Razširjen Amperov zakon

Problem uporabe Amperovega zakona v obliki $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$, kjer smo za gostoto toka vzeli konduktivni tok ($\vec{J} = \gamma \vec{E}$) se pokaže, ko želimo to obliko zapisa uporabiti v kondenzatorju. Za kondenzator vemo, da v njem ni konduktivnega toka, saj je specifična prevodnost med ploščama tako majhna, da jo običajno lahko kar zanemarimo.

Vzemimo, da se tok v vodniku s priključenim kondezatorjem časovno spreminja. Tedaj bo tok tudi skozi kondenzator vendar ne konduktivni. Dokler smo zunaj kondenzatorja in zaobjamemo žico z zanko L1 bo veljalo

$$\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{kond} \tag{15.1}$$

Če pa postavimo zanko L2 znotraj kondenzatorja dobimo z dosedanjim zapisom Amperovega zakona $\oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$. Očitno zakonu manjka še komponenta toka, ki bi opisovala tudi tak tok, ki je v kondenzatorju. Poglejmo, kako ga določimo: Če se bo tok v prevodniku spreminjal časovno, se bo na ploščah kondezatorja časovno spreminjala velikost naboja, skladno z enačbo $i = i_c = \frac{dQ}{dt}$. Naboj na ploščah pa lahko izrazimo z gostoto površinskega naboja σ, tega pa z gostoto električnega pretoka *D*:

$$i_c = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(\sigma A)}{dt} = \frac{d(DA)}{dt} = \frac{dD}{dt} A \tag{15.2}$$

Očitno moramo v Amperovem zakonu v primeru izmeničnih signalov upoštevati poleg konduktivnega še obliko toka skozi kondenzator. Temu toku, ki sicer ni vezan na kondenzatorje pač pa na vse dielektrične snovi, imenujemo ***premikalni tok***, pogosto pa tudi ***poljski tok***[1].

Če je ta tok nehomogen po preseku, ga zapišemo z integralom kot

$$i_c = \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \tag{15.3}$$

Če sedaj dodamo še to obliko toka k zapisu enačbe (15.1), dobimo

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{kond} + i_c = \int_A \left(\vec{J}_{kond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \tag{15.4}$$

---

[1] Ta tok je prvi vpeljal J.C. Maxwell in ga poimenoval premikalni (ang. displacement current). To je tok, ki ni posledica potovanja naboja v smislu konduktivnega ali konvektivnega toka pač pa le manjšega premika proti ali stran od elektrod ter posledica rotacije dipolov v dielektriku. Pri nas se ta tok pogosto imenuje tudi poljski tok.

To obliko imenujemo tudi razširjen Amperov zakon. V splošnem bi morali v poštev vzeti vse toke, ki prispevajo k nastanku magnetnega polja, torej tudi konventivni tok.[2]

Kot sledi iz enačbe (15.4), lahko za ***gostoto premikalnega toka*** pišemo tudi

$$\vec{J}_c = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (15.5)$$

Iz elektrostatike vemo, da lahko gostoto električnega pretoka izrazimo z električno poljsko jakostjo in vektorjem električne polarizacije $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, tako lahko ločimo dva člena gostote premikalnega toka

$$\vec{J}_c = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \qquad (15.6)$$

Prvi člen bi veljal za vakuum (zrak), drugi pa še dodatni prispevek zaradi polarizacije snovi.

Kdaj bi bil za analizo bolj pomemben konduktivni in kdaj premikalni tok? Do odgovora na to vprašanje najlaže pridemo tako, da predpostavimo harmonično vzbujanje, pri čemer bo električno polje enako $E = E_0 \cos(\omega t)$. V primeru linearne snovi lahko upoštevamo zvezi $J = \gamma E$ in $D = \varepsilon E$, s čimer bosta konduktivni in premikalni tok enaka $\gamma E_0 \cos(\omega t)$ in $-\omega \varepsilon E_0 \sin(\omega t)$. Kateri tok bo prevladal, je odvisno od amplitud tokov, torej od razmerja $\frac{\gamma}{\omega \varepsilon}$. Pri visokih frekvencah in majhnih prevodnostih bo očitno prevladoval premikalni (poljski) tok, v nasprotnem pa konduktivni.

Primer 1: Ocenimo, pri katerih frekvencah bo prevladoval konduktivni in pri katerih premikalni tok? Za dober prevodnik vzemimo $\gamma = 10^7$ S/m, za dober izolator pa $\gamma = 10^{-10}$ S/m, dielektričnost zaokrožimo na $\varepsilon = 10^{-11}$ F/m. Razmerje tokov naj bo najmanj 1000.

[2] Tok zaradi magnetizacije pa je upoštevan že v samem zapisu Amperovega zakona z vektorjem H. Če bi pisali Amperov zakon z vektorjem B, bi morali upoštevati tok zaradi magnetizacije na desni strani enačbe.

Konduktivni tok bo prevladoval, ko bo veljalo $\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \geq 1000$, oziroma

$\omega \leq \frac{\gamma}{1000 \cdot \varepsilon} = \frac{10^7}{10^3 \cdot 10^{-11}} = 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$. Ugotovimo, da bo konduktivni tok v dobrem prevodniku prevladoval nad premikalnim do zelo visokih frekvenc.

Premikalni tok bo prevladoval, ko bo veljalo $\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \leq 1000$, oziroma

$\omega \geq \frac{\gamma}{1000 \cdot \varepsilon} = \frac{10^{-10}}{10^3 \cdot 10^{-11}} = 10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$. Ugotovimo, da bo premikalni tok v dobrem izolatorju (recimo kar zraku) prevladoval nad konduktivnim od zelo nizkih frekvenc dalje.

Primer 2: Difuzija ravninskega polja v prevodniku (dodatno, kot informacija)

Vzemimo primer, ko upoštevamo le konduktivni tok[3]. Zanima nas časovno in krajevno spreminjanje Hja in Eja v prevodniku pri čemer bomo zaradi siceršnje kompleksnosti reševanja poenostavili problem v toliko, da bomo predpostavili, da ima polje H le Y komponento, polje E pa le X komponento, gibljeta pa naj se v Z smeri.

Postopek je tak, da moramo najprej diskretizirati Amperov in Faradayev zakon, zapisati ustrezno diferencialno enačbo in jo rešiti.

Vzemimo dve zanki ki sta pravokotni druga na drugo (glej sliko). Za zanko L1, ki leži v XZ ravnini zapišemo diskretiziran Amperov zakon v obliki

$$\left(H_y(z,t) - H_y(z+\Delta z)\right) \cdot l \cong \gamma E_x(z + \frac{\Delta z}{2}) \cdot \Delta z \cdot l$$

Enačbo delimo z delta z in limitiramo, pri čemer diference postanejo parcialni odvodi

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x \qquad (15.7)$$

Poleg te enačbe diskretiziramo še Faradayev zakon indukcije, ki ga zapišemo po zanki L2, ki leži v XY ravnini in dobimo

---

[3] V naprotnem primeru, če bi upoštevali le premikalni tok, bi nas rešitev privedla do valovne enačbe. Ta problematika posega v področje, ki ga pri tem predmetu ne obravnavamo. Za osnovne informacije se poslužite učbenika A.R. Sinigoj: Osnove elektromagnetiko, sicer pa iz omenjenega področja študijske literature ne primanjkuje.

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{15.8}$$

Sedaj moramo enačbo (15.7) odvajati po Zju in jo uvrstiti v enačbo (15.8). Dobimo

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \gamma\mu \frac{\partial H}{\partial t} \tag{15.9}$$

To pa je tip diferencialne enačbe, katere rešitev je v obliki sinusne funkcije z dodanim eksponentnim naraščanjem ali padanjem

$$H_y(z,t) = H_{y0} e^{px} \sin(\omega t + qz) \tag{15.10}$$

Konstanti p in q bi dobili z odvajanjem rešitve in uvrstitvijo v izpeljane zveze. Dobili bi

$$p = q = \pm\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \pm\frac{1}{\delta} \tag{15.11}$$

Delta bo torej $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$ in jo imenujemo ***vdorna globina*** ali tudi ***globina prodiranja***. Pri tej globini bo polje padlo za faktor 1/e.

Rešitev bo torej oblike

$$H_y(z,t) = H_{y0} e^{\pm\frac{x}{\delta}} \sin(\omega t \pm \frac{z}{\delta}) \tag{15.12}$$

Primer 3: Doličimo globine prodiranja polja v bakren vodnik za signale s frekvencami 100 MHz, 1 MHz, 1 kHz in 50 Hz. $\gamma_{Cu} = 6 \cdot 10^7$ S/m.

Izračun: Iz enačbe $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$ določimo δ = 6,5 μm pri 100 MHz, 65 μm pri 1MHz, 2 mm pri 1 kHz in 9,2 mm pri 50 Hz.

Kako do polja Ex? S pomočjo enačbe (15.7), torej tako, da odvajamo rešitev za polje H in delimo s specifično prevodnostjo. Dobimo

$$E_x(z,t) = \pm\frac{1}{\gamma\delta} H_{y0} e^{\pm z/\delta} \left(\sin(\omega t \pm z/\delta) + \cos(\omega t \pm z/\delta)\right) \tag{15.13}$$

S preureditvijo dobimo

$$E_x(z,t) = \pm\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} H_{y0} e^{\pm z/\delta} \left(\sin(\omega t + \frac{\pi}{4} \pm z/\delta) \right) \tag{15.14}$$

Zanimivosti:

- Električno in magnetno polje sta fazno premaknjena za $\pi / 4$
- Obe polji padata (usihata) eksponentno
- Razmerje amplitud je $\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}$, ki ima enoto upornosti in je za zrak 150 μΩ.