

## BIOT-SAVARTOV ZAKON (2)

Polje, ki ga v okolici povzroča neskončen raven vodnik smo že zapisali, ko smo obravnavali silo med dvema ravnima vodnikoma. To polje je  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ . To enačbo in druge, za poljubno obliko vodnika s tokom lahko izračunamo z uporabo Biot-Savartovega zakona.

Polje, ki ga tokovni element  $I \cdot d\vec{l}$  povzroča v točki  $T$  je:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin(\theta)}{r^2} \quad (2.1)$$

kjer je  $r$  razdalja od tokovnega elementa do točke  $T$ ,  $\theta$  pa je kot med vektorjema  $d\vec{l}$  in  $\vec{r}$ .

Ta enačba dá le velikost polja, ne pa tudi smeri. Smer polja je pravokotna na ravnino, ki jo določata vektorja  $d\vec{l}$  in  $\vec{r}$ , kar lahko zapišemo z vektorskim produktom

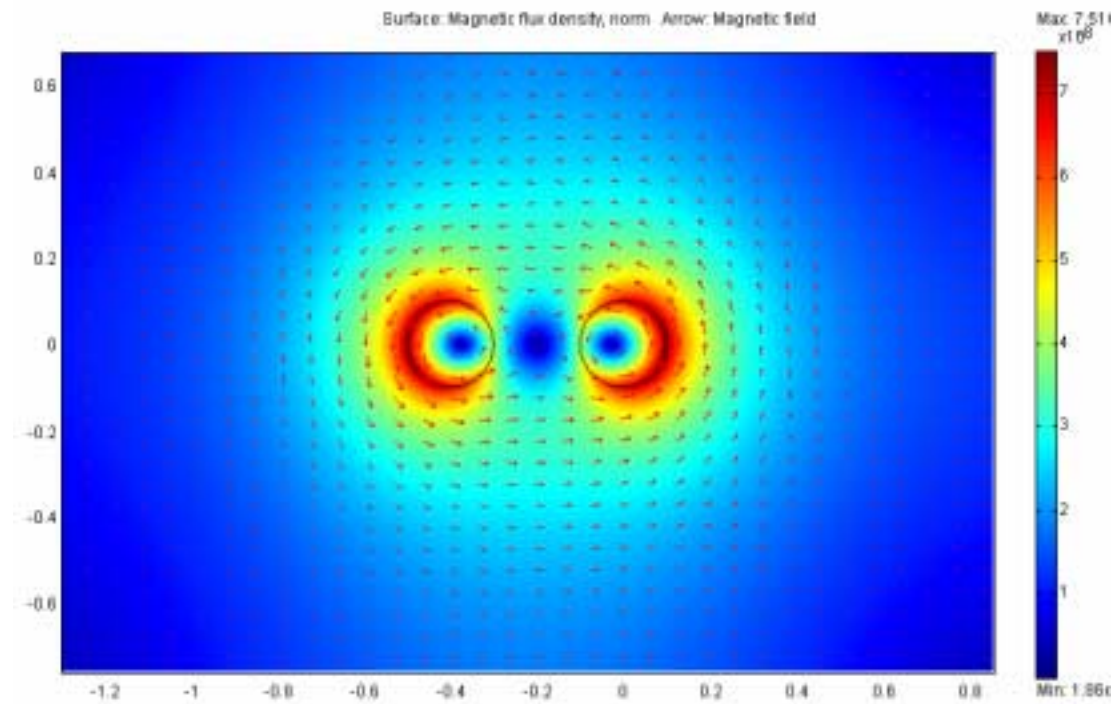
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (2.2)$$

**SLIKA: Tokovni element oddaljen od točke  $T$  za razdaljo  $r$  povzroča v točki  $T$  gostoto magnetnega pretoka, določeno z Biot-Savartovim zakonom.**

Da bi določili polje v točki  $T$  za celotni tokovodnik, je potrebno sešteti (integrirati) prispevke vseh tokovnih elementov:

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2.3)$$

To je Biot-Savartov zakon za izračun polja v okolici tokovodnika.



**SLIKA: Polje v okolici dveh polnih vodnikov s tokom enake velikosti.**

**Vprašanja:**

- V katero smer teče tok v levem in desnem vodniku?
- Kolikšno je polje v sredini med vodnikoma?
- Kje je polje največje?
- Določite smer polja na simetrali med vodnikoma?
- Skiciraj polje na simetrali in vzdolž premice, ki gre skozi središči vodnikov.
- Kakšna bi bila oblika polja pri spremenjeni smeri toka v enem vodniku?

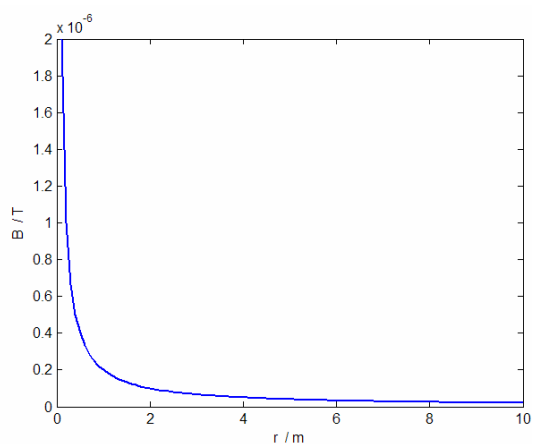
## PRIMERI IZRAČUNOV POLJA Z UPORABO BIOT-SAVARTOVEGA ZAKONA

**Primer 1:** Izpeljimo izraz za polje v okolici tokovne premice. ....

SLIKA IN IZPELJAVA. Rezultat je  $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

RAZLOŽI SMER POLJA Z VEKTORSKIM PRODUKTOM IN Z UPORABO DESNE ROKE, KJER PALEC USMERIMO V SMER TOKA, PRSTI KAŽEJO SMER POLJA OKOLI VODNIKA.

Primer uporabe programa Matlab za izračun polja v okolici tokovne premice s tokom 1 A.

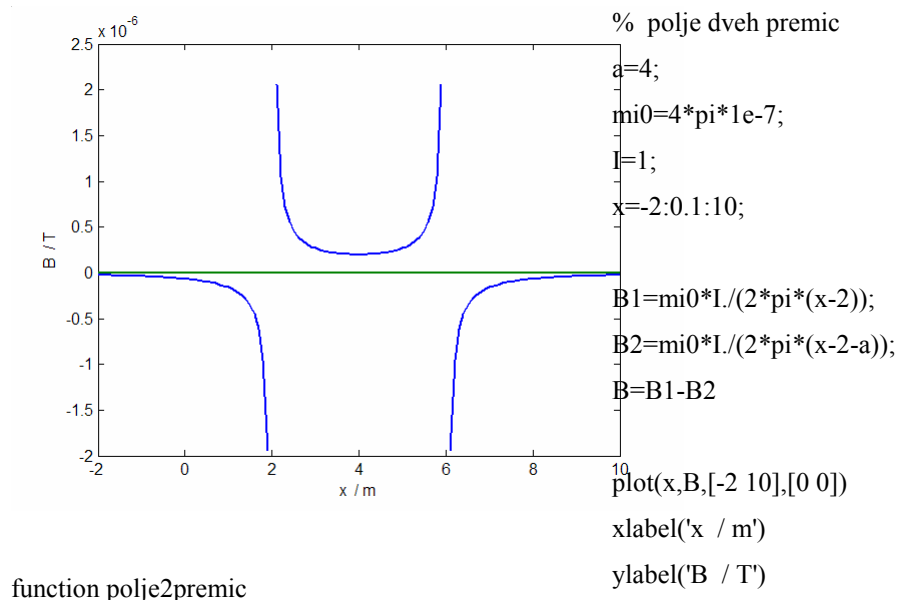


```
function poljepremice
% polje tokovne premice
mi0=4*pi*1e-7
I=1
r=0:0.1:10
B=mi0*I./(2*pi*r);
plot(r,B)
xlabel('r / m')
ylabel('B / T')
```

**Primer 2:** Izpeljimo izraz za polje tokovne daljice.

Rezultat je  $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$ . SLIKA.

**Primer 3:** Narišimo polje v oddaljenosti od dveh premih vodnikov s programom MATLAB. Iz slike določite smer, pozicijo in velikost tokov!



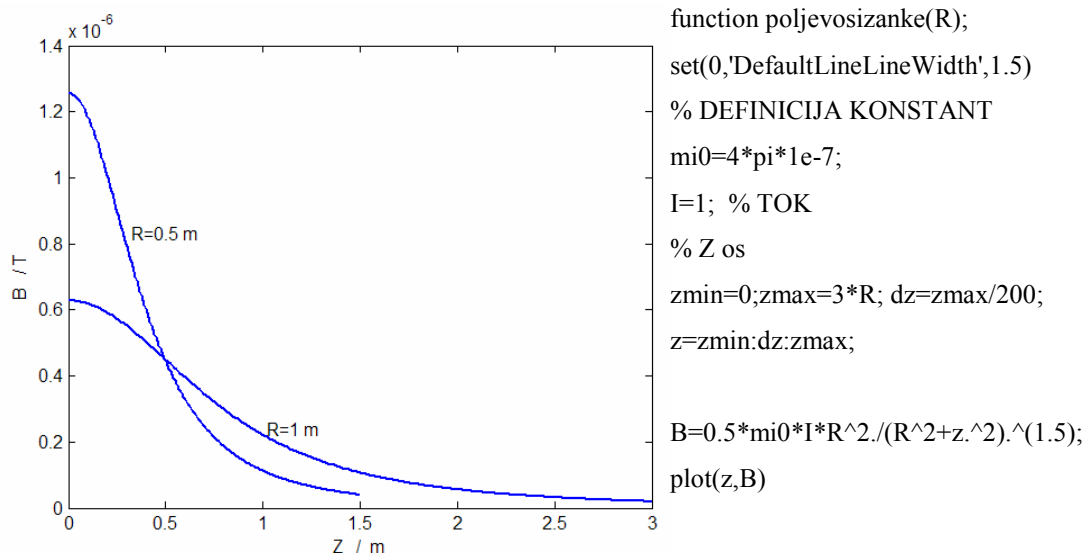
**Primer 4:** Izpeljimo izraz za B v središču tokovne zanke: ....

SLIKA IN IZPELJAVA. Rezultat je  $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2a}$ .

**Primer 5:** Izpeljimo polje v osi tokovne zanke.

SLIKA IN IZPELJAVA. Rezultat je 
$$\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Primer uporabe programa Matlab za izračun polja v osi zanke. Funkcija je uporabljena 2x, z radijem 1 m in 0,5 m. Vmes smo uporabili ukaz hold on (poljevosizanke(1); hold on; poljevosizanke(0.5))

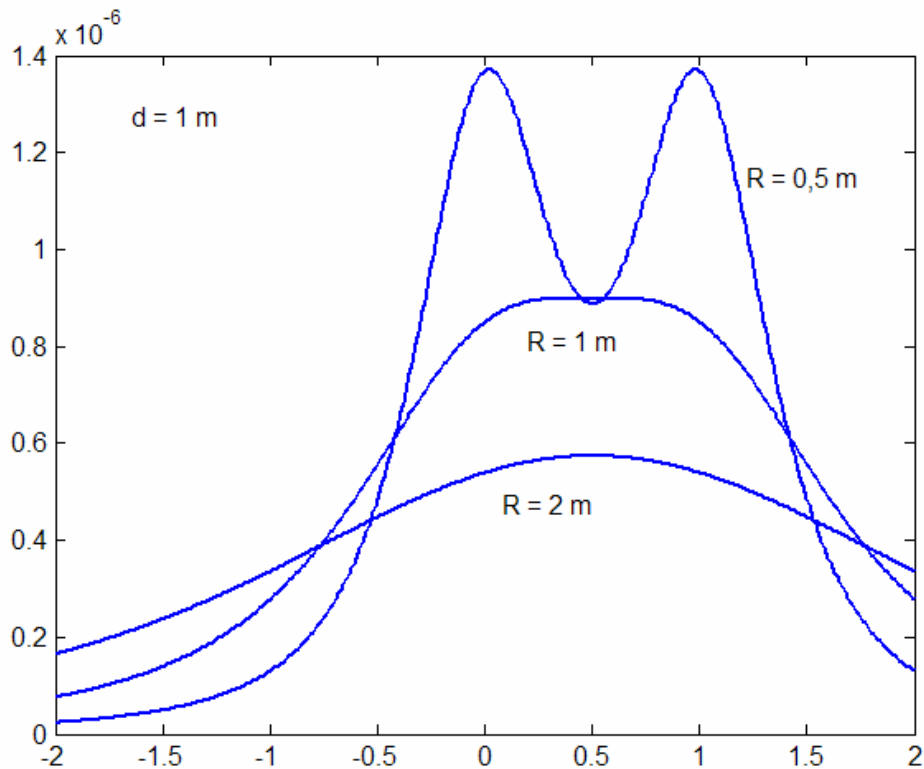


### Polje izven osi tokovne zanke

Polje izven osi tokovne zanke ni enostavno izpeljati in tudi rezultat ni preprost. Je pa pomemben, zato ga vseeno zapišimo vsaj v poenostavljeni obliki, ki velja za večje razdalje od zanke (recimo za razdalje dosti večje od polmera zanke) in je v sferičnih koordinatah:

$$\vec{B} = \vec{e}_r \cdot B_r + \vec{e}_\theta \cdot B_\theta = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3} (\vec{e}_r \cdot 2 \cos(\theta) + \vec{e}_\theta \cdot \sin(\theta)). \quad (2.4)$$

Dobimo tako komponento v smeri radija kot kota. Pomembno je, da polje pada z razdaljo s tretjo potenco, tako kot električno polje v oddaljenosti od električnega sdipola.



**Slika: Primer izračuna polja para v osi vzporednih tokovnih zank oddaljenih za 1 m. Polmeri zank so 2m, 1 m in 0,5 m. Tok je 1 A. Dokaj homogeno polje se utvari v sredini tuljave.**

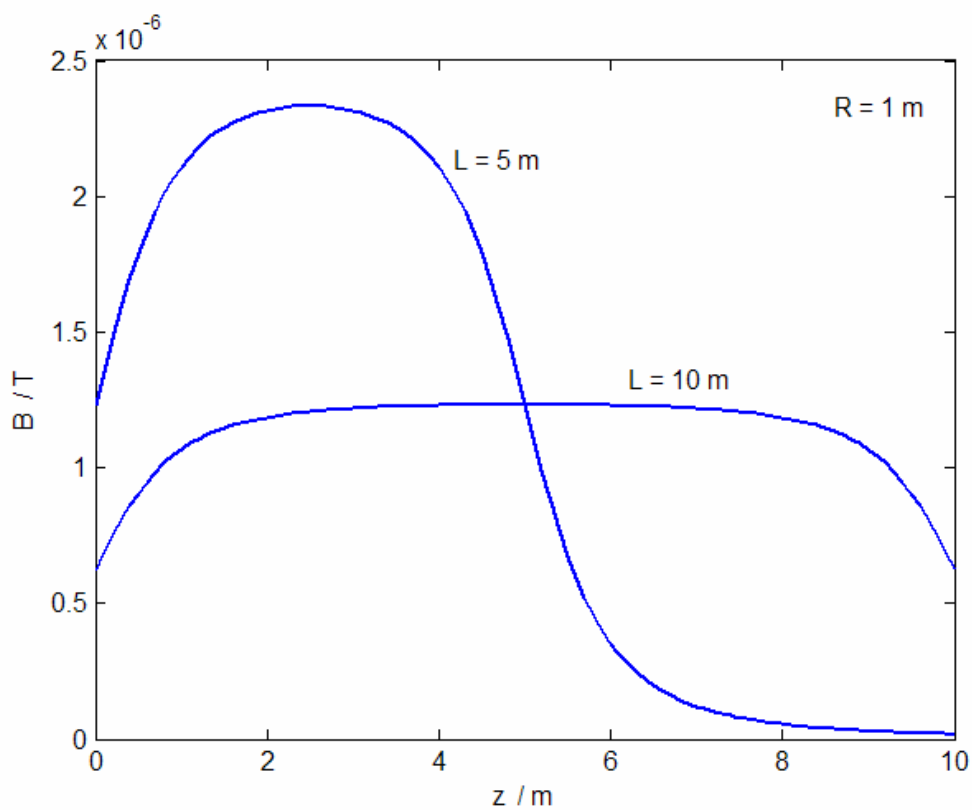
```
function poljedvehzank;
I=1; R=2; d=1;
set(0,'DefaultLineLineWidth',1.5)
% DEFINICIJA KONSTANT
mi0=4*pi*1e-7;
xmin=-2*d;xmax=2*d; dx=xmax/200;
x=xmin:dx:xmax;
B1=0.5*mi0*I*R^2./(R^2+x.^2).^1.5);
B2=0.5*mi0*I*R^2./(R^2+(x-d).^2).^1.5);
B=B1+B2
plot(x,B)
```

**Primer 6:** Izpeljimo izraz za polje ravne tuljave – solenoida.

SLIKA in IZPELJAVA. Rezultat je  $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 NI}{2l} (\cos(\beta_1) + \cos(\beta_2))$ .

**Primer 6b:** Določimo polje v sredini solenoida polmera 0,5 cm s tokom 0,1 A in 200 ovoji.

SLIKA IN IZPELJAVA. POENOSTAVITVE ZA POLJE V SREDINI ALI NA ROBU TULJAVE



**Slika:** Polje v osi solenoida s tokom  $NI = 10$  A, polmera ovojev 1 m in dolžine 5 m in 10 m. Začetek tuljave je pri  $z = 0$  m.

**Primer 7:** Iz enačbe za solenoid zapišimo še enačbo za toroid.

**POVZETEK:**

1. Iz enačbe za silo med dvema tokovnima elementoma ugotovimo, da nastopa člen  $\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin(\theta)}{r^2}$ , ki ga poimenujemo gostota magnetnega pretoka. Popolni izraz za gostoto magnetnega pretoka predstavlja Biot-Savartovega zakon in vsebuje vektorski produkt tokovnega elementa in vektorja  $r$  in integracijo po tokovnih elementih:  $\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$ . (Vprašanja: Kam kaže vektorski produkt? Kako ga izračunamo? Kaj pomeni integracija po tokovnih elementih?)
2. Polje v okolici tokovne premice je  $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ . Polje v okolici tokovne premice je rotacijsko, smer polja določimo iz vektorskega produkta  $d\vec{l} \times \vec{r}$  ali z ovijanjem prstov desne roke, če tok kaže v smeri palca.
3. Polje tokovne daljice je  $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$ . (Razloži  $r$  in kot theta. Skica.)
4. Polje v središču tokovne zanke je  $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2a}$ . (Kaj je  $a$  in kam kaže polje glede na smer toka v zanki in izbiro koordinatnega sistema?)
5. Polje v osi tokovne zanke je  $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$ . (Kje je največje? V katero smer kaže? Skiciraj potek.)
6. Polje v osi ravne tuljave – solenoida je  $\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 N I}{2l} (\cos(\beta_1) + \cos(\beta_2))$ . (Kaj je  $l$ , kako določimo kote, poenostavitev enačbe v primeru zelo dolgega solenoida.)



**Naloge:**

izpit, 17. septembra 2002

izpit, 16. aprila 2002

izpit, 4. 12. 2001

izpit, 20. september 2006

izpit, 31. avgust 2006

izpit, 19. september 2005

izpit, 3. 12. 2001

izpit, 30. avgust 2005

Izpit 26. 6. 2002

Izpit 4. 9. 2003

1. kolokvij, 17.4.2002

1. kolokvij, 9. maj 2005

izpit, 20. september 2004

Izpit, 17. 01. 2002

Prvi kolokvij, 9. maj 2002

**Dodatno: Primer numeričnega izračuna polja izven osi zanke.**

```

function [B]=polje(R, rc)
% funkcija izracuna polje krozne zanke
% polmera rc pri radiju R

if (R==rc)
    error('Pri polmeru zanke B ni definiran')
end
if (rc==0)
    error('Polmer zanke ne more biti enak 0')
end

mi0=4*pi*1e-7
I=10
k=mi0*I/(4*pi)

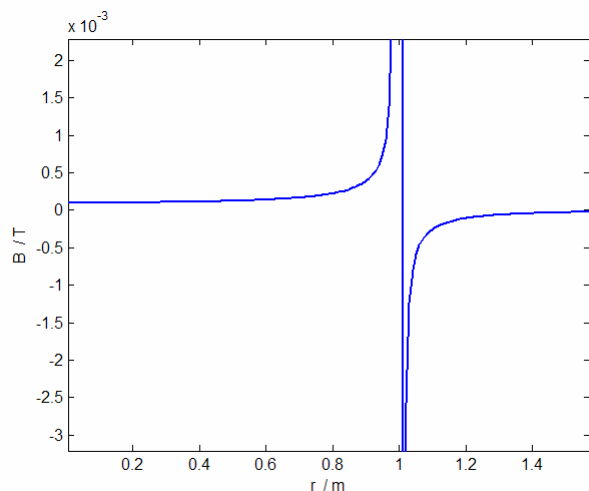
%R=0.1
function risipoljezanke(a)
% Narise polje tokovne zanke kot funkcijo radija od 0 do 2x polmera zanke
dr=1.01*a/100
r=0:dr:2*a;
BB=poljezanke(r,a);
plot(r,BB)

fi=0; N=100; B=0;
dfi=2*pi/N;
dBB=0;
for i=1:N
    fi=fi+dfi;
    r2=rc^2+R.^2-2*rc.*R*cos(fi);
    r=sqrt(r2);
    theta1=acos((rc^2+r2-R.^2)/(2*rc.*r));
    theta=pi/2+theta1;
    dB=k*sin(theta)./r2;
    % dBB=[dBB dB]
    B=B+dB;
end

%plot(dBB(2:N))
B0=mi0*I/(2*rc);

```

```
xmin=0; xmax=max(r); ymin=-100*BB(1); ymax=-ymin;  
axis([xmin xmax ymin ymax])
```

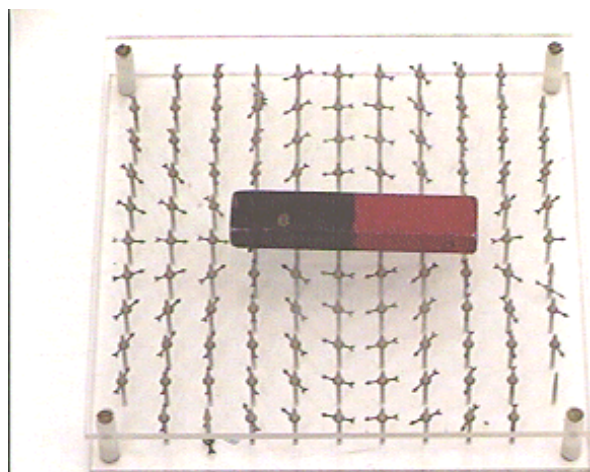
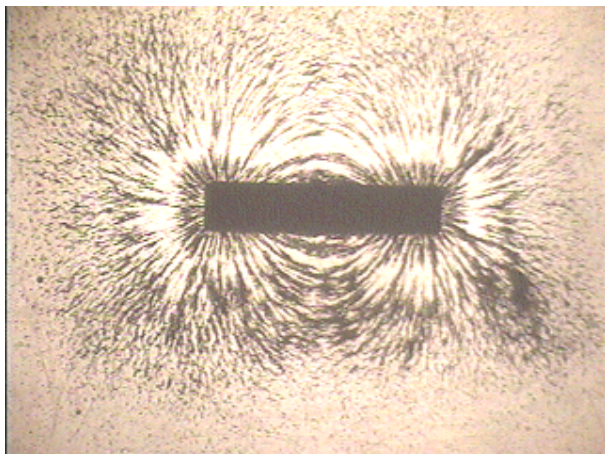


Slika: Polje izven osi zanke v ravnini zanke. Polmer zanke je 1 m.

## VIZUALIZACIJA MAGNETNEGA POLJA

Za dobro predstavo o magnetnem polju je zelo pomembna dobra vizualizacija polja v okolici virov (tokovodnikov ali trajnih magnetov). Poslužimo se lahko vrste postopkov:

- 1) smer opilkov
- 2) smer kompasa ali vrste kompasov
- 3) smer majhnih magnetkov
- 4) skeniranje z merilnikom magnetnega polja (Hallov sensor)
- 5) Numerično izračunavanja prispevkov toka in izris na zaslonu
  - a. Z vektorji, ki prikazujejo smer in velikost polja v določenih točkah
  - b. Z barvami in ekvipoljskimi črtami
  - c. 3D vizualizacija
  - d. Z gostotnicami
- 6) Numerično računanje z diskretnimi elementi (končne diference, končni elementi, mejni elementi)



**SLIKA:** Feromagnetni opilki se v bližini trajnega magneta usmerijo v smeri gostote magnetnega pretoka. (Zakaj?) Desno: Trajni magnetki se kot mali kompasi usmerijo v smer magnetnega polja. (Ali je tudi medsebojni vpliv med magnetki?)