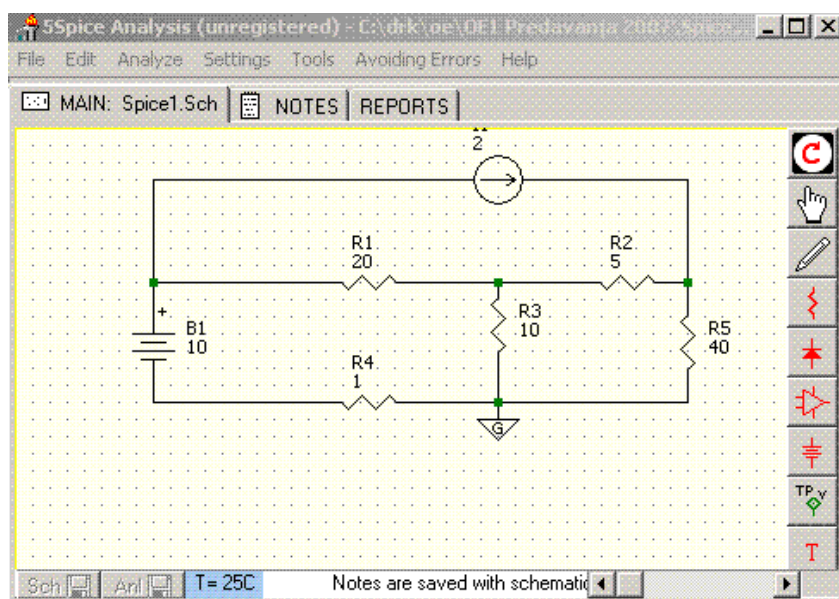
$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 8 & -0,05 & 0 \\ 0 & 0,35 & -0,2 \\ 2 & -0,2 & 0,225 \end{vmatrix} = 0,330$$

$$\text{Dobimo: } V_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 8,22 \text{ V .}$$

* ANALIZA VEZIJ S PROGRAMSKIM ORODJEM SPICE

Pri bolj kompleksnih vezjih, še posebno, ko analiziramo vezja z dodanimi nelinearnimi elementi, se lahko poslužimo analize vezij s programskimi paketi. En najbolj znanih je zasnovan na Spice simulacijah*. Na spletu je mogoče dobiti vrsto programov, ki temeljijo na Spice simulaciji. Poglejmo si primer uporabe programa 5Spice, ki omogoča tudi uporabo grafičnega vmesnika. Ta je še posebno primeren za popolne začetnike, saj ni potrebno poznati sintakse zapisov, pač pa le nekaj osnovnih pravil. Eno od teh je npr, da je potrebno eno od spojišč ozemljiti.

Vsa računalniška orodja, ki temeljijo na Spice simulacijah, temeljijo na enakem načinu zapisovanja (sintakse) povezav med elementi.



Slika 23-30: Primer simulacije vezja s programom 5Spice, www.5spice.com. (pomembno pri delu s programom je to, da mora biti eno od spojišč vedno ozemljeno)

Spice sintaksa obravnavanega vezja:

```
Ug 1 10 DC 10.0V ; Vg povezuje spojišči 1 in 10, kjer smo spojišče 10 dodali med Ug in R4
Ig 1 3 2          ; Ig je med spojiščema 1 in 3, nejeva vrednost je 2
R1 1 2 20
R2 2 3 5
R3 2 0 10
R4 10 0 1
R5 3 0 40
.DC Ug 10 20 2    ; naredi sken Ug-ja od 10 do 20 V po 2 V in omogoci .PRINT ukaz
.PRINT DC I(R1) I(R2) ; izpiše toke na uporih R1 in R2
.END
```

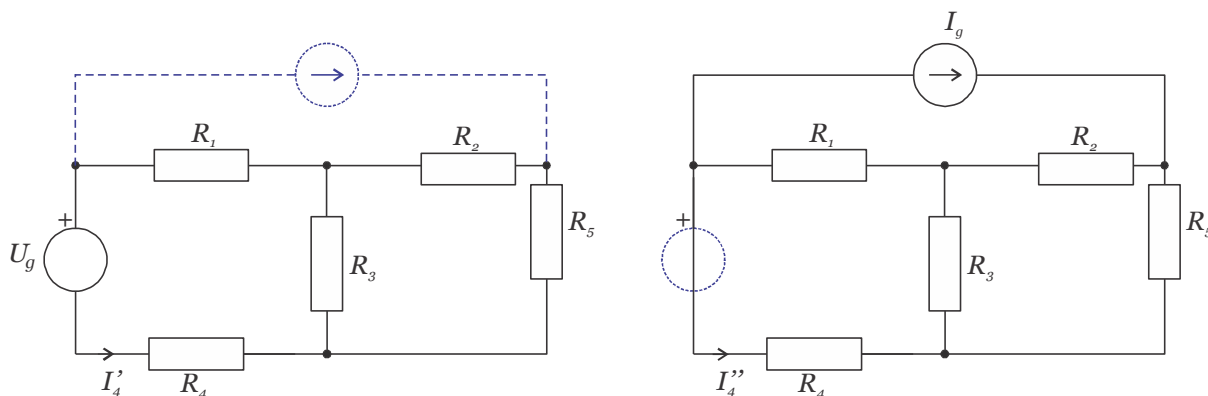
* SPICE je sicer delo univerzitetnega laboratorija (Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, ZDA), ga pa pod tem imenom poznamo tudi v profesionalnih orodjih (npr. HSPICE in PSPICE). Pri nas veliko uporabljamo varianto [LT SPICE](#),

27. Stavki (Teoremi)

Vsebina poglavja: Stavek superpozicije, stavek Thévenina in Nortona, maksimalna moč na bremenu (drugič), stavek Tellegena.

1. STAVEK SUPERPOZICIJE

Ta stavek določa, da lahko poljubno vezje sestavljeno iz linearnih elementov z več viri poenostavimo tako, da analiziramo vezje s posamičnim vklopom posameznih virov v vezje. Toke, ki jih izračunamo na tako poenostavljenem vezju na koncu seštejemo (superponiramo). V našem konkretnem primeru bi lahko določili toke v vejah vezja za dve poenostavljeni vezji. V prvem bi bil vklopljen le napetostni vir, v drugem pa le tokovni vir. *Izklopljen napetostni vir nadomestimo s kratkim stikom, tokovni vir pa odklopimo - odprte sponke.*



Slika 27-1: Vezje nadomestimo z dvema enostavnejšima vezjema. V prvem vezju obdržimo le napetostni vir, tokovnega pa izklopimo (odprte sponke), v drugem vezju pa obdržimo tokovni vir in odklopimo napetostnega (nadomestimo s kratkim stikom).

Primer izračuna toka s pomočjo stavka superpozicije:

Določimo tok I_4 s pomočjo metode superpozicije.

1. vezje: Ko izklopimo tokovni vir, lahko vse upornosti združimo v eno (nadomestno) tako, da zaporedno seštejemo upora R_2 in R_5 ter nato obema vzporedno še R_3 ter nato vsem še zaporedno R_1 in R_4 . Dobimo nadomestno upornost $R_{\text{nad}} = (R_2 + R_5) \parallel R_3 + R_1 + R_4 = 29,18 \Omega$. Tok $I_{4(1)} = -10 \text{ V} / 29,18 \Omega = -0,3427 \text{ A}$. (Bodite pozorni na to, da je predznak toka negativen.)

2. vezje: Ko izklopimo napetostni vir, nam ostane vezje, pri katerem ne moremo preprosto seštevati uporov. Zopet moramo uporabiti eno od metod za reševanje vezij. Vzemimo kar metodo zračnih tokov, ki se je za analizo konkretnega vezja izkazala kot zelo primerna. Razlika v že nastavljenih enačbah bo le ta, da sedaj nimamo napetostnega vira:

$$J_1 31 - 2 \cdot 20 - J_2 10 = 0$$

$$J_2 55 - J_1 10 - 2 \cdot 5 = 0$$

Izračun nam da vrednosti $J_1 = 1,4330$ A in $J_2 = 0,4424$ A. $I_{4(2)}$ je enak $-J_1$ in bo torej enak

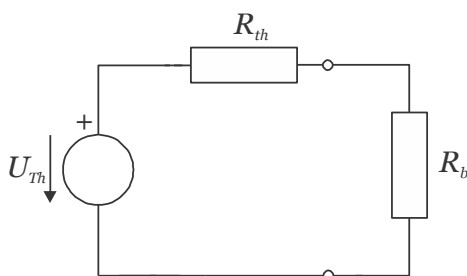
$I_{4(2)} = -1,4330$ A. Na koncu seštejemo obe vrednosti in dobimo

$$I_4 = I_{4(1)} + I_{4(2)} = -0,3427 \text{ A} - 1,4330 \text{ A} = -1,7757 \text{ A}.$$

Ugotovimo lahko, da je rešitev enaka, kot smo jo dobili z uporabo metode Kirchoffovih zakonov.

2. STAVEK THÉVENINA

Théveninov stavek »pravi«, da je mogoče poljubni del linearnega vezja med poljubnima sponkama nadomestiti z realnim napetostnim virom, torej z idealnim napetostnim virom (ki ga imenujemo Théveninov) in notranjo (Théveninovo) upornostjo.



Slika 27-2: Shematski prikaz Théveninovega nadomestnega vira.

DOLOČITEV THÉVENINOVE NADOMESTNE NAPETOSTI IN UPORNOSTI

Napetost Thévenina določimo (izračunamo ali izmerimo) kot napetost odprtih sponk na mestu vezja, ki ga želimo nadomestiti. Théveninovo upornost določimo kot notranjo upornost vezja, merjena (računana) s sponk nadomestitve, pri čemer napetostne vire v vezju kratko sklenemo (kratek stik), tokovne pa razklenemo (odprte sponke).

Matematično:

Napetost Thevenina je napetost odprtih sponk med sponkama nadomestitve:

$$U_{Th} = U_o \quad (27.1)$$

Upornost Thevenina je notranja upornost računano (merjeno) med sponkama nadomestitvepri kratko sklenjenih napetostnih virih in razklenjenih tokovnih virih:

$$R_{Th} = R_{notranja} \quad (27.2)$$

Primer uporabe Theveninovega teorema:

Kot primer odklopimo iz vezja iz prejšnjega poglavja upor R_3 in preostalo vezje med sponkama nadomestimo s Théveninovim nadomestnim vezjem.

Če iz vezja odklopimo upor R_3 in zapišemo zanj enačbo, dobimo

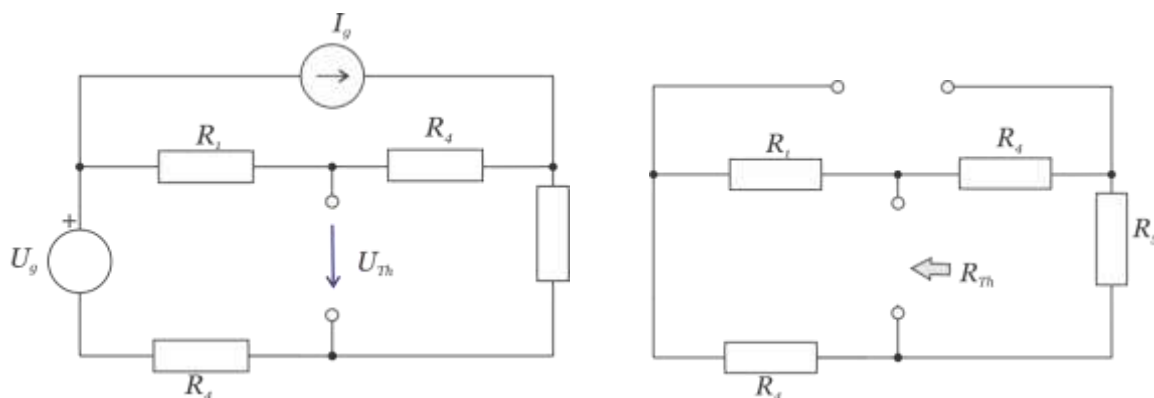
$$-U_g + J(R_1 + R_2 + R_4 + R_5) - I_g(R_1 + R_2) = 0.$$

Po ustavitvi vrednosti določimo zančni tok $J = 0,91$ V. Théveninova napetost je enaka napetosti odprtih sponk med sponkama nadomestitve in je torej enaka vsoti padcev napetosti na uporih R_2 in R_5 : $U_{Th} = (J - 2 \text{ A})5 \Omega + J40 \Omega = \underline{\underline{30,91 \text{ V}}}$.

Upornost Thévenina je $R_{Th} = (R_1 + R_4) \parallel (R_2 + R_5) = \underline{\underline{14,32 \Omega}}$.

Sedaj lahko tvorimo nadomestno vezje in dodamo upor R_3 ter izračunamo tok skozi upor:

$$I_3 = \frac{U_{Th}}{R_3 + R_{Th}} = 1,270 \text{ A}.$$



Slika 27-3: Levo: primer določitve napetosti Thévenina med odprtimi sponkama. Desno: Primer določitve Théveninove upornosti med sponkama pri kratkostičenem napetostnem viru in odklopljenem tokovnem viru.

Drug način določanja Théveninove nadomestne upornosti je s pomočjo toka kratkega stika med sponkama nadomestitve. Ta način pride v poštev predvsem tedaj, ko ne moremo preprosto sešteti vzporedne in zaporedne vezave uporov. S pomočjo računalnika najlaže uporabimo kar matriko za izračun tokov po metodi Kirchoffovih zakonov pri čemer bo upornost $R_3 = 0 \Omega$. Dobimo $I_K = 2,1587$ A

$$\text{in } R_{Th} = \frac{U_{Th}}{I_K} = \frac{30,91 \text{ V}}{2,1587 \text{ A}} \doteq \underline{\underline{14,32 \Omega}}.$$

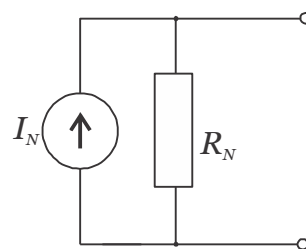
Omenimo še tretjo možnost. Upornost vezja med sponkama pri izklopljenih virih lahko dobimo tudi tako, da na sponki priključimo poljubno izbrano napetost in izračunamo tok v vezje. Iz kvocienta med napetostjo in tokom sledi upornost. V našem konkretnem primeru je ta način v osnovi enak prvemu načinu, saj izračunamo upornost Thévenina kot

$$R_{Th} = \frac{U_{sponk}}{I_{sponk}} = \frac{I_{sponk} \cdot (R_1 + R_4) \parallel (R_2 + R_5)}{I_{sponk}} = (R_1 + R_4) \parallel (R_2 + R_5) = \underline{\underline{14,32 \Omega}}.$$

Ta način bi prišel v poštev, če upornosti v vezju ne bi mogli kar preprosto sešteti.

3. STAVEK NORTONA

Velja podobna definicija kot za Théveninovo nadomestno vezje, le da v tem primeru poljubni del linearne vezja nadomestimo z Nortonovim nadomestnim vezjem, ki je sestavljeno iz idealnega tokovnega (Nortonovega) vira in vzporedne (Nortonove) notranje upornosti.



Ker lahko vedno realni napetostni vir nadomestimo z realnim tokovnim, ta zveza velja tudi med Théveninovim in Nortonovim teoremom. V osnovi določimo tok Nortonovega vira kot tok kratkega stika, upornost Nortona pa na enak način kot upornost Thévenina. Velja torej:

$$I_N = I_K \text{ in tudi } I_N = U_{Th} / R_{Th} \text{ ter } R_N = R_{Th} .$$

MAKSIMALNA MOČ NA BREMENU – DRUGIČ

Théveninov stavek je posebno primeren za izračun **maksimalne moči na uporu (bremenu)**. Pri analizi maksimalne moči bremena, priključenega na realni napetostni vir, smo ugotovili, da bo moč na bremenskem uporu največja tedaj, ko bosta bremenska in generatorska upornost enaki. Da dosežemo maksimalno moč, mora biti upornost bremena torej enaka upornosti Thévenina:

$$R_{b(P_{max})} = R_{Th} , \quad (27.3)$$

maksimalna moč pa bo tedaj

$$P_{max} = \frac{U_{Th}^2}{4R_b} \quad (27.4).$$

Primer izračuna maksimalne moči na bremenu:

V našem vezju smo analizirali razmere moči na bremenskem uporu R_3 . Tedaj bo torej

$$R_{b(P_{max})} = 14,32 \Omega , \text{ maksimalna moč pa } P_{max} = \frac{U_{Th}^2}{4R_b} = \frac{(30,91V)^2}{4 \cdot 14,32\Omega} = \underline{\underline{16,68 \text{ W}}}.$$

Pogosto rečemo tudi, da je v tem primeru breme **prilagojeno** na vir. To je torej tedaj, ko je na breme prenešana maksimalna moč iz vira.

Izrišimo moč na bremenu s pomočjo računalnika, pri čemer si bomo zopet pomagali s programom Matlab. Vzemimo izračunani vrednosti $U_{Th} = 30,91$ in $R_{Th} = 14,32 \Omega$ in spreminjajmo R_b od 0Ω do 50Ω in izračunajmo moč na bremenu. Z Matlabovimi ukazi:

```
Rb=0:0.1:50 % tvorimo niz vrednosti Rb od 0 do 50 s korakom 0,1
```

```
Uth=30.91
```

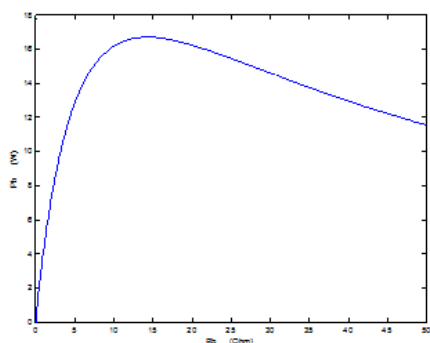
```
Rth=14.32
```

```
P=Rb*Uth^2./(Rth+Rb).^2 % Izracun moci
```

```
plot(Rb,P) % izris
```

```
xlabel('Rb (Ohm)')
```

```
ylabel('Pb (W)')
```



Ugotovimo lahko, da izris ustreza našim pričakovanjem, da bo torej maksimalna moč na bremenu tedaj, ko bo upornost bremena enaka upornosti Thévenina. Ugotovimo tudi, da vrednost največje moči ustreza izračunani. Kako to ugotovimo z uporabo Matlaba? Z ukazom `max(P)` izvemo največjo vrednost niza P, v katerem so shranjene vrednosti moči. Dobimo 16,68. Kaj pa vrednost upornosti pri maksimalni moči? Najprej ugotovimo indeks, pri katerem nastopa v nizu maksimalna moč z uporabo ukaza `i=find(P==max(P))`, nato pa z `Rb(i)` dobimo vrednost 14,3. Dobljena vrednost se razlikuje od točne za 0,02, kar je za pričakovati, saj smo numerično izračunavali moči le za vrednosti upornosti, ki se razlikujejo za 0,1 Ω . Namen tega pojasnjevanja je v tem, da bi vzpodbudil bralca k uporabi in raziskovanju izjemnih zmožnosti programa Matlab.

Da se prepričamo v pravilnost izračunov, lahko uberemo še eno pot. Izhajamo direktno iz izračunavanja tokov v vezju s pomočjo metode Kirchoffovih zakonov ter določimo moč na uporu R_3 pri različnih vrednostih te (bremenske) upornosti. Preprosto, s pomočjo enačbe $P_3 = I_3^2 R_3$. S pomočjo računalnika lahko zelo hitro določimo maksimalno moč, tudi če formule ne poznamo. Iz že znane matrike:

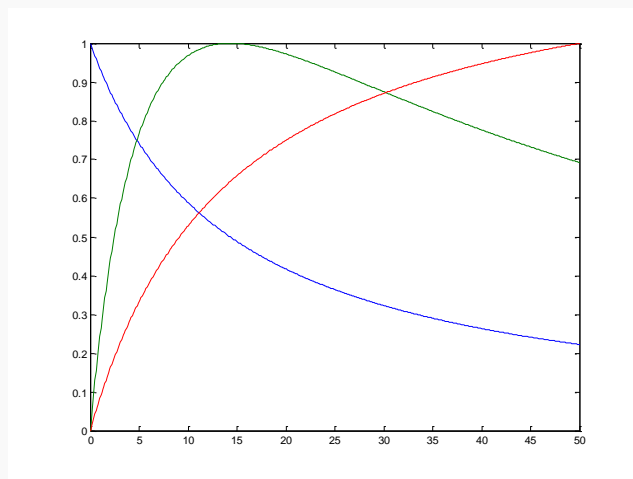
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ 0 \\ I_g \\ U_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

spreminjajmo R_3 od 0Ω do 50Ω in izračunavajmo tokove ter moč na uporu R_3 in rezultate izrišimo. Dobimo (Matlab):

```
b=[-2;0;2;10;0] % vektor znanih vrednosti / desna stran enacbe
II=[] % prazen vektor, potreben za shranjevanje izracunanih vrednosti moči
for R3=0:0.1:50 % zanka povecuje upornosti od 0 po 0.1 do 50 Ω
    A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;R1,0,R3,-R4,0;0,R2,-R3,0,R5]
    I=A\b % izracun tokov za določen R3

    II=[II,I(3)] % shranjevanje vrednosti toka I3 v vektor, ki se zaporedno polni
end % konec zanke

R3=0:0.1:50 % vektor upornosti
P=II.^2.*R3 % izracun moci
plot(R3,P) % izris
```



Slika prikazuje normirane krivulje toka, napetosti in moči na uporu R_3 v že znanem vezju. Sami ugotovite, katera krivulja prikazuje določeno veličino. To boste ugotovili zelo hitro, če si zamislite Théveninovo nadomestno vezje (Normiranje izvedemo tako, da poiščemo največjo vrednost v nizu (določene veličine) in delimo vse vrednosti s to vrednostjo.) Ukazi v Matlabu: $U=R_3 \cdot II$; $\text{plot}(R_3, II/\max(II), R_3, P/\max(P), R_3, U/\max(U))$

4. STAVEK TELLEGENA

Stavek Tellegena pravi preprosto to, da je **moč bremen enaka moči virov**. Pri tem lahko vir deluje v generatorskem načinu (pozitivna moč) ali v bremenskem načinu (negativna moč). To zapišemo kot

$$\sum_i P_g(i) = \sum_j P_b(j). \quad (1.5)$$

V našem konkretnem primeru je moč generatorjev enaka

$$P_g = U_g(-I_4) + I_g(V_3 - V_1) = \underline{\underline{41,6822 \text{ W}}},$$

moč na bremenih pa

$$P_b = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = \underline{\underline{41,6822 \text{ W}}}.$$

INDEKS

- ampermeter, 231
- baterija, elektrolitska, 171
- baterije, 203
- Coulombov zakon, 29
- daljnovodna vrv, 125, 128
- delo, 72, 159
- dielektrik, 138
- dipol, 140
- dopolnilne veje, 247
- drevo vezja, 247
- dualnost, 197
- ekvipotencialna ploskev, 100, 118
- ekvipotencialne ploskve, 81
- električna poljska jakost, 33, 100
- električna susceptibilnost, 143
- električni dipol, 110
- električni dipolni moment, 110
- energija, 159
- energija delca, 104
- energija, kondenzator, 162
- energija, porazdeljen naboj, 164
- Faraday, 63, 131
- faradayeva kletka, 94
- Faradayeva kletka, 95
- Gaussov zakon, 63, 67, 143
- gostota dipolskih momentov, 141
- gostota električnega pretoka, 144
- gostota energije, 165
- gostota moči, 193
- gostota polariziranega naboja, 142
- gostota toka, 182
- gostotnice, 65
- graf vezja, 247
- izkoristek bremena, 244
- Joseph John Thomson, 107
- Joulov zakon, 193
- kapacitivnost, 131
- kapacitivnost, dva valja, 134
- kapacitivnost, koaksialni kabel, 133
- kapacitivnost, merjenje, 132
- kapacitivnost, ploščni kondenzator, 133
- kapacitivnost, računanje, 132
- kapacitivnost, sferični kondenzator, 133
- kapacitivnost, valj-zemlja, 134
- kapacitivnost, vrv - zemlja, 127
- kartezični koordinatni sistem, 45
- Kirchoffov zakon, 215, 216
- Kirchoffov zakon, drugi, 83
- koaksialni kabel, 86
- kondenzator, 131, 169
- kondenzator, lastnosti, 172
- kondenzator, ploščni, 84
- kondenzator, realni, 199
- kondenzator, sferični, 89
- kondenzator, tipi, 173
- kondenzator, valjni, 86
- kondenzatorska vezja, 135, 137
- kontinuitetna enačba, 22, 184
- koordinatni sistemi, 45
- Kramerjevo pravilo, 251
- krogelni koordinatni sistem, 48
- Leidenska steklenica, 170
- linijska gostota naboja, 41
- maksimalna moč na bremenu, 244
- mejni pogoji, 154, 194
- merske enote, 11
- metoda Kirchoffovih zakonov, 246
- metoda zančnih tokov, 249
- mobilnost, 189
- moč na bremenu, 242
- modificiran Gaussov zakon, 144
- mostično vezje, 227
- naboj (elektrina), 16
- naelektrena krogla, 68
- naelektrena ravnina, 70
- naelektrena valja, 69
- napetost, 83, 159
- napetost, viri, 200
- napetostni delilnik, 224
- napetostni vir, 218
- Ohmov zakon, 189, 217
- okovinjenje, 118
- polariziran naboj, 141
- polje enakomerno naelektrene premice, 56
- polje naelektrene ravnine, 60
- polje premega naboja, 55
- polje v osi diska, 59
- polje v osi obroča, 58
- potencial, 78, 159
- potencial dipola, 113
- potencial sistema točkastih nabojev, 80
- potencial točkastega naboja, 79
- potencialna energija, 72, 75, 159, 160
- potencialna energija sistema nabojev, 76
- površinska gostota naboja, 41
- pretočne cevke, 65

pretok električnega polja, 63
relativna dielektrična konstanta, 145
relativna dielektričnost, 139
silnice, 63
specifična električna prevodnost, 189
specifična upornost, 190, 192
Spice, 253
stavek Nortona, 257
stavek superpozicije, 254
stavek Tellegena, 260
stavek Thévenina, 255
superpozicija, 31, 34
temperaturne lastnosti, 229
tok, 187
tok, konduktivni, 188

tok, konventivni, 187
tokovni delilnik, 226
tokovni vir, 220
tokovno polje, 182
transformacija zvezda – trikot, 228
upornost, 190
valjni koordinatni sistem, 46
vektor polarizacije, 141, 143
vezani naboj, 140
vezava uporov, 223
voltmeter, 230
volumska gostota naboja, 40
zakon o ohranitvi naboja, 16
Zakon o potencialnosti elektrostaticnega polja, 75
zrcaljenje, 124