Izmenični signali pri koncentriranih elementih

V tem delu bomo obravnavali analizo vezij s koncentriranimi elementi pri vzbujanji z izmeničnimi, večinoma harmoničnimi signali. Elementi vezij bodo večinoma linearni. Zopet lahko razdelimo elemente vezij na aktivne in pasivne. Na aktivni strani imamo tokovne in napetostne generatorje, na pasivni pa upore, kondenzatorje in tuljave (tudi sklopljene).

Osnovni pojmi:

1) Večinoma bomo imeli opravka s periodičnimi signali. Času, v katerem se začne funkcija ponavljati pravimo **perioda** in jo označimo z veliko črko *T*. Za tako funkcijo velja $f(t) = f(t+T)$.

SLIKA: Primer periodičnega signala s periodo *T*.

2) **Frekvenca** takega signala je $f = \dfrac{1}{T}$, njena enota je s-1, pogosteje pišemo Hz. Pogosto uporabimo za opis signala tudi kotno frekvenco (kotno hitrost) ω, ki je enaka $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$.

3) Pogosto nas zanima **povprečna (ali tudi poprečna) vrednost** signala, ki je v osnovi površina pod krivuljo v eni periodi deljena s periodo ali matematično (za npr. tokovni signal)

$$I_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\cdot dt \qquad (16.1)$$

Ta zapis pogosto preuredimo tako, da namesto po času zapišemo integracijo po kotu ωt. V tem primeru je

$$I_{sr} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i(t)\cdot d(\omega t) \qquad (16.2)$$

4) Pogosto nas zanima tudi povprečna vrednost kvadrata signala. V tem primeru govorimo o **efektivni vrednosti**, ki jo določimo kot

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\cdot dt} \qquad (16.3)$$

Efektivna vrednost signala je posebno pomembna tedaj ko nas zanima povprečna moč ali energija signala, kar pa je v elektrotehniki pogosto.

5) Za karakterizacijo oblike signala lahko uporabimo **faktor oblike**, ki je kvocient med efektivno in povprečno vrednostjo

$$\text{faktor oblike} = \frac{I_{ef}}{I_{sr}}. \qquad (16.4)$$

Podobno je definiran **temenski faktor** kot kvocient maksimalne in efektivne vrednosti

$$\text{temenski faktor} = \frac{I_m}{I_{ef}} \qquad (16.5)$$

Primer 1: Določimo periodo, frekvenco, srednjo vrednost in efektivno vrednost signala na sliki. Določimo še faktor oblike in temenski faktor.

Dodatno: Določimo povprečno moč, ki se troši na uporu 3 kΩ, če gre skozi upor tok oblike na sliki.

Primer 2: Določimo srednjo in efektivno vrednost tokovnega signala oblike $i = I_m\sin(\omega t)$.

Rešitev: $I_{sr} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_m\sin(\omega t)\cdot d(\omega t) = 0$

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_m^2\sin^2(\omega t)\cdot d(\omega t)} = I_m\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{2}-0\right)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Ohmska upornost.

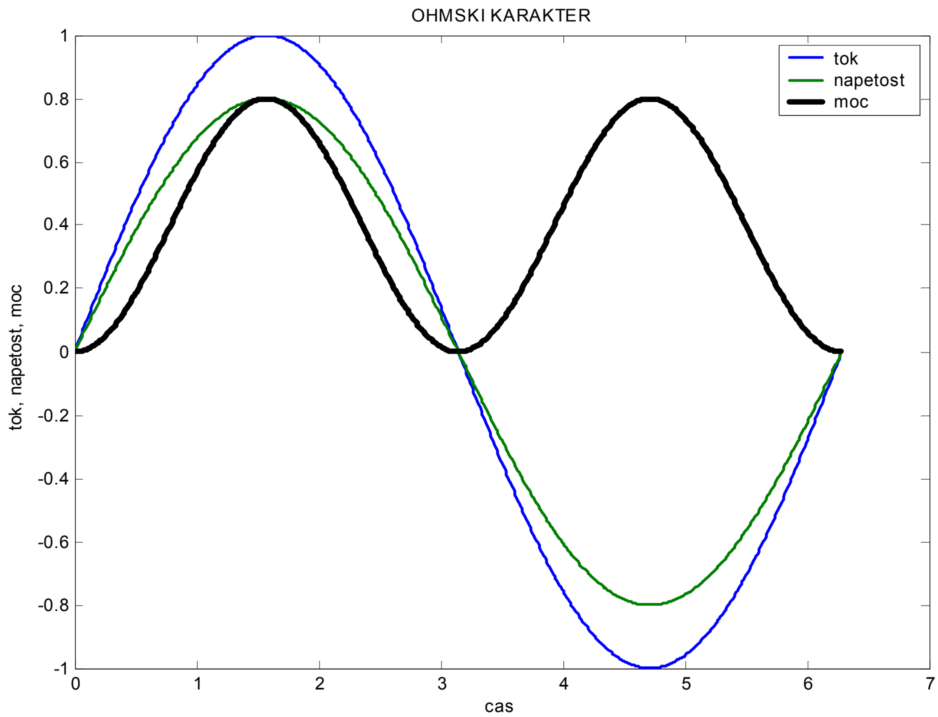
Velja zveza $u = R \cdot i$.

Če je tok sinusne oblike $i = I_m \sin(\omega t)$, je napetost tudi sinusne oblike

$u = RI_m \sin(\omega t) = U_m \sin(\omega t)$, kjer je $U_m = R \cdot I_m$.

Moč na uporu dobimo kot zmnožek toka in napetosti na uporu

$$p = u \cdot i = i^2 R = I_m^2 R \sin^2(\omega t) \tag{16.6}$$



SLIKA: Tok in napetost na uporu sta v fazi. Moč niha z dvojno frekvenco in ima enosmerno komponento, ki je povprečna moč.

Moč na uporu lahko z uporabo zveze $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\alpha)\right)$ zapišemo kot

$$\boxed{p = \frac{I_m^2 R}{2}\left(1 - \cos(2\alpha)\right)} \tag{16.7}$$

Ugotovimo, da ima (trenutna) moč na uporu tudi sinusno obliko vendar z dvojno frekvenco osnovnega signala, povprečna vrednost pa je $P = \frac{I_m^2 R}{2} = I_{ef}^2 R$.

Določimo še energijo v eni periodi (toplotna energija ali joulske izgube), ki bo

$$W_T = \int_0^T p \cdot dt = P \cdot T = I_{ef}^2 R \cdot T$$

<u>Skupne ugotovitve za upor:</u>

1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na uporu $u = U_m \sin(\omega t)$. Napetost na uporu je v fazi s tokom, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.
2) Amplitudo napetosti lahko zapišemo tudi kot $U_m = I_m \cdot R$, kjer je R ohmska upornost.
3) Napetost na uporu je neodvisna od frekvence tokovnega signala (in seveda obratno).
4) Moč na uporu niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala in ime enosmerno komponento. Ta predstavlja povprečno moč in je enaka $P = \frac{I_m^2 R}{2} = I_{ef}^2 R$.

Induktivna upornost.

Zveza med tokom skozi tuljavo in napetostjo na tuljavi je $u = \frac{d\Psi}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt}$. Če je tokovni signal oblike $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na tuljavi

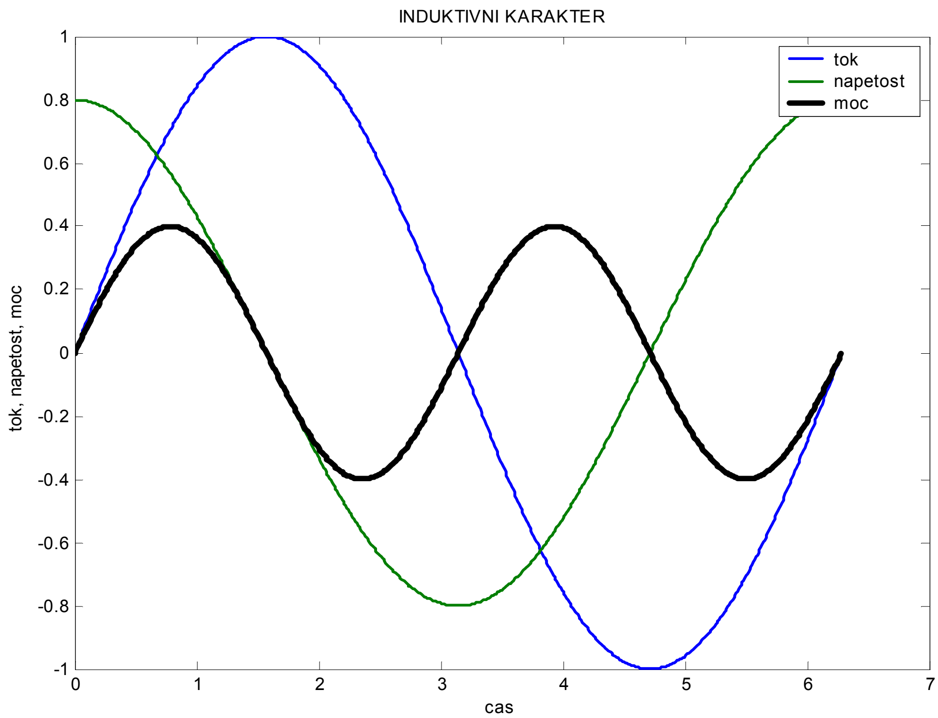
$$u = L \cdot \frac{d}{dt}\left(I_m \sin(\omega t)\right) = L \cdot I_m \omega \cos(\omega t) = U_m \cos(\omega t).$$

Amplituda napetosti bo torej $U_m = I_m \cdot \omega L$.

Trenutna moč bo zmnožek trenutne napetosti in toka na tuljavi, torej

$$p = iu = I_m \sin(\omega t) \cdot U_m \cos(\omega t) = \frac{I_m U_m}{2} \sin(2\omega t) \qquad (16.8)$$

Trenutna moč niha z dvojno frekvenco vendar je brez enosmerne komponente. Energija se v čertini periode porablja za grajenje magnetnega polja, v drugi četrtini pa se vrača v vezje. Povprečna (izgubna) moč bo 0 W.



SLIKA: Tokovni in napetostni signal na tuljavi sta zamaknjena za četrtino periode. Napetost prehiteva tok, moč na tuljavi niha z dvojno frekvenco in nima enosmerne komponente. Povprečna moč na tuljavi je nič.

Povprečna energija v tuljavi bo torej tudi nič, pogosto pa nas zanima maksimalna energija, ki pa bo

$$W_m = \frac{LI_m^2}{2} = L \cdot I_{ef}^2 \tag{16.9}$$

Skupne ugotovitve za tuljavo:

1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na tuljavi $u = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. Napetost na tuljavi prehiteva tok za četrtino periode signala, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.
2) Amplitudo napetosti lahko zapišemo tudi kot $U_m = I_m \cdot X_L$, kjer je X_L induktivna upornost ali reaktanca. Velja torej $X_L = \omega L$.
3) Višja kot bo frekvenca vzbujanja (toka), večji bo padec napetosti na tuljavi.
4) Za lažjo predstavo lahko tuljavo pri zelo nizkih frekvencah nadomestimo s kratkim stikom (zelo majhna upornost), pri zelo viskokih pa z odprtimi sponkami (zelo velika upornost).

5) Moč na tuljavi niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala, povprečna moč je enaka nič.
6) Maksimalna energija je v tuljavi vsako četrtino periode signala, ko je velika
$W_m = \frac{LI_m^2}{2} = L \cdot I_{ef}^2$.
7) Za vezja, v katerih napetost prehiteva tok rečemo, da imajo induktivni karakter.

Primer: Na toroidno jedro okroglega preseka površine 1 cm^2 srednjim polmerom 2cm z μ_r=100 navijemo 50 ovojev. Kolikšna je napetost na tuljavi, če jo vzbujamo s tokom $i = 0{,}1 \cdot \cos(100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t)\,\mathrm{A}$? Določite še povprečno in maksimalno moč na tuljavi.

Rešitev: Induktivnost toroida je $L = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 A}{2\pi r_s} = 0{,}25\,\mathrm{mH}$, torej je induktivna upornost $X_L = \omega \cdot L = 25\,\mathrm{m}\Omega$, maksimalna napetost $U_m = I_m \cdot X_L = 2{,}5\,\mathrm{mV}$. Če bi želeli zapisati napetost na tuljavi v obliki časovnega signala, bi morali upoštevati, da napetost na tuljavi tok prehiteva za fazni kot $\frac{\pi}{2}$, torej bo $u = 2{,}5 \cdot \cos(100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{2})\,\mathrm{mV}$.

Kapacitivna upornost

Zopet vzemimo sinusno obliko toka $i = I_m \sin(\omega t)$. Tok izrazimo s spremembo naboja na ploščah kondezatorja $i = \frac{dQ}{dt}$ in upoštevamo zvezo med nabojem na ploščah in napetostjo $Q = CU$ in dobimo $i = C\frac{du}{dt}$. Ker tok poznamo, zanima pa nas napetost, izrazimo napetost na kondenzatorju kot $u = \frac{1}{C}\int_0^t i \cdot dt + u(0)$. Za sinusno obliko toka bo napetost enaka

$$u = \frac{1}{C}\int_0^t I_m \sin(\omega t) \cdot dt + u(0) = -\frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t) = \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

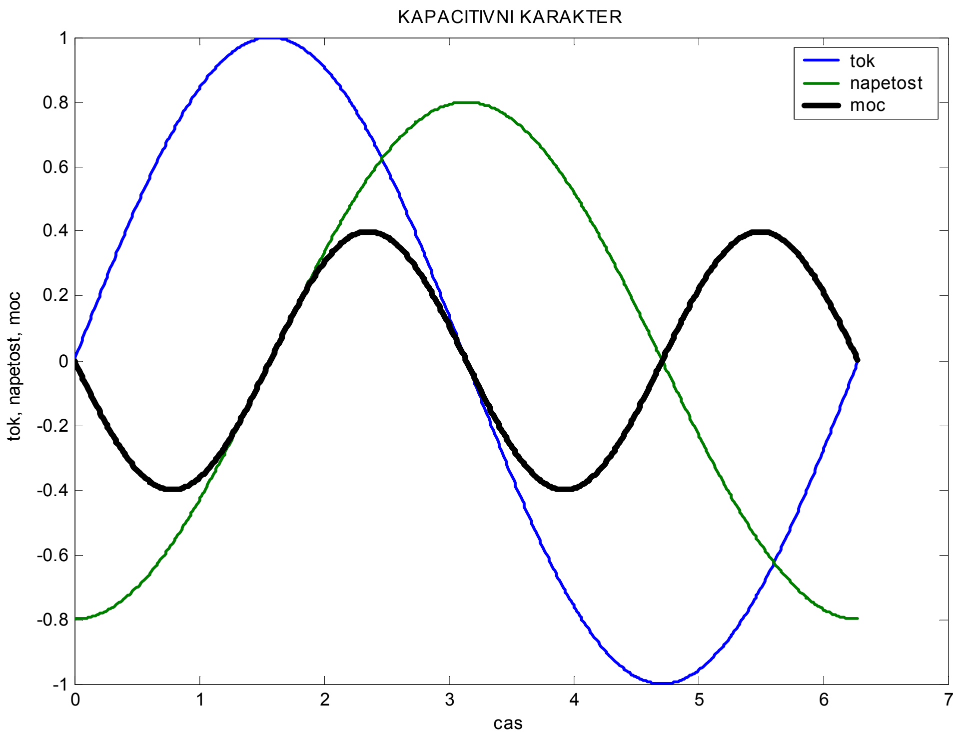
Amplituda napetosti bo torej $U_m = \frac{I_m}{\omega C}$.

Trenutna moč bo zmnožek trenutne napetosti in toka na tuljavi, torej

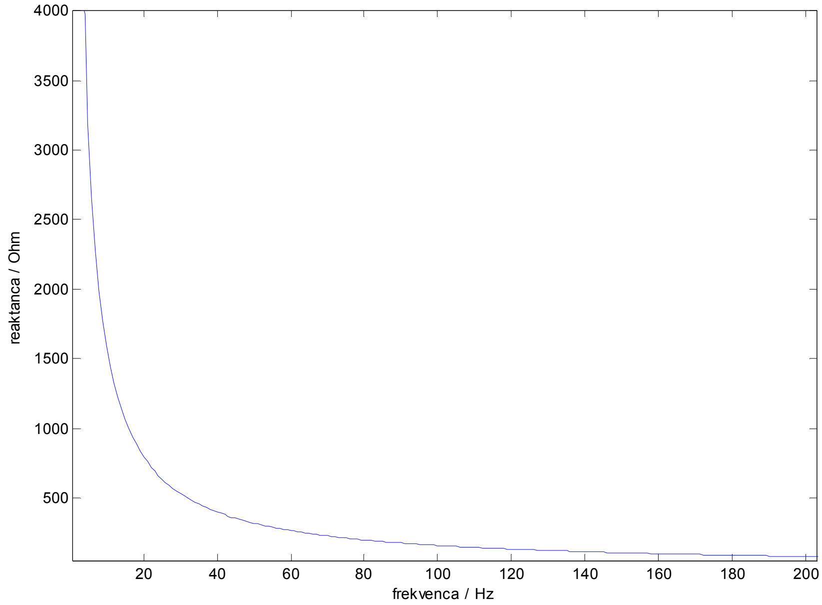
$$p = iu = -I_m \sin(\omega t) \cdot U_m \cos(\omega t) = -\frac{I_m U_m}{2} \sin(2\omega t) \tag{16.10}$$

Trenutna moč niha z dvojno frekvenco vendar je brez enosmerne komponente. Energija se v eni čertini periode porablja za grajenje električnega polja, v drugi četrtini pa se vrača v vezje. Povprečna (izgubna) moč bo 0 W.

Maksimalna energija shranjena v polju kondezatorja je $W = \frac{CU_m^2}{2}$.



SLIKA: Tokovni in napetostni signal na kondenzatorju. Napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtino periode signala. Povprečna moč je enaka nič.



SLIKA: Kapacitivna upornost se zmanjšuje s višanjem frekvence vzbujalnega signala s funkcijsko odvisnostjo $^1/_f$. Na sliki je reaktanca za C = 10 μF.

Skupne ugotovitve za kondenzator:

1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na kondenzatorju $u = U_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

   Tok na kondenzatorju prehiteva napetost za četrtino periode signala, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.

2) Amplitudo napetosti lahko zapišemo tudi kot $U_m = I_m \cdot X_C$, kjer je X_C kapacitivna upornost ali reaktanca. Velja torej $X_C = \frac{1}{\omega C}$.

3) Višja kot bo frekvenca vzbujanja (toka), manjši bo padec napetosti na tuljavi.

4) Za lažjo predstavo lahko kondezator pri zelo nizkih frekvencah nadomestimo z odprtimi sponkami (zelo velika upornost), pri zelo viskokih pa s kratkim stikom (zelo majhna upornost).

5) Moč na kondenzatorju niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala, povprečna moč je enaka nič.

6) Maksimalna energija je v kondenzatorju nastopi vsako četrtino periode signala, ko je velika $W = \frac{CU_m^2}{2}$.

7) Za vezja, v katerih napetost zaostaja za tokom rečemo, da imajo kapacitivni karakter.

Primer: Na kondenzator kapacitivnosti 8 μF priključimo vir napetosti sinusne oblike amplitude 1 V. Kolikšna mora biti frekvenca napetostnega signala, da bo imel tok kondezatorja amplitudo 2,5 mA?

Izračun: Iz $U_m = I_m \cdot X_C$ mora biti $X_C = \dfrac{1\,\mathrm{V}}{2{,}5\,\mathrm{mA}} = 400\,\Omega$ in iz $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ bo

$\omega = \dfrac{1}{400\,\Omega \cdot 8\,\mu\mathrm{F}} = 312{,}50\,\mathrm{s}^{-1}$ oziroma $f = \dfrac{312{,}50}{2\pi}\,\mathrm{Hz} \approx 50\,\mathrm{Hz}$.