3. Analiza vezij

Spoznali smo že oba Kirchoffova zakona in zvezo med tokom in napetostjo na uporu. Zaradi pomembnosti lahko ponovimo:

$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$ v spojišču

$\sum_{i=1}^{M} U_i = 0$ v zanki

$U = R \cdot I$ na linearnem uporu

S pomočjo teh zvez lahko analiziramo (določimo tok in napetost na poljubnem elementu vezja) poljubno vezje. Le zapisati moramo primerno število enačb in jih rešiti. Spoznali bomo tudi metode, ki nam omogočajo analizo vezij z manjšim številom enačb.

Najbolj tipične metode reševanja vezij so:

1) Metoda Kirchoffovih zakonov
2) Metoda zančnih tokov
3) Metoda spojiščnih potencialov

Lahko pa si pomagamo še z raznimi stavki, kot so:

1) Stavek superpozicije
2) Stavek Thevenina in Nortona
3) Stavek Tellegena
4) Stavek o največji moči

1) **Metoda Kirchoffovih zakonov**. Je najosnovnejša metoda, ki se (kot že ime pove) poslužuje uporabe osnovnih Kirchoffovih zakonov.

Način reševanja bomo prikazali na konkretnem primeru. Najprej moramo označiti smeri tokov v vsaki veji. Ta označitev je lahko poljubna, potrebno pa se je zavedati (kot smo že omenili!), da smer toka na uporu določa tudi smer napetosti. Za lažjo analizo bomo označili tudi spojišča vezja ter tudi tri zanke. Toka v veji s tokovnim virom nismo posebej poznačevali, saj lahko privzamemo kar smer toka generatorja.

Zapišemo lahko štiri enačbe z uporabo 1 KZ:

1 KZ:
spojišče (0): $-I_4 - I_3 - I_5 = 0$
spojišče (1): $I_g + I_1 + I_4 = 0$
spojišče (2): $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$

spojišče (3): $-I_2 - I_g + I_5 = 0$

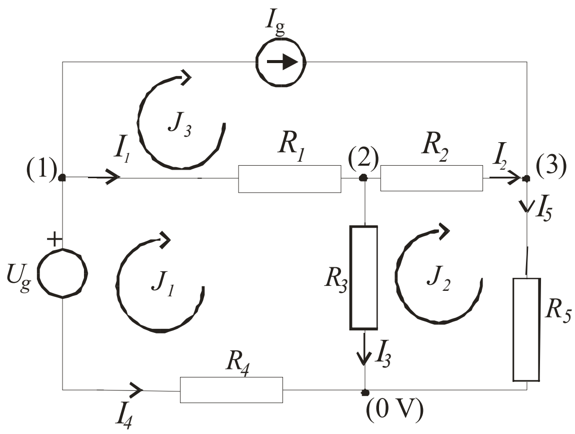
2 KZ:

zanka (J1): $-U_g + I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0$

zanka (J2): $-I_3 R_3 + I_2 R_2 + I_5 R_5 = 0$

zanka (J3): ne moremo zapisati zakona, ker ne moremo zapisati padca napetosti na tokovnem viru

Poglejmo število neznank in število enačb, ki smo jih zapisali. Število neznank je enako številu vejskih tokov, torej 5. Število enačb, ki smo jih zapisali pa je 6. Izkaže se, da je ena od enačb odveč, je redundančna. Izkaže se, da je odveč ena od enačb po 1 KZ. Izločimo lahko poljubno enačbo.



SLIKA: Primer vezja: U_g = 10 V, I_g = 2 A, R_1 = 20 Ω, R_2 = 5 Ω, R_3 = 10 Ω, R_4 = 1 Ω, R_5 = 40 Ω.

Reševanje takega sistema enačb zahteva sistematičen pristop. Pomagamo si lahko s teorijo grafov, kjer najprej narišemo t.i. **graf vezja**, označimo **drevo vezja** in **dopolnilne veje (kite)**. Graf vezja narišemo kot vezje, v katerem ostanejo le veje vezja. Drevo vezja sestavimo iz vej vezja, s katerimi moramo doseči vsa spojišča vezja pri tem pa ne smemo zaključiti nobene zanke. Veje, ki jih nismo uporabili za tvorjenje drevesa, so dopolnilne veje in jih dorišemo s črtkanimi črtami.

Število enačb, ki jih moramo zapisati po 1 KZ je enako številu spojišč – 1, število enačb po 2 KZ pa je enako številu dopolnilnih vej. V našem primeru bomo potrebovali 4-1 = 3 spojiščne enačbe in 2 zančni enačbi.

Sistem enačb se reši tako, da se jih uredi v matrično obliko: (upoštevali bomo spojiščne enačbe od (1) do (3))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ 0 \\ I_g \\ U_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Potrebno je še vstaviti vrednosti in rešiti matrični sistem enačb. V te namene pogosto uporabimo računalniške programe.

Sistem enačb rešimo s programom Matlab. Tvoriti moramo matriko A in vektor b ter rešiti sistem enačb tipa Ax=b. Rešitev dobimo z Matlabovim ukazom x=A\b.

```
>> A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;20,0,10,-1,0;0,5,-10,0,40]
A =
    1    0    0    1    0
   -1    1    1    0    0
    0   -1    0    0    1
   20    0   10   -1    0
    0    5  -10    0   40
>>b = [  -2 ;   0    ;2    ;10    ;0];
>> x=A\b
x =   -0.2243   -1.4953    1.2710   -1.7757    0.5047
```

Vejski toki so torej $I_1 = -0,2243$ A $I_2 = -1,42953$ A itd.

2) **Metoda zančnih tokov**, je metoda, s pomočjo katere lahko zmanjšamo sistem enačb, saj je število potrebnih zančnih enačb kar enako številu dopolnilnih vej.

Zančne toke tvorimo iz vejskih tako, da je ta v veji, ki ni skupna drugi (sosednji) zanki kar enak vejskemu toku, sicer pa je enak vsoti ali razliki vejskih tokov. Tako bo:

$J_1 = -I_4$

$J_2 = I_5$

$J_3 = I_g$

in

$I_3 = J_1 - J_2$

$I_2 = J_2 - J_3$

Če bi vejske toke vstavili v zgornje enačbe po 2 K.Z., bi dobili sistem zančnih enačb. Običajno je lažje napisati enačbe tako, da sproti upoštevamo padce napetosti v zanki:

zanka (J1): $-U_g + (J_1 - J_3)R_1 + (J_1 - J_2)R_3 - J_1 R_4 = 0$

zanka (J2): $(J_2 - J_1)R_3 + (J_2 - J_3)R_2 + J_2 R_5 = 0$

zanka (J3): $J_3 = I_g$

Dobimo sistem treh enačb za tri neznane toke. V resnici le sistem dveh, saj je tretja že določena: $J_3 = I_g = 2\,\mathrm{A}$.

Obstaja še drug pristop k tvorjenju zapisa, ki seveda privede do ekvivalentnega zapisa enačb. Pri tem najprej upoštevamo tok zanke in vse padce napetosti v zanki, nato prištejemo ali odštejemo še prispevke ostalih zančnih tokov.

$$J_1(R_1+R_3+R_4)-J_3R_1-J_2R_3-U_g=0$$
$$J_2(R_2+R_3+R_5)-J_1R_3-J_3R_2=0$$

Vstavimo vrednosti in rešimo enačbi:
$$J_1 31-2\cdot 20-J_2 10-10=0$$
$$J_2 55-J_1 10-2\cdot 5=0$$

Matlab: Reševanje s pomočjo programa Matlab je silno preprosto. Tvorimo matriko A in vektor b ter rešitev kot x=A\b'. Druga možnost je x=inv(A)*b'. Tokrat smo nekoliko drugače zapisali vektor b (kot vrstični vektor) kot v prejšnjem primeru. Zato ga je potrebno spremeniti (transponirati) z dodatkom '.

```
A=[31, -10; -10,55]
b=[50,10]
x=A\b
>> x =        1.7757    0.5047
```

Enačbi z dvema neznankama preprosto rešimo tudi tako, da iz ene enačbe izrazimo eno od spremenljivk in jo vstavimo v drugo enačbo. Npr. iz 1. enačbe izrazimo J_2 in dobimo J_2 = 0,1($J_1$31-50). Sedaj to vstavimo v drugo enačbo in dobimo 0,1($J_1$31-50)55-$J_1$10 = 10 in iz nje rezultat.

Rešitev je torej $J_1=1,7757\,\mathrm{A}$ in $J_2=0,5047\,\mathrm{A}$. Ugotovimo lahko, da je dobljeni tok J_1 skladen z rešitvijo, ki smo jo dobili po sistemu reševanja Kirchoffovih enačb: J_1 = -I_4.

3) **Metoda spojiščnih potencialov.** Metoda temelji na 1. KZ, pri kateri zapišemo vsoto tokov v spojišče. Pri tej metodi vsak tok zapišemo s potenciali spojišč, razen, če je tok v veji znan (tokovni generator). Označimo vsa spojišča in jim pripišemo neznane potenciale. Potencial enega spojišča lahko prosto izberemo. Ponavadi mu priredimo vrednost 0 V (ga ozemljimo). Toke v vejah zapišemo s potenciali tako, da določimo z njimi padec napetosti na uporu v veji.

Število potrebnih enačb je enako številu spojišč -1. V smislu sistematilnega pristopa bomo predpostavili, da vsi tokovi izhajajo iz spojišča (čeprav smo jih označili drugače).

Spojišče (1): Tok v tej veji določimo iz padca napetosti na uporu R4. Napetost na tem uporu pa je razlika potencialov spojišč (1) in (0). Ker smo spojišče (0) ozemljili, potencial spojišča (1) pa je V1, je tudi napetost med spojiščema enaka V1. Napetost na uporu R4 je manjša od V1 za padec napetosti na napetostnem viru, torej je enaka V_1-U_g, tok skozi upor R4 pa je $\frac{V_1-U_g}{R_4}$. Na podoben način določimo ostale toke. tako za spojišče (1) velja

$$\frac{V_1-U_g}{R_4}+\frac{V_1-V_2}{R_2}+I_g=0$$

Spojišče (2): Sedaj zopet predpostavimo toke iz spojišča in jih določimo:

$$\frac{V_2-V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_3}+\frac{V_2-V_3}{R_2}=0$$

Spojišče (3): $-I_g+\frac{V_3-V_2}{R_2}+\frac{V_3}{R_5}=0$

Dobimo sistem treh enačb za tri neznane potenciale. Vstavimo vrednosti in rešimo sistem enačb:

$$\frac{V_1-10}{1}+\frac{V_1-V_2}{20}+2=0$$

$$\frac{V_2-V_1}{20}+\frac{V_2}{10}+\frac{V_2-V_3}{5}=0$$

$$-2+\frac{V_3-V_2}{5}+\frac{V_3}{40}=0$$

```
>> A=[1+1/20,-1/20,0;-1/20,1/10+1/20+1/5,-1/5;0,-1/5,1/5+1/40]
A =
   1.0500  -0.0500        0
  -0.0500   0.3500  -0.2000
        0  -0.2000   0.2250
>> b=[-2+10;0;2]
b =
    8
    0
    2
>>V= A\b
ans = 8.2243   12.7103   20.1869
```

Potencial spojišča V_1 je torej 8,2243 V, V_2 je 12,71 V in V_3 = 20,1869 V.

Vejske toke določimo iz že zapisanih tokov, pri čemer pa je sedaj potrebno upoštevati vnaprej izbrano smer tokov. Tako je na primer tok I_1 enak $\frac{V_1-V_2}{R_2}=(8,224-12.71)/20=-0,2243\,\mathrm{A}$.

(Opozorilo: Zaradi preglednosti pisanja namenoma pri zapisu številskih vrednosti v enačbe nismo pisali tudi enot. Enačbe smo torej spremenili v matematično obliko. Ko določimo rešitev, pripišemo ustrezne enote).

Reševanje s pomočjo determinant:

Sistem enačb lahko rešimo tudi s pomočjo determinant in poddeterminant. Rešitev za neznanko V1 je $V_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}$, kjer je determinanta matrike A enaka

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1,05 & -0,05 & 0\\ 0,05 & 0,35 & -0,2\\ 0 & -0,2 & 0,225\end{vmatrix}=1,05(0,35.0,225-(-0,2)(-0,2))-(-0,05)(0,05.(-0,225)-(-0,2).0+$$

$$+0.(0,05.(-0,2)-(0,35).0))$$

$$\det(A)=0,0401\,.$$

Poddeterminanto pa dobimo tako, da prvo kolono matrike A nadomestimo z vektorjem znank (b):

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix}8 & -0,05 & 0\\ 0 & 0,35 & -0,2\\ 2 & -0,2 & 0,225\end{vmatrix}=0,330$$

$$V_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 8{,}22\,\mathrm{V}\ .$$

Stavek superpozicije. Ta stavek določa, da lahko poljubno vezje sestavljeno iz linearnih elementov z več viri poenostavimo tako, da analiziramo vezje z izmeničnim vklopom posameznih virov v vezje. Toke, katere izračunamo na tako poenostavljenem vezju na koncu seštejemo (superponiramo). V našem konkretnem primeru bi lahko določili toke v vejah vezja za dve poenostavljeni vezji. V prvem bi bil vklopljen le napetostni vir, v drugem pa le tokovni vir. Izklopljen napetostni vir predstavlja kratek stik, izklopljen tokovni vir pa odprte sponke.

SLIKA: Vezje nadomestimo z dvema enostavnejšima vezjema. V prvem vezju obdržimo le napetostni vir, tokovnega pa izklopimo (odprte sponke), v drugem vezju pa obdržimo tokovni vir in odklopimo napetostnega (nadomestimo s kratkim stikom).

Primer: Določimo tok I_4 s pomočjo metode superpozicije.

1. vezje: Ko izklopimo tokovni vir lahko vse upornosti združimo v eno (nadomestno) tako, da zaporedno seštejemo upora R_2 in R_5 ter nato obema vzporedno še R_3 ter nato vsem še zaporedno R_1 in R_4. Dobimo nadomestno upornost $R_{nad}=(R_2+R_5)||R_3+R_1+R_4=29{,}18\ \Omega$. Tok $I_{4(1)}$ = -10/25,44 A = -0.3427A. (Bodite pozorni, da je predznak toka negativen.)

2. vezje: Ko izklopimo napetostni vir, nam ostane vezje, pri katerem ne moremo preprosto seštevati upore. Zopet moramo uporabiti eno od metod za reševanje vezij. Vzemimo kar metodo zančnih tokov, ki se je za analizo konkretnega vezja izkazala kot zelo primerna in izračunajmo zančna toka. Razlika v že nastavljenih enačbah bo le ta, da sedaj nimamo napetostnega vira:

$$J_1 31 - 2\cdot 20 - J_2 10 = 0$$

$$J_2 55 - J_1 10 - 2\cdot 5 = 0$$

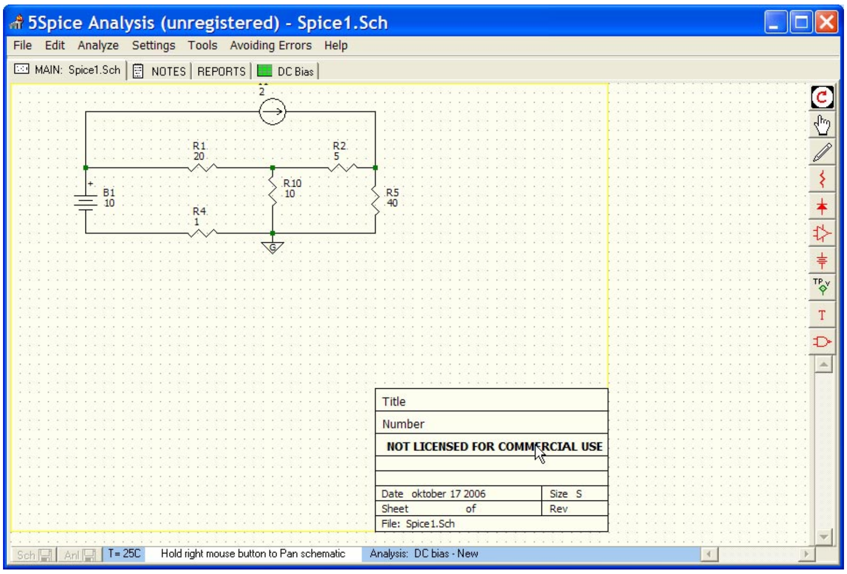
Izračun nam da vrednosti J_1 = 1,4330 A in J_2 = 0.4424 A. $I_{4(2)}$ je enak kar $-J_1$ in bo torej enak $I_{4(2)}$ = -1,4330 A .

Na koncu seštejemo obe vrednosti in dobimo
$I_4 = I_{4(1)} + I_{4(2)}$ = - 0,3427 A - 1,4330 A = -1.7757 A.
Ugotovimo lahko, da je rešitev enaka, kot smo jo dobili z uporabo metode Kirchoffovih zakonov.

Analiza vezij s programskim orodjem.

Pri bolj kompleksnih vezjih, še posebno, ko analiziramo vezja z nelinearnimi elementi, se lahko poslužimo analize vezij s programskimi paketi. En najbolj znan je zasnovan na Spice simulacijah. Na spletu je mogoče dobiti vrsto programov, ki temeljijo na Spice simulaciji. Poglejmo si primer uporabe programa 5Spice, ki ima tudi grafični vmesnik. Ta je še posebno koristen za popolne začetnike, saj ni potrebno poznati sintakse zapisov, pač pa le nekaj osnovnih pravil. Eno od teh je, da je potrebno eno od spojišč ozemljiti.
Lista s povezavo elementov vezja, ki smo ga analizirali je:

R4.1, R5.1, R10.2, Ground,
I1.2, B1.1, R1.2,
R1.1, R2.2, R10.1,
R2.1, I1.1, R5.2,
B1.2, R4.2,



SLIKA: Primer simulacije vezja s programom 5Spice.

Povzetek, vprašanja:

1) Zapišite in razložite Kirchoffova zakona. (glej tekst)
2) Kolikšno število enačb moramo zapisati za analizo vezja po metodi Kirchoffovih zakonov?
3) Kaj je to graf vezja, drevo in dopolnilne veje? Prikaži na primeru.
4) Kako zapišemo enačbe z uporabo metode zančnih tokov? Kolikšno je število potrebnih enačb za analizo vezja?
5) Kaj je to determinanta in poddeterminanta sistema, kako zapišemo sistem enačb v matrični obliki?
6) Na čem temelji metoda spojiščnih potencialov? Kako jo uporabimo? Kolikšno je potrebno število enačb po tej metodi?
7) Razložite stavek superpozicije. Ali ob izklopu vira iz vezja pustimo odprte sponke ali naredimo kratek stik?