Energija magnetnega polja, prvič

Izhajamo iz moči na tuljavi, ki je enaka produktu toka in napetosti na tuljavi $p = u_L \cdot i_L$. To so sedaj časovno spreminjajoče veličine, lahko bi torej pisali tudi $p(t) = u_L(t) \cdot i_L(t)$. Upoštevamo še izraz za padec napetosti na tuljavi $u_L = \frac{d\Psi}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt}$, ki je izražena s produktom induktivnosti in spremembe toka v tuljavi in dobimo $p(t) = L\frac{di(t)}{dt} \cdot i(t)$. Integral moči s časom pa je energija $W(t) = \int_{t_0}^{t} p(t) \cdot dt = \int_{t_0}^{t} L\frac{di}{dt} i \cdot dt = \int_{i(t_0)}^{i(t)} Li \cdot di$. Z integracijo po toku dobimo $W(t) = \frac{1}{2}L\left(i^2(t) - i^2(t_0)\right)$.

Vzemimo, da na začetku ni bilo toka skozi tuljavo ($i(t_0) = 0\,\mathrm{A}$), potem bo trenutna energija, shranjena v magnetnem polju tuljave sorazmerna kvadratu trenutne vrednosti toka skozi tuljavo

$$W(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) \qquad (13.1)$$

Z upoštevanjem zveze med magnetnim sklepom in tokom skozi tuljavo $\Psi(t) = L \cdot i(t)$ lahko energijo izrazimo tudi s trenutno vrednostjo magnetnega sklepa

$$W(t) = \frac{\Psi^2(t)}{2L} \qquad (13.2)$$

Primer 1: Izračunajte in skicirajte časovni potek energije v tuljavi z induktivnostjo 2 mH, če skozi ovoje teče tok $0{,}5\sin(\omega t)\mathrm{A}$, kjer je perioda signala T = 5 ms. Določite še maksimalno vrednosti te energije.

Energija v tuljavi bo $W(t) = 0{,}5 \cdot LI_0^2 \sin^2(\omega t)$, maksimalna bo 0,25 mJ.

SLIKA: Časovni potek toka in magnetne energije v polju tuljave. Energija je sorazmerna kvadratu toka in doseže maksimum v četrtini periode signala. Takrat je enaka $0,5LI_0^2$, kjer je I_0 amplituda toka.

Energija sistema več tuljav. Kakšne pa so energijske razmere, če je tuljav več, med njimi pa je določen magnetni sklep? V tem primeru je potrebno upoštevati še magnetno energijo zaradi skupnega tvorjenja magnetnega polja v sistemu več tuljav. Splošna formula za sistem N sklopljenih tuljav je[1]

$$W(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} L_{jk} \cdot i_j(t) \cdot i_k(t) \qquad (13.3)$$

(Lastne induktivnosti tuljave imajo enaka indeksa, medsebojne pa različna.) Vzemimo primer dveh tuljav z medsebojno induktivnostjo M. Po enačbi (13.3) bo energija v magnetnem polju sistema obeh tuljav enaka[2]

$$W = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 \,. \qquad (13.4)$$

Predznak je odvisen od tega, ali se fluksa dveh tuljav med sabo podpirata ali ne. Če se podpirata je potrebno to energijo prišteti, če se ne, pa odšteti.

Vzemimo še poseben primer, ko gre skozi obe tuljavi isti tok. Tedaj lahko pišemo $W = \frac{1}{2}L_1 i^2 + \frac{1}{2}L_2 i^2 \pm M i^2$. Sedaj izpostavimo $i^2/2$ in dobimo

$$W = \frac{1}{2} i^2 \left(L_1 + L_2 \pm 2M \right). \qquad (13.5)$$

Izraz v oklepaju lahko razumemo kot skupno (nadomestno) induktivnost, ki bo torej

$$L_{nad} = L_1 + L_2 \pm 2M \qquad (13.6)$$

[1] Za izpeljavo glej npr. A.R.Sinigoj, Osnove elektromagnetiko, 367- 370.
[2] Pred člen z medsebojno induktivnostjo smo dodali plus/minus v smislu podpiranja ali nasprotovanja magnetnih polj dveh tuljav.

Primer 2: Vzemimo primer tuljave v tuljavi, ki smo ga obravnavali v prejšnjem poglavju in določimo skupno induktivnost, če predpostavimo, da se fluksa tuljav seštevata. Določimo še celotno magnetno energijo v času t = 0 s in t = 30 ms.

Za lastni induktivnosti in medsebojno induktivnost dobimo

$L_1 = 156,7\,\mu\text{H}$, $L_2 = 39,17\,\mu\text{H}$, $M = 78,35\,\mu\text{H}$.

Vidimo, da je medsebojna induktivnost spodobno velika v primerjavi z lastnima induktivnostima, kar se odraža tudi v skupni induktivnosti, ki bo 352 μH.

Energija je odvisna od trenutne vrednosti toka skozi tuljavo in je torej v skladu z enačbo (13.5) enaka

$$W(t = 0\text{s}) = 0,5 \cdot (1,5)^2\ \text{A} \cdot 352\mu\text{H} = 396\mu\text{J}$$
$$W(t = 30\text{s}) = 0,5 \cdot (0,5)^2\ \text{A} \cdot 352\mu\text{H} = 44\mu\text{J}\ .$$

SLIKA: Sistem dveh sklopljenih tuljav z istim tokom in nadomestno vezje.

Energija magnetnega polja v nelinearnih magnetnih strukturah

V preprostejšem, linearnem primeru, smo izhajali iz moči na koncentriranem elementu – tuljavi. Sedaj nas zanima energija magnetnega polja v nelinearnih strukturah, v feromagnetnih jedrih, kjer vemo, zveza med Bjem in Hjem oziroma magnetnim sklepom in vzbujalnim tokom ni linearna. Še več, običajno imamo opravka z histerezo. Izhajati moramo iz osnovnih zvez $p = i \cdot u$ in $u = \dfrac{d\Psi}{dt}$ od koder je $dW = p \cdot dt = i \cdot d\Psi$. Energija, potrebna za magnetenje od časa 0 do *t* je enaka $W_{mag}(t) = \int_0^t i \cdot d\Psi$. Vzemimo feromagnetno jedro, tesno ovito z *N* ovoji, kjer velja Amperov zakon $Ni = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$, za diferencial magnetnega sklepa pa lahko pišemo $d\Psi = N \cdot d\Phi = N \cdot \left(\vec{B} \cdot d\vec{A}\right)$. Z upoštevanjem obeh zvez, pa tudi tega, da bo potrebno paziti na časovno spremembo Bja, dobimo $W_{mag}(t) = \int_0^t \oint_L \int_A \left(\frac{1}{N}\vec{H} \cdot d\vec{l}\right)\left(N d\vec{B} \cdot d\vec{A}\right)$. Enačbo preuredimo tako, da združimo integracijo po površini in dolžini v integracijo po volumnu[3]:

$$W_{mag}(t) = \int_V \left(\int_0^t \vec{H} \cdot d\vec{B} \right) dV \tag{13.7}$$

V oklepaju v enačbi (13.7) lahko razpoznamo **gostoto magnetne energije**, ki jo lahko zapišemo kot

$$w_{mag}(t) = \int_{B(t)} \vec{H} \cdot d\vec{B}, \tag{13.8}$$

pri čemer je potrebno integrirati jakost polja po gostoti pretoka. Če magnetimo material od $B = 0$ T do nekega B_0, bo $w(B_0) = \int_0^{B_0} \vec{H} \cdot d\vec{B}$.

Gostota energije pri linearni magnetilni krivulji. V primeru, da imamo opravka z materialom, ki ga lahko opišemo z linearno magnetilno krivuljo, lahko uporabimo zvezo $B = \mu H$, kar vstavimo v gornjo enačbo in določimo gostoto energije kot

$$w = \frac{B^2}{2\mu} \tag{13.9}$$

oziroma, če magnetimo do B_0 je $w(B_0) = \frac{B_0^2}{2\mu}$.

Celotno energijo magnetenja dobimo z integracijo gostote energije po volumnu

$$W = \int_V \frac{B^2}{2\mu} \cdot dV \,. \tag{13.10}$$

---

[3] To lahko naredimo, ker so trije od štirih vektorjev v integralu kolinearni (enako usmerjeni). To so $d\vec{B}, d\vec{A}, d\vec{l}$. Zato lahko združimo $\left(\vec{H} \cdot d\vec{B}\right)$ in $\left(d\vec{l} \cdot d\vec{A}\right)$.

Če predpostavimo homogeno polje v volumnu, pa je energija kar

$$W = \frac{B^2}{2\mu} \cdot V\ . \qquad (13.11)$$

To enačbo lahko zapišemo tudi s Hjem kot $W = \frac{\mu H^2}{2} \cdot V$

Primer 3: Jedro brez zračne reže iz feromagnetnega materiala z $\mu_r = 850$ ima 350 ovojev. Presek jedra ima površino 3 cm^2, srednja dolžina gostotnice pa je 60 cm. Določite magnetno energijo v jedru pri enosmernem toku skozi ovoje 2 A.

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{350 \cdot 2\text{A}}{0{,}6\text{m}} = 1166{,}7\ \text{A/m}$$

$$w = \frac{\mu_r \mu_0 H^2}{2} = \frac{850 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot (1166{,}7)^2}{2} \cong 727\ \text{J/m}^3$$

$$W = w \cdot V = 727 \cdot 0{,}6 \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 0{,}13\ \text{J}\ .$$

SLIKA: Primer jedra z linearno magnetilno krivuljo s prikazom gostote energije v jedru kot površine med magnetilno krivuljo in H osjo.

Energija v nelinearnih magnetnih strukturah. V primeru, da je magnetilna krivulja nelinearna, je potrebno energijo računati direktno s pomočjo integrala (13.8). Lahko tudi zapišemo *diferencial gostote magnetne energije*, ki bo

$$dw = \overline{H} \cdot d\overline{B}\ . \qquad (13.12)$$

Gostoto energije dobimo torej z integracijo površine med magnetilno krivuljo in osjo H:

$$w = \int_{B_{začetna}}^{B_{končna}} \overline{H} \cdot d\overline{B}\ . \qquad (13.13)$$

Če vzamemo v obzir celotno histerezno zanko, ugotovimo, da bo gostota energije v tem materialu enaka površini histerezne zanke.

SLIKA: Primer jedra z nelinearno magnetilno krivuljo s prikazom gostote energije v jedru kot površine med magnetilno krivuljo in H osjo.

Primer 4: Vzemimo primer linearizirane magnetilne krivulje, ki jo opišemo s prelomina točkama B1 = 1T, H1 = 1200 A/m in B2 = 1,2 T, H2 = 2400 A/m. Določimo gostoto magnetne energije v jedru feromagnetika s podano magnetilno krivuljo, če ga magnetimo od 0 T do gostote 1,1 T.

Izračunati je potrebno integral po enačbi (13.13), ki pa ga v primeru linearizirane krivulje lahko določimo preprosto iz delnih površin krivulje:

$$w = \frac{1200\,\mathrm{A/m}\cdot 1\,\mathrm{T}}{2} + 1200\,\mathrm{A/m}\cdot 0{,}1\,\mathrm{T} + \frac{600\,\mathrm{A/m}\cdot 0{,}1\,\mathrm{T}}{2} = \underline{\underline{750\,\mathrm{J/m^3}}}$$

SLIKA: Odsekoma zvezna magnetilna krivulja in gostota energije kot površina med histerezno krivuljo in B osjo.

Izgube v jedru. Energija, vložena v grajenje magnetnega polja v nelinearni magnetni strukturi je nepovratna. Potrebna je za obračanje t.i. Weissovih obsegov, pri čemer pride do (mehanskega) trenja. Če je tok v ovojih na jedru izmeničen in »prehodi« histerezno krivuljo *f* krat na sekundo (frekvenca signala), bo gostota izgubne moči enaka

$$p_{hist} = f \cdot A_{zanke} \tag{13.14}$$

celotna histerezna izgubna moč pa bo enaka gostoti moči pomnoženi z volumnom materiala[4]

$$P_{hist} = p_{hist} \cdot V \ . \tag{13.15}$$

Opozorilo: A_{zanke} predstavlja gostoto energije, enota je $\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{T} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right]$, V predstavlja volumen [m^3].

Primer 5: Določite histerezno izgubno moč jedra prostornine 120 cm^3, katerega magnetilna krivulja je na sliki. (Je v obliki kvadrata z Br = 1,5 T in Hc = 2000 A/m) Vzbujalni signal ima frekvenco 50 Hz.

SLIKA: Histezna zanka določena z Br in Hc.

Izračun: Površina histerezne zanke je 4 1,5T 2000 A/m = 12000 J/m^3. To je gostota magnetne energije, ki je potrebna za magnetenje jedra. Gostota izgubne moči je po enačbi (13.14) 50s^{-1} 12000 J/m^3=6 10^4 J/(s m^3), celotna moč histereznih izgub pa 120 10^{-6} m^3 6 10^4 J/(s m^3)=7,2 W.

Določevanje induktivnosti iz magnetne energije. Enačba (13.1) je primerna tudi za določevanje lastne induktivnosti. Pri enosmernem toku skozi vodnik je magnetna energija v prostoru enaka

$$W = \frac{LI^2}{2} \tag{13.16}$$

Če znamo določiti magnetno energijo, ki jo v prostoru povzroča tok v vodniku, lahko iz energije določimo induktivnost kot

[4] V praksi se običajno histerezne izgube računa po formuli $k_h f B^2$ [W/kg], kjer je kh konstanta. Za več informacij o načrtovanju transformatorjev in dušilk priporočam priročnik F. Mlakar, I Kloar: Mali transformatorji in dušilke, Elektrotehniški vestnik, 1970. (na razpolago v knjižnici FE). V praktičnih formulah pogosto namesto kvadrata Bja nastopa lahko tudi različen factor, tako recimo Steinmetzova formula vzame za eksponent vrednost 1,6, konstanta kh pa npr. 0,0002 za mehko železo in 0,003 za jeklo. (M.A. Plonus: Applied Electromagnetics). Poleg histreznih izgub lahko nastopajo še izgube zaradi vrtinčnih tokov. Te so za prevodne feromagnetike običajno sorazmerne kvadratu gostote pretoka in kvadratu frekvence.

$$L = \frac{2W}{I^2}. \qquad (13.17)$$

Kako pa izračunamo magnetno energijo? Iz poznavanja gostote magnetnega pretoka v strukturi. Določimo gostoto energije po enačbi $w = \frac{B^2}{2\mu}$ in jo integriramo po volumnu:

$$W = \int_V w \cdot dV \qquad (13.18)$$

Ta zapis je posebno primeren tedaj, ko je težko določiti fluks skozi ploskev. Tak primer so polni vodniki, ki imajo magnetno polje tudi v notranjosti vodnika in ne le v zunanjosti. Torej je tudi v notranjosti vodnika določena magnetna energija, ki prispeva k celotni induktivnosti vodnika.

Primer 6: Določimo induktivnost na enoto dolžine za notranjost (okroglega) vodnika polmera 1,5 cm. Vodnik je iz neferomagnetnega materiala.
Najprej z uporabo Amperovega zakona določimo gostoto pretoka v notranjosti in dobimo $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r$ (glej poglavje o Amperovem zakonu). Nato zapišemo gostoto energije znotraj vodnika v skladu z enačbo (13.9): $\frac{B^2}{2\mu_0} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r\right)^2 \cdot \frac{1}{2\mu_0}$. Gostoto energije je potrebno integrirati po celotnem volumnu vodnika $W = \int_V w \cdot dV = \int_0^{r_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r\right)^2 \cdot \frac{1}{2\mu_0} \cdot (2\pi r \cdot dr \cdot l) = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$, kjer je l dolžina vodnika. Induktivnost znotraj vodnika dobimo z uporabo enačbe (13.17), ki je na enoto dolžine enaka $L = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$.

Dodatno: Določimo še preostalo induktivnost vodnika.
Polje je tudi izven vodnika, kar je seveda tudi potrebno upoštevati pri induktivnosti vodnika. Jakost polja izven vodnika je $H = \frac{I}{2\pi r}$, gostota energije je torej $w = \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2$, celotna energija pa $W = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 \cdot l \cdot 2\pi r \cdot dr = k \cdot \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} = \infty$. Dobimo rezultat, s katerim prav gotovo ni nekaj v redu. Pa vendar, rezultat je smiseln, če je smiseln tudi neskončen vodnik. Neskončen vodnik pa je

le koncept, ki nam poenostavi razumevanje polja, saj zelo dolg vodnik v svoji okolici povzroča polje, ki ni dosti drugačno, kot bi ga povzročal neskončen vodnik. Se pa zaplete pri določenih izračunih, kjer postane neskončnost problematična, kot je na primer računanje fluksa ali energije v neskončni okolici vodnika. Rešitev je v upoštevanju realnih primerov, kjer mora biti vodnik zaključen, da lahko v njem teče tok. Tak je primer dvovoda, ki smo ga že obravnavali v poglavju o magnetnem pretoku, kjer smo izračunali induktivnost med dvovodoma. Lahko pa induktivnost takega dvovoda obravnavamo tudi iz izraza za energijo, kjer je potrebno namesto integracijo do neskončnosti integrirati od polmera vodnika do sredine drugega vodnika. Dobimo

$W=\int_{r_0}^{r_0}\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2\cdot l\cdot 2\pi r\cdot dr=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_{r_0}^{d}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{d}{r_0}$ in $L=\frac{2W}{I^2}=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{d}{r_0}$. S tem smo upoštevali šele en vodnik. Za celotno induktivnost dvovoda moramo upoštevati fluksa obeh vodnikov, skupni rezultat še z induktivnostjo v notranjosti vodnika bo

$L_{dvovoda}=\frac{\mu_0 l}{4\pi}+\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{r_0}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4}+\ln\frac{d}{r_0}\right)$.[5]

Magnetna sila. Ko nas zanima sila med poloma magneta, v zračni reži magneta ali pa med dvema vodnikoma s tokom, moramo ločiti dva primera:

1) ko ni virov, ki bi dovajali energijo v sistem. Tedaj bo X komponenta sile enaka

$$F_x=-\left.\frac{\partial W_m}{\partial x}\right|_{\Phi=konst} \tag{13.19}$$

ali v splošnem

$$\vec{F}=-\left.\left(\frac{\partial W_m}{\partial x},\frac{\partial W_m}{\partial y},\frac{\partial W_m}{\partial z}\right)\right|_{\Phi=konst}, \tag{13.20}$$

kjer je ∂W sprememba energije shranjene v magnetnem polju. Mehansko delo bo v tem primeru zmanjšalo magnetno energijo. Tipičen primer je trajni magnet.

2) Ko je vir priključen in konstanten bo X komponenta enaka

$$F_x=\left.\frac{\partial W_m}{\partial x}\right|_{I=konst}. \tag{13.21}$$

---

[5] Rezultat je pravilen, čeprav je bil izračun induktivnosti izven notranjosti vodnika nekoliko poenostavljen. Bolj poglobljena analiza upošteva razdelitev vodnika na splošne zanke in izračun povprečnega pretoka med dvovodoma. (Glej na npr. A.R: Sinigoj: Osnove elektromagnetike) Končni rezultat pa je enak, kot ta, ki smo ga navedli.

V tem primeru pa bo opravljeno mehansko delo rezultiralo v povečanju magnetne energije, ki bo "prišla" iz vira(ov). Tipičen primer je elektromagnet.

Vzemimo trajni magnet z režo razdalje x in preseka A v smeri osi X. Magnetna energija v zračni reži je $W_\delta = \frac{B_\delta^2 Ax}{2\mu_0}$. Pri tem smo predpostavili, da v zračni reži ni stresanja polja. Silo dobimo z odvajanjem energije po x-u: $F_x = -\frac{\partial W_\delta}{\partial x} = -\frac{B_\delta^2 A}{2\mu_0}$. Predznak pomeni predvsem to, da bo energija sistema po opravljenem mehanskem delu manjša kot pred tem. Sila med poloma je vedno taka, da ju vleče skupaj, kar velja tudi za sistem magnet –feromagnetik. V tem primeru pride do analognega procesa kot pri električni indukciji. Na strani feromagnetika, ki je bliže severnemu polu magneta, se inducira južni pol (usmerijo se magnetni dipolni momenti), kar pomeni, da se trajni magnet in feromagnetik privlačita. Poseben primer so diamagnetiki, ki bi se odbijajo od magnetov[6].

Primer 7: Magnetno jedro E oblike na skici (a = 5 cm, A = 1 cm2) z μr = 1000 ima magnetilno tuljavo na srednjem stebru. Določimo težo pločevine, ki jo še lahko drži elektromagnet, če je v N = 200 ovojih tok 1,2 A. Magnetno upornost pločevine zanemarimo, zaradi hrapavosti površine pa upoštevamo 50 μm dolžine zračne reže.

<u>Izračun:</u> Narišemo magnetno vezje in določimo fluks v srednjem stebru. Dobimo

$$\Phi_2 \cdot \frac{(R_m + R_\delta)}{2} = NI$$

$$\Phi_2 = \frac{2NI}{\frac{2a}{\mu_r \mu_0 A} + \frac{\delta}{\mu_0 A}} = 402\,\mu\text{Wb}.$$

Upoštevati moramo silo v vseh treh zračnih režah, formulo za silo v zračni reži pa zapišemo s fluksom $F = \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 A}$. Upoštevamo še, da je v stranskih stebrih fluks 2x manjši od tistega v srednjem stebru in dobimo $F = \frac{1}{2\mu_0 A}\left(2\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right) = \frac{\Phi_2^2}{2\mu_0 A} = 1287\,\text{N}$. To silo izenačimo s silo teže in dobimo $m = \frac{1287\,\text{N}}{9{,}8\,\text{m/s}^2} \cong 131\,\text{kg}$.

[6] Odboj je neodvisen od postavitve diamagnetika in omogoča lebdenje (levitacija) diamagnetnega materiala. Ker pa so ti efekti zelo šibki, so za opazovanje lebdenja potrebna zelo velika polja, ki jih običajno dosežemo z superprevodnimi magneti.

SLIKA: Gostota energije je pomemben podatek za izbiro trajnih magnetov. Največjo energijsko vrednost imajo Nd-Fe-B in Sm-Co. V končni fazi je seveda izbira materiala odvisna od razmerja med ceno in učinkom.