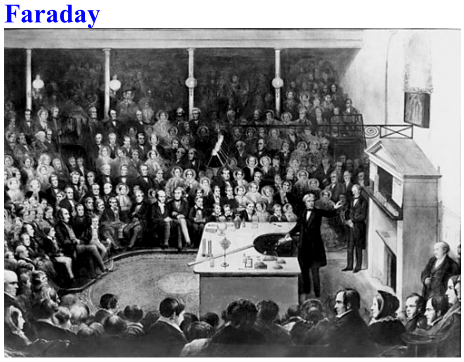
INDUCIRANA NAPETOST (11)

V tem poglavju bomo nadgradili spoznanja o magnetnih pojavih v stacionarnih razmerah (pri konstantnem toku) z analizo razmer pri časovno spremenljivih signalih. Ugotovili bomo, da pri časovno spremenljivih signalih pride do pojavov, ki jih v enosmernih razmerah nismo opazili. Najpomembnejša ugotovitev bo, da pri časovni spremembi fluksa skozi tuljavo na priključkih tuljave zaznamo (izmerimo) napetost, ki jo bomo poimenovali inducirana napetost.

Michael Faraday (1791-1867): en največjih znanstvenikov in izumiteljev: elektromagnetna indukcija, dinamo, elektroliza, odkril vrsto kemijskih substanc, vpeljal pojme anoda, katoda, elektroda, ion, …
http://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday



Predavanja Faradaya so bila izredno priljubjena tudi med širšo množico.

Časovno spreminjajoči fluks v tuljavi povzroči inducirano napetost. Michael Faraday je prvi ugotovil, da tedaj dobimo napetost na sponkah tuljave, ki je enaka časovni spremembi fluksa skozi tuljavo pomnoženem s številom ovojev tuljave, matematično torej $N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$.

Napetosti, ki se ob spremembi časovni fluksa skozi tuljavo pojavi na priključnih sponkah imenujemo **inducirana napetost**. Je takega predznaka, da bi po sklenjeni zanki (kratko sklenjeni tuljavi) pognala tok, katerega fluks bi nasprotoval prvotnemu fluksu skozi zanko. Temu »pravilu« rečemo tudi **Lentzovo pravilo**, ki ga matematično upoštevamo s predznakom minus:

$$\boxed{u_i = -N\frac{d\Phi}{dt}}. \qquad (11.1)$$

Pogosto produkt števila ovojev in fluksa skozi ovoje označimo z novo veličino, ki jo imenujemo **magnetni sklep**:

$$\boxed{\Psi = N\Phi}.$$

V tem smislu lahko enačbo za inducirano napetost zapišemo v obliki

$$\boxed{u_i = -\frac{d\Psi}{dt}}. \qquad (11.2)$$

SLIKA: Eksperimenti z inducirano napetostjo: a) premikanje trajnega magneta v tuljavi, b) premikanje tuljave pri mirujočem magnetu, c) s spreminjanjem fluksa skozi tuljavo ustvarimo inducirano napetost, ki požene tok skozi žarnico.

SLIKA: Zanka znotraj katere fluks s časom narašča v določeni smeri. V vodniku, ki objema fluks inducira tako električno polje, ki bi v primeru sklenjenega vodnika v njem povzročilo (induciran) tok, ki bi s svojim fluksom nasprotoval osnovnemu.

Inducirana napetost v zanki pri znani spremembi magnetnega pretoka skozi zanko.

Oglejmo si primer, ko se v tuljavi časovno spreminja gostota magnetnega pretoka zaradi zunanje spremembe polja.

Primer: Tuljavica z N=100 ovoji površine A = 2 cm^2 je postavljena pravokotno na smer polja, ki se spreminja harmonično po enačbi $B(t) = B_o \sin(10^3 \mathrm{s}^{-1} t)$, kjer je B_o = 50 mT. Določimo inducirano napetost na sponkah tuljave.

Izračun: Gre za krajevno homogeno polje, zato je fluks skozi tuljavico enak kar $\Phi(t) = B(t)A = B_o A \sin(10^3 \mathrm{s}^{-1} t) = 10 \sin(10^3 \mathrm{s}^{-1} t)\ \mu\mathrm{Vs}$. Inducirana napetost je

$$u_i = -N \frac{\Phi(t)}{dt} = -100 \cdot \frac{d}{dt}\left(10 \sin(10^3 \mathrm{s}^{-1} t)\ \mu\mathrm{Vs}\right) == -10 \cdot 100 \cdot 10^3 \cos(10^3 \mathrm{s}^{-1} t)\ \mu\mathrm{V} = -1 \cos(10^3 \mathrm{s}^{-1} t)\ \mathrm{V}$$

SLIKA: Tuljavica v homogenem časovno spreminjajočem polju.

Ugotovili smo, da se v tuljavi inducira napetost, če se znotraj tuljave časovno spreminja magnetno polje. V izračunanem primeru je bil fluks skozi ovoje tuljave posledica spreminjanja magnetnega polja, ki ni bil posledica toka skozi ovoje tuljave. Ali se na sponkah tuljave pojavi napetost tudi v primeru, da je povzročitelj spremembe fluksa v tuljavi lasten tok v tuljavi? Odgovor je pozitiven.

Inducirana napetosti na tuljavi pri znanem toku skozi ovoje tuljave in padec napetosti na tuljavi.

Pri računanju fluksa skozi tuljavo smo ugotavljali, da je le ta odvisen od toka v ovojih tuljave. V primeru, da ni posredi feromagnetnih materialov velja linearna zveza med magnetnim sklepom in tokom skozi tuljavo $\Psi = N\Phi = LI$, od koder je ***lastni induktivnost* tuljave**

$$\boxed{L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I}}.$$

Ta povzroči na sponkah tuljave inducirano napetost

$$\boxed{u_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}}.$$

Pri tem pa je potrebno opozoriti na pravilno razumevanje predznaka inducirane napetosti. Ta predznak je uveden zato, da se pravilno interpretira učinek spreminjanja fluksa pri nastanku inducirane napetosti, ki je tak, da se v zanki generira taka notranja (generatorska) napetost , ki z lastnim induciranim tokom nasprotuje spremembam fluksa v zanki. Gledano na tuljavo s stališča bremena (ki ga v smislu koncentriranega elementa shematično predstavimo z nekaj narisanimi ovoji), je padec (bremenske) napetosti ravno nasproten (generatorski) inducirani napetosti

$$u_L = -u_{iL} = L\frac{di}{dt}. \qquad (11.3)$$

V prvem primeru opazujemo pojav inducirane napetosti z vidika vira napetosti,v drugem pa z vidika bremena.

SLIKA: Tuljava z induktivnostjo kot koncentriran element. Smer padca (zunanje) napetosti je nasprotna smeri inducirane (notranje) napetosti in je v smeri vzbujalnega toka.

Primer: Tok skozi tuljavo z induktivnostjo L = 2 mH se spreminja harmonično, z amplitudo I_0 = 0,5 A in periodo T = 5 ms. Določimo padec napetosti na tuljavi.

Izračun: Najprej moramo tokovni signal zapisati v matematični obliki. Zagotoviti moramo ponovitev signala na vsakih 5 ms, zato tok zapišemo v obliki[1] $i(t) = 0{,}5\sin\left(\omega t\right)\text{A} = I_0\sin(\omega t)$, kjer je frekvenca signala enaka $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5\text{ ms}} = 200\text{ s}^{-1} = 200\text{ Hz}$), ***kotna frekvenca*** ω pa je $\omega = 2\pi f = 2\pi 200\text{ Hz} \simeq 1{,}26\cdot 10^3\text{ s}^{-1}$. Odvajamo tok: $\frac{di}{dt} = I_0\omega\cos(\omega t)$ in ga pomnožimo z induktivnostjo in dobimo $u_L = L\frac{di}{dt} = LI_0\omega\cos(\omega t) \cong 1{,}26\cos(1{,}26\cdot 10^3\text{ s}^{-1}t)\text{V}$. Rezultat lahko zapišemo tudi kot $1{,}26\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\text{V}$.

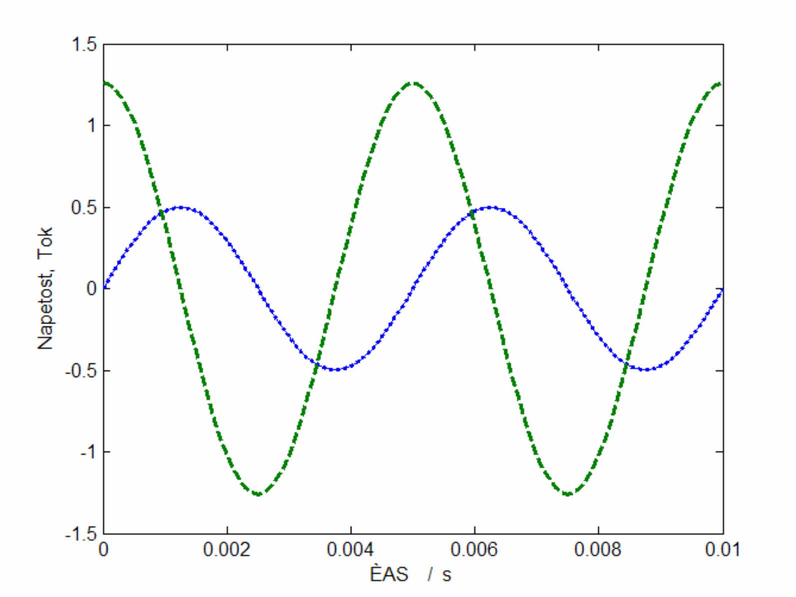
Iz rezultata ugotovimo, da se napetost na tuljavi spreminja z enako frekvenco kot tok, vendar je napetostni signal časovno zamaknjen glede na tokovnega za kot 90 ^{0} : $\cos\left(\omega t\right) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Če oba signala narišemo v časovnem diagramu, ugotovimo, da doseže napetostni signal maksimalno amplitudo za četrtino periode pred tokovnim signalom. To običajno opišemo kot prehitevanje napetosti na tuljavi za tokom za kot $\pi/2$. Enakovredno lahko rečemo tudi, da tok na tuljavi zaostaja za napetostjo za kot $\pi/2$.

Kako si razložimo ta zamik? Če si zamislimo harmonično spreminjajoč se tok skozi tuljavo, ugotovimo, da bo časovna sprememba toka največja tedaj, ko tok zamenja predznak, tedaj pa bo

[1] Za osnovo bi lahko vzeli tudi kosinusni tokovni signal.

tudi padec napetosti na tuljavi zaradi največje spremembe fluksa največji. Ko bo tok okoli ničle, bo napetost maksimalna, kar opišemo s sinusnim potekom toka in s kosinusnim potekom napetosti.

Kako se spreminja amplituda napetosti glede na frekvenco signala? Ugotovimo, da bo amplituda večja pri višji frekvenci in sicer se linearno veča s frekvenco signala: $u_L = U_m \cos(\omega t)$, kjer je $U_m = LI_o\omega$. To je tudi razumljivo, saj zaradi časovno hitrejšega spreminjanja toka zvečuje tudi največja sprememba toka in s tem napetost.



SLIKA: Napetost na tuljavi (črtkano) prehiteva tok (pikčasto) za četrtino periode signala $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Poglejmo si še primer, ko se fluks v eni tuljavi spreminja kot posledica fluksa v drugi tuljavi.

Inducirana napetost v tuljavi zaradi spremembe fluksa v drugi tuljavi.

Primer: Tuljava dolžine 15 cm premera 3,2 cm ima 30 ovojev na centimeter. V njeno sredino postavimo manjšo tuljavo dolžine 2 cm premera 2,1 cm s 60 ovoji. Tok v večji tuljavi se od časa t = 0 s linearno manjša od 1.5 A in doseže -0.5 A v času 25 ms. Nato ostane konstanten. Kolikšna je inducirana napetost v manjši tuljavi? Predpostavimo homogeno polje v večji tuljavi, ki ga izračunamo z aproksimativno formulo.

SLIKA: Sprememba toka v večji tuljavi povzroča inducirano napetost v manjši tuljavi. Inducirana napetost je odvisna od hitrosti spreminjanja toka v večji tuljavi oziroma od spreminjanja hitrosti magnetnega pretoka skozi manjšo tuljavo.

Izračun: Inducirano napetost bomo dobili z uporabo enačbe (11.1), torej moramo izračunati fluks, ki gre skozi manjšo tuljavico v času spremembe toka v večji. Izračun razdelimo na dve fazi. V prvi se tok linearno manjša, v drugi pa ostane konstanten. Označimo z indeksom 1 večjo tuljavo, z 2 pa manjšo tuljavo. Ker gre za linearne spremembe, lahko namesto odvajanja uporabimo diference (rezultat bo enak) $u_{i2} = -N_2 \left.\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|_2 = -N_2 \frac{\Delta\Phi_{21}}{\Delta t} = -N_2 \left(\frac{\Phi_{končna} - \Phi_{začetna}}{t_{končna} - t_{začetna}} \right)$. (11.4)

Začetni fluks izračunamo iz začetne gostote pretoka v tuljavi, končnega pa iz končnega pretoka. Polje znotraj tuljave določimo iz poenostavljene formule $B = \frac{\mu N i}{l}$. Dobimo $B_{začetni} = \frac{\mu_0 N i_{začetni}}{l} = \mu_0 \frac{N}{l} i_{začetni} = 4\pi 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 30 \cdot 10^2 \mathrm{m}^{-1} \cdot 1{,}5\mathrm{A} \cong 5{,}7\,\mathrm{mT}$. Pri izračunu fluksa skozi tuljavico moramo upoštevati površino manjše tuljavice in ne večje:

$\Phi_{začetni} = B_{začetni} \cdot A_2 = B_{začetni} \cdot \pi \left(\frac{2{,}1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{2} \right)^2 \cong 1{,}96\ \mu\mathrm{Wb}$. Na enak način bi dobili z upoštevanjem toka –0,5 A končni pretok $\Phi_{končni} = -0{,}653\ \mu\mathrm{Wb}$.

Uporabimo še enačbo (11.4) in z njeno pomočjo določimo inducirano napetost v času od t = 0 s do t = 25 ms: $u_i = -60 \frac{-0{,}653 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Wb} - 1{,}96 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Wb}}{25\,\mathrm{ms} - 0\,\mathrm{ms}} \cong 6{,}27\,\mathrm{mV}$. To napetost bi lahko izmerili, če bi na zunanje sponke tuljave priključili sondo osciloskopa. (Zaradi poenostavitev s homogenostjo polja bi meritev pokazala seveda nekoliko različno vrednost.). Ta napetost je konstantna ves čas spreminjanja toka v veliki tuljavi. V drugi fazi, ko bo tok skozi večjo tuljavo konstanten, v manjši tuljavi ne bo spremembe magnetnega pretoka in s tem bo inducirana napetost enaka 0.

SLIKA: Graf spremembe toka v mali tuljavi, spodaj graf inducirane napetosti v večji tuljavi.

Medsebojna induktivnost. O lastni induktivnosti smo že govorili. Povezana je s fluksom, ki gre skozi tuljavo zaradi toka v lastni tuljavi. Če pa nas zanima fluks v navitju, ki je posledica vzbujanja v drugem (ne lastnem) navitju, govorimo o **medsebojni induktivnosti**. Definiramo jo kot

$$\boxed{M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{21}}{I_1}}, \qquad (11.5)$$

kjer je Φ_{21} fluks skozi drugo tuljavo zaradi toka I_1 skozi prvo tuljavo. Na isti način lahko definiramo M_{12} kot $M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot \Phi_{12}}{I_2}$. Poglejmo si razmere na sliki.

SLIKA: Medsebojna induktivnost določa zvezo med tokom v drugem navitju in fluksom, ki ga ta tok povzroča v lastnem navitju.

Če imamo opravka z linearnimi magnetnimi materiali (če je μ_r konstanten), sta M_{21} in M_{12} kar enaka, torej $M = M_{21} = M_{12}$.

Inducirana napetost izražena z medsebojno induktivnostjo tuljave.

V prejšnjem razdelku smo obravnavali primer, ko je šel en del fluksa prve tuljave skozi drugo tuljavo in v slednji povzročil inducirano napetost. Izračunali smo fluks skozi drugo tuljavo zaradi spreminjanja toka v prvi tuljavi. Sedaj smo ugotovili, da to zvezo lahko opišemo z medsebojno induktivnostjo, kjer je magnetni sklep v drugi tuljavi zaradi toka v prvi določen z $\Psi_{21} = M_{21} I_1 = M I_1$. Torej lahko inducirano napetost v drugi tuljavi izrazimo kot

$$\boxed{u_{iM_{21}} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d\left(Mi_1\right)}{dt} = -M\frac{di_1}{dt}}.$$

Ponovno lahko ugotovimo, da je predznak le posledica zapisa z upoštevanjem Lentzovega pravila. Če pa upoštevamo, da je zunanja napetost ravno nasprotna notranji (gonilni), bomo zopet dobili

$$u_{M_{21}} = -u_{iM_{21}} = M\frac{di_1}{dt}.$$

Primer: Določimo inducirano napetost v manjši tuljavi iz prejšnjega primera s pomočjo medsebojne induktivnosti.

Za določitev medsebojne induktivnosti moramo poiskati fluks skozi drugo tuljavo ki ga povzroča tok skozi prvo tuljavo. Fluks je

$$\Psi_{21} = N_2\Phi_{21} = N_2B_1A_2 = N_2\frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1}A_2$$
$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l_1}A_2 \cong 78{,}35\ \mu\text{H}$$
,

kjer smo z indeksom 1 označili veliko tuljavo, z 2 pa manjšo tuljavo. Sprememba toka v času 25 ms bo $-\dfrac{2\ \text{A}}{25\ \text{ms}} = -80\ \text{A/s}$, inducirana napetost pa $u_{M_{21}} = M\dfrac{di_1}{dt} = 78{,}35\ \text{mH}\cdot(-80\ \text{A/s}) = 6{,}3\ \text{mV}$.

Razlika v končnem rezultatu glede na primer 1 je izključno posledica različnega zaokroževanja v prvem in drugem primeru. Natančnejši rezultat je slednji. Preverite še sami.

Realna tuljava – ohmska in induktivna upornost.

Nobena tuljava ni idealna (razen, če jo ohladimo blizu absolutne ničle, ko pade ohmska upornost ovojev na nič) pač pa ima tudi neko ohmsko upornost. Ta je v osnovi odvisna od specifične prevodnosti materiala (pri navitjih običajno kar baker), preseka in dolžine: $R = \dfrac{l}{\gamma A}$. V realni tuljavi tako lahko ločimo dva padca napetosti: zaradi padca napetosti na ohmski upornosti (Ohmov zakon) in padca napetosti na t.i. induktivni upornosti[2]. Matematično bi za napetost na tuljavi zapisali

$$u = u_R + u_L = iR + L\frac{di}{dt}. \qquad (11.6)$$

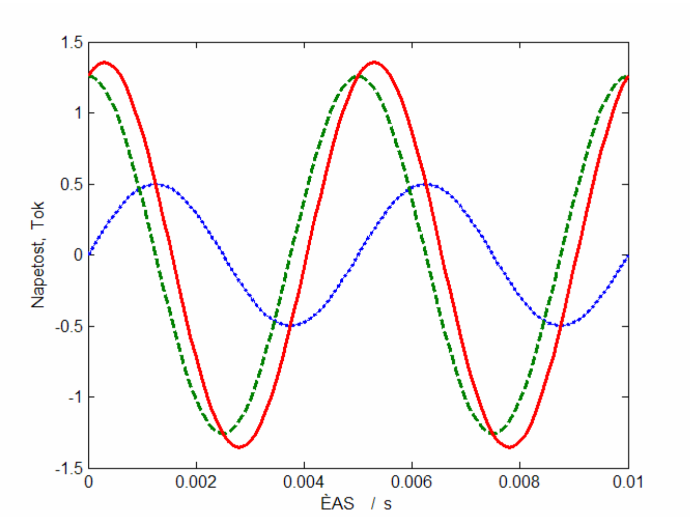
[2] V resnici dveh padcev napetosti na tuljavi ne moremo »fizično« ločiti, saj nastopata hkrati in na zunanjih sponkah opazujemo skupen učinek. Lahko pa ju ločeno obravnavamo v matematičnem smislu.

Primer: Vzemimo, da upoštevamo poleg induktivnosti tuljave iz drugega primera (Tok skozi tuljavo z induktivnostjo L = 2 mH se spreminja harmonično, z amplitudo I_0 = 0,5 A in periodo T = 5 ms.) še njeno upornost, ki naj bo 1 Ω. Kolikšna bo sedaj napetost na tuljavi?

Izračun: V skladu z enačbo (11.6) bo napetost na tuljavi enaka

$$u = RI_0 \sin(\omega t) + L\frac{d}{dt}\left(I_0 \sin(\omega t)\right) = RI_0 \sin(\omega t) + LI_0\omega\cos(\omega t) .$$

Amplituda padca napetosti zaradi induktivnosti bo 1,26 V (kot smo že izračunali), zaradi ohmske upornosti pa $0{,}5\ \text{A} \cdot 1\ \Omega = 0{,}5\ \text{V}$. Ali bo skupna napetost 1,26 V + 0,5 V? Ne. Napetost na tuljavi je vsota dveh napetosti, ki pa sta časovno zamaknjeni za četrtino periode signala. Zato amplitude ne moremo preprosto sešteti. Lahko pa ugotovimo, da je dobljeni napetosti signal zopet sinusne oblike in da je amplituda in faza signala v skladu z matematično zvezo $a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t+\varphi)$. A je amplituda signala in je enaka $A = \sqrt{a^2+b^2} = 1{,}36\ \text{V}$, φ pa je ***fazni kot*** in označuje prehitevanje ali zaostajanje signala za prvotnim signalom. Določimo ga kot $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = 68{,}36^{\circ}$. V našem primeru bo rezultat $u \cong 1{,}36 \cdot \sin(1{,}26 \cdot 10^3\ \text{s}^{-1} t + 68{,}36^0)\ \text{V}$. Predznak plus predstavlja prehitevanje napetostnega signala pred tokovnim, ki pa v primeru realne tuljave ni 90^0, pač pa nek manjši kot, pač v skladu z velikostjo padcev napetosti na idealni tuljavi in na ohmski upornosti tuljave.



SLIKA: Tokovno vzbujanje (pikčasto). Napetost na induktivnosti tuljave (črtkano), napetost na ohmski upornosti tuljave (pikčasto, po obliki in vrednosti enako tokovnemu signalu) in skupna napetost na tuljavi (polna črta). Napetost na realni tuljavi prehiteva tok tuljave za kot $90^0 < \varphi < 0^0$.

Induktivna upornost - reaktanca. Kot smo ugotovili, je amplituda padca napetosti na tuljavi pri vzbujanju s harmoničnim signalom sorazmerna produktu amplitude toka in produkta ωL. Slednji predstavlja upornost tuljave pri izmeničnih signalih in jo imenujemo induktivna upornost ali ***reaktanca*** in uporabimo simbol $X_L = \omega L$. Ponovno lahko ugotovimo, da se induktivna upornost linearno veča z večanjem frekvence vzbujalnega signala.

SLIKA: Večanje induktivne upornosti – reaktance s frekvenco vzbujanja.

Kazalci. Pogosto si pri izračunu zvez med tokom in napetostjo olajšamo delo z grafičnim prikazom le teh s t.i. kazalci. Vsak kazalec predstavlja eno od veličin, ki se vrti okoli izhodišča glede na kotno hitrost pri čemer upoštevamo še fazo signala. Zveza med tokom in napetostjo na ohmski upornosti tuljave bi bila preprosta, saj se »vrtita« skladno, v isti legi. Rečemo tudi, da sta tok in napetost *v fazi*. Kazalec napetosti idealne tuljave pa je premaknjen glede na tokovnega za kot 90^0. Skupen padec napetosti bo vsota obeh kazalcev, ki ju grafično seštejemo. Dobimo amplitudo napetosti kot vsoto kvadratov in določimo še zamik med kazalcema napetosti in toka – *fazni kot*. Tangens tega kota je enak razmerju velikosti kazalcev ali pa kar razmerju induktivne in ohmske upornosti.[3]

[3] Tak način obravnave je bil običajen v srednješolskem izobraževanju. V nadaljevanju bomo spoznali, da je mnogo bolj učinkovit, pa tudi korekten, zapis kazalcev v t.i. kompleksni ravnini.

SLIKA: Prikaz padcev napetosti na ohmskem in induktivnem delu tuljave s pomočjo kazalcev.

Faktor sklopa. Če je magnetna povezava med dvema tuljavama (1 in 2) linearna, ima smisel določiti faktor sklopa. Če sta magnetni sklep skozi lastno tuljavo in sosednjo določena z linearno zvezo

$$\begin{aligned}\Psi_{21} &= k\Psi_{11} \\ \Psi_{12} &= k\Psi_{22}\end{aligned},$$

kjer sta Ψ_{11} in Ψ_{22} fluksa skozi lastno tuljavo pomnožena s številom ovojev lastne tuljave. Velja

$$M_{21} \cdot M_{12} = M^2 = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \cdot \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{k \cdot \Psi_1}{I_1} \cdot \frac{k \cdot \Psi_2}{I_2} = k^2 L_1 L_2$$

in iz tega

$$\boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}} \tag{11.7}$$

ali **faktor sklopa**

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Označitev medsebojne induktivnosti v smislu koncentriranega elementa. Kako označimo medsebojno induktivnost kot koncentriran element? V osnovi enako kot dve navadni tuljavi z lastno induktivnostjo, ki pa ju povežemo z linijo in puščicama , s čimer prikažemo, da je med njima magnetni sklep. Pri tem pa je zopet potrebno paziti na predznak padca napetosti zaradi medsebojne induktivnosti, saj je predznak odvisen od lege posameznih tuljav. Predznak je tako lahko pozitiven ali pa negativen, kar mora biti v sami električni shemi razvidno. To označujemo s pikami na začetku ali konce vsake tuljave (glede na smer toka) odvisno od tega, če se magnetna pretoka tuljav med seboj podpirata ali ne. Dogovor je tak, da postavimo piki na začetek obeh tuljav (ali pa obe na konec) glede na smer toka, če se magnetni pretok druge tuljave skozi prvo tuljavo podpira z lastnim pretokom skozi prvo tuljavo.

SLIKA: Dve tuljavi z medsebojno induktivnostjo. Podpiranje fluksov označimo s piko ta tisti strani tuljave, kjer vstopa ali izstopa tok.

Splošen zapis zveze med dvema tuljavama z diferencialno enačbo.

Če imamo dve sklopljeni navitji, potem tok skozi eno navitje povzroča padec napetosti v lastnem, pa tudi v drugem navitju. Slednji je proporcionalen spremembi toka in medsebojni induktivnosti. Vpliv pa je v obe smeri. Torej, če spreminjajoči fluks v drugi tuljavi povzroča tok v drugem navitju, pride do vzajemnega učinka. Napetost na prvi tuljavi je

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt},$$

na drugi pa

$$u_2 = R_2 \cdot i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

Dobimo sistem dveh (linearnih) diferencialnih enačb, ki ga je potrebno reševati s primerno metodo. Ugotovili bomo, da nam za obravnavo izmeničnih signalov lahko analizo bistveno olajša uporaba *kompleksnega računa*.

SLIKA: Nariši vezje s koncentriranimi elementi in povezavo med tuljavama z medsebojno induktivnostjo.

Inducirana napetost - drugič

Ugotovili smo že, da je inducirana napetost v zanki določena s časovno spremembo fluksa skozi zanko, kar smo v matematični obliki zapisali kot

$$u_i = -\frac{d\Psi}{dt}, \tag{11.8}$$

kjer je predznak minus posledica upoštevanja Lentzovega pravila, da je predznak inducirane napetosti v zanki tak, da induciran tok v zanki povzroča fluks, ki nasprotuje spremembi fluksa skozi zanko.

Ugotovili smo tudi, da gre pri inducirani napetosti za notranjo, generatorsko napetost, ki je porazdeljena po zanki. Lahko bi v osnovi govorili tudi o induciranju električne poljske jakosti, ki v zanki požene inducirani tok. Če se spomnimo definicije električne napetosti kot integrala električne poljske jakosti, lahko tudi sedaj pogledamo, kaj dobimo z integracijo inducirane električne poljske jakosti po poti zanke. Zanima nas torej $\int_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$. V elektrostatiki smo ugotovili, da je ta integral po zaključeni poti enak nič (dobimo kot razliko dveh elektrostatičnih potencialov v isti točki), iz česar je tudi sledila definicija električne poljske jakosti kot gradienta potenciala. Pri izmeničnih signalih ta integral očitno ne bo enak nič, pač pa bo enak inducirani napetosti

$$\boxed{\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = u_i} \tag{11.9}$$

Celotna električna poljska jakost je vsota elektrostatične in inducirane jakosti $\vec{E} = \vec{E}_{es} + \vec{E}_i$, kar pa enačbo (11.9) spremeni le v toliko, da velja še bolj splošno

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = u_i \,. \tag{11.10}$$

Če upoštevamo v enačbi (11.10) še enačbo (11.8) in to, da lahko fluks zapišemo kot integral Bja po preseku zanke $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$, dobimo splošen zapis

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}}. \tag{11.11}$$

To je pomembna enačba, ki jo v elektrotehniki poznamo kot **2. Maxwellova enačba**. V osnovi gre za Faradayevo enačbo, ki pa jo je Maxwell pravilno uvrstil v sistem osnovnih enačb za opis elektromagnetnega polja.

Dva tipa inducirane napetosti: transformatorska in gibalna.

V osnovi lahko ločimo dva različna tipa induciranja napetosti: v prvem primeru, ki smo za že spoznali, se inducirana napetost v zanki pojavi kot posledica časovne spremembe fluksa v zanki. Tej napetosti pogosto rečemo *transformatorska inducirana napetost*. Drugi tip induciranja pa nastopi kot posledica gibanja prevodnika v časovno konstantnem ali spremenljivem magnetnem polju. Tej inducirani napetosti rečemo tudi *gibalna ali rezalna inducirana napetost*.

Gibalna (rezalna) inducirana napetost.

Poglejmo si primer prevodne palice, ki se premika v prečnem polju gostote *B*. V prevodniku je zelo veliko prostih nosilcev naboja (elektronov) na katere deluje magnetna sila $\vec{F}_{\mathrm{m}} = Q\vec{v} \times \vec{B}$. V polju bo na naboje delovala magnetna sila, oziroma (inducirana) električna poljska jakost $E_{m,ind}$, ki bo

$$\vec{E}_{\mathrm{m,ind}} = \frac{\vec{F}}{Q} = \vec{v} \times \vec{B}. \qquad (11.12)$$

Integral jakosti polja vzdolž palice pa dá napetost – gibalno inducirano napetost:

$$u_i = \int_0^L \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l} \qquad (11.13)$$

Tej napetosti rečemo tudi rezalna napetost, saj nastane tedaj, ko prevodnik "reže" magnetno polje

Primer: Prevodna palica dolžine l = 5 cm je postavljena vzdolž Y osi in se giblje s hitrostjo $\vec{v} = \vec{e}_x 2\ \mathrm{m/s}$ v homogenem polju $\vec{B} = \vec{e}_z 5\ \mathrm{mT}$. Določite inducirano napetost med koncema palice.

<u>Izračun</u>: $\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{e}_y vB = -\vec{e}_y 10^{-2}\ \mathrm{T \cdot m/s}$. $u_i = \int_0^{l=5\,\mathrm{cm}} \left(-\vec{e}_y vB\right) \cdot \vec{e}_y dy = -vBl = -5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V} = -0{,}5\ \mathrm{mV}$.

<u>Dodatno:</u> Hitro lahko pokažemo, da do enakega rezultata pridemo tudi iz enačbe za časovno spremembo fluksa skozi zanko, če si pač zamislimo, da je palica del stranice zanke, ki se veča v smeri X osi. Ker se s časom povečuje površina zanke, se veča tudi fluks skozi zanko. Dobimo $\Phi(t) = B \cdot A(t) = B \cdot lx = B \cdot lvt$, inducirana napetost v zanki (med koncema potujoče palice) pa je

$$u_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Blv = -0{,}5\ \mathrm{mV}$$

SLIKA: a) premikanje vodnika v magnetnem polju. Na koncih premikajoče se prevodne palice v prečnem magnetnem polju se pojavi (inducira) napetost. b) Časovno večanje površine zanke zaradi premikanja stranice zanke povzroči povečanje fluksa in posledično inducirno napetost.

Skupna transformatorska in gibalna inducirana napetost. Kakšna pa je zveza med tem zapisom inducirane napetosti in tistim s časovno spremenljivim fluksom? Na tem primeru lahko pokažemo, da bi z uporabo osnovnega zapisa dobili enak rezultat. Le zamisliti bi si morali virtualno zanko, katere fluks se veča ali zmanjšuje s časom.

Z drugačnim zapisom enačbe (11.11) lahko upoštevamo tako inducirano napetost, ki je posledica časovne spremembe gostote pretoka v mirujoči zanki in inducirano napetost, ki je posledica gibanja v časovno konstantnem polju:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{A} + \oint_L \vec{v} \times \vec{B} \tag{11.14}$$

Prvi člen imenujemo transformatorska, drugega pa gibalna ali rezalna inducirana napetost. Odvisno od primer moramo upoštevati prvo, drugo ali pa kar obe hkrati.

Faradayev homopolarni generator.

Je naprava, ki proizvaja enosmerno napetost pri vrtenju prevodnega diska v magnetnem polju. Prvi jo je opisal že leta 1831 Michael Faraday. Deluje tudi v obratnem režimu, kot motor in se smatra kot prvi enosmerni električni motor.

SLIKA: Vrteči prevodni disk v prečnem magnetnem polju. Med osjo in obodom priključimo kontaktorje in na sponkah se pojavi napetost – inducirana napetost.

Izračun generatorske (inducirane) napatosti: med kontaktoma si zamislimo prevodno progo. Na naboje v disku, ki se vrtijo s hitrostjo $v = \omega r$ deluje magnetna sila $\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B}$, ki premakne (pozitivne) naboje v smeri vektorskega produkta. Pojavi se torej inducirana električna poljska jakosti $\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$, ki je v smeri radija od osi proti zunanjemu kontaktu. Med kontaktoma se inducira napetost $u_i = \int_0^R \vec{E}_i \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^R \omega r B \mathrm{d}r = \omega \frac{R^2}{2} B$.

Primer: Prevodni disk polmera R = 10 cm se vrti s hitrostjo 1000 obr/min v prečnem homogenem magnetnem polju 200 mT. Določimo inducirano napetost med osjo in obodom diska.

Izračun: $u_i = \int_0^R \vec{E}_i \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^R \omega r B \mathrm{d}r = \omega \frac{R^2}{2} B = 2\pi \frac{1000}{60\ \mathrm{s}} \frac{(0{,}1\ \mathrm{m})^2}{2} 0{,}2\ \mathrm{T} = 104{,}8\ \mathrm{mV}$.

Napetost ni velika, je pa zato lahko zelo velik tok, ki steče v zanki, saj je ohmska upornost izredno majhna. Zato dejansko lahko pričakujemo izredno velike toke. Problem se pojavi v kontaktih, kjer se pojavi pri zelo velikih tokih

SLIKA: Homopolarni generator.

Več: Ključne besede na internetu: homopolar, generator, motor, Faraday

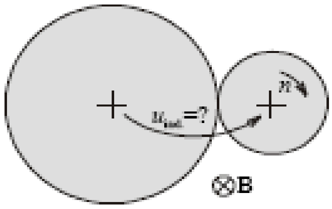
Generator izmenične napetosti z vrtenjem tuljave v magnetnem polju.

Tuljavo postavimo v enosmerno homogeno magnetno polje in jo vrtimo s kotno hitrostjo ω. Pojavi inducirane napetosti v zanki lahko razložimo na oba načina: kot posledico časovne spremembe fluksa skozi zanko (transformatorska napetost) ali pa kot posledico sile na gibajoče naboje (rezalna napetost). V prvem primeru opazujemo časovno spreminjanje fluksa skozi zanko, ki bo enako $\Phi = B \cdot A(t) = B \cdot b \cdot a\cos(\omega t)$, inducirana napetost pa bo $u_i = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Bab\frac{\mathrm{d}\cos(\omega t)}{\mathrm{d}t} = Bab\omega\sin(\omega t) = U_m\sin(\omega t)$. Amplituda inducirane napetosti je odvisna od površine zanke (ne od oblike, ki je lahko tudi trikotna), velikosti magnetnega polja in kotne frekvence. Izhodna (inducirana) napetost je sinusne oblike.

SLIKA: a) Vrtenje pravokotne tuljave v homogenem magnetnem polju. b) Izhodna napetost je sinusne oblike.

Primer 3. Vrtenje zanke v magnetnem polju: **izpit, 5. septembra 2002**

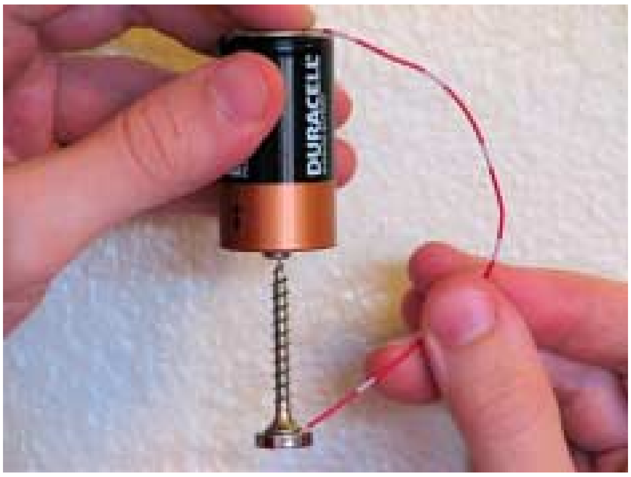
Desni kolut ženemo z n obrati na minuto, levi pa se brez drsenja vrti ob njem v obratni smeri. Polmer desnega je $a/2$ polmer levega pa a. Izrazite inducirano napetost med osema kolutov, če se vrtita v homogenem magnetnem polju gostote B, ki vpada pravokotno nanju!



3. Inducirano napetost $u_{ind.}$ med osema kolutov določimo kot vsoto inducirane napetosti $u_{ind1.}$ med osjo in obodom levega koluta ter napetosti $u_{ind2.}$ med obodom in osjo desnega koluta: $u_{ind.} = u_{ind.1} + u_{ind.2} = -\pi a^2 B f_1 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 B f_2$, kjer sta $f_1 = \frac{n/2}{60}$ in $f_2 = \frac{n}{60}$ frekvenci vrtenja levega ter desnega koluta (zaradi dvakrat večjega obsega je frekvenca levega dvakrat manjša od frekvence desnega). Inducirana napetost med osema bo torej: $u_{ind.} = -\pi a^2 B \frac{n/2}{60} - \pi \frac{a^2}{4} B \frac{n}{60} =$ $= \boxed{-\frac{1}{80}\pi a^2 B n}$.

MALO ZA ZABAVO MALO ZARES:

Izdelajte in raziščite delovanje homopolarnega motorja sestavljenega iz baterije, vijaka, žičke in trajnega magneta.¸ http://www.evilmadscientist.com/article.php/HomopolarMotor



Primeri kolokvijev in izpitov:

kolokvij, 3. maj 2004
2. kolokvij, 11. 6. 2003
izpit, 16. april 2002
izpit, 8. april 2002
izpit, 4. 12. 2001
Izpit, 03. 09. 2003
izpit, 5. septembra 2002

S pomočjo induktivnosti:

Izpit, 25. 08. 2004
Izpit, 21. 06. 2004