Izmenični signali – kompleksni račun

Kompleksni račun je pomembno orodje za analizo vezij z izmeničnimi – harmoničnimi signali. V osnovi diferencialne enačbe lahko z uporabo kompleksnega računa »prevedemo« na preproste algebraične. V veliko pomoč nam bo tudi grafičen prikaz s t.i. kazalci v kompleksni ravnini.

Eulerjev obrazec. Izhajamo iz Eulerjevega obrazca

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) \tag{18.1}$$

i je imaginarno število in je enako $\sqrt{-1}$. V elektrotehniki ga nadomestimo s črko *j* preprosto zato, da ga ne zamenjamo s tokom.

Kompleksno število. Kompleksno število ima realni in imaginarni del. Običajno kompleksna števila označimo s črtico pod črko. Primer takega števila je npr. $\underline{Z} = 2 + j3$. 2 je realni del, 3 pa imaginarni del kompleksnega števila. Tega lahko prikažemo v kompleksni ravnini kot točko s koordinatama na realni in imaginarni osi (2, j3). Še bolj pogosto tako število prikažemo s kazalcem - **kompleksorjem**. Pogosto zapišemo kompleksno število tudi v polarni obliki, z amplitudo in faznim kotom. Vzemimo, da imamo kompleksno število $\underline{Z} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} + j\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = X + jY$. Narišimo ga s kazalcem (kompleksorjem) v kompleksni ravnini. Za polarno obliko zapisa potrebujemo amplitudo kompleksorja in fazni kot. Velja $|\underline{Z}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$, fazni kot pa je $\varphi = Arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$.

Kompleksno število $\underline{Z} = 2 + j3$ lahko torej zapišemo tudi v obliki $3{,}6e^{j56^0}$. Iz polarnega zapisa nazaj na realni in imaginarni del pridemo z uporabo Eulerjevega obrazca.

SLIKA: Prikaz kompleksnega števila v kompleksni ravnini. Lahko ga s kazalcem, podam z realnim in imaginarnim delom, ali pa z amplitudo in faznim kotom.

Zapis časovnega signala s kompleksorjem. S pomočjo Eulerjevega števila lahko zapišemo poljuben harmoničen signal, pri čemer pa poleg realnega dela pridobimo še imaginarni del. Vzemimo primer tokovnega signala oblike $i(t) = 2\cos(\omega t)\,\mathrm{A}$. Ta tok lahko zapišemo z upoštevanjem Eulerjevega obrazca kot $\underline{i}(t) = 2\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right)\mathrm{A}$. Tak kompleksen zapis toka seveda nima posebnega fizikalnega pomena. Fizikalno ima pomen le njegov realni del, torej $i(t) = \mathrm{Re}\{\underline{i}(t)\} = \mathrm{Re}\left\{2\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right)\mathrm{A}\right\} = 2\cos(\omega t)\,\mathrm{A}$.

Vzemimo sedaj bolj splošen zapis toka $i(t) = I\cdot\cos(\omega t + \varphi)$ in ga zapišimo z upoštevanjem Eulerjevega obrazca kot $\underline{i}(t) = I\left(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\right) = Ie^{j(\omega t + \varphi)} = Ie^{j\varphi}e^{j\omega t} = \underline{I}e^{j\omega t}$. Tvorili smo kompleksor harmonične funkcije $\underline{I} = Ie^{j\varphi}$, ki opisuje amplitudo in fazo (fazni kot) toka, kar pa je tudi popolna informacija o toku v vezju. Frekvenca signala se namreč pri linearnih vezjih, ki jih tu obravnavamo, ne spreminja. Dovolj bo torej, da bomo poznali le amplitudo in fazo (fazni kot) signala, seveda relativno na druge signale v vezju, če pa bi nas zanimal trenutni (časovni) potek signala, kompleksor pomnožimo s členom $e^{j\omega t}$ in upoštevamo le realni del.

Primer 1: Tok $i(t) = 3\cos(\omega t + 30^0)\mathrm{A}$ se razdeli v dve veji. Kolikšen je tok v drugi veji, če je v prvi veji tok enak $i_1(t) = 2\cos(\omega t - 45^0)\,\mathrm{A}$?

Izračun: Tokove zapišemo kot kompleksorje $\underline{I} = 3e^{j30}\mathrm{A}$, $\underline{I}_1 = 2e^{-j45}\mathrm{A}$ in ker mora biti vsota vseh tokov v spojišče enaka nič, bo to veljalo tudi za kompleksorje $\underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1$. Torej lahko zapišemo

$\mathrm{I}_2 = 3e^{j30}\mathrm{A} - 2e^{-j45}\mathrm{A} = 3(\cos(30^0) + j\sin(30^0))\mathrm{A}+2(\cos(-45^0) + j\sin(-45^0))\mathrm{A}$.

$\underline{I}_2 = 2{,}6\ + j1{,}5 - \left(1{,}414\ - j1{,}414\right) = 1{,}18\ + j2{,}9 = 3{,}15e^{j67{,}9^0}\,\mathrm{A}$. Če želimo zapisati tok v drugi veji v časovni obliki, pomnožimo kompleksor z $e^{j\omega t}$ in vzamemo realni del signala

$i_2(t) = \mathrm{Re}\left\{3{,}155e^{j67{,}9^0}\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{3{,}15e^{j(\omega t + 67{,}9^0)}\mathrm{A}\right\} = 3{,}15\cos(\omega t + 67{,}9^0)\,\mathrm{A}$.

Prikažimo to še v kompleksni ravnini. Kot vidimo lahko v kompleksni ravnini rišemo posamezne kompleksorje in jih seštevamo ali odštevamo na enak način kot vektorje.

SLIKA: Primer seštevanja dveh kompleksorjev v kompleksni ravnini. Princip je enak kot pri seštevanju vektorjev.

Kompleksorji toka in napetosti na elementih vezja. Kako si torej pomagamo s kompleksnim računom pri analizi vezij s harmoničnimi signali? Poglejmo si zveze med toka in napetosti na elementih vezja:

UPOR:

Vzemimo $i(t) = I\cos(\omega t)$, kompleksor bo kar $\underline{I} = Ie^{j0} = I$. Napetost na uporu bo $u(t) = R \cdot i(t) = RI\cos(\omega t)$ oziroma kot kompleksor napetosti $\underline{U} = R\underline{I}$.

Ponovno vidimo, da sta kompleksorja toka in napetosti na uporu v fazi.
SLIKA.

TULJAVA:

Vzemimo zopet $i(t) = I\cos(\omega t)$ s kompleksorjem $\underline{I} = Ie^{j0} = I$. Ugotovili smo že, da napetost na tuljavi prehiteva tok za čertrino periode in bo torej enaka $u(t) = I\omega L\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Če ta signal zapišemo kot kompleksor, dobimo $\underline{U} = I\omega Le^{j\frac{\pi}{2}} = I\omega L \cdot j$, kar v splošnem zapišemo v obliki

$$\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I} \qquad (18.2)$$

S prikazom v kompleksni ravnini ponovno ugotovimo, da napetost prehiteva tok za četrtino periode signala. SLIKA.

KONDENZATOR:

Vzemimo zopet $i(t) = I\cos(\omega t)$ s kompleksorjem $\underline{I} = Ie^{j0} = I$. Ugotovili smo že, da napetost na tuljavi zaostaja za tokom za čertrino periode in bo torej enaka $u(t) = \frac{I}{\omega C}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. Če ta signal zapišemo kot kompleksor, dobimo $\underline{U} = \frac{I}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{I}{e^{j\frac{\pi}{2}}\omega C} = \frac{I}{j\omega C}$, kar v splošnem zapišemo v obliki

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{j\omega C} \tag{18.3}$$

S prikazom v kompleksni ravnini ponovno ugotovimo, da napetost zaostaja za tokom za četrtino periode signala. SLIKA.

Kirchoffova zakona s kompleksnim zapisom.

Pri enosmernih vezjih je za 1 K.Z. veljalo $\sum_{k=1}^{m} I_k = 0$, kar bi pri izmeničnih lahko zapisali v obliki

$\sum_{k=1}^{m} i_k \cos(\omega t + \varphi_k) = 0$ oziroma izraženo s kompleksnim zapisom $\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\left\{\underline{I}_k e^{j\omega t}\right\} = 0$, kar bo veljalo, če bo

$$\sum_{k=1}^{m} \underline{I}_k = 0 \tag{18.4}$$

Podobno bi lahko pokazali, da za drugi K.Z. velja

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{U}_j = 0. \tag{18.5}$$

Torej je uporaba Kirchofovih zakonov veljavna tudi pri zapisu signalov s kompleksorji. Pomembni so torej le amplitude in fazni koti posameznih signalov.

Primer 1: Na harmonični napetostni vir amplitude 120V in frekvence 120 Hz priključimo breme (motor), ki ga predstavimo z zaporedno vezavo tuljave z induktivnostjo 35 mH in upornostjo 12 Ω. Določimo tok v vezje,napetost na uporu in napetost na tuljavi.

Izračun: napetostni signal lahko v časovni obliki zapišemo kot $u(t) = 120\cos(\omega t)\,\mathrm{V}$, kar zapišemo s kompleksorjem kot $\underline{U}_g = 120\,\mathrm{V}$. Napetost generatorja bo enaka napetosti na uporu in tuljavi, kar v kompleksnem zapišemo kot $\underline{U}_g = \underline{U}_R + \underline{U}_L$. Napetosti na uporu in tuljavi izrazimo s tokom in dobimo $\underline{U}_g = R\underline{I} + j\omega L\underline{I}$. Kompleksor toka bo tako $\underline{I} = \frac{\underline{U}_g}{R + j\omega L}$. Izračunamo

$\underline{I} = \dfrac{12\,\mathrm{V}}{12\,\Omega + j26,4\,\Omega} = \left(0,17 - j0,38\right)\mathrm{A} = 0,41e^{-j65.9^0}\,\mathrm{A}$. Tok v časovnem zapisu bo torej

$i(t) = 0,41\cos(\omega t - 65,9^0)\,\mathrm{A}$. Napetost na uporu bo $\underline{U}_R = R\underline{I} = 12\,\Omega \cdot 0,41e^{-j65,9^0}$ A=4,92$e^{-j65.9^0}$V

oziroma $u_R(t) = 4,92\cos(\omega t - 65,9^0)\mathrm{V}$, na tuljavi pa

$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I} = 26,4e^{j90^0}\,\Omega \cdot 0,41e^{-j65.9^0}\,\mathrm{A} = 10,8e^{j24,1^0}$V ali pa v obliki časovnega signala

$u_R(t) = 10,8\cos(\omega t + 24,1^0)\mathrm{V}$.

Impedanca in admitanca

Vzemimo poljuben tokovni signal v dvopolno vezje oblike $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$, ki ga opišemo s kompleksorjem $\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$. Na zunanjih sponkah povzroča padec napetosti oblike $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u)$, ki ga opišemo s kompleksorjem $\underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$. Kvocient komplesorjev napetosti in toka imenujemo **impedanca** ali kompleksna upornost (včasih rečemo tudi polna upornost):

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}. \qquad (18.6)$$

Velja $\underline{Z} = \dfrac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \dfrac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi}$.

Impedanca je kompleksno število. Absolutna vrednost impedance je kvocient med amplitudo napetosti in toka, argument pa je razlika med faznima kotoma napetostnega in tokovnega signala. Inverzna impedanci je **admitanca** ali kompleksna prevodnost

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}, \qquad (18.7)$$

ki jo tudi lahko predstavimo kot $\underline{Y} = \dfrac{1}{Z}e^{-j\varphi} = Ye^{-j\varphi}$.

Zapišimo kompleksne upornosti in prevodnosti za posamezne elemente vezja

	Impedanca	**Admitanca**
Upor	R	G
Tuljava	$j\omega L$	$\dfrac{1}{j\omega L}$

Kondenzator $\frac{1}{j\omega C}$ $j\omega C$

Zaporedna in vzporedna vezava impedanc in admitanc.

Če so impedance vezane zaporedno, jih lahko seštevamo tako, kot smo seštevali zaporedno vezane upornosti pri enosmernih vezjih

$$\underline{Z}_{zaporedno} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + ... \tag{18.8}$$

Enako lahko seštevamo tudi vzporedno vezane kompleksne prevodnosti

$$\underline{Y}_{vzporedno} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + ... \tag{18.9}$$

Primer 1: Določimo impedanco zaporedno vezanega upora R = 10 Ω in kondenzatorja C = 2 μF pri frekvenci ω = 1 kHz.

Izračun: Ker imamo zaporedno vezavo, pišemo

$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 100\Omega + \frac{1}{j10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}\,\Omega = (100 - j500)\,\Omega$. Dobimo realni in imaginarni del impedance, ki jo lahko predstavimo v kompleksni ravnini. Določimo lahko še amplitudo in fazo impedance kot $Z = \sqrt{100^2 + (-500)^2}\,\Omega = 510\,\Omega$ in fazni kot $\varphi = Arctg\left(\frac{-500}{100}\right) = -78,7^0$.

Primer 2: Določimo admitanco vzporedne vezave upora in tuljave iz prejšnjega primera.

Izračun: Tokrat seštevamo prevodnosti, rezultat bo $\underline{Y} = G + j\omega C$, številčno pa

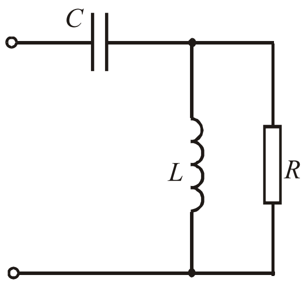
$\underline{Y} = 0,01\text{S} + j0,002\text{S} = 0,01 \cdot (1 + j0,2)\,\text{S} = 1,02 \cdot 10^{-2} \text{e}^{j11,3^0}\,\text{S}$

Primer 3: Tok v vezje vzporedne vezave kondenzatorja in upora iz primera 2 je $i(t) = 20 \cdot \cos(10^3\,\text{s}^{-1} \cdot t)\,\text{A}$. Določimo napetost na sponkah vezja.

Izračun: Admitanco smo že izračunali v primeru 2, tvorimo še kompleksor tokovnega signala $\underline{I} = 20\,\mathrm{A}$ in upoštevamo $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = \dfrac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \dfrac{20\,\mathrm{mA}}{1{,}02 \cdot 10^{-2} e^{j11{,}3^0}} = 1{,}96 e^{-j11{,}3^0}$. Da dobimo »nazaj« napetostni signal, moramo kompleksor napetosti pomnožiti z $e^{j\omega t}$ in upoštevati le realni del:

$u(t) = \mathrm{Re}\left\{1{,}96 e^{-j11{,}3^0} \cdot e^{j\omega t}\,\mathrm{V}\right\} = 1{,}96 \cos(10^{-3}\mathrm{s}^{-1} \cdot t - j11{,}3^0)\,\mathrm{V}$.

Primer 4: Na sponke vezja na sliki priključimo napetostni vir z amplitudo 400 V in frekvenco 50 Hz. Določimo impedanco vezja, tok v vezje in delovno moč. (C = 100 μF, L = 20 mH, R = 20 Ω)



Izračun: Izračunamo impedanco vezja $\underline{Z} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_L \| R$, kjer je $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C} = -j31{,}3\Omega$ in $Z_L = j\omega L = j6{,}28\Omega$. Impedanca vezja je torej

$\underline{Z} = (-j31{,}3 + 2{,}83 + j4{,}5)\,\Omega = (2{,}83 - j26{,}8)\,\Omega = 26{,}95 e^{-j84^0}\,\Omega$. Tok v vezje je

$\underline{I} = \underline{\mathrm{U}} \cdot \underline{\mathrm{Y}} = 400\,\mathrm{V} \cdot \dfrac{1}{26{,}95} e^{j84^0}\,\mathrm{S} = 14{,}84 e^{j84^0}\,\mathrm{A}$. Delovno moč dobimo iz

$P = \dfrac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi) = \dfrac{400\,\mathrm{V} \cdot 14{,}84\,\mathrm{A}}{2} \cos(-84^0) = 310{,}3\,\mathrm{W}$.